宇宙学中量子态的经典相空间分布：一般态、算符排序与渐消非对易性的几何

Alejandro Corichi数学科学中心，墨西哥国立自治大学′，墨西哥国立自治大学莫雷利亚校区，莫雷利亚，米却肯州，墨西哥
corichi@matmor.unam.mx

arXiv:2611.31912v1 [gr-qc] 24 Nov 2026

摘要

在此前与 Ashtekar 和 Kesavan 的工作中，我们证明了，对于任意 FLRW 背景中的线性场，真空态在经典相空间上定义了一个概率分布 ρ_o，其矩恰好是 Weyl排序的 n点函数。我们从四个方向扩展了这一分析。首先，对于任意态 Ψ，我们在 Bargmann表示中给出了分布 ρ_Ψ 的显式公式，该分布再现所有 Weyl排序的期望值。对于纯态，该分布当且仅当态为相干态或压缩态时才是非负的；这两类态分别是某个相容 K¨ahler 度量的高斯分布，而使其变为正值所需的高斯平滑要么为零，要么等于完整的相干态宽度。其次，对于线性可观测量，任意算符排序与 Weyl排序之间的差异，都可由 c阶对易子的显式乘积表示。第三，对于纯高斯态中的两个线性可观测量，经典相关系数、对易子与反对易子的比值以及压缩，都是其哈密顿向量场之间单一角度的函数；这为任意排序的 n点函数偏离 ρ的矩的程度给出了界。第四，对于 FLRW 中的场，这一等式在任意可能不同的时刻成立，并且适用于每一个均匀各向同性准自由态。在德西特背景中，对于场和动量，非对易修正按 e^{-N} 衰减；对于两个时刻的场，则按 $e^{-3N}/3$ 衰减。对于从暴胀继承的态，这些修正在辐射时代仍受到抑制，其大小由占据数的倒数决定，但在模函数的节点¯附近除外。同样的压缩使相对于辐射时代真空态的模 $\pm k$ 发生纠缠，并使位移宇称测量违反贝尔不等式，因此，该正分布描述的是一组特定的可观测量，而不是所有测量。

目录

I 引言 **2**

II 单一自由度：自由度：一般态 4
A 设定 [1] .4B 任意态的分布.5C 哪些纯态具有经典分布 .6

D Bargmann密度所表示的内容 .8E 从分布到Bargmann密度：高斯平滑 .9F 相干态叠加 .10

III 超越Weyl排序 **10**
A 精确排序公式 .10B 三个概念，一个角度 .11C 任意排序的界 .13

IV FLRW时空中的场 **13**
A 协变相空间上的分布 .13B 单个模的非对易性、压缩与关联 .14C 德西特 .16D 暴胀之后：辐射时代 .17E 正分布无法捕捉的内容 .18F 评述.20

V 讨论 20

A 数值检验 22

I 引言

在宇宙学文献中，原初扰动呈现经典行为通常归因于暴胀期间线性微扰量子态的三个性质：量子非对易性的消退、量子态的强压缩，以及可以用经典相空间上的分布函数替代量子态 [2, 3, 4, 5, 6]。Agullo、Bonga 和 Ribes Metidieri 对这种解释中压缩的作用提出了质疑。他们认为，在一般的 FLRW 背景中，微扰的压缩与粒子产生一样具有歧义；一旦通过德西特空间的对称性解决这一歧义，暴胀并不会压缩微扰；并且只要可以忽略非高斯性，微扰就仍然是量子的 [7]。在 [1]，Ashtekar、Kesavan 和本文作者利用协变相空间上的几何结构，重新考察了一般 FLRW时空Γ 中解的辛结构 Ω、选择真空态的复结构 J 以及黎曼度量 $g(\phi_1, \phi_2) = \Omega(\phi_1, J\phi_2)$。我们发现，这三个概念在概念上彼此不同，暴胀对其中任何一个都不是必需的，而第三个概念以一种出人意料的强形式得以实现。在 Bargmann表示中，真空态 Ψ_o 对应于一个归一化分布 ρ_o，定义在 Γ上；场算符和动量算符的每一个 Weyl序多项式的真空期望值，都等于相应相空间函数相对于 ρ_o的经典期望值。相干态和压缩态也同样如此。

这一结果引 出了几个在 [1]，中尚未解决、而本文将要探讨的问题 .

(a)哪些态？除了相干态和压缩态，是否还存在其他态的分布？它如何从巴格曼波函数中得到？何时它才是真正的（非负）概率分布？当 Ψ 不是真空态时，巴格曼密度 $|\Psi|^2 \mathrm{d}\mu_B$ 本身代表什么？叠加态又会怎样？

(b)哪些序？量子预测与经典预测仅在未按 Weyl 排序的算符乘积上有所不同，而重排序项会随着 $\hbar \to 0$ [1] 趋于零。当 $\hbar$ 固定时，这些项能否精确表示？与经典矩相比，它们有多大？

(c) 这三个概念之间有何关联？在 [1]中，非对易性的衰减是通过对易子与反对易子的比值$R_{\varphi,\pi}$来衡量的，而压缩则通过哈密顿向量场 $X_{\varphi_{\vec{k}}}$ 和 $X_{\pi_{\vec{k}}}$ 的范数来衡量。二者在暴胀期间均会减小或增大，而 ρ_o 始终不变。这些量与 ρ_o 有关吗？

(d) 场。 n点函数的相等性是否适用于不同时刻的算符以及其他均匀各向同性态？暴胀结束后，当模重新进入哈勃半径时，又会发生什么？

我们的主要结果如下。

(i) 任意态的分布 （第 II节）。对于任意态 Ψ 在 Bargmann表示中，我们给出一个显式公式，即公式（2.8），用于表示实归一化函数 ρ_Ψ 在 Γ上，使得$\langle (\hat{x}^n \hat{p}^m)_W \rangle_\Psi = \langle x^n p^m \rangle_{\rho_\Psi}$对所有 m成立， n。它是 Ψ的 Wigner函数，直接写成在 [1]中所使用的表示形式。它是否为概率分布，则由生成函数 $\langle W(\lambda, \mu) \rangle_\Psi$的正值定性决定；仅用四个 Weyl算符进行有限检验，就已能检测出第一激发态不满足这一条件。

(ii) 正性 （第 II.C节）。 $\rho_\Psi \geq 0$ 对于纯态成立，当且仅当 $\Psi(\zeta) = C\, e^{\mathfrak{s}\zeta^2 + \beta\zeta}$，其中 $|\mathfrak{s}| < \frac{1}{2}$。因此， [1] 的相干态和压缩态穷尽了允许存在经典分布的纯态。每个这样的 ρ_Ψ 都是 K¨ahler度量 $g_\mathfrak{s}$ 的高斯 $\pi^{-1} e^{-g_\mathfrak{s}(\zeta-\zeta_c,\ \zeta-\zeta_c)}$，该度量与 Ω 相容，并以点 ζ_c 为中心， Γ属于 ζ_c。

（iii）*Bargmann*密度（第II.D节）。 $|\Psi|^2 \mathrm{d}\mu_B$ 对每个态都为正值，并且能够准确再现$\hat{a}$ 与$\hat{a}^\dagger$的反正规序乘积，见式（2.16）。它仅在真空态下与 ρ_Ψ 重合；对于相干态，两者的中心位于不同点。高斯平滑在二者之间进行插值（第II.E节）。对于纯态，使分布变为正值所需的平滑要么为零（对于高斯态），要么就是完整的相干态宽度：不存在介于两者之间的情况。

（iv）叠加态（第II.F节）。对于 $\Psi = \mathcal{N}(c_1 \Psi_{\zeta_1} + c_2 \Psi_{\zeta_2})$，我们给出了 ρ_Ψ 的闭式表达。它与相应混合态之间的差异是一个局域化的干涉项；对于任何在相空间中的分辨率粗于波包间距的可观测量而言，该项都是不可见的，见式（2.24）。

（v）任意排序（第III节）。对于线性可观测量 L_i，乘积 $L_1 \cdots L_n$ 等于对所有不相交配对集合求和：每一项都是半对易子的乘积，再乘以其余因子的 Weyl排序乘积，见式（3.1）。因此， ρ_Ψ 与 c数对易子决定了每一个期望值。

（vi）一个角度（第三节B）。对于纯高斯态中的两个线性可观测量 F、G，设 θ_{FG} 为 X_F 与 X_G 在该态的 K¨ahler 度量下的夹角。那么， F 与 G 在 ρ 中的相关系数为 cos θ_{FG}，其对易子的相对大小为 $|\sin\theta_{FG}|$， R 与 [1] 的比值为 $|\tan\theta_{FG}|$；对于一个正则对 $\|X_F\|\,\|X_G\| = 1/|\sin\theta_{FG}|$。对于一般态，不等式成立。因此，任意排序的 n 点函数与 ρ 的相应矩之间的偏离，都被 $|\sin\theta|$ 中最大者的一个显式倍数所界定，见公式（3.8）。

(vii) FLRW 中的场（第 IV 节）。分布 ρ_o 定义在协变相空间上，不随时间演化。时间依赖性由经典可观测量 $\varphi_{\vec{k}}(\eta)$ 和 $\pi_{\vec{k}}(\eta)$ 承载。因此，对于任意时刻（包括可能不同的时刻），无论是混合态还是纯均匀各向同性准自由态，Weyl 排序的 n点函数都与 ρ_o 的矩一致；这推广了 [1]的准自由真空态的等时结果。在德西特空间中，等时的 φ 和 π 对应的非对易修正相对大小为 $[1 + (aH/k)^2]^{-1/2} \simeq e^{-N}$，而 φ 在两个时刻的相对大小为 $\simeq e^{-3N}/3$，由此可得附录 A] 中 [1, 的双时比值闭式表达。在暴胀之后的辐射时代，若态继承自暴胀，则重新进入后其量级为$1/(4n_{\vec{k}})$，其中 $n_{\vec{k}}$ 是相对于辐射时代真空的占据数。例外是模函数节点周围相对宽度为 $\sim 1/(4n_{\vec{k}})$的区间。

(viii)未能捕捉到的内容 （第 IV.E 节）。在同一态中，模 $\pm\vec{k}$ 相对于辐射时代真空构成双模压缩真空态，其 $\sinh^2 r_k = n_{\vec{k}}$。它们的纠缠熵为 $\simeq 4N_k$，因此其量子互信息为 $\simeq 8N_k$。 ρ_o 的经典互信息以相同速率增长，但它是另一种量：该态的 Rényi-2 互信息´，晚期时比冯·诺依曼熵小 $2 - 2\ln 2$。位移宇称测量违反 CHSH 不等式，并趋近于 $8 \cdot 3^{-9/8} \simeq 2.32$。使线性可观测量呈现经典性的压缩，却让这些可观测量变得最大程度地¯非经典。模 $\pm k$ 是全局的；对于局域观察者能够访问的紧支撑场模，德西特空间的 Bunch–Davies 态所携带的纠缠少于闵可夫斯基真空态 [8, 9]。

其要旨可概括如下。存在一种经典分布，能够重现 Weyl 排序的 n 点函数，这是所有纯高斯态而非其他任何纯态所具有的性质。对于线性动力学，无论是否存在暴胀，该性质始终成立。暴胀使剩余的非 Weyl 排序信息变得可以忽略，而衡量这种可忽略程度的量 $|\sin\theta|$，是分布 ρ_o 本身的性质，可通过含时可观测量读取。在这个意义上， [1] 的三个概念在概念上仍彼此 distinct，但在定量上变得相互联系。

本文的组织如下。第 II 节采用[1, 第 V.A 节]中的记号讨论III 任意排序和几何角。第 IV 节转而讨论 FLRW时空中的场，包括德西特和辐射主导示例，并讨论¯正分布无法捕捉的模之间的关联 $\pm k$ 。第V节包含讨论。全文遵循 [1]的记号和约定，并将其中的方程称为，例如 [1, (5.15)]。

II 单个自由度：一般态

A Thesetting of [1]

我们采用 [1, 第 V.A 节]中的约定。本节及下一节中，我们令 $\hbar = 1$ ；物理单位按 [1, 备注（1），第 V.A 节]恢复。_ 正则算符满足 $[\hat{x},\ \hat{p}] = i$，且 $\hat{a} = (\hat{x} + i\hat{p})/\sqrt{2}$。相空间 $\Gamma = \mathbb{R}^2$ 带有复坐标 $\zeta = x + ip$、刘维尔测度 $\mathrm{d}\mu_L = \mathrm{d}x\mathrm{d}p$，以及归一化的 Bargmann 测度

$$\mathrm{d}\mu_B = \frac{1}{\pi}\, e^{-\zeta\bar{\zeta}}\, \mathrm{d}\mu_L. \tag{2.1}$$

态是全纯函数 $\Psi(\zeta)$，满足 $\langle\Phi,\ \Psi\rangle = \int_\Gamma \Phi(\zeta)\,\Psi(\zeta)\,\mathrm{d}\mu_B$，且

$$\hat{a}^\dagger\Psi(\zeta) = \zeta\,\Psi(\zeta), \qquad \hat{a}\Psi(\zeta) = \frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}\zeta}(\zeta). \tag{2.2}$$

真空态为 $\Psi_o(\zeta) = 1$，函数 $\Psi_n(\zeta) = \zeta^n/\sqrt{n!}$ 构成一组正交归一基，而再生性质

$$\int_\Gamma \overline{e^{\bar{c}\zeta}}\, h(\zeta)\,\mathrm{d}\mu_B = h(c) \tag{2.3}$$

对 Bargmann空间中的每个 h 和每个 $c \in \mathbb{C}$ 都成立。Weyl算符及其经典对应物为

$$\hat{W}(\lambda,\mu) = e^{i(\lambda\hat{x}+\mu\hat{p})} = e^{-\frac{1}{2}\bar{\alpha}\alpha}\, e^{-\bar{\alpha}\hat{a}^\dagger} e^{\alpha\hat{a}}, \qquad W(\lambda,\mu) = e^{i(\lambda x+\mu p)}, \qquad \alpha = \frac{\mu + i\lambda}{\sqrt{2}}, \tag{2.4}$$

以及 $\hat{W}(\lambda,\ \mu)\Psi(\zeta)\ = e^{-\frac{1}{2}\alpha\bar{\alpha}}e^{-\bar{\alpha}\zeta}\Psi(\zeta+\alpha)$。在原点处对 $\langle\hat{W}(\lambda,\ \mu)\rangle$ 求导，可生成 Weyl排序乘积的期望值 $(\hat{x}^n\hat{p}^m)_W$，即对 $\binom{n+m}{n}$ 个不同序的平均；而对 $\langle W(\lambda,\ \mu)\rangle_\rho$ 求导，则生成分布 ρ 的矩 $\langle x^n p^m\rangle_\rho$。对于真空态，$\langle\hat{W}(\lambda,\ \mu)\rangle_o = e^{-\frac{1}{4}(\lambda^2+\mu^2)}$，这与其中的经典期望值相一致

$$\rho_o = \frac{1}{\pi}\, e^{-\zeta\bar{\zeta}}, \qquad \int_\Gamma \rho_o \,\mathrm{d}\mu_L = 1, \tag{2.5}$$

因此 $\langle(\hat{x}^n\hat{p}^m)_W\rangle_o = \langle x^n p^m\rangle_{\rho_o}$ 对所有 m, n [1, (5.15)]。ρ_o 中的指数是 ζ 在度量 g 下的范数，该度量由 J 和 Ω 定义。在 [1] 中，我们已经证明相干态满足相同的等式；对于压缩态，则通过线性正则变换得到 $\Psi(\zeta)$。$= e^{\mathfrak{s}\zeta^2}$ 现在我们来考察任意态。

B 任意态的分布

[1] 中的论证只用到了两个生成函数相等这一事实。因此，对于一般的归一化态 Ψ，我们将 ρ_Ψ 定义为量子生成函数的傅里叶逆变换：

$$\rho_\Psi(x,p) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(\lambda x+\mu p)}\,\langle\hat{W}(\lambda,\mu)\rangle_\Psi \,\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}\mu. \tag{2.6}$$

这是 Ψ [10, 11, 12]的Wigner函数。本小节的要点是，它在Bargmann表示中有一个简单的表达式，因此可以为每个态构造 [1] 。

Prop命题 1. 设 Ψ 是*Bargmann*表示中的一个归一化态。那么 *:*

(a) ρ_Ψ 为实数，有界于 $|\rho_\Psi| \le 1/\pi$，且 $\int_\Gamma \rho_\Psi \,\mathrm{d}\mu_L = 1$;

(b) 对所有 λ、μ，$\langle W(\lambda,\mu)\rangle_\Psi = \langle W(\lambda,\mu)\rangle_{\rho_\Psi}$；因此

$$\langle(\hat{x}^n\hat{p}^m)_W\rangle_\Psi = \langle x^n p^m\rangle_{\rho_\Psi} \qquad for\ all\ m,n, \tag{2.7}$$

只要各阶矩存在；

(c) ρ_Ψ 由下式给出

$$\rho_\Psi(\zeta) = \frac{1}{\pi}\, e^{-\zeta\bar{\zeta}}\int_\Gamma \overline{\Psi(w)}\; e^{\sqrt{2}\,\zeta w}\; \Psi\big(\sqrt{2}\,\bar{\zeta} - w\big)\,\mathrm{d}\mu_B(w). \tag{2.8}$$

证明。令 $\hat{D}(\beta) = e^{\beta\hat{a}^\dagger - \bar{\beta}\hat{a}}$，并令 $\hat{\Pi}\Psi(\zeta) = \Psi(-\zeta)$ 为宇称算符。一个标准结论是，傅里叶逆变换 (2.6) 等于 $\pi^{-1}\langle\Psi,\ \hat{D}(\beta)\,\hat{\Pi}\,\hat{D}(\beta)^\dagger\Psi\rangle$，其中 $\beta = (x+ip)/\sqrt{2} = \zeta/\sqrt{2}$ 是 $\hat{a}$ 在峰值位于 ζ 的相干态上的本征值。由于 $\hat{D}(\beta)\,\hat{\Pi}\,\hat{D}(\beta)^\dagger$ 是自伴且幺正的，结合归一化可得 (a)，即 $\langle\hat{W}(0,0)\rangle_\Psi = 1$。(b) 即为傅里叶反演。对于 (c)，(2.2) 给出 $\big(\hat{D}(\beta)\Psi\big)(w) = e^{-\frac{1}{2}\beta\bar{\beta}}e^{\beta w}\Psi(w-\bar{\beta})$，因此

$$\big(\hat{D}(\beta)\hat{\Pi}\hat{D}(\beta)^\dagger\Psi\big)(w) = e^{-2\beta\bar{\beta}}\, e^{2\beta w}\,\Psi(2\bar{\beta}-w).$$

与 Ψ 取内积并令 $\beta = \zeta/\sqrt{2}$，得到（2.8）。 □

公式（2.8）利用（2.3）可以很容易地求得。对于真空态，积分等于一，从而恢复（2.5）。对于第一激发态 $\Psi_1 = \zeta$，积分是在 $w = 0$ 处对$e^{\sqrt{2}\zeta w}$（$\sqrt{2}\bar{\zeta} - w$）求导数，因此

$$\rho_{\Psi_1}(\zeta) = \frac{1}{\pi}\, e^{-\zeta\bar{\zeta}} \left(2\zeta\bar{\zeta} - 1\right). \tag{2.9}$$

等式（2.7）对 Ψ_1成立，但 ρ_{Ψ_1}在圆盘 $\zeta\bar{\zeta} < \frac{1}{2}$中为负，因此它不是概率分布。对于归一化相干态 $\Psi_{\zeta_o} = e^{-\frac{1}{2}\bar{\zeta}_o\zeta_o} e^{\zeta_o\zeta}$，将（2.3）应用两次可得

$$\rho_{\Psi_{\zeta_o}}(\zeta) = \frac{1}{\pi}\, e^{-(\zeta-\sqrt{2}\zeta_o)(\bar{\zeta}-\sqrt{2}\bar{\zeta}_o)}. \tag{2.10}$$

这是平移至点 $\zeta = \sqrt{2}\,\zeta_o$处的真空分布，在该点 Ψ_{ζ_o} 达到峰值 [1, (5.4)]。[1]由于 ρ_Ψ 关于投影算符是线性的 $|\Psi\rangle\langle\Psi|$，同样的构造也适用于混合态：密度算符 $\sum_i p_i|\Psi_i\rangle\langle\Psi_i|$ 的分布为 $\sum_i p_i\rho_{\Psi_i}$，且（2.7）中的 $\langle\cdot\rangle_\Psi$ 可替换为迹。

因此，[1]的构造可推广至每一种态：Weyl排序的期望值总是经典相空间上某个实归一化函数的矩。正性则并非自动满足。[1] 的生成函数论证已经包含了判据。根据博赫纳定理，[26]，ρ_Ψ 是概率分布，当且仅当 $\langle W(\lambda,\mu)\rangle_\Psi$ 是其特征函数；也就是说，当且仅当矩阵

$$M_{ij} = \left\langle \hat{W}(\lambda_j - \lambda_i, \mu_j - \mu_i)\right\rangle_\Psi \tag{2.11}$$

对于任意有限组点（λ_i, μ_i），它们都是半正定的。每个量子态都满足另一种带扭曲的条件。对于 $\hat{A} = \sum_j c_j \hat{W}(\lambda_j, \mu_j)$，$\langle \hat{A}^\dagger \hat{A}\rangle_\Psi$的正性保证了 $e^{\frac{i}{2}(\lambda_i\mu_j - \mu_i\lambda_j)}M_{ij}$的正性，而 Weyl 相位通常无法消去 [27]。因此，只需一次有限检验，就足以证明没有任何概率分布能够重现所有 Weyl 排序的期望值。对于 Ψ_1，$\langle W\ \lambda\ \mu\ \rangle = e^{-\frac{1}{4}\lambda^2+\mu^2}\left(1 - \frac{1}{2}\,\lambda^2 + \mu^2\ \right)$ $\pm\sqrt{3}\ 0-\ 0\ \pm\sqrt{3}$ – 2 11 ˆ (,) ( ) ( ) 。四个点 (,), (,) 给出一个矩阵 (.)，其特征值为 $1 - 4e^{-3/2} - 5e^{-3} \simeq -0.1415$，而扭曲后的矩阵是正的。等价地，非负函数 $[\cos(\sqrt{3}x) + \cos(\sqrt{3}p)]^2$ 在Ψ_1中的 Weyl 排序期望值为负。仅凭协方差无法发现这一点：Ψ_1 的协方差为 3 2 倍的单位矩阵，这也正是高斯概率分布——即热态的协方差。在此之前请注意，例（2.9）也阐明了 [1] 中的说法：在构型表象中，可以通过 $|\psi(x)|^2\sigma(p)$ 重现仅依赖于 $\hat{x}$ 的函数的期望值，其中 σ任意。一旦 $\hat{x}$ 和 $\hat{p}$ 都参与其中，该分布便是唯一的，因为式（2.6）由所有 Weyl 算符的期望值确定。当 ρ_Ψ 在某处为负时，没有任何概率分布能够重现所有 Weyl 排序的期望值。

C 哪些纯态允许经典分布

对于纯态，答案是完整的，并且表明 [1] 所考虑的情形并不只是示例。

定理 2. 对于 *Bargmann*表示中的归一化态 Ψ，$\rho_\Psi \geq 0$ 当且仅当

$$\Psi(\zeta) = C\, e^{\mathfrak{s}\zeta^2 + \beta\zeta}, \qquad \mathfrak{s}, \beta, C \in \mathbb{C}, \quad |\mathfrak{s}| < \tfrac{1}{2}. \tag{2.12}$$

[1]采用 [1, (5.4)], 的归一化，其中 $\langle\Psi_{\zeta_o}, (\hat{x} + i\hat{p})\Psi_{\zeta_o}\rangle = \sqrt{2}\,\zeta_o$，重现 [1, (5.17)]的分布以 $\sqrt{2}\,\zeta_o$为中心；等价地，ζ_o 在 [1, (5.16)] 中应理解为变量 ζ下波包的中心。

这就是哈德森定理 [16] (见 [17]关于多个自由度的情形)，以 [1]的 Bargmann语言表述。该表示下的证明尤为直观，因此我们在此回顾一下。设 $\rho_\Psi \geq 0$。Bargmann密度 $\pi^{-1}e^{-\zeta\bar{\zeta}}|\Psi(\zeta)|^2$是 ρ_Ψ的高斯平均，见下文式（2.17）；由于ρ_Ψ 非负且归一化，而高斯函数处处严格为正，因此该平均严格为正，所以 Ψ 没有零点。再生核给出 $|\Psi(\zeta)| \leq \|\Psi\|\, e^{\zeta\bar{\zeta}/2}$，因此 Ψ 是一个阶不超过二的整函数。根据 Hadamard因子分解定理，一个无零点且阶不超过二的整函数是次数不超过二的多项式的指数函数，这正是（2.12）。可归一化性要求 $|\mathfrak{s}| < \frac{1}{2}$。反过来，下面的命题 3 表明，每个这样的态都具有高斯分布，因此分布为正值。

命题 3。 对于 Ψ如 (2.12)，

$$\rho_\Psi(\zeta) = \frac{1}{\pi}\exp\big[-g_{\mathfrak{s}}(\zeta-\zeta_c,\zeta-\zeta_c)\big], \qquad g_{\mathfrak{s}}(\zeta,\zeta) = \frac{(1+4\mathfrak{s}\bar{\mathfrak{s}})\,\zeta\bar{\zeta} - 4\,\mathrm{Re}(\mathfrak{s}\bar{\zeta}^2)}{1-4\mathfrak{s}\bar{\mathfrak{s}}}, \tag{2.13}$$

中心为

$$\zeta_c = \frac{\sqrt{2}\,(\beta + 2\mathfrak{s}\bar{\beta})}{1-4\mathfrak{s}\bar{\mathfrak{s}}}. \tag{2.14}$$

二次型 $g_{\mathfrak{s}}$ 在坐标 (x,p)中是正定的，且行列式为 *1*。因此，对于一个与 Ω 相容的唯一复结构 $J_{\mathfrak{s}}$，有$g_{\mathfrak{s}}(u,v) = \Omega(u, J_{\mathfrak{s}}v)$，而 Ψ 是由 $J_{\mathfrak{s}}$定义的 *Bargmann*表示中的真空态经ζ_c 平移得到的。映射 $\mathfrak{s} \mapsto J_{\mathfrak{s}}$ 是从圆盘 $|\mathfrak{s}| < \frac{1}{2}$ 到与 Ω 相容的复结构集合的双射。

证明。由 $\mathfrak{s}' = 2\mathfrak{s}$，(2.2) 给出 $(\hat{a} - \mathfrak{s}'\hat{a}^\dagger)\Psi = \beta\Psi$。算符 $\hat{b} = (\hat{a} - \mathfrak{s}'\hat{a}^\dagger)/\sqrt{1-\mathfrak{s}'\bar{\mathfrak{s}}'}$ 满足$[\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = 1$，而 Ψ 是 $\hat{b}$的本征态，即 $\hat{b}$的相干态。求逆得 $\hat{a} = (\hat{b} + \mathfrak{s}'\hat{b}^\dagger)/\sqrt{1-\mathfrak{s}'\bar{\mathfrak{s}}'}$。由此得到 $\langle\hat{a}\rangle = (\beta + \mathfrak{s}'\bar{\beta})/(1-\mathfrak{s}'\bar{\mathfrak{s}}')$，从而得到 (2.14)，因为 $\zeta_c = \sqrt{2}\langle\hat{a}\rangle$。对于协方差，$\langle\hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle - |\langle\hat{a}\rangle|^2 = \mathfrak{s}'\bar{\mathfrak{s}}'/(1-\mathfrak{s}'\bar{\mathfrak{s}}')$ 且 $\langle\hat{a}^2\rangle - \langle\hat{a}\rangle^2 = \mathfrak{s}'/(1-\mathfrak{s}'\bar{\mathfrak{s}}')$，因此 $(\hat{x},\hat{p})$ 的对称化协方差矩阵为

$$V = \frac{1}{1-\mathfrak{s}'\bar{\mathfrak{s}}'}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}|1+\mathfrak{s}'|^2 & \mathrm{Im}\,\mathfrak{s}' \\ \mathrm{Im}\,\mathfrak{s}' & \frac{1}{2}|1-\mathfrak{s}'|^2 \end{pmatrix}, \qquad \det V = \frac{1}{4}.$$

$\hat{}$ 由于 Ψ 是关于 b 的相干态，而后者可通过线性正则变换与 $\hat{a}$ 相关，因此$\langle\hat{W}(\lambda,\ r - r_c\ ^{\mathrm{T}}V^{-1}\ r - r_c\ ]\qquad r = \ x\ p\qquad \frac{1}{2}V^{-1}\qquad \zeta\qquad g_{\mathfrak{s}}\qquad)\rangle_\Psi$ 是一个均值和协方差如上的高斯分布，其傅里叶变换为 $\pi^{-1}\exp[-\frac{1}{2}(\,)\,(\,)$，其中 $(,\ )$。用 表示可得 。 $\mathbb{R}^2$ 上行列式为 1 的正定二次型与 Ω 相容：若 G 是其矩阵， ω 是 Ω 的矩阵，则 $J = -\omega G$ 满足 $J^2 = -1$。反之，每个相容的复结构恰好由一个 $\mathfrak{s}$ 导出，因为 $\mathfrak{s} \mapsto V$ 将圆盘双射到行列式为 $1\ 4$ 的正定矩阵上。 □

对于 $\mathfrak{s} = 0$，我们得到相干态和（2.10）；对于 $\beta = 0$，则得到 $e^{\mathfrak{s}\zeta^2}$ 的压缩态 [1]，其分布以原点为中心。命题3 明确给出了 [1] 中所采用的线性正则变换。具有经典分布的纯态与以下二元组（J，ζ_c）一一对应：一个相容的 K¨ahler 结构，它确定高斯分布的形状；以及相空间中的一个点，它确定其中心。对于每种情况， ρ_Ψ 的指数都是到 ζ_c 的平方距离，所采用的是 K¨ahler 度量 g_J，与真空态的情形完全相同。

对于混合态，没有同样简单的分类。每个混合高斯态都有一个正分布，其协方差大于某个纯高斯态的协方差。也存在具有正分布的非高斯混合态；例如，$(1-\epsilon)|\Psi_o\rangle\langle\Psi_o| + \epsilon|\Psi_1\rangle\langle\Psi_1|$具有 $\rho = \pi^{-1}e^{-\zeta\bar{\zeta}}(1-2\epsilon+2\epsilon\,\zeta\bar{\zeta})$，当且仅当 $\epsilon \leq \frac{1}{2}$ 时为正值。关于系统性结果，请参阅 [18, 19]。

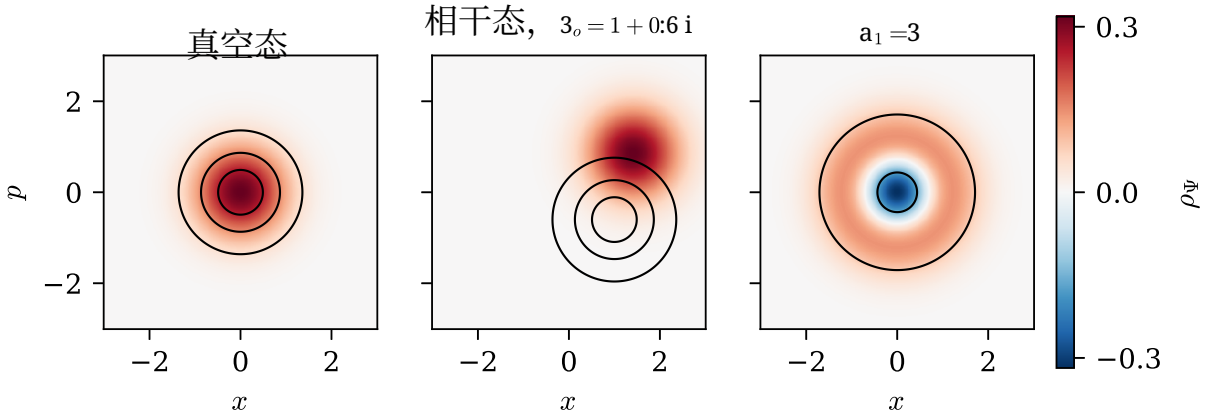


图1： 方程 ρ_Ψ （2.8）的分布（彩色）和 Bargmann密度 $B_\Psi = \pi^{-1} e^{-\zeta\bar{\zeta}} |\Psi|^2$ （黑色等高线取值为 0.05、0.15、0.25）在平面 $\zeta = x + ip$上。对于真空态，两者重合。对于相干态，它们是宽度相同的高斯分布，中心分别位于 $\sqrt{2}\zeta_o$ 和 $\bar{\zeta}_o$ 。对于 $\Psi_1 = \zeta$， ρ_Ψ 在原点附近为负，而 B_Ψ 在此处为零。

D Bargmann密度表示什么

在 [1] 分布 ρ_o 被引入为 Bargmann 测度的密度，即作为 $|\Psi_o|^2 \mathrm{d}\mu_B$相对于刘维尔测度的密度。对于其他态，Bargmann 密度

$$B_\Psi(\zeta) = \frac{1}{\pi} e^{-\zeta\bar{\zeta}} \, |\Psi(\zeta)|^2 \tag{2.15}$$

始终是概率密度，但它并不是 ρ_Ψ。不过，它确实能够精确再现另一组不同的期望值。

命题4. 对于每个归一化的 Ψ, $\int_\Gamma B_\Psi \, \mathrm{d}\mu_L = 1$，以及

$$\langle \Psi, \hat{a}^m (\hat{a}^\dagger)^n \Psi \rangle = \int_\Gamma \bar{\zeta}^m \zeta^n \, B_\Psi \, \mathrm{d}\mu_L \qquad \textit{for all } m, n. \tag{2.16}$$

此外

$$B_\Psi(\zeta) = \frac{2}{\pi} \int_\Gamma \rho_\Psi(\zeta') \, e^{-|\sqrt{2}\bar{\zeta} - \zeta'|^2} \, \mathrm{d}\mu_L(\zeta'), \tag{2.17}$$

且 $B_\Psi = \rho_\Psi$ 当且仅当 Ψ 为真空态（相差一个相位）。

证明。由于 $\hat{a}$ 是 $\hat{a}^\dagger$的伴随算符，其作用是乘以 ζ，因此（2.16）的左侧为$\langle (\hat{a}^\dagger)^m \Psi, (\hat{a}^\dagger)^n \Psi \rangle = \int \bar{\zeta}^m \zeta^n |\Psi|^2 \mathrm{d}\mu_B$。对于（2.17）， $B_\Psi(\zeta)$ 是在相干态标签 $\beta = \zeta$处计算的 $\pi^{-1} |\langle \beta | \Psi \rangle|^2$ ，即久住函数 [15]。久住函数是维格纳函数与真空态维格纳函数在变量 $\beta = \zeta'/\sqrt{2}$ [14]下的卷积。最后，$\int \zeta\bar{\zeta} \, B_\Psi \, \mathrm{d}\mu_L = \langle \hat{a}\hat{a}^\dagger \rangle = \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle + 1$，而 $\int \zeta\bar{\zeta} \, \rho_\Psi \, \mathrm{d}\mu_L = \langle \hat{x}^2 + \hat{p}^2 \rangle = 2\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle + 1$。只有当 $\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle = 0$时二者才相等，也就是真空态；对于真空态，由（2.5）可得 $B_o = \rho_o$ 。 □

因此，这两个密度分别对应着算符与函数之间的两套不同字典。在 ρ_Ψ，$\hat{a}$ 对应于 $\zeta/\sqrt{2}$ ，且乘积采用 Weyl排序。在 B_Ψ，$\hat{a}$对应于 $\bar{\zeta}$ ，且乘积采用反正规序。在真空态中，同一个函数同时发挥这两种作用，而这种巧合构成了 [1]的构造基础。对于相干态，这两个密度都是宽度相同、但中心位于不同点的高斯分布， $\sqrt{2}\zeta_o$和 $\bar{\zeta}_o$ （图1）。对于 Ψ_1， $B_{\Psi_1} = \pi^{-1} \zeta\bar{\zeta} \, e^{-\zeta\bar{\zeta}}$是

正值，而 ρ_{Ψ_1} 不是。因此，使 B_Ψ 对每个态都具有正性，需要付出改变算符排序的代价；同时，只有相应地改变经典函数，才能从B_Ψ 中恢复出 $\hat{x}$ 和 $\hat{p}$ 的多项式期望值。在反正规字典中，$\hat{x}$ 对应于$\sqrt{2}\,x$，而 $\hat{p}$对应于 $-\sqrt{2}\,p$，例如，

$$\langle \hat{x}^2 \rangle_\Psi = \big\langle 2x^2 - \tfrac{1}{2} \big\rangle_{B_\Psi}, \tag{2.18}$$

这在 t 的情况下给出 真空态，并且对于 Ψ_1 给出 ，正如其必然如此。一般排序演算见 [14].

E From 从分布到 Bargmann密度：高斯平滑

方程（2.17）表明，Bargmann密度是 ρ_Ψ 的高斯平均。对其进行插值很有用。对于 $0 \le \eta \le \tfrac{1}{2}$，令 $\rho_\Psi^{(\eta)}$ 为 ρ_Ψ 与在每个η中的协方差为 x 的 p中心高斯分布的卷积。在物理上，它表示通过施加具有该协方差的随机相空间位移，即添加经典噪声，而得到的态的分布。或者说，它是有限分辨率探针所观测到的分布。命题1 的构造可直接推广。令 $v = 1 + 2\eta$ 和 $r = -\,(1 - 2\eta)\,/\,(1 + 2\eta)$，

$$\rho_\Psi^{(\eta)}(\zeta) = \frac{1}{\pi v}\, e^{-\zeta\bar{\zeta}/v} \int_\Gamma \overline{\Psi(w)}\; e^{\sqrt{2}\,\zeta w/v}\; \Psi\Big(r\,w + \frac{\sqrt{2}\,\bar{\zeta}}{v}\Big)\mathrm{d}\mu_B(w), \tag{2.19}$$

对于 $\eta = 0$，它化为 (2.8)。完全按照命题1的证明，由$\rho_\Psi^{(\eta)}(\zeta) = (\pi v)^{-1}\langle \Psi、\hat{D}(\beta)\, r^{\hat{a}^\dagger \hat{a}}\, \hat{D}(\beta)^\dagger \Psi\rangle$ 以及 $\beta = \zeta/\sqrt{2}$ 可得，其中后者是s阶序的 [14] 的准概率分布，且 $s = -2\eta$，并且由 $r^{\hat{a}^\dagger \hat{a}}\Psi(w) = \Psi(rw)$ 得出。在 $\eta = \tfrac{1}{2}$ 时，$r = 0$以及 (2.3) 给出 $\rho_\Psi^{(1/2)}(\zeta) = \tfrac{1}{2} B_\Psi(\bar{\zeta}/\sqrt{2})$：该族的末端是Bargmann密度，除去 (2.17) 中的线性变量变换。由于与高斯分布的卷积保持正性，使得 $\rho_\Psi^{(\eta)} \ge 0$ 的 η 构成一个区间 $[\eta_*, \tfrac{1}{2}]$，我们将 $\eta_*(\Psi)$ 称为该态的平滑深度。这是 Lee [28] 的非经典深度的以 Wigner 分布为参照的版本。

命题 5。 $\eta_* = 0$ 当且仅当 $\rho_\Psi \ge 0$。对于纯态，只有两种可能：$\eta_*(\Psi) = 0$ Ψ 具有形式 (2.12)，其中 $\epsilon \to 0$；或者 $\eta_*(\Psi) = \tfrac{1}{2}$ Ψ 是 $1-\epsilon$ 与 $|\Psi_o\rangle\langle\Psi_o|$ 的混合，其中 Ψ_o 具有形式 (2.12)，以及 $\epsilon|\Psi_1\rangle\langle\Psi_1|$ 的混合，其中 Ψ_1 是 $\eta_* = 0$ 的任意纯态，$0 \le \epsilon \le \tfrac{1}{2}$。对于混合态 (2.19)，$\eta_* = \max(\eta_*, \tfrac{1}{2})$。

证明。 第一个陈述就是定义。如果纯态 Ψ 不具有形式（2.12），那么根据定理 2及其证明，其 Bargmann 函数有一个零点，因此 B_Ψ 在某处为零。如果 $\rho_\Psi^{(\eta)}$ 对于某个 $\eta < \tfrac{1}{2}$是非负的，那么 $\rho_\Psi^{(1/2)}$ 作为非负归一化函数的进一步高斯平均，将严格为正，这就产生了矛盾。对于混合态，（2.19）给出 $\rho^{(\eta)} = (\pi v)^{-1} e^{-\zeta\bar{\zeta}/v}\big(1 - 2\epsilon/v + 2\epsilon\,\zeta\bar{\zeta}/v^2\big)$，其为非负当且仅当 $v \ge 2\epsilon$。 □

因此，对于纯态而言，平滑深度呈现出鲜明的二分性：Weyl 分布要么本身已经是概率分布，要么只有在该族中最粗的成员——Bargmann密度——处才达到正性；后者对应于在相干态的完整宽度上进行平均。从这个意义上说，真空态及其压缩态和位移态亲态，是唯一存在分辨率细于相干态分辨率的经典分布的纯态。混合态可能具有中间平滑深度，因此噪声或退相干会使这一转变变得渐进。这一点与相互作用微扰有关：通过模耦合而变成非高斯的纯态具有$\eta_* = \tfrac{1}{2}$，无论其非高斯性多么微弱。

F 相干态叠加

人们在 [1] 中观察到，当将两个相干态的叠加与相应的混合态进行比较时，期望值的相等性并不成立，因为量子期望值关于态是二次的，并且包含交叉项。借助命题 1，这一比较可以变得严格。令

$$\Psi = \mathcal{N}\big(c_1\Psi_{\zeta_1} + c_2\Psi_{\zeta_2}\big), \qquad \mathcal{N}^{-2} = |c_1|^2 + |c_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}\big(\bar{c}_1 c_2 \langle \Psi_{\zeta_1}, \Psi_{\zeta_2}\rangle\big), \tag{2.20}$$

其中 $\langle \Psi_{\zeta_1},\ \Psi_{\zeta_2}\rangle = \exp\big(-\frac{1}{2}\zeta_1\bar{\zeta}_1 - \frac{1}{2}\zeta_2\bar{\zeta}_2 + \bar{\zeta}_1\zeta_2\big)$。由于相干态并不正交，归一化涉及它们的重叠。于是，式（2.8）和（2.3）给出

$$\rho_\Psi = \mathcal{N}^2\Big[|c_1|^2\rho_{\Psi_{\zeta_1}} + |c_2|^2\rho_{\Psi_{\zeta_2}} + 2\,\mathrm{Re}\big(\bar{c}_1 c_2\,\rho_{12}\big)\Big], \tag{2.21}$$

含有干涉项

$$\rho_{12}(\zeta) = \frac{1}{\pi}\exp\Big[-\Big|\zeta - \frac{\zeta_1+\zeta_2}{\sqrt{2}}\Big|^2 + i\Big(\sqrt{2}\,\mathrm{Im}\big((\zeta_2-\zeta_1)\bar{\zeta}\big) - \mathrm{Im}(\zeta_2\bar{\zeta}_1)\Big)\Big]. \tag{2.22}$$

干涉项是一个以两个波包中点为中心的高斯，其上调制着条纹，条纹的波矢与间距 $\zeta_2-\zeta_1$ 成正比。其积分为 $\langle \Psi_{\zeta_1},\ \Psi_{\zeta_2}\rangle$，因此当波包相距很远时，它不会显著改变归一化，但会使 ρ_Ψ 在两者之间为负。

与混合态进行比较时，关键在于哪些可观测量能够观测到条纹。在傅里叶 $\hat{}$ 空间中，答案十分明确：根据式（2.4），$W(\lambda,\ \mu)$ 会使相干态发生位移，并且

$$\big|\langle \Psi_{\zeta_1}, \hat{W}(\lambda,\mu)\Psi_{\zeta_2}\rangle\big| = e^{-\frac{1}{2}|\zeta_1-\zeta_2+\bar{\alpha}|^2}, \qquad \alpha = \frac{\mu+i\lambda}{\sqrt{2}}. \tag{2.23}$$

$\hat{}$ 因此，$\langle W(\lambda,\mu)\rangle_\Psi$ 中的交叉项集中在 $\bar{\alpha} = \zeta_2 - \zeta_1$附近，即集中在波数$\sqrt{\lambda^2+\mu^2}$处，其数量级为两个波包间距 $D = \sqrt{2}|\zeta_1-\zeta_2|$。设 $F(x,p) = (2\pi)^{-2}\int \tilde{F}(\lambda,\mu)W(\lambda,\mu)\,\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}\mu$为一个可观测量，且其傅里叶变换的支集位于 $\lambda^2+\mu^2 \le K^2$中，并满足 $\|F\|_{\mathcal{F}} = (2\pi)^{-2}\int|\tilde{F}|\,\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}\mu < \infty$，其中 $K < D$。与归一化混合态$\rho_{\mathrm{mix}} = (|c_1|^2\rho_{\Psi_{\zeta_1}} + |c_2|^2\rho_{\Psi_{\zeta_2}})/(|c_1|^2+|c_2|^2)$进行比较，(2.21)和(2.23)给出

$$\big|\langle F\rangle_{\rho_\Psi} - \langle F\rangle_{\rho_{\mathrm{mix}}}\big| \ \le\ 4\mathcal{N}^2|c_1c_2|\,\|F\|_{\mathcal{F}}\,e^{-\frac{1}{4}(D-K)^2}. \tag{2.24}$$

这里我们使用了 $|\langle F\rangle_\rho| \le \|F\|_{\mathcal{F}}$来改变归一化，并使用界（2.23）来处理干涉项。无法在 $1/D$ 这一尺度上分辨相空间的可观测量，因此无法区分叠加态与混合态，除非考虑指数级小的修正。实际上，低阶多项式可观测量属于这一类：它们的 Weyl 期望值是 $\langle W\rangle_\Psi$ 在原点处的导数，其中交叉项的量级为 $e^{-D^2/4}$ 乘以一个关于 D的多项式。位移宇称等可观测量的 Weyl 符号是 δ函数，因而能完整地 [20]看到条纹。这就准确说明了对于叠加态，（[1, (5.17)]）失效究竟是否可观测。

III 超越Weyl排序

A 一个精确排序公式

分布 ρ_Ψ 再现了 Weyl排序的期望值。正如在 [1], 中所强调的，量子理论包含更多信息，这些信息由其他序下的乘积承载，例如 $\hat{x}\hat{p}$ 或 $\hat{p}\hat{x}$

而不是 $(\hat{x}\hat{p})_W$。对于线性可观测量，这些额外信息具有非常简单的结构。设 $\hat{L}_i = u_i\hat{x} + v_i\hat{p}$，$i = 1, \dots, n$，其中 u_i, v_i为实数或复数，并令 $L_i = u_i x + v_i p$为相应的 $\hat{}$ 函数，定义在 Γ上。它们的对易子是 c-数，$[L_i, L_j] = i\{L_i, L_j\}$其中 $\{L_i, L_j\} = u_i v_j - v_i u_j$。$\hat{}$ 对于一个子集 $S \subset \{1, \dots, n\}$，用 $(\prod_{k\in S} L_k)_W$表示对这些因子的所有排列的平均，并令 $\mathcal{P}_n$为由 $\{1, \dots, n\}$中的所有不相交配对 (i, j)组成的集合 P，包括空集合。

$\hat{}$ $\hat{}$**定理6**。对于线性算符 L_1、.....、L_n，

$$\hat{L}_1\hat{L}_2\cdots\hat{L}_n = \sum_{P\in\mathcal{P}_n} \prod_{(i,j)\in P} \tfrac{1}{2}[\hat{L}_i, \hat{L}_j] \left(\prod_{k\notin P} \hat{L}_k\right)_W, \tag{3.1}$$

wh其中 $k \notin P$表示 k 不属于 P中的任何配对。因此，对于每个态 Ψ，

$$\langle \hat{L}_1\cdots\hat{L}_n\rangle_\Psi = \sum_{P\in\mathcal{P}_n} \prod_{(i,j)\in P} \tfrac{i}{2}\{L_i, L_j\} \left\langle \prod_{k\notin P} L_k \right\rangle_{\rho_\Psi}. \tag{3.2}$$

证明。S 由于对易子是中心的，Baker–Campbell–Hausdorff公式给出 s

$$e^{it_1\hat{L}_1}e^{it_2\hat{L}_2}\cdots e^{it_n\hat{L}_n} = e^{i\sum_j t_j\hat{L}_j}\ \exp\Big(-\tfrac{1}{2}\sum_{i<j} t_i t_j[\hat{L}_i, \hat{L}_j]\Big).$$

$\hat{}$ $\hat{}$ 左侧 $t_1t_2\cdots t_n$ 的系数为 $i^n L_1\cdots L_n$。右侧中，$t_{k_1}\cdots t_{k_m}$在 $e^{i\sum t_j \hat{}L_j}$中的互异变量乘积 $i^m(\hat{}L_{k_1}\cdots\hat{}L_{k_m})_W$的系数为，而第二个指数函数对一组不相交配对贡献 $\prod(-\frac{1}{2}[\hat{}L_i, \hat{}L_j])$。比较系数，并对每一对使用 $i^{-2} = -1$，得到（3.1）。方程（3.2）随后由命题1得到。

□

例如，$\langle\hat{}x \quad \hat{}p\rangle_\Psi = \langle xp\rangle_{\mathcal{P}\Psi} + \frac{i}{2}$, $\langle\hat{}x\hat{}p\hat{}x\rangle_\Psi = \langle x^2p\rangle_{\rho_\Psi}$ 因为两个单配对相互抵消，且

$$\langle\hat{x}\hat{p}\hat{x}\hat{p}\rangle_\Psi = \langle x^2p^2\rangle_{\rho_\Psi} + i\,\langle xp\rangle_{\rho_\Psi}. \tag{3.3}$$

在后一种情况下，两个双配对相互抵消。定理 6 使 [1] 中的评论更加精确：非 Weyl排序乘积与其经典对应物之差，是由在 $\hbar \to 0$趋于零时消失的项构成的。在物理单位制下，每个配对都带有一个因子 $\frac{i\hbar}{2}\{L_i, L_j\}$。有两点值得强调。第一，修正项只涉及对易子（它们与态无关）以及同一分布的低阶矩 ρ_Ψ；不需要关于该态的其他信息。第二，修正是否很小，并不单由 $\hbar$ 决定。对于纯高斯态，ρ_Ψ的矩本身正比于 $\hbar$ 的幂（见 [1, 第五节 A]中的注释（1）$\hbar$），因此修正项的相对大小与 $\hbar$无关。决定这一点的是一个无量纲几何量，下面我们将转向讨论它。

B 三个概念，一个角度

在 [1] 中，我们用相关可观测量的对易子与反对易子的期望值之比来衡量非对易性的衰减，并用它们在度量 g 下的哈密顿向量场范数来衡量压缩。现在我们将证明，这些量与经典分布的相关系数都是单一角度的函数。

设 $(\Gamma、\Omega\ J,\ g)$ 为线性 K¨ahler 空间，其中 $g(u,\ v) = \Omega(u,\ Jv)$ 如 [1, 第 II 节], 所述，并考虑由 J选定的、可能经过平移的纯高斯态，其分布为 $\rho \propto e^{-g(\gamma-\gamma_c,\gamma-\gamma_c)\ /\hbar}$。对于 Γ 上的实线性函数 F，令 X_F 为其哈密顿向量场。那么，如 [1, 第 IV 节],所述

$$\begin{gathered}\sigma_F^2 := \langle (F - \langle F\rangle)^2\rangle_\rho = \frac{\hbar}{2}\,\|X_F\|^2, \qquad \mathrm{Cov}_\rho(F, G) = \frac{\hbar}{2}\,g(X_F, X_G),\\ \langle[\hat{F}, \hat{G}]\rangle = i\hbar\,\{F, G\} = \pm i\hbar\,\Omega(X_F, X_G).\end{gathered} \tag{3.4}$$

最后一个关系式中的符号取决于约定，对下文没有影响。对于两个线性可观测量，定义

$$C_{FG} = \frac{\mathrm{Cov}_\rho(F,G)}{\sigma_F \sigma_G}, \qquad \delta_{FG} = \frac{|\langle [\hat{F},\hat{G}]\rangle|}{2\sigma_F\sigma_G}, \qquad R_{FG} = \frac{|\langle [\hat{F},\hat{G}]\rangle|}{|\langle [\hat{F},\hat{G}]_+\rangle - 2\langle\hat{F}\rangle\langle\hat{G}\rangle|}. \tag{3.5}$$

这是 F 和 G 在经典分布中的相关系数、对易子相对于经典涨落的大小，以及在 [1, 第 III 节], 中使用的对易子与反对易子的比值，从而 $R_{FG} = \delta_{FG}/|C_{FG}|$。

引理 7。若 u、v *лежж*在一个 J-不变的实二维平面内，则 $g(u,v)^2 + \Omega(u,v)^2 = \|u\|^2\|v\|^2$。

证明。对于 $u \neq 0$，向量 $u/\|u\|$ 和 $Ju/\|u\|$ 构成该平面的 g-正交归一基，因为$g(u, Ju) = \Omega(u, J^2u) = 0$ 且 J 是等距映射。设 $v = au + bJu$，可得 $g(u, v) = a\|u\|^2$ 以及 $|\Omega(u, v)| = |g(u, Jv)| = |b|\,\|u\|^2$，而 $\|v\|^2 = (a^2 + b^2)\,\|u\|^2$。 □

命题 8。设 F、G 是实线性可观测量，其哈密顿向量场位于一个 J-不变平面内；对于一个自由度的情形，这总是成立的。设 $\theta_{FG} \in [0,\pi]$ 是 X_F 与 X_G 在度量 g 下的夹角。那么，在由 J 选定的纯高斯态中，

$$C_{FG} = \cos\theta_{FG}, \qquad \delta_{FG} = \sin\theta_{FG}, \qquad R_{FG} = |\tan\theta_{FG}|, \qquad \|X_F\|\,\|X_G\|\,\sin\theta_{FG} = |\{F,G\}|. \tag{3.6}$$

特别地，对于正则对 $\{F,G\} = 1$，由 $\|X_F\|\,\|X_G\|$ 测得的压缩等于 $1/\delta_{FG}$。对于任意态（不一定是高斯态或纯态），以及任意线性 F、G，

$$\delta_{FG}^2 \leq 1 - C_{FG}^2, \tag{3.7}$$

其中，C_{FG} 和 σ_F 根据 ρ_Ψ 的矩计算，而这些矩与对称化量子矩一致。

证明。前三个关系由（3.4）和引理 7得到，因为

$$\cos\theta_{FG} = \frac{g(X_F,X_G)}{\|X_F\|\,\|X_G\|}, \qquad \sin\theta_{FG} = \frac{|\Omega(X_F,X_G)|}{\|X_F\|\,\|X_G\|}.$$

（3.6）中的最后一个关系是 sin θ_{FG}的定义，用 $|\Omega(X_F,X_G)| = |\{F,G\}|$表示。不等式（3.7）是罗伯逊–薛定谔不确定性关系 [21, 22]，$\sigma_F^2\sigma_G^2 - \mathrm{Cov}(F,G)^2 \geq \frac{1}{4}|\langle [\hat{F},\hat{G}]\rangle|^2$除以 $\sigma_F^2\sigma_G^2$。 □

命题 8 可视为 [1] 这三个概念之间的几何对应关系。经典分布 ρ 对 F 和 G 的关联程度，取决于它们的哈密顿向量场的对齐程度。它们的对易子相对于其涨落的大小，也恰好以相同程度为小。向量场近乎对齐的正则对，其范数乘积必然很大，也就是说，它受到强烈压缩。这一对应关系中没有任何内容涉及 $\hbar$。这些概念在概念上仍然彼此独立：无论角度如何，ρ 都存在，并能重现 Weyl 排序的 n 点函数；而角度取决于所考虑的可观测量对，这正是压缩取决于正则对的选择的原因 [1, 第 IV 节，注释 1]。对于 [1, (4.18)], 中的正则对 $(q_{\vec{k}}, p_{\vec{k}})$，其向量场是$g$-正交归一的，$\theta = \pi/2$：不存在压缩，也没有关联，并且 $\delta = 1$，因此对易子相对于涨落始终不可忽略。对于混合高斯态，经典涨落更大。若协方差是纯态的 ν 倍，$\nu \geq 1$，则角度关系中的δ_{FG} =为 sin θ_{FG}/ν。

C 任意排序的界

结合定理 6 与命题 8，可得出一个界，说明任意排序的 n 点函数与相应的 ρ 矩之间最多相差多少。

命题 9。 设 ω 是一个准自由（高斯）态，可以是纯态或混态，且满足 $\langle L_i\rangle_\omega = 0$。令 L_1、……、L_n 为线性对象，满足 $\sigma_i = \sigma_{L_i}$ 且 $\delta_{\max} = \max_{i<j}\delta_{L_iL_j}$。则当 n 为奇数时有 $\langle L_1\cdots L_n\rangle_\omega = \langle L_1\cdots L_n\rangle_\rho = 0$，当 n 为偶数时有

$$\left|\langle \hat{L}_1\cdots\hat{L}_n\rangle_\omega - \langle L_1\cdots L_n\rangle_\rho\right| \;\le\; (n-1)!!\,\frac{n}{2}\,\delta_{\max}\prod_{i=1}^{n}\sigma_i. \tag{3.8}$$

证明。 对于准自由态，$\langle L_1\cdots L_n\rangle_\omega = \sum_\pi \prod_{(i,j)\in\pi} G_{ij}$，其中求和遍历由 $n-1$ 个元素构成的 π 个完美配对，每一对中都有 $i<j$，并且 $G_{ij} = \langle L_i L_j\rangle_\omega = \mathrm{Cov}_\rho(L_i,L_j) + \frac{1}{2}\langle [L_i, L_j]\rangle$。经典矩是相同的求和，只是将 G_{ij} 替换为 $\mathrm{Cov}_\rho(L_i,L_j)$。根据（3.7），$|G_{ij}| \le \sigma_i\sigma_j$ 且 $|\mathrm{Cov}_\rho(L_i,L_j)| \le \sigma_i\sigma_j$，而 $|G_{ij} - \mathrm{Cov}_\rho(L_i,L_j)| \le \delta_{\max}\sigma_i\sigma_j$。逐个替换每个配对中的 $n/2$ 个因子，可得每个配对对差值的界为 $\frac{n}{2}\,\delta_{\max}\prod_i\sigma_i$。 □

因此，在任意序下，任意 n点函数偏离经典矩的程度，都由所涉及可观测量中最大的角度正弦控制，并以 $\prod_i\sigma_i$ 经典涨落的自然尺度为参照。当所有相关角度都很小时，在所述精度范围内，量子态与经典分布对所有序给出相同的预言。

IV FLRW时空中的场

A 协变相空间上的分布

现在恢复 $\hbar$，回到 [1, 第 II 节]的设定：空间平直 FLRW 时空中的一个试探标量场，其度量为 $a^2(\eta)(-\mathrm{d}\eta^2+\mathrm{d}\vec{x}^2)$，空间拓扑为 $\mathbb{T}^3$，体积为 V_0。实解的协变相空间 Γ带有辛结构 Ω。均匀各向同性福克真空由模函数 $e_k(\eta)$ 指定，这些模函数满足 $e_k'' + 2(a'/a)\,e_k' + k^2 e_k = 0$ 和 $e_k\bar{e}_k' - e_k'\bar{e}_k = i/a^2$。等价地，它由相容的复结构 J 以及度量 g [1, 第 II 节]指定。将一个实解写成

$$\phi(\vec{x},\eta) = \frac{1}{\sqrt{V_0}}\sum_{\vec{k}}\big(z_{\vec{k}}\,e_k(\eta) + \bar{z}_{-\vec{k}}\,\bar{e}_k(\eta)\big)e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}, \qquad \{z_{\vec{k}},\bar{z}_{\vec{k}'}\} = -i\delta_{\vec{k},\vec{k}'}, \tag{4.1}$$

$z_{\vec{k}}$ 是 Γ上的Bargmann坐标。量子化后，$z_{\vec{k}}\mapsto \hat{A}_{\vec{k}}$ 与 $[\hat{A}_{\vec{k}},\ \hat{A}^\dagger_{\vec{k}'}] = \hbar\delta_{\vec{k},\ \vec{k}'}$。在任意时刻 η，场模与动量模是 Γ上的经典函数

$$\varphi_{\vec{k}}(\eta) = e_k(\eta)z_{\vec{k}} + \bar{e}_k(\eta)\bar{z}_{-\vec{k}}, \qquad \pi_{\vec{k}}(\eta) = a^2(\eta)\big(e_k'(\eta)z_{\vec{k}} + \bar{e}_k'(\eta)\bar{z}_{-\vec{k}}\big), \tag{4.2}$$

$\hat{}$ 和 $\hat{\varphi}_{\vec{k}}(\eta)$、$\hat{\pi}_{\vec{k}}(\eta)$通过将$z_{\vec{k}}$ 替换为 $A_{\vec{k}}$ [1, (2.29)、(2.30)]而得到。使用$\sqrt{2}z_{\vec{k}} = q_{\vec{k}} + ip_{\vec{k}}$ 的 [1, (4.18)], 中的场类比式（2.5），并按照 [1, V.A节注释（1）], 恢复

$$\rho_o = \prod_{\vec{k}}\frac{1}{\pi\hbar}\,e^{-(q_{\vec{k}}^2+p_{\vec{k}}^2)/\hbar}, \tag{4.3}$$

相对于刘维尔测度 $\prod_{\vec{k}}\mathrm{d}q_{\vec{k}}\mathrm{d}p_{\vec{k}}$。指数为 $g(\phi,\phi)/\hbar$，因为 $q_{\vec{k}}$ 和 $p_{\vec{k}}$ 的哈密顿向量场构成 g-正交归一组。在任意有限模集合上，（4.3）是一个普通的

高斯概率密度。对于整个场，该密度并不存在；但是，正如 [1, 第五节B，备注 1], 中强调的那样，测度确实存在：即 Bargmann 测度 $\mathrm{d}\mu_B$ 本身。等价地，根据博赫纳–明洛斯定理， [23], 它是在分布解空间上的高斯测度，其特征由以下内容给出：

$$\langle e^{iF}\rangle_{\rho_o} = e^{-\frac{\hbar}{4}\|X_F\|^2} = \langle e^{i\hat{F}}\rangle_o \tag{4.4}$$

对于每个实线性可观测量 F，例如涂抹场。

分布（4.3）定义在解空间上，并且不会演化。所有时间依赖性都通过模函数由经典可观测量（4.2）承载。这就是为什么 [1] 的结果不局限于单一时刻。

定理 10. 设 $O_1, \dots, O_n$ 为场模或动量模 $\hat{\varphi}_{\vec{k}_i}(\eta_i), \hat{\pi}_{\vec{k}_i}(\eta_i)$，其时间 η_i任意，不必相等；并设 O_i 为相应的函数 (4.2)。则

$$\langle (\hat{O}_1 \cdots \hat{O}_n)_W \rangle_o = \langle O_1 \cdots O_n \rangle_{\rho_o}, \tag{4.5}$$

其中 $(\cdot)_W$ 表示对因子所有排列的平均。涂抹场和动量也同样成立；对于每个均匀各向同性准自由态，无论纯态还是混合态，只需采用相应的高斯 ρ_o。对于等时情形，以及准自由真空及其相干态，这就是 *[1,* 第 *V.B* 节和第 *VI* 节*]*的结果；关于时间演化，另见 *[1,* 第 *V.A* 节，注 *3]* 。这里将结果推广到不同时刻的乘积以及混合准自由态。

证明。 两边都是多重线性的，因此只需利用实部和虚部，令每个 O_i 为自伴。任意这样的算子都可表示为 $\hat{L} = \sum_{\vec{k}} (u_{\vec{k}} \hat{A}_{\vec{k}} + \bar{u}_{\vec{k}} \hat{A}^\dagger_{\vec{k}})$，即有限项之和。对于实数 t_i，生成函数 $\langle e^{i\sum_j t_j \hat{O}_j}\rangle_o = e^{-\frac{1}{2}\langle \hat{L}_t^2\rangle_o}$（其中 $\hat{L}_t = \sum_j t_j \hat{O}_j$）通过求导生成 Weyl排序乘积，正如 [1,(5.10)] 中所示。同样，$\langle e^{i\sum_j t_j O_j}\rangle_{\rho_o} = e^{-\frac{1}{2}\langle L_t^2\rangle_{\rho_o}}$生成矩。最后，$\langle \hat{L}^2\rangle_o = \hbar \sum_{\vec{k}} |u_{\vec{k}}|^2 = \langle L^2\rangle_{\rho_o}$, 依据 $\langle z_{\vec{k}} z_{\vec{k}}\rangle_{\rho_o} = \hbar/2$和 $\langle z_{\vec{k}} z_{\vec{k}'}\rangle_{\rho_o} = 0$。对于其他均匀各向同性准自由态，模函数为 $\tilde{e}_k = \alpha_k e_k + \beta_k \bar{e}_k$ with$|\alpha_k|^2 - |\beta_k|^2 = 1$；而对于混合态，则为 $\langle z_{\vec{k}} \bar{z}_{\vec{k}}\rangle = \hbar(1 + 2n_{\vec{k}})/2$。使用相应的高斯函数即可应用同样的论证。 □

对于不同于由 e_k所定义的纯态，其分布是新复结构的 K¨ahler 度量 $\tilde{g}$ 的高斯分布。在其Bargmann坐标中，逐模来看，它呈现为如下形式的压缩分布（2.13）。对于占据数为 $n_{\vec{k}}$ 的类热态，其形式为 $\prod_{\vec{k}} [\pi\hbar(1 + 2n_{\vec{k}})]^{-1} e^{-(q_{\vec{k}}^2 + p_{\vec{k}}^2)/[\hbar(1+2n_{\vec{k}})]}$。根据定理 2，将其应用于任意有限模集合可知，这些高斯态是分布为正值的唯一纯态。相对于准自由态具有有限个激发的态仍然具有能够重现所有 Weyl 有序n点函数的分布，但该分布会取负值。

B 某一模的非对易性、压缩与关联

定理6 适用于算符（4.2），其对易子为 c-数。因此，场和动量的每个 n-点函数，无论采用何种排序、处于何时刻，都是 ρ_o 的矩与显式对易子项（3.2）之和。例如，二点函数 [1,(2.27)] 可分解为

$$\langle \hat{\phi}(\vec{x}_1, \eta_1)\hat{\phi}(\vec{x}_2, \eta_2)\rangle_o = \langle \phi(\vec{x}_1, \eta_1)\phi(\vec{x}_2, \eta_2)\rangle_{\rho_o} + \frac{i\hbar}{V_0} \sum_{\vec{k}} \mathrm{Im}\big(e_k(\eta_1)\bar{e}_k(\eta_2)\big) e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)}, \tag{4.6}$$

第二项是对易子的一半。为测量这些项的大小，我们逐模应用命题 8。对于 $f \in \mathbb{C}$ 令

$$F_f = f\, z_{\vec{k}} + \bar{f}\, \bar{z}_{-\vec{k}}, \qquad \hat{F}_f = f \hat{A}_{\vec{k}} + \bar{f} \hat{A}^\dagger_{-\vec{k}}, \tag{4.7}$$

so 即 $\varphi_{\vec{k}}(\eta) = F_{e_k(\eta)}$ 且 $\pi_{\vec{k}}(\eta) = F_{a^2 e'_k(\eta)}$。对 (4.3) 直接计算可得 s

$$\sigma_f^2 := \langle F_f \bar{F}_f \rangle_{\rho_o} = \hbar |f|^2 = \frac{\hbar}{2} \|X_{F_f}\|^2, \qquad \langle F_f \bar{F}_g \rangle_{\rho_o} = \hbar\, \mathrm{Re}(f\bar{g}), \qquad \langle [\hat{F}_f, \hat{F}_g^\dagger] \rangle_o = 2i\hbar\, \mathrm{Im}(f\bar{g}). \tag{4.8}$$

第一个关系重现了 [1, (4.1)–(4.4)]。F_f 的实部和虚部分别是两个独立振子 $w_\pm = (z_{\vec{k}} \pm z_{-\vec{k}})/\sqrt{2}$ 的可观测量 $|f|(q_+ \cos\theta_f - p_+ \sin\theta_f)$ 和 $|f|(q_- \sin\theta_f + p_- \cos\theta_f)$，其中 $\sqrt{2}\, w_\pm = q_\pm + i p_\pm$ 且 $\theta_f = \arg f$。因此，它们的哈密顿向量场在 J 不变平面内旋转了 θ_f。命题 8 随后给出如下结论。

推论 11。对于同一模的两个可观测量 F_f, F_g，其中 $\theta_{fg} = \arg(f\bar{g})$ 是它们的哈密顿向量场之间的角度，

$$C_{fg} = \cos\theta_{fg}, \qquad \delta_{fg} = |\sin\theta_{fg}|, \qquad R_{fg} = |\tan\theta_{fg}|, \tag{4.9}$$

其中 $C_{fg} = \mathrm{Re}\langle F_f \bar{F}_g \rangle_{\rho_o} / (\sigma_f \sigma_g)$、$\delta_{fg} = |\langle [\hat{F}_f, \hat{F}_g^\dagger] \rangle_o| / (2\sigma_f \sigma_g)$ 以及 $R_{fg} = |\langle [\hat{F}_f, \hat{F}_g^\dagger] \rangle_o| / |\langle [\hat{F}_f, \hat{F}_g^\dagger]_+ \rangle_o|$。特别地，对于同一时刻的场和动量，在任意 *FLRW* 背景下，

$$\delta_{\varphi\pi}(\eta) = \frac{1}{2a^2 |e_k||e'_k|} = \frac{1}{\|X_{\varphi_{\vec{k}}}\|\, \|X_{\pi_{\vec{k}}}\|} = \frac{|R_{\varphi,\pi}|}{\sqrt{1 + R^2_{\varphi,\pi}}}, \qquad |R_{\varphi,\pi}(\eta)| = \frac{1}{|2a^2 \mathrm{Re}(e_k \bar{e}'_k)|}, \tag{4.10}$$

最后一个表达式为 *[1,(3.5)]*。对于两个时刻的场，

$$\delta_{\varphi\varphi}(\eta_1, \eta_2) = \big|\sin\big(\arg e_k(\eta_1) - \arg e_k(\eta_2)\big)\big|. \tag{4.11}$$

对于涉及许多模的涂抹可观测量，$\delta_{FG} \le \max_{\vec{k}} \delta_{f_{\vec{k}} g_{\vec{k}}}$，其中最大值取遍支集中的各个模。

证明。除最后一个陈述外，其余内容均由（4.8）和命题 8推出；对于（4.10），我们使用了朗斯基行列式、$a^2 \mathrm{Im}(e_k \bar{e}'_k) = \frac{1}{2}$，以及 [1, (4.31)–(4.32)] 来处理范数。对于涂抹可观测量，对易子是对各个模求和，而 $|\mathrm{Im}(f_{\vec{k}} \bar{g}_{\vec{k}})| \le \delta_{\max} |f_{\vec{k}}||g_{\vec{k}}|$；然后由柯西–施瓦茨不等式得到 $\sum_{\vec{k}} |f_{\vec{k}}||g_{\vec{k}}| \le (\sum_{\vec{k}} |f_{\vec{k}}|^2)^{1/2} (\sum_{\vec{k}} |g_{\vec{k}}|^2)^{1/2}$。 □

方程（4.10）明确表明，比值$R_{\varphi、\pi}$ 中使用的 [1]用于测量非对易性的衰减，而用于测量压缩的范数乘积，是同一个量。二者都是 $X_{\varphi_{\vec{k}}}$ 与 $X_{\pi_{\vec{k}}}$之间角度的函数，而根据（4.9），该角度就是时间无关分布 ρ_o中$\varphi_{\vec{k}}$ 与$\pi_{\vec{k}}$ 之间的相关性。在演化过程中，含时可观测量$\varphi_{\vec{k}}$（η）和$\pi_{\vec{k}}$（η）的向量场在 Γ中移动，而 g 和 ρ_o 保持不变。非对易性的衰减意味着这些向量场变得对齐（或反向对齐），因此 ρ_o 使可观测量完全相关，并且其支集从这些可观测量的视角来看，收缩为一条直线（图2）。

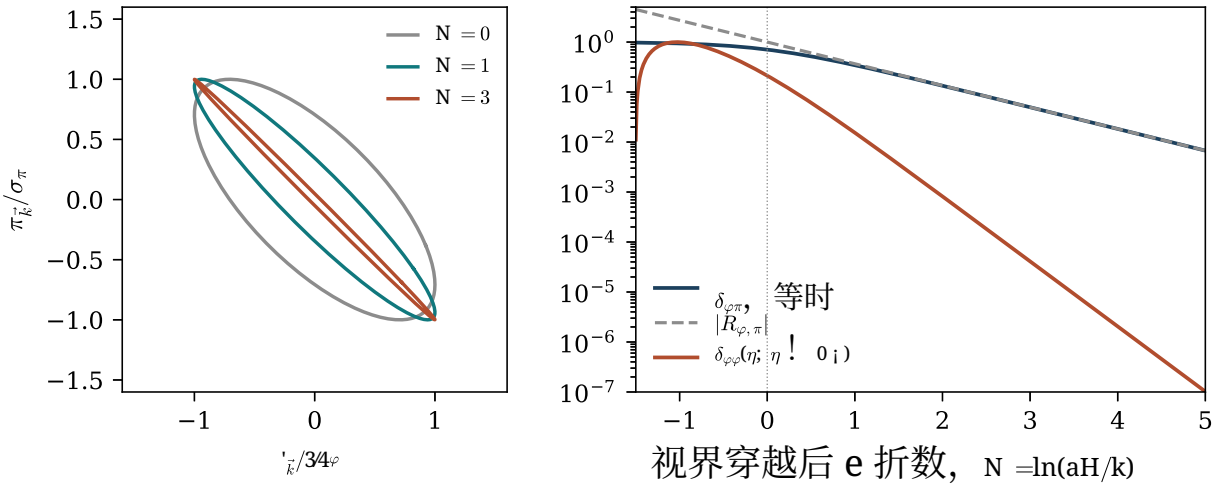


图2： 德西特。左：在视界穿越时以及 ρ_o 个 $\varphi_{\vec{k}}/\sigma_\varphi$、$\pi_{\vec{k}}/\sigma_\pi$) 平面中的协方差椭圆，以及 $N=1$，3 个 e 折数之后的情况。其面积与 $\delta_{\varphi\pi}=\sin\theta$ 成正比，即与对易子的相对大小成正比。右：在等时时刻，$\delta_{\varphi\pi}$，比值 $R_{\varphi,\,\pi}$ 即 [1], 与 $\delta_{\varphi\varphi}$ 之间，在时间 η 与晚期时刻之间的比值，作为视界穿越后 e 折数的函数。

C 德西特

在德西特时空中，$a=-1/(H\eta)$，而 Bunch–Davies 模函数为 [1, (3.3)]

$$e_k=\Big(\frac{1}{a}+i\frac{H}{k}\Big)\frac{e^{-ik\eta}}{\sqrt{2k}},\qquad a^2e_k'=-\frac{ika}{\sqrt{2k}}\,e^{-ik\eta}. \tag{4.12}$$

因此 $\arg e_k=\Theta_k(\eta)$，其中 $\Theta_k=\arctan(aH/k)+k/(aH)$，且 $\arg(a^2e_k')=-\frac{\pi}{2}-k\eta$。令 $N=\ln(aH/k)$ 表示自视界穿越以来的 e 折数，推论 11 给出

$$\delta_{\varphi\pi}(\eta)=\Big[1+\Big(\frac{aH}{k}\Big)^2\Big]^{-1/2}\simeq e^{-N},\qquad C_{\varphi\pi}=-\frac{aH}{k}\,\delta_{\varphi\pi}\to-1, \tag{4.13}$$

$$\delta_{\varphi\varphi}(\eta_1,\eta_2)=\big|\sin\big(\Theta_k(\eta_1)-\Theta_k(\eta_2)\big)\big|\simeq\frac{1}{3}\Big|\Big(\frac{k}{a_1H}\Big)^3-\Big(\frac{k}{a_2H}\Big)^3\Big|\le\frac{1}{3}e^{-3N_1}, \tag{4.14}$$

$$\delta_{\pi\pi}(\eta_1,\ \eta_2)=\big|\text{正弦}\,k(\eta_1-\eta_2)\big|\le e^{-N_1}, \tag{4.15}$$

其中，N_1 指两个时刻中较早的一个。这些近似在视界穿越之后成立；我们使用了 $\Theta_k=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{3}(k/aH)^3+O((k/aH)^5)$。第一个关系重现了 $|R_{\varphi,\pi}|=k/(aH)=e^{-N}$ 的结果 [1, (3.6), (3.7)]。它还表明，由 [1, (4.31), (4.32)]，计算得到的范数乘积 $\|X_{\varphi_{\vec{k}}}\|\,\|X_{\pi_{\vec{k}}}\|=\sqrt{1+(aH/k)^2}$，是其倒数。第二个关系给出了在 [1, 附录 A] 中计算的双时比值的闭式表达式。由于 $R=\delta/|C|$，它重现了其中的数值：$|R|=(\sin 1-\cos 1)/(\sin 1+\cos 1)\simeq 0.218$ 在视界穿越与渐近未来之间 [1, (A7)]，以及 $|R|\simeq 8.17\times10^{-4}$ 在较早时刻为穿越后两个 e 折数时 [1, (A8)]。角度形式所补充的是其中的原因和速率。e_k 的相位按 $(k/aH)^3$ 冻结，因此在视界穿越之后，不同时刻的场算符相对于其涨落而言彼此对易，其精度远高于同一时刻场与动量之间的对易精度。表1汇总了这些结果。根据命题 9 和推论 11，视界穿越后晚于 N 个 e 折数的时刻，在任意排序下，场模与动量模的每个 n 点函数都与相应的 ρ_o 矩一致，其相对误差至多为 $(n-1)!!\,\frac{n}{2}\,e^{-N}$。如果只涉及场算符，误差至多为 $(n-1)!!\,\frac{n}{6}\,e^{-3N}$。对于 $N=55$，这些数值分别为 10^{-24} 和 10^{-72} 乘以组合因子量级。

表1： 德西特中模观测量对的非对易修正相对大小 $\delta = |\sin\theta|$ 与经典关联 $C = \cos\theta$，即视界穿越后 N 个 e 折数（较早的两个时刻中的 N_1 ）的结果。

pair	δ，精确值	δ，对于 $N \gg 1$	C，对于 $N \gg 1$
$\varphi_{\vec{k}}(\eta)$, $\pi_{\vec{k}}(\eta)$	$[1 + (aH/k)^2]^{-1/2}$	e^{-N}	-1
$\varphi_{\vec{k}}(\eta_1)$, $\varphi_{\vec{k}}(\eta_2)$	$\lvert\sin(\Theta_k(\eta_1) - \Theta_k(\eta_2))\rvert$	$\leq \frac{1}{3}e^{-3N_1}$	$+1$
$\pi_{\vec{k}}(\eta_1)$, $\pi_{\vec{k}}(\eta_2)$	$\lvert$正弦 $k(\eta_1 - \eta_2)\rvert$	$\leq e^{-N_1}$	$+1$
$q_{\vec{k}}$,$p_{\vec{k}}$ 的 [1, (4.18)]	1	1	0

D 暴胀之后：辐射时代

在 [1, 第三节]中发现，在辐射主导和物质主导宇宙中，比值 $R_{\varphi,\pi}$ 会增长，因此非对易性不会衰减。该分析使用了每个背景下的自然真空，例如辐射情形中的 [1, (2.22)] 。然而，暴胀之后辐射时代中微扰的态继承自暴胀；相对于辐射时代真空而言，它处于高度激发状态。现在我们将证明，对于这一态，衰减仍然存在。

考虑先经历德西特时期、随后进入辐射主导时期的情形，其中 a 且 a' 在暴胀结束时连续， $\eta = \eta_e$。因此， $a = -1/(H\eta)$ 对于 $\eta \leq \eta_e$成立，而 $a = a_e + a_e^2 H(\eta - \eta_e)$ 对于 $\eta \geq \eta_e$成立。在辐射时代， $\chi_k = a\, e_k$ 满足 $\chi_k'' + k^2\chi_k = 0$。将 e_k 和 e_k' 在 η_e 处与 Bunch–Davies 模式（4.12）相匹配，得到

$$\chi_k = \frac{\alpha_k e^{-ik\eta} + \beta_k e^{ik\eta}}{\sqrt{2k}}, \qquad \alpha_k = 1 - \frac{i}{x_k} - \frac{1}{2x_k^2}, \qquad \beta_k = \frac{e^{-2ix_k}}{2x_k^2}, \qquad x_k = k\eta_e = -e^{-N_k}, \tag{4.16}$$

其中， $N_k = \ln(a_e H/k)$ 是从视界离开到暴胀结束之间的 e 折数，且 $|\alpha_k|^2 - |\beta_k|^2 = 1$。相对于辐射时代真空态的占据数为$n_{\vec{k}} = |\beta_k|^2 = e^{4N_k}/4$。令 $\alpha_k\bar{\beta}_k = |\alpha_k||\beta_k|e^{2iu_0}$，可得精确分解

$$\chi_k = \frac{e^{i\psi_k}}{\sqrt{2k}}\Big[(|\alpha_k| + |\beta_k|)\cos u_k - i\,(|\alpha_k| - |\beta_k|)\sin u_k\Big], \qquad u_k = k\eta - u_0, \tag{4.17}$$

具有常相位 ψ_k 以及 $(|\alpha_k| + |\beta_k|)\ (|\alpha_k| - |\beta_k|) = 1$。模函数是驻波，其相位被锁定，修正项的相对阶数为 $(|\alpha_k| + |\beta_k|)^{-2} \simeq 1/(4n_{\vec{k}})$ 。推论 11给出，在 $S_k = |\alpha_k| + |\beta_k|$,

$$\delta_{\varphi\varphi}(\eta_1, \eta_2) = \frac{|\sin(u_1 - u_2)|}{\sqrt{(S_k^2\cos^2 u_1 + S_k^{-2}\sin^2 u_1)(S_k^2\cos^2 u_2 + S_k^{-2}\sin^2 u_2)}} \tag{4.18}$$

在辐射时代的两个时刻。重新进入之后，当 $a'/a \ll k$ 时，

$$\delta_{\varphi\pi}(\eta) \simeq \frac{1}{\sqrt{(S_k^2\cos^2 u_k + S_k^{-2}\sin^2 u_k)(S_k^2\sin^2 u_k + S_k^{-2}\cos^2 u_k)}} \simeq \frac{1}{2n_{\vec{k}}|\sin 2u_k|}. \tag{4.19}$$

因此，远离 $\varphi_{\vec{k}}$ 和 $\pi_{\vec{k}}$的节点时，非对易修正仍受到占据数倒数的抑制，而暴胀期间建立的相位关系得以继承：$\delta_{\varphi\varphi}$ 暴胀期间的某一时刻与之后任意时刻之间的相位关系，都保持其暴胀结束时的数值。例外情况是节点，即 $\cos u_k = 0$ 或 $\sin u_k = 0$。在那里，根据（4.19）， $\delta_{\varphi\pi} = 1$，趋零观测量的涨落非常小，以至于对易子相对于它不再可以忽略。

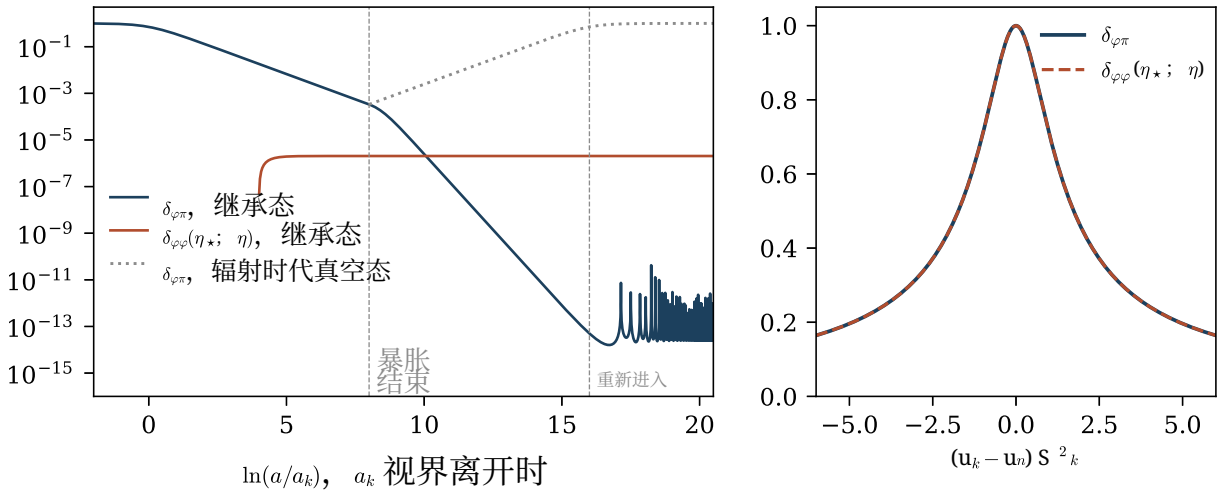


图3： 德西特时期随后进入辐射主导时期，对于一个离开哈勃半径 $N_k = 8$ 个 e 折数后暴胀结束的模。左图：$\delta_{\varphi\pi}$ 和 $\delta_{\varphi\varphi}$（$\eta_\star$，η），其中 $\eta_\star$ 为视界离开后四个 e 折数时、从暴胀继承的态（实线）。辐射时代真空态 [1, （2.22）] 作为比较显示（点线）。重新进入后，继承态具有 $\delta_{\varphi\pi} \sim 1/(2n_{\vec{k}})$，其中 $n_{\vec{k}} = e^{4N_k}/4$；节点处的窄尖峰在此尺度下无法分辨。右图：$\delta_{\varphi\pi}$ 和 $\delta_{\varphi\varphi}$ 穿过节点 u_n 处的轮廓 e_k，作为 $u_k - u_n$ 的函数，并以 S_k^{-2} 为单位；两条曲线几乎重合。

每个这样的窗口宽度为 $\Delta(k\eta)$，$\simeq S_k^{-2} \simeq 1/(4n_{\vec{k}})$，因此其所占时间比例约为$1/n_{\vec{k}}$。图 3 展示了 $N_k = 8$的这些特征，以及 [1],的辐射时代真空的行为；对于该真空，$\delta_{\varphi\pi} = k\tau/\sqrt{1+k^2\tau^2} \to 1$可以用共形时间 τ表示，其中 $a \propto \tau$。对于现实的 $N_k \approx 55$，$1/n_{\vec{k}} \sim e^{-220}$。

E 正分布无法捕捉的内容

一个重现所有 Weyl 序 n点函数的正分布，再加上使所有其他序以极高精度达成一致的角度，可能会让人以为量子性已荡然无存。一个自由度中已经显现的两个事实表明并非如此。首先，一个态的纯度为 $\mathrm{Tr}\,\hat{\rho}^2 = 2\pi\hbar\int \rho^2\,\mathrm{d}\mu_L$。对于纯高斯态，即使 ρ 是一个扩展开的分布，这个值仍等于一：纯度并不是 ρ 作为经典概率分布时所具有的性质。其次，量子效应的 Weyl 符号不一定处于零和一之间；真空投影算符的 Weyl 符号为 $2e^{-\zeta\bar{\zeta}}$，以第 II 节的单位表示。在宇宙学中，最鲜明的例子由一对模 $\pm k$给出。

考虑第 IV.D 节的辐射时代，并设 $\hat{c}_{\pm\vec{k}}$ 为辐射时代真空 [1, (2.22)], 所定义的湮灭算符，其中 $\hat{\varphi}_{\vec{k}} = f_k\hat{c}_{\vec{k}} + \bar{f}_k\hat{c}^\dagger_{-\vec{k}}$ 满足 $f_k = e^{-ik\eta}/(a\sqrt{2k})$。将其与(4.16)中的$e_k = \alpha_k f_k + \bar{\beta}_k\bar{f}_k$ 比较可得 $\hat{c}_{\vec{k}} = \alpha_k\,\hat{A}_{\vec{k}} + \bar{\beta}_k\,\hat{A}^\dagger_{-\vec{k}}$。在以 $\hat{c}_{\pm\vec{k}}$为基础构造的 Bargmann表示中，$\hat{c}^\dagger_{\pm\vec{k}}$ 的作用是乘以 $\zeta_{\pm\vec{k}}$，条件 $\hat{A}_{\vec{k}}\Psi = 0$ 表示为 $(\bar{\alpha}_k\partial_{\zeta_{\vec{k}}} - \bar{\beta}_k\zeta_{-\vec{k}})\Psi = 0$，$\vec{\ }$ $\vec{\ }$，类似地对 $k \leftrightarrow -k$也成立。因此

$$\Psi(\zeta_{\vec{k}}, \zeta_{-\vec{k}}) = \left(1 - \frac{|\beta_k|^2}{|\alpha_k|^2}\right)^{1/2} \exp\left(\frac{\bar{\beta}_k}{\bar{\alpha}_k}\,\zeta_{\vec{k}}\zeta_{-\vec{k}}\right), \tag{4.20}$$

其具有定理2 所述的双自由度高斯形式，并带有一个非对角二次项。其分布为正值，这是必然的。然而，4.20是一个双模压缩真空态，其压缩参数为 r_k，由 $\sinh^2 r_k = |\beta_k|^2 = n_{\vec{k}}$给出。在由 $\hat{c}_{\vec{k}}$ 和 $\hat{c}_{-\vec{k}}$所定义的因子化中，

表2： 双模压缩真空态（4.20）的位移宇称测量最大 CHSH 值，作为 r_k的函数：受限设置（闭式形式）以及对全部四个位移进行数值优化。

r_k	0.25	0.5	1	2	3	∞
受限	2.080	2.144	2.184	2.190	2.191	$1+3\cdot 2^{-4/3}$
全部位移	2.107	2.220	2.308	2.324	2.324	$8\cdot 3^{-9/8}$

因此，模 k 和 $-k$ 彼此纠缠。它们中的一个模的约化态是平均占据数为 $n_{\vec{k}}$ 的热态，其纠缠熵为

$$S_{\vec{k}} = (n_{\vec{k}}+1)\ln(n_{\vec{k}}+1) - n_{\vec{k}}\ln n_{\vec{k}} \simeq \ln n_{\vec{k}} + 1 \simeq 4N_k - \ln 4 + 1. \tag{4.21}$$

正分布对应的结论则有所不同。在相同坐标下计算得到的 ρ_o两个模之间的经典互信息为 $I_\rho = 2\ln\cosh 2r_k = 2\ln(1+2n_{\vec{k}}) \simeq 8N_k - 2\ln 2$。应与之比较的是这对模的量子互信息 $2S_{\vec{k}} \simeq 8N_k + 2 - 4\ln 2$，而不是纠缠熵 $S_{\vec{k}}$，后者只有前者的一半。即便如此，I_ρ也不是$2S_{\vec{k}}$，而是其 R´enyi-2 对应量。对于协方差为 V的高斯态，$-\ln \mathrm{Tr}\,\hat{\rho}^2 = \frac{1}{2}\ln\det(2V/\hbar)$，因此 $I_\rho = S_2(\hat{\rho}_{\vec{k}}) + S_2(\hat{\rho}_{-\vec{k}}) - S_2(\hat{\rho})$，其中 $S_2 = -\ln \mathrm{Tr}\,\hat{\rho}^2$ [31]。由于 R´enyi 熵不会随阶数增加而增大，因此对于每个 N_k，$I_\rho < 2S_{\vec{k}}$；二者均随 $8N_k$增长，且其差趋于 $2-2\ln 2 \simeq 0.614$。纠缠可通过线性可观测量，依据 [29, 30]的可分性判据检测。对于正交分量 $\hat{c}_{\pm\vec{k}} = (\hat{q}^c_{\pm\vec{k}} + i\hat{p}^c_{\pm\vec{k}})/\sqrt{2}$，在由 $\arg(\alpha_k\beta_k)$确定的局域相位旋转之后，

$$\mathrm{Var}(\hat{q}^c_{\vec{k}} - \hat{q}^c_{-\vec{k}}) + \mathrm{Var}(\hat{p}^c_{\vec{k}} + \hat{p}^c_{-\vec{k}}) = 2\hbar\, e^{-2r_k} < 2\hbar, \tag{4.22}$$

而每个可分态给出的值至少为 $2\hbar$。等价地，部分转置将 ρ_o 的协方差（作为经典协方差它是正定的）映射为一个辛特征值为 $\frac{\hbar}{2}e^{-2r_k}$ 的协方差，从而违反量子界；对数负性为 $2r_k \simeq 4N_k$，因为 $r_k = \mathrm{arcsinh}\sqrt{n_{\vec{k}}} \simeq 2N_k$。

贝尔不等式提供了更严格的检验。对两个模进行求积测量时，可以直接基于正分布构造局域隐变量模型：从 ρ_o 中抽取 Γ 的一个点，并计算局域线性函数。位移宇称测量 $(-1)^{\hat{c}^\dagger\hat{c}/\hbar}$ 的关联值就是维格纳函数 [20, 32], 的取值，却不满足这一条件。式（4.20）的 CHSH组合仅取决于 r_k。将位移限制在一个求积方向上，对一个模选取 0、d，对另一个模选取 0、$-d$（在进行上述局域相位旋转后），可得到闭式表达式 $1+2e^{-cx}-e^{-2(c+s)x}$，其中 $x = d^2/\hbar$、$c = \cosh 2r_k$，而 $s = \sinh 2r_k$。它在 $x = \ln[(c+s)/c]/(c+2s)$ 处达到最大值。对任意 $r_k > 0$，该值都超过局域界 2，并趋近于 $1+3\cdot 2^{-4/3} \simeq 2.191$ [20]。对所有位移进行数值优化可得到更大的值（见表2），并趋近于 $8\cdot 3^{-9/8} \simeq 2.324$ [33]。由于 $r_k \simeq 2N_k$，在暴胀结束时位于哈勃半径外数个 e 折数的模，已经能够达到这一渐近违反值。在宇宙学中，Martin 和 Vennin [24] 已分析了这类及相关类型的贝尔不等式。

这些结果与前面的各小节完全一致。占据数$n_{\vec{k}}$ 使线性可观测量的非对易修正可以忽略不计，$\delta_{\varphi\pi} \sim 1/(2n_{\vec{k}})$ 由（4.19）给出。这个数值也正是使纠缠熵很大、贝尔不等式违背达到最大程度的数值。强压缩使线性可观测量呈现经典性，同时也使具有奇异 Weyl 符号的非线性可观测量呈现最大程度的非经典性。$\hat{k}$ 与 $-k$ 之间的纠缠也是一种因子化的表述。在 $A_{\pm\vec{k}}$ 所定义的因子化中，该态是真空态，是一个乘积态，因此纠缠衡量的是选择该态的复结构 J 与用于定义子系统的辐射时代真空的复结构之间的相对位置。此外，这是全局傅里叶模之间的纠缠，而局域观察者

无法访问 [8]。对于有限个具有紧支撑的场模，其约化态总是混合态；与空间区域相比，纠缠在这些场模之间要少见得多，即使在闵可夫斯基真空中也是如此 [34]。Ribes-Metidieri、Agullo 和 Bonga 利用真空在经典相空间上诱导的度量和复结构证明，在德西特空间的 Bunch–Davies 真空中，这类模之间的关联比在闵可夫斯基真空中更强，但纠缠更弱；而且，随着哈勃率增大，它们的纠缠会减弱 [8, 9]。因此， $\pm\vec{k}$这一对模具有很强的纠缠，并不意味着局域可观测量之间存在纠缠。上述内容都不影响 n中确立的 Weyl 排序 [1]点函数等式；它只是界定了该等式的含义。

F 备注

(1) 与时间无关的内容。 定理 10 在任何 FLRW 背景中都成立，无论是否存在暴胀，因为 ρ_o 存在于解空间中。取决于动力学的是可观测量的几何结构 $\varphi_{\vec{k}}(\eta)^{\pi}{}_{\vec{k}}(\eta)$ 相对于 ρ_o的几何结构，即推论 11中的角度。暴胀会将这些角度驱动至 0 或 π，而随后的辐射时代会为继承态保持这种对齐，但节点附近除外。这正是精确的含义：暴胀虽不是分布存在的必要条件，却使剩余的非 Weyl 排序信息变得可以忽略。

(2) 与衰减模的关系。 向量场的对齐意味着，在视界穿越之后， $\varphi_{\vec{k}}(\eta)$ 和 $\pi_{\vec{k}}(\eta)$ 本质上测量的是 $z_{\vec{k}}$ 和 $\bar{z}_{-\vec{k}}$的同一个线性组合：增长模的振幅。正交组合，即衰减模，对两个可观测量的贡献都带有受 $k/(aH)$ 的幂次抑制的权重。这就是熟知陈述的几何内涵：在视界穿越之后，微扰表现为经典随机场，其实现仅在增长模的振幅上有所不同 [4, 5]。在这里，它表现为关于 ρ_o 以及推论 11 中角度的陈述，并具有明确的误差界，且无需诉诸退相干。

(3) 混合态与相互作用。例如，对于混合准自由态（如暴胀前的热态），所有角度关系均成立，只需将 δ 除以 $1+2n_{\vec{k}}$，因此经典噪声会进一步抑制对易子的相对大小。相互作用，即模耦合，会从两个方面改变这一图景。态通常不再是高斯态，因此根据定理 2，其分布不必保持正值。此外，演化后可观测量的 Weyl 符号会产生量子修正。这些效应超出了本文的讨论范围。

V 讨论

对 [1] 的分析表明，在计算 Weyl 排序的 n点函数时，线性微扰的量子真空可以由相空间上的经典分布 ρ_o 取代，而且这种替代是精确的。本文探讨了这种替代在多大程度上成立，以及它具体忽略了什么。

关于第一个问题，这一构造可推广到每一个态：方程（2.8）直接在 Bargmann表示中给出一个实归一化函数 ρ_Ψ ，其矩是 Weyl排序的期望值。对于纯态而言，对于 [1]中所考察的相干态和压缩态，它恰好是一个概率分布。这些态中的每一个都是相空间某一点处、与之相容的 K¨ahler 结构的高斯，因此 [1] 的几何图景并不局限于某个特定的真空态。Bargmann密度 $|\Psi|^2 \mathrm{d}\mu_B$，它在 ρ_o 中提供了 [1], , 始终为正值，但再现的是反正规序乘积，并且仅在真空态下才与 ρ_Ψ 重合。对于相干态叠加，与相应混合态的比较取决于可观测量的分辨率。分辨率低于波包间距的可观测量无法区分它们；而位移宇称以及其他具有奇异 Weyl 符号的可观测量则可以做到。

关于第二个问题，对于线性可观测量，答案完整而简单。每一种排序与 Weyl排序的差异，都可表示为半对易子的乘积之和；这些半对易子是 c-数，并乘以同一分布的低阶矩，见方程（3.2）。因此， ρ_Ψ 中未包含的唯一量子信息，就是辛结构本身。对于每一对可观测量，相对于经典涨落而言，它的重要性由态的 K¨ahler 几何中的一个角度来度量。该角度的余弦是 ρ中的相关系数，其正弦是对易子的相对大小，其正切是 R 的 [1], 比值；对于正则对，其余割是压缩程度，见命题8。从这个意义上说， [1] 中讨论的三种经典性概念，是同一个几何量的三种解读。正如其中所强调的，它们在概念上仍然彼此不同： ρ 无论角度为何都存在，而角度取决于所考察的可观测量。但它们不再彼此独立。特别是，非韦尔排序修正的微小性并不是$\hbar \to 0$的结果；对于纯高斯态，它与 $\hbar$无关。这是动力学的结果：动力学使所关注的可观测量的哈密顿向量场，相对于固定的 K¨ahler 度量实现对齐。

对于 FLRW时空中的场，分布定义在解空间上且不随时间演化，因此，Weyl 排序的 n点函数等式在任意时刻（包括可能彼此不同的时刻）以及任意均匀各向同性准自由态下都成立。角度则会演化。在德西特时空中，当 e^{-N} 相对于它们的涨落而言时，等时场与动量的对易子变得可以忽略；而当 $e^{-3N}/3$时，两时刻场的对易子也变得可以忽略。命题 9 将这些速率转化为对任意排序 n 点函数的界。暴胀之后，辐射时代继承的态仍保持这种对齐，修正量相对于占据数为其倒数的量级，但模函数节点附近的短暂区间除外。这与文献 [1] 的发现相辅相成：在辐射主导宇宙的自然真空中，非对易性并不会消退；关键在于态，而非单独的背景。

我们没有探讨经典系综的诠释问题，即其中某个成员是否以及如何实现；这一问题一直存在争论 [25]。本文的结果关注的是：量子态的哪些预言与经典分布的预言一致、对哪些可观测量成立，以及精确到何种程度。第 IV.E 节 明确说明了这些界限。使线性可观测量呈现经典性的同一压缩$\vec{}$，也使一对 $\pm k$ 在辐射时代真空所定义的因子化下高度纠缠，其熵为 $\simeq 4N_k$。这是全局模之间的纠缠；对于具有紧支撑的场模，Bunch–Davies态所携带的纠缠少于闵可夫斯基真空 [8, 9]。它还会在位移宇称测量中产生贝尔不等式违背；这类测量也能探测第 II.F节的干涉项，其数值接近这类测量所能达到的最大值 $8 \cdot 3^{-9/8}$ [33, 24]。这些可观测量不是线性的，且其 Weyl 符号是奇异的，因此不在命题 8的适用范围内。本文确立的预言一致性，针对的是一类特定的可观测量，而不是所有测量。类似地，第 II.E 节 的平滑深度表明，对于纯态，只有在高斯情形下，才存在比相干态分辨率更精细的正分布。纯态的任何非高斯性，无论多么微弱，都会使正性所需的平滑程度一直达到Bargmann密度。若能将分析拓展至相互作用场，将会很有意义；在这类场中，态不再是高斯态，演化后可观测量的 Weyl 符号也会获得量子修正。本文的精确排序公式和角度界应能为这类分析提供有益的起点。

致谢

感谢 Abhay Ashtekar 和 Aruna Kesavan 的合作，本工作正是在此基础上完成的。

A 数值检验

所有闭式结果都在维数为 60–70 的截断福克基中进行了数值检验。公式 (2.8) 在若干点上与一个支集位于前五个能级的随机态的位移宇称表达式进行了比较，并将五阶以内的维尔排序矩与通过求积计算的 ρ_Ψ 的矩进行了比较；两者的一致性达到 10^{-9} 或更高精度。在同一个非高斯态中，对至多五个线性算符的随机乘积检验了排序公式 (3.1)；压缩态公式 (2.13)–(2.14)、反正规则 (2.16)、关系式 (2.17)、叠加公式 (2.21)–(2.23) 以及 (3.7) 的等号情形，也都验证到了机器精度。不等式 (3.8) 在压缩态中对 200 组至多包含六个线性可观测量的随机集合进行了测试；对于 $n = 2$，界均达到且从未超出。将平滑公式 (2.19) 与广义宇称表达式及直接高斯卷积进行了比较；将第 II.B 节的四点检验与在福克基中计算的 Weyl算符进行了比较；还对双模态 (4.20) 及其满足条件 $A_{\vec{k}}\Psi = 0$、其约化占据数、熵以及对于 I_ρ 的 R´enyi-2 恒等式进行了检验。表2中的 CHSH 值通过对全部四个位移进行优化，并采用数百组随机初始条件获得。德西特公式 (4.13)–(4.15) 与从远在哈勃半径以内开始对模方程进行直接数值积分的结果进行了比较。第 IV.D 节的匹配模型采用精确分解 (4.17) 进行了计算，从而避免了大系数 α_k 和 β_k 之间的抵消，并针对 $N_k = 3$ 与直接计算结果进行了验证。用于检验闭式结果和文中所列数值、以及生成图表的脚本，均作为附属文件提供。

参考文献

[1] Ashtekar A、Corichi A 和 Kesavan A 2020 早期宇宙中经典行为的涌现《物理评论 *D*》**102** 023512（arXiv:2004.10684）[2] Grishchuk L P 和 Sidorov Y V 1990 遗迹引力子的压缩量子态与原初密度涨落《物理评论 *D*》**42**3413[3] Albrecht A、Ferreira P、Joyce M 和 Prokopec T 1994 暴胀与压缩量子态《物理评论 *D*》**50**4807[4] Polarski D 和 Starobinsky A A 1996 宇宙学微扰的半经典性与退相干《经典与量子引力》**13**377（arXiv:gr-qc/9504030）[5] Kiefer C、Polarski D 和 Starobinsky A A 1998 早期宇宙中涨落从量子到经典的转变《国际现代物理学杂志 *D*》**7**455[6] Kiefer C 和 Polarski D 2009 为什么宇宙学微扰在我们看来是经典的?《先进科学快报》**2** 164（arXiv:0810.0087）[7] Agullo I、Bonga B 和 Ribes Metidieri P2022 暴胀会压缩宇宙学微扰吗?《宇宙学与天体粒子物理学杂志》JCAP09(2022)032（arXiv:2203.07066）[8] Ribes-Metidieri P、Agullo I 和 Bonga B 2024 暴胀不会在局域可观测量中产生纠缠（arXiv:2409.16366）[9] Ribes-Metidieri P、Agullo I 和 Bonga B 2026 德西特时空中局域可观测量之间的纠缠与关联《物理评论 *D*》**113**065001（arXiv:2511.17382）

[10] Wigner E 1932 关于热力学平衡的量子修正 Phys. Rev. 40 749[11] Moyal J E 1949 作为统计理论的量子力学 Proc. Camb. Phil. Soc. 45 99[12] Hillery M、O'Connell R F、Scully M O 和 Wigner E P 1984 物理学中的分布函数：基础 Phys. Rep. 106 121[13] Royer A 1977 作为宇称算符期望值的Wigner函数 Phys. Rev. A 15 449[14] Cahill K E 和 Glauber R J 1969 密度算符与准概率分布 Phys. Rev. 177 1882[15] Husimi K 1940 密度矩阵的一些形式性质 Proc. Phys. Math. Soc. Japan 22 264[16] Hudson R L 1974 Wigner准概率密度何时为正值？ Rep. Math. Phys. 6 249[17] Soto F 和 Claverie P 1983 多维系统的Wigner函数何时为非负？ J. Math. Phys. 24 97[18] Br¨ocker T 和 Werner R F 1995 具有正值Wigner函数的混合态 J. Math. Phys. 36 62[19] Mandilara A、Karpov E 和 Cerf N J 2009 将Hudson定理扩展到混合量子态 Phys. Rev. A 79 062302（arXiv:0808.2501）[20] Banaszek K 和 W´odkiewicz K 1998 Wigner表示中爱因斯坦–波多尔斯基–罗森态的非定域性 Phys. Rev. A 58 4345（arXiv:quant-ph/9806069）[21] Robertson H P 1929 不确定性原理 Phys. Rev. 34 163[22] Schr¨odinger E 1930 Zum Heisenbergschen Unsch¨arfeprinzip Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Phys.-Math. Kl. 14 296[23] Minlos R A 1959 广义随机过程及其向测度的扩展 Trudy Moskov. Mat. Obshch. 8 497 [24] Martin J 和 Vennin V 2016 一般压缩态中连续变量系统的贝尔不等式 Phys. Rev. A 93 062117（arXiv:1605.02944）[25] Berjon J、Okon E 和 Sudarsky D 2021 对宇宙学中经典性涌现主流解释的批判性评述 Phys. Rev. D 103 043521（arXiv:2009.09999）[26] Bochner S 1933 单调函数、Stieltjes积分与调和分析 Math. Ann. 108 378[27] Dangniam N 和 Ferrie C 2015 基于射影表示构建的相空间的量子博赫纳定理 J. Phys. A: Math. Theor. 48 115305（arXiv:1410.5755）[28] Lee C T 1991 非经典态的非经典性度量 Phys. Rev. A 44 R2775[29] Duan L-M、Giedke G、Cirac J I 和 Zoller P 2000 连续变量系统的不可分判据

[30] Simon R 2000年 连续变量系统的 Peres–Horodecki 可分性判据《物理评论快报》**84** 2726 [31] G. Adesso、D. Girolami 和 A. Serafini 2012年 使用二阶 R´enyi 熵测量高斯量子信息和关联《物理评论快报》 **109** 190502 (arXiv:1203.5116)[32] K. Banaszek 和 W´odkiewicz K 1999 年 在相空间中检验量子非定域性 《物理评论快报》**82** 2009[33] H. Jeong、W. Son、M. S. Kim、D. Ahn 和 Brukner ˇC 2003年 使用二值观测量对连续变量态进行量子非定域性检验 《物理评论 *A*》 **67** 012106 (arXiv:quant-ph/0210110)[34] Agullo I、B. Bonga、P. Ribes-Metidieri、D. Kranas 和 S. Nadal-Gisbert 2023年 量子场论中的纠缠究竟有多普遍? 《物理评论 *D*》 **108**085005 (arXiv:2302.13742)