arXiv:2611.31913v1 [math.GT] 24 Nov 2026

用于双曲 Coxeter 多胞体维数界的线性规划证书

Alexander Kolpakov

2026年11月19日

摘要

我们利用线性规划，根据局部几何估计和算术估计，推导双曲 Coxeter 多胞体维数的上界。有理证书分别为有限体积多胞体、紧多胞体和紧算术多胞体给出 57、17 和 15 的上界。在有限体积情形中，该证书是定义在顶点与二维面之间关联上的权函数。在紧致情形中，不等式涉及从内部点最远的顶点处一个固定切向量的正交投影的平方范数。我们给出这些线性规划的统一表述，证明维度阈值的单调性，并描述对这些证书的精确验证。局部估计取自配套的几何证明。

目录

1 引言 **2**

2 几何记号与线性规划 3

2.1 面法向量与考克斯特图.3 2.2 最远顶点处的向量.4 2.3 构型的类与局部不等式.4 2.4 齐次线性规划.5

3 有限体积 : 顶点—面关联上的权重 6

3.1 顶点图与关联不等式.6 3.2 关联线性规划及其对偶.8 3.3 定义角权重的函数.9 3.4 局部面不等式.10 3.5 有限顶点：网络表述.11 3.6 理想顶点与高维估计.13 3.7 所选权重族内的最优界.16 3.8 有限体积维数界.17

4 线性规划 平方投影范数的 ams 18

4.1 归一化与对偶性.18 4.2 紧致情形下的对偶不等式.20

5 紧情形 **20**
5.1 小分支与例外墙配置.21 5.2 大分量.22 5.3 配置的穷举族.24 5.4 局部排除条件.25 5.5 对偶证书.27

6 紧的算术情形 **27**
6.1 算术假设与局部结果.27 6.2 记号与局部范数不等式.29 6.3 十七秩配置.30 6.4 十六秩构型.30 6.5 局部算术排除.32 6.6 算术情形的对偶证书.33

7 排除所有高维情形 **33**

8 线性证书的精确验证 **34**

9 进一步约束 **34**

A 来源与可复现性 **35**

1 引言

双曲 Coxeter 多面体的维数上界可以通过将局部不等式与全局关联计数或向量范数的界进行比较来证明。我们将这些比较表述为线性规划。它们的约束是多面体存在的必要条件，而其不可行性则证明了维数界。对偶线性规划描述了证明中所使用的局部不等式的组合。

我们从配套论文及补充材料 [1,2]的局部结果中得到以下各界：

$$\begin{aligned} &n \le 57 \quad \text{in finite volume},\\ &n \le 17 \quad \text{in the compact case},\\ &n \le 15 \quad \text{in the compact arithmetic case}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Guo and Zheng [3] 证明了一般的有限体积界 $n \le 81$。本文旨在对（1.1）给出统一的线性规划处理。

在全文中，多胞体均为凸的、具有有限个面的满维多胞体。双曲空间的曲率为 -1。Coxeter 多面体的所有二面角均形如 π/m，其中 $m \ge 2$ 为整数。其反射群由关于其各个面的支撑超平面的反射生成。算术性始终指该群的算术性。对于 [2]的第 I/IV、II/V 和 III/VI 部分，我们分别将其称为补充材料 FV、C 和 A。下文所使用的局部结果均连同其假设一并陈述；其几何证明见这些补充材料。

定理 1.1（维数界的线性规划证明）。 下文陈述的局部估计和分类给出了以下有理证书。

（i）对于每个整数 $n \geq 58$，都存在一个定义在顶点—面关联上的非负权函数，满足命题 *3.3* 中的面不等式和顶点不等式。因此，有限体积关联问题不可行。

(ii)针对紧多胞体投影范数平方的归一化线性规划，定义见 (4.3)，在维度 18，.. . ，29的完备构型族上不可行。其对偶问题有一个有理数解，可证明该问题不可行。

(iii) 对于维度为 16，.. . ，29的紧算术多胞体，同样的结论也成立。在维度 16 和17 时，该程序使用下文给出的算术分类和不等式；在维度 18，.. . ，29 时，则使用第(ii)部分中的紧致构型和不等式。

结合 *Vinberg* 的紧性界 $n \leq 29$，这些证书可推出 (1.1)。

定理 2.3 给出了共同的线性论证。假设多胞体确定了一组满足齐次局部约束和严格全局不等式的非负变量。将其除以正的超额量，可得到归一化可行性问题的一个解。对偶不等式与该归一化相矛盾。命题 2.4 证明了单调性：提高维数下界，会从一个固定族中移除一些构型。

Case	线性规划中的量	对偶不等式
有限体积	对角函数求和 面和顶点上的	面和的下界以及 顶点和的上界
紧的	正交投影的平方范数 其总和小于一的固定向量	局部不等式的非负组合 系数至多为 每个变量一个
紧的 算术	相同的投影范数，但须满足 额外的算术限制	相同的对偶程序，但带有 算术不等式和排除的 构型

局部估计和构型的穷尽列表是线性论证的假设。这包括导出两个算术列表的约化步骤。对所搜索的对偶系数施加的条件作用不同：这些条件确保某个线性组合能够证明所需的矛盾。每当同一表述中同时出现这两类条件时，我们都会将前者与对多胞体的几何限制区分开来。

每个局部估计均在其规定的秩、标记和其他分量范围内使用。普通二面体分量保留其完整的整数参数范围。满足这些必要条件的构型未必几何可实现；然而，每个多胞体都必须对应其中一种构型。本文中的所有有限小数均表示精确有理数。

2 几何记号与线性规划

2.1 面法向量与考克斯特图

我们使用符号差为 $(-,+,\ldots,+)$ 的洛伦兹空间，其中双曲空间是未来向单位双曲面。面的支撑超平面称为壁。其向外的类空单位法向量为 u，且满足 $\langle u,u\rangle = 1$，胞腔不等式为 $\langle y,u\rangle \leq 0$。对于夹角为 π/m 的两个面，相应的格拉姆矩阵元素为 $-\cos(\pi/m)$。在有限顶点处，相邻面的格拉姆矩阵

为正定。其考克斯特图各连通分支的张成空间两两正交，且共同构成欧几里得切空间。

球面考克斯特图的格拉姆矩阵是正定的。连通仿射图的格拉姆矩阵是余秩为一的半正定矩阵。我们使用不可约球面图的标准列表：

$$A_r\ (r \ge 1), \quad B_r\ (r \ge 3), \quad D_r\ (r \ge 4), \quad E_6, E_7, E_8, F_4, H_3, H_4, \quad I_2(m)\ (m \ge 4).$$

这里 $A_2 = I_2(3)$；同构的图 B_2 和 D_3 不再单独列出。图的阶 是其节点数，其秩 是其格拉姆矩阵的秩。对于球面图，两者相同。含有 $r+1$ 个节点的连通仿射图，其格拉姆秩为 r。它所确定的理想顶点链接中的单纯形因子的维数为 r。在下面的顶点图形公式中，我们将区分阶与秩。

局部几何陈述中出现的所有面和面法向量都属于多胞体 P，除非明确将其引入为辅助对象。沿指定边与某顶点相对的面，指的是包含另一端点但不包含该顶点的面。将法向量替换为投影向量，并不会产生多胞体 P的另一个面。若断言某个辅助点位于 P 中，则该点必须满足每一个定义该多胞体的面不等式。考克斯特假设和算术假设施加于 P；不能假定任意一个面都满足这些假设。

2.2 最远顶点处的一个向量

设 P 为紧的。固定一点 $z \in \operatorname{int} P$，并选取距 z最大距离的顶点 p。令$H = -\langle z,\ p\rangle = \cosh\ d(z,\ p)$。分解式

$$z = H(p - x), \qquad x \in p^{\perp} \tag{2.1}$$

定义了 x 处切空间中的一个向量 p。事实上， $x = p - z/H$ 与 p正交，而 $z^2 = p^2 = -1$给出

$$\|x\|^2 = 1 - H^{-2} < 1. \tag{2.2}$$

洛伦兹型在 $p^{\perp}$上限制为欧几里得内积。令 W_1，……， W_k为 p处考克斯特图的连通分支的张成空间，并定义

$$e_j = \|\mathrm{proj}_{W_j} x\|^2, \qquad e_j \ge 0, \qquad \sum_{j=1}^{k} e_j = \|x\|^2 < 1. \tag{2.3}$$

因此，e_j 是一个平方范数，而不是一个投影向量。若干个e_j 之和是投影到相应子空间正交和上的平方范数。在这两个关于紧性的论证中，所有这些量均指固定向量 x。局部证明中使用的辅助点不会为（2.3）提供额外项。

2.3 配置类与局部不等式

定义 2.1。 维数为 n 的构型类穷尽族是集合$\mathcal{D}_b$的有限集合，其中有 $n_b = n$，其并集包含所考虑的每个几何构型。每个类由应用于该类的局部结果的全部假设确定。当不等式在整个参数范围内均成立时，一个类可以包含完整的参数范围。

这些类可能彼此重叠。一个几何构型可以被归入任何包含它的类中。类中的某些形式构型可能没有几何实现；纳入这些构型可以保持论证所需的方向。

局部范数不等式指定一组 S 正交分量和一个有理数$c \geq 0$ ，使得

$$\sum_{j \in S} e_j \geq c \tag{2.4}$$

在所述构型类上成立。我们称 S 为该不等式的支集。对某个分量的子空间投影的平方范数下界，也会给出该分量上平方范数的下界，这是因为被省略项均非负。对于有重叠的子空间，仍须在合并各个界时计入重复系数。

局部定理也可以证明某个指定构型不可能出现。我们称之为局部排除。其几何和算术假设构成类的定义的一部分。在齐次表述中，其缩放变量设为零。这种排除仅适用于所述类，而排除给定维数中的所有类则是线性规划的结论。

2.4 齐次线性规划

我们首先陈述线性证书所依据的有限维替代定理 s.

引理 2.2. 设 M 为有理矩阵， d 为尺寸相容的有理列向量。以下两个系统恰有一个有解：

$$Mu = d, \quad u \geq 0; \tag{2.5}$$

$$M^T y \geq 0, \quad d^T y = -1. \tag{2.6}$$

当任一系统可行时，它都有一个有理数解。

证明。令 K 为由 M的各列生成的锥。它是一个闭的多面体锥。若 $d \notin K$，由分离定理可得一个向量 y，使得 $y^T k \geq 0$ 在 K 上且 $y^T d < 0$；重新缩放可得（2.6）。若 $d \in K$，其非负的列系数给出（2.5）。两个系统不可能同时可行，因为它们将给出$-1 = d^T y = u^T M^T y \geq 0$。

关于有理性，在 $\mathbb{Q}$ 上定义的非空多面体具有一个有理点：将其限制到极小面的仿射包上，求解其有理等式系统，并用该仿射空间中的有理点逼近一个相对内部点。所有其余严格不等式在充分小的逼近下仍然成立。将此应用于所显示的两个有理系统。

□

将自由变量替换为两个非负变量之差，并引入松弛变量，即可将有限线性系统化为这种形式。下面我们还将用其所估计的几何量来表述其对偶不等式。

设 W 为一个实向量空间， I 为一个指标集。对每个 $i \in I$ ，指定一个整数 n_i、一个由局部变量构成的多面体锥 $C_i \subset \mathbb{R}^{k_i}$ 、一个线性平衡映射 $T_i : \mathbb{R}^{k_i} \longrightarrow W$，以及一个线性泛函 $d_i : \mathbb{R}^{k_i} \longrightarrow \mathbb{R}$。标签 n_i 表示多胞体的维数，即使 i 描述的是一个局部构型。锥 C_i 由齐次必要条件定义。映射 T_i 记录待施加的线性恒等式中的各项，而 d_i 记录它们对严格不等式的贡献。固定这些数据，使其独立于低维阈值。

对于整数 N ，考虑

$$u_i \in C_i \quad (n_i \geq N), \qquad \sum_{n_i \geq N} T_i u_i = 0, \qquad \sum_{n_i \geq N} d_i(u_i) = 1. \tag{2.7}$$

向量 u_i 中只有有限多个可能非零。对于无穷多个维度，令 W 为直和，并为每个维度设置独立的坐标。来自不同维度的关联恒等式随后仍彼此分离。有限个面的多胞体只会贡献有限项。

定理 2.3（归一化与对偶证书）。 假设所考虑的每个维数为 $n \geq N$ 的多胞体都确定一个有限支撑的向量族 $v_i \in C_i$，且当 $n_i \neq n$ 时为零，并且

$$\sum_i T_i v_i = 0, \qquad D := \sum_i d_i(v_i) > 0.$$

则 (2.7) 有解。在 W 上满足以下条件的线性泛函 λ

$$\lambda(T_i u) - d_i(u) \geq 0 \qquad (u \in C_i,\ n_i \geq N) \tag{2.8}$$

证明了不可行性，因而排除了所有这些多胞体。如果 I 是有限的， W 是有限维的，并且所有锥、映射和泛函都是有理的，那么不可行性等价于存在这样的有理证书。

证明。 令 $u_i = v_i/D$ 以得到归一化解。如果可行点和对偶证书同时存在，则在该点处对 (2.8) 求和将得到 $0 - 1 \geq 0$，这就产生矛盾。对于有限情形的逆命题，将每个有理多面体锥表示为有限个有理生成元，并将引理 2.2 应用于它们的像 $(T_i u,\ d_i(u))$，目标取为 $(0,\ 1)$。其分离泛函具有 $(\lambda,\ -1)$ 的形式，恰如 (2.8) 中所示。 □

命题 2.4（维数阈值的单调性）。 在固定的表述 (2.7) 中，在 $N' \geq N$ 处可行意味着在 N 处可行。因此，在 N 处不可行意味着在所有更大的阈值处都不可行。在 N 处的证书限制到 $n_i \geq N'$ 后仍然是证书。

证明。 在移除的指标上取零，将可行点扩展到原指标集。每个锥都包含零，且两个和保持不变。限制到剩余指标后，相同的对偶不等式仍然成立。 □

对于无限指标集，只需要有限和上的不等式；对偶性命题的逆向结论仅适用于有限系统。如果这些构型类覆盖的维数范围有界，则必须另行证明高维情形不成立。第 7 节针对每项应用给出这项补充信息。这里不涉及降至低维 Coxeter 面。

3 有限体积：顶点—面关联上的权

我们为每个顶点与二维面之间的关联赋予一个权。先对面、再对顶点求和这些权，可得到用于给维数设界的比较关系。我们将面上的所需下界和顶点上的上界表述为一个线性规划。满足这些不等式的权函数与下文所述的关联不等式矛盾。我们还在指定的权函数族中，将所需的顶点界最小化。

3.1 顶点图形与关联不等式

固定一个整数 $n \geq 58$。平面角或角是顶点 v 与二维面 F 的关联 $\kappa = (v,\ F)$。 F 的边数记为 $s(F)$，并且

$$D_5(P) = \sum_{\dim F = 2} (5 - s(F)). \tag{3.1}$$

三角形贡献 2，四边形贡献 1，而边数至少为 5 的面贡献一个非正数。

我们采用有限体积 Coxeter 多面体的标准顶点图描述。在有限顶点处，该图是一个单纯形。在理想顶点处，horosphere截面图是一个乘积

$$L_v = \prod_{i=1}^{k} \Delta^{r_i}, \qquad r_i \geq 1, \qquad \sum_i r_i = n-1. \tag{3.2}$$

这里的 r_i 是单纯形因子的维数，而不是其仿射图的节点数。该图有 $r_i + 1$ 个节点，且格拉姆秩为 r_i。这些描述同样适用于非简单理想顶点；参见 [1, 2]。

令 $r = n-1$。将该图的 h-多项式写成

$$h_v(t) = \sum_{j=0}^{r} h_{v,j} t^j, \qquad h_v(t) = \prod_i (1 + t + \cdots + t^{r_i}) \quad \text{at an ideal vertex.} \tag{3.3}$$

在有限顶点处 $h_{v,\ j} = 1$ 对每个 $0 \leq j \leq r$。定义

$$V_v = \sum_{j=0}^{r} h_{v,j}, \qquad G_v = \sum_{j=0}^{r} h_{v,j} \min(j, r-j), \qquad b_n(v) = \frac{5}{2} G_v - \frac{r}{2} V_v. \tag{3.4}$$

量 V_v 是顶点图的顶点数。在有限顶点处，它等于 n ，而在理想顶点处等于 $\prod_i (r_i + 1)$。该图的每个顶点的度都是 r，因此其边数为 $E_v = rV_v/2$。这些边对应于 v 处的角。

对于有限顶点，(3.4) 中的和为

$$\beta_n = b_n(v) = \begin{cases} n(n-6)/8, & n \text{ even}, \\ (n-1)(n-5)/8, & n \text{ odd}. \end{cases} \tag{3.5}$$

在理想顶点处，我们记作

$$K_n(v) = \frac{5 \sum_j h_{v,j} \min(j, n-1-j) - (n-1) V_v}{2}. \tag{3.6}$$

因此 $K_n(v) = b_n(v)$；我们用 $K_n(v)$ 表示理想顶点处的界，用 β_n 表示有限顶点处的界。

我们使用以下关联不等式。

输入 3.1 （关联超额）。 设 $P \subset \mathbb{H}^n$ 是一个有限体积考克斯特多胞体，其顶点图形如上所述。 [2] 的关联定理给出

$$D_5(P) \geq \sum_v b_n(v) + \Delta_n, \qquad \Delta_n \geq 5(n-1) > 0. \tag{3.7}$$

这个不等式的证明通过按高度统计关联给出，详见补充材料。要得到矛盾，只需证明 $D_5(P) \leq \sum_v b_n(v)$；正项 Δ_n 已足以给出所需的严格不等式。

3.2 关联线性规划及其对偶

首先固定角上的有理函数，并将其收集到向量 $\Psi(\kappa) \in \mathbb{Q}^d$ 中。这些函数将在第 3.3 节中具体说明。它们在一个角处的取值，在面求和与顶点求和中相同。顶点类型 V 由一个顶点图或一个理想链环图构成，并带有用于计算这些函数所需的标记。小面类型 Q 由一个三角形或四边形构成，其角上带有相容的标记。令

$$A(V) = \sum_{\kappa \text{ at } V} \Psi(\kappa), \qquad A(Q) = \sum_{\kappa \text{ on } Q} \Psi(\kappa), \qquad d(Q) = 5 - s(Q). \tag{3.8}$$

类型族必须涵盖所考虑多胞体的每个顶点，以及每个三角形或四边形。我们也可以纳入一些形式类型，即使它们并未由任何多胞体实现。

引入非负变量 x_V，对应顶点类型；引入非负变量 y_Q，对应小面类型；并为允许的单个角引入非负变量 z_κ。最后这些变量用于计入属于边数至少为五的面的角。关联可行性问题如下：

$$\sum_V A(V)x_V - \sum_Q A(Q)y_Q - \sum_\kappa \Psi(\kappa)z_\kappa = 0, \tag{3.9}$$

$$\sum_Q d(Q)y_Q - \sum_V b_n(V)x_V = 1. \tag{3.10}$$

对于无限类型族，我们只要求有限多个变量非零。这已经足够，因为多胞体只有有限多个关联。

引理 3.2. 若每个顶点、每个三角形或四边形，以及每个角都具有指定描述之一，则有限体积考克斯特多胞体给出(3.9)–(3.10) 的一个可行点。

证明。令 f_3 和 f_4 分别为三角形二维面和四边形二维面的数量，并设

$$L = 2f_3 + f_4 - \sum_v b_n(v).$$

由于其他二维面对 $D_5(P)$的贡献非正，输入 3.1 给出 $L \geq \Delta_n > 0$。将每个实际顶点数、小面数和剩余角数都除以 L。分别按顶点和面计算同一批角，得到 (3.9)。根据 L 的定义，得到 (3.10)。 □

不能省略变量 z_κ：边数至少为五的面上的角仍会出现在关联等式中，尽管这些面对于 $D_5(P)$的贡献非正。

命题 n 3.3 (对偶权不等式)。设系数向量 $\theta \in \mathbb{R}^d$ 满足 s

$$b_n(V) - \theta \cdot A(V) \geq 0 \qquad \textit{for every allowed vertex type,} \tag{3.11}$$

$$\theta \cdot A(Q) - d(Q) \geq 0 \qquad \textit{for every allowed small face,} \tag{3.12}$$

$$\theta \cdot \Psi(\kappa) \geq 0 \qquad \textit{for every allowed corner.} \tag{3.13}$$

那么关联可行性问题不可行。

证明。应用定理 2.3，并将 (3.9) 的符号反转。顶点、小面和剩余角列（T，d）分别为（$-A(V)$ $-b_n(V)$）、（$A(Q)$ $d(Q)$）和（$\Psi(\kappa)$，0）；取 $\lambda = \theta$。所显示的三个条件恰好就是它的证书不等式。 □

等价地，权函数 $w(\kappa) = \theta \cdot \Psi(\kappa)$ 在每个三角形上的总和至少为二，在每个四边形上至少为一，并且在每个顶点处至多为 $b_n(v)$。对于具有至少五条边的面，其非负总和至少为 $5 - s(F)$。对各面和顶点求和得到 $D_5(P) \leq \sum_v b_n(v)$，这与输入 3.1 矛盾。这是将弱对偶性应用于关联有限和的结果；无需对无限维问题断言强对偶性。

3.3 定义角权重的函数

现在我们具体说明用于构造权重的函数。记 $\phi(\kappa) \in \mathbb{Q}^{26}$ 为它们在一个角处的值。 ϕ 的每个坐标都是固定的；其在权函数中的系数是线性规划的一个变量。

在有限顶点处，球面图是不相交的连通有限图的并。它的两个标记是确定该角的两个节点。在理想顶点处，一个角对应于乘积（3.2）的一条边：一个单纯形因子沿一条边变化，而其他每个因子中各选定一个顶点。变化的仿射图具有两个标记节点。其他每个因子都贡献一个有限图，即删除其顶点所选节点后得到的图。这些有限图包含在角的描述中。

我们沿着 A_r 的路径编号为 0、……、$r-1$。我们沿着 D_r 的主干编号为 0、……、$r-3$，叶节点 $r-2$、$r-1$ 连接到 $r-3$。其余有限图和仿射图采用 [2] 中有理数表所规定的编号。为每个顶点图固定一种编号，并在其所有角处使用该编号。在图同构下，将该编号连同标记一起传递。编号不会在每个角处分别选择。

设定 $\phi_0 = 1$。函数 ϕ_1、ϕ_2、ϕ_3 分别是同一有限分量中两个标记所规定的普通对权重、变化的理想因子中的仿射对权重，以及不同有限分量副本中标记的普通权重；在各自规定的情形之外，它们均为零。它们固定的有理数表（包括例外小秩）就是 [2] 的内在角表。我们采用其最终版本：特别地，普通 B_{13} 端点条目为零。

接下来的十五个坐标函数都是指示函数。当两个标记位于所示分量的一个副本中，且对应所示的无序标记对，并满足最后一列的条件时，每个函数的值为 1；否则为 0。最后一列中的分量是角图中与标记分量不相交的一个连通分支。令 $M_{15} = m_{A_{15}} + m_{D_{15}}$ 为这类有限分量的数量。

j	标记类型	标记对	其他分量
4	A_{13}	$\{0,\ 12\}$	An A_1 发生。
5	A_{14}	$\{0,13\}$	出现了一个 A_1 。
6,7	A_{15}	$\{0,\ 13\}$，$\{1,\ 14\}$	出现了一个 A_1 。
8,9	D_{15}	$\{1,13\}$,$\{1,14\}$	出现了一个 A_1 。
10、11	A_{16}	$\{1、12\}$，$\{3、14\}$	An A_1 发生。
12、13	D_{16}	$\{0、14\}$，$\{0、15\}$	An A_1 发生。
14,15	D_{14}	$\{0,12\}$,$\{0,13\}$	出现一个 A_1，A_2 或 A_3 。
16,17	D_{13}	$\{0,11\}$,$\{0,12\}$	$M_{15} \geq 3$。
18	D_{28}	$\{0,\ 12\}$	$M_{15} \geq 2$。

在包含两个索引的行中，两个标记对按显示顺序对应。最后七个指示函数涉及不同的有限分量副本：

j	标记分量和允许节点	其他分量
19	A_4：$\{0,3\}$ 和 A_{12}：$\{1,10\}$	出现一个 A_1 。
20	A_2：$\{0,\ 1\}$ 和 A_4：$\{0,\ 3\}$	出现一个 A_1 和一个 A_{10} 。
21	A_2：$\{0,\ 1\}$ 和 D_5：$\{0\}$	出现一个 A_1 和一个 A_9 。
22	A_1：$\{0\}$和 D_5：$\{0\}$	出现一个 A_{11}，或同时出现一个 A_9 和出现一个 A_2 。
23	A_1：$\{0\}$ 和 D_5：$\{0\}$	出现一个 A_9 和一个 A_2 。
24	A_{12}：$\{0,\ 11\}$ 和 D_{16}：$\{0\}$	$M_{15} \geq 2$。
25	两个不同的 A_2 副本，每个副本中均包含任意节点	一个 A_{10} 以及至少两个 A_1 副本出现。

这些函数是无序标记对的指示函数。函数 22 和 23 可以同时为 1；当两个标记属于同一个 A_2 分量时，函数 25 的值为 0。 ϕ 的每个坐标都属于 $[0,1],$ ，但它们的线性组合可能取正值或负值。

另有一个理想角指示函数，记为 χ_B。设 $\Gamma[m]$ 为具有 m 个节点、秩为 $m-1$的仿射图。当变化因子为 $B[13]$、标记对为 $\{10,11\}$ 或 $\{10,12\}$，且完整的剩余有限图至少包含三个类型为 A_{15} 或 D_{15}的~分量时，该指示函数取值为 1；否则取值为 0。因此， $B[13]$ 表示标准类型 B_{12}，而不是有限秩 13 分量。通过从其他每个仿射因子中删除一个选定节点来构造剩余有限图。变化因子中的两个标记予以保留；若先删除它们，定义的将是另一个指示函数。

设 $\epsilon_n = [n = 58]$。使用自由向量 $a^{58}, a^{\mathrm{tail}} \in \mathbb{R}^{26}$ 及参数 $\lambda, \rho \geq 0$。待确定的权函数为

$$w(\kappa) = \big(\epsilon_n a^{58} + (1-\epsilon_n) a^{\mathrm{tail}}\big) \cdot \phi(\kappa) + \epsilon_n \lambda \chi_B(\kappa). \tag{3.14}$$

关联等式中使用的 53 个函数为

$$\Psi(\kappa) = (\epsilon_n \phi(\kappa), (1-\epsilon_n)\phi(\kappa), \epsilon_n \chi_B(\kappa)). \tag{3.15}$$

辅助变量 ρ 在顶点不等式中给出一个公共的非负下界；所有约束共有 54 个变量。理想顶点处的归一化在第 3.6 节中说明。系数向量的符号不受限制。我们要求所得权在指定类的每个角处均为非负，而不要求每个系数都非负。

用于维数 58 计算的有限表仅定义到秩 58，并不假设它们在更高维度下仍然有效。任意秩下的面定理及下文的顶点估计，为 $n \geq 59$ 的权函数 (3.14) 提供了依据。

3.4 局部面不等式

局部面定理限制了三角形或四边形处可能出现的标记图和支撑超平面。它们给出了关于权系数的以下充分线性条件。

输入 3.4（局部面定理）。 $[2],$ 的角、三角形和四边形定理，加上 $[4],$ 中确立的系数条件之间的蕴含关系，给出了一个线性系统 $\mathcal{L}$。该系统包括两个系数向量各自的角不等式和三角形不等式；涉及 χ_B 的条件和有限的 D_{13} 条件；叉形图的条件及额外的秩 16 条件；以及所有四边形不等式，包括每个系数向量对应的 A_{13} 不等式。若系数和辅助变量满足该系统，则多胞体在维数 $n \geq 58$ 下的每个角、三角形和四边形处均满足 (3.12)–(3.13)。若这些蕴含关系中有任何一项使用了由维数 58 的顶点不等式所蕴含的等式，则还必须满足第 3.5 节的条件。这些等式是该线性系统的推论，而非几何假设。

$\mathcal{L}$ 中的未知数是权函数的系数，而非多胞体所赋予的量。因此，其中的不等式是所需权值的充分条件；它们不必对满足面与顶点界的每个权函数都成立。例如， A_{13} 面定理是在以下条件下应用的

$$a_0^{58} + a_4^{58} \geq 1, \qquad a_0^{\mathrm{tail}} + a_4^{\mathrm{tail}} \geq 1. \tag{3.16}$$

我们在$\mathcal{L}$中纳入这两个不等式。

这些假设记录了 P 的各个面的身份、标记的阶、它们在编号图中的嵌入、理想链接处选定的节点删除，以及用于论证辅助构造的所有面。逆 Gram 计算无法确立这些几何假设。只有在不同替代方案同时适用时，才将它们的不等式合并，并按所述重数计入每个角。

例如，对于 $z = a^{58}$ 或 a^{tail}，系统包含

$$4z_0 + z_3/16 + z_{22} + z_{23} \geq 1, \tag{3.17}$$

$$4z_0 + z_3/2 + z_{21} \geq 1. \tag{3.18}$$

每个不等式仅用于其局部定理中的标记面构型。面上其他位置出现同名图并不足以适用该不等式。电子矩阵列出了$\mathcal{L}$ 的每个不等式，并标明其来源定理。

3.5 有限顶点：一种网络表述

在有限顶点处，标记遍历球面森林中节点的所有无序对。形式森林具有满足以下条件的非负整数分支重数 m_T

$$\sum_{T} r_T m_T = 58, \tag{3.19}$$

其中， r_T 是类型 T的秩。我们使用有理目录中的有限权类型集合。只有当每个角函数在所述参数范围内始终具有相同的表格，且该参数范围被局部定理覆盖时，符号二面体族才能仅由一种权类型表示。有限标签样本不能用来代替无界族。

Let

$$\Phi(m) = \sum_{\kappa \text{ at the formal vertex}} \phi(\kappa).$$

每个实际的有限顶点都给出一个允许的形式森林。反之则不作要求。我们寻求以下不等式族

$$a^{58} \cdot \Phi(m) + \rho \leq 377 \quad \text{for every } m \text{ satisfying (3.19).} \tag{3.20}$$

右侧是由关联不等式得到的顶点界 $\beta_{58} = 58(58-6)/8$ 。

我们用一个有限有向无环图中的路径来表示这一族不等式。对于一个分量 T，令 S_T 为其普通同分量项之和；对于不同的分支类型 T，U，令 B_{TU}为它们的普通交叉项之和。用 u_j表示 $\mathbb{Q}^{26}$ 的第 j个坐标向量，可得

$$\Phi_0 = \binom{58}{2}, \qquad \Phi_1 = \sum_{T} m_T S_T, \qquad \Phi_2 = 0, \qquad \Phi_3 = \sum_{T<U} m_T m_U B_{TU}. \tag{3.21}$$

函数 4–18 的和等于分量重数乘以其他分量满足所述条件的指示项。其余坐标通过计算表格中的无序标记对得到：例如， $\Phi_{19} = 4 m_{A_4} m_{A_{12}} [m_{A_1} > 0]$ 和 $\Phi_{25} = 4\binom{m_{A_2}}{2}[m_{A_{10}} > 0, m_{A_1} \geq 2]$。方括号表示布尔指示函数；因子四用于计算节点选择数，而非方向数。

固定其中类型的重数 $h_H = m_H$

$$\mathcal{H} = \{A_9, \dots, A_{17}, B_9, \dots, B_{12}, D_9, \dots, D_{16}, D_{28}\}. \tag{3.22}$$

同时固定 $a = m_{A_1}$ 和 $b = m_{A_2}$，并将这些固定重数组成的元组记为 I。令

$$M_h = 58 - \sum_H r_H h_H, \qquad R_I = M_h - a - 2b.$$

每个非零普通交叉项在$\mathcal{H}$中恰好有一个分量。一旦固定了 I，除关于 A_3存在性的一项指示函数外，$\Phi(m)$中的剩余贡献关于其他分支重数是可加的。更准确地说，令$\mathcal{R}$ 为移除$\mathcal{H}$ A_1, A_2后剩余的类型，并令$\mathcal{S} = R \,||\, \{A_3\}$。定义

$$p_T^h = S_T u_1 + \Big(\sum_H h_H B_{TH}\Big) u_3.$$

对于除 A_4, D_5之外的剩余类型，使用$p_{I,T} = p_T^h$。对于这两种类型，向量贡献为

$$\begin{aligned} p_{I,A_4} &= p_{A_4}^h + 4h_{A_{12}}[a > 0]u_{19} + 4b[a > 0, h_{A_{10}} > 0]u_{20}, \\ p_{I,D_5} &= p_{D_5}^h + 2b[a > 0, h_{A_9} > 0]u_{21} \\ &\quad + a[h_{A_{11}} > 0 \text{ or } (h_{A_9} > 0, b > 0)]u_{22} + a[h_{A_9} > 0, b > 0]u_{23}. \end{aligned} \tag{3.23}$$

令 K_I包含 $\binom{58}{2}u_0$ 以及角和中仅涉及固定计数 h, a, b的所有项，包括固定的同分量指示函数。令

$$\gamma_I = h_{D_{14}}[a = b = 0](u_{14} + u_{15}).$$

于是，对于$k = m_{A_3}$，

$$\Phi(m) = K_I + kp_{I,A_3} + [k > 0]\gamma_I + \sum_{T \in \mathcal{S}} m_T p_{I,T}. \tag{3.24}$$

根据函数的定义，唯一不由 I 固定的指示函数是D_{14} 条件中 A_3 的出现。其余交叉项关于 A_4, D_5 的分支重数是线性的；所有其他项均由 I固定。这就证明了该恒等式。

对于每个与总秩58相容的选择（I、 k），初始边的向量权重为 $K_I + kp_{I,\ A_3} + [k > 0]\gamma_I$，并指向一个标记为剩余秩 $R_I - 3k$的顶点。后续边选择一种类型 $T \in \mathcal{S}$，使剩余秩减少 r_T，其向量权重为$p_{I,\ T}$。使用秩可行的初始选择及其可达剩余秩。完整路径以秩零为终点。沿每条后续边，秩都严格递减，因此该图是无环图。

引理3.5 （精确网络表述）。指定族中的每个形式森林都对应一条向量权重为 Φ（m）的完整路径；反过来，每条完整路径都给出总秩为*58*的分支重数。因此，对于每个带符号向量 a^{58}，最大标量路径权重为$\max_m a^{58} \cdot \Phi$（m）。

证明。 初始选择和后续边恰好选出式（3.19）中的非负重数。式（3.24）给出它们的向量权重。不同的顺序可能表示同一个森林，但得到的权重相同。无环图上的单位流是完整路径的凸组合，因此最大化其线性权重即可得到最大路径权重。

□

对于固定的 h，两个 I 选择只有在其向量$p_{I、\ A_4}$、$p_{I、\ D_5}$ 一致时，才能使用相同的剩余秩图。其他边权已由 h确定。它们的初始边仍分别保留。在某一组系数取值下标量权重相等，并不足以证明在系数变化时可以将这些图视为同一图。

有限计算按 S所标引的子图划分。在一个子图内，令 g 标引具有相同剩余边权向量的初始选择组，如上所述。在可达剩余秩 ℓ处引入自由势变量$v_{S,\,g,\,\ell}$，并为从 S开始的路径引入一个自由上界 U_S。线性约束为

$$\begin{aligned} v_{S,g,0} &= 0, \\ v_{S,g,\ell} - v_{S,g,\ell-r_T} &\geq a^{58} \cdot p_{g,T}, \\ U_S - v_{S,g(I),R_I-3k} &\geq a^{58} \cdot (K_I + k p_{I,A_3} + [k>0]\gamma_I), \\ U_S + \rho &\leq 377. \end{aligned} \tag{3.25}$$

所有集合 S 使用相同的系数 a^{58}，ρ 并包含所有剩余类型；势是独立变量。沿路径求和可得其所需的上界。反过来，将每个势定义为从该剩余秩到零的路径的最大标量权重。这些势满足不等式。因此，消去这些势恰好得到 (3.20)，即使某些系数为负也是如此。所有优化变量均为实数。有限图的完整构造随经核验的数据一并提供；该引理证明了它与所示线性规划等价。

3.6 理想顶点与高维估计

设一个理想链接的因子秩为 r_1、…、r_k，总秩为 $R = n-1$，并有 $V = \prod_i (r_i+1)$ 个顶点。对于秩为 r 的连通仿射因子 Γ，令 Q_Γ 表示其基线仿射对权重之和，给定为ϕ_2，并令 $q_\Gamma = Q_\Gamma/(r+1)$。定义 $C = \sum_i q_{\Gamma_i}$。用 $C(v)$ 表示 v 处在纳入χ_B 项之前的权重之和。对于系数值 (a_0、a_2)，它满足

$$\frac{C(v)}{V} = \frac{R}{2} a_0 + C a_2 \tag{3.26}$$

这是因为，在一个因子中的一个标记对，对应于其他每个因子中顶点的每一种选择，因此会出现一次。理想角点处，ϕ 只有坐标 0 和 2 可以非零；χ_B 是一个独立的函数。

令 J 为独立随机变量之和，其中第 i 个变量在$\{0,\dots,r_i\}$上均匀分布，并令 $Y = 2J - R$。h_v的系数分布是 J 乘以 V 后所得的分布。由对称性可得

$$\frac{K_n(v)}{V} = \frac{3R}{4} - \frac{5}{4}\mathbb{E}|Y|, \qquad S_a = \frac{3R}{4} - \frac{5}{4}\mathbb{E}|Y| - \frac{R}{2}a_0 - C a_2. \tag{3.27}$$

所需的不等式为 $S_a \geq \rho$。由于这些表达式已除以 V，因此顶点界与其权重和之间的差至少为 $V\rho$。

总秩为 57 的乘积。对于 $n = 58$，引入自由因子界变量 k_r，对应于 $1 \leq r \leq 57$。对每个连通仿射族，施加

$$k_r \geq \frac{r}{2} a_0^{58} + q_\Gamma a_2^{58}. \tag{3.28}$$

这些族的范围为：秩 1–57 时为仿射族 A，秩 2–57 时为 C，秩 3–57 时为 B，秩 4–57 时为 D，以及例外项 E_6, E_7, E_8, F_4, G_2。共有 227 行对应单个族。即使 a_2^{58} 为负，这些行也全部保留。

理想顶点的计算使用了 354 个选定的对称数组。对于每个数组，数据都会指定一个前序数组，以及为得到该数组而添加的因子的秩。对于其他每一种因子添加，

数据都会指定一个选定数组，其中心平均值不大于所得的平均值。必须选取同一个索引来满足这一比较中的所有坐标。这些索引是固定数据；下文的数组平均值则是线性规划中的变量。添加因子会对数组进行均匀卷积，然后减去该因子的界：

$$f'_j = \frac{1}{r+1}\sum_{\ell=0}^{r} f_{j+\ell} - k_r.$$

初始数组为 $g_j = (5\,\min(j, 57-j) - 57)/2$；当因子的总秩达到 57 后，它是一个标量，等于归一化顶点界减去因子界之和。累计秩R后，令 $L = 57 - R$，并令 $B_{R,i,a}$ 为数组 i 在中心区间 $a, \dots, L-a$上的平均值，其中$0 \le a \le \lfloor L/2 \rfloor$。令 I_R 为秩 R处的选定指标。如果向数组$j \in I_{R-r}$中添加一个秩为 r 的因子，则令 $A = L - 2a + 1$，并且

$$\begin{aligned} \omega_{L,a,r,\ell} &= \frac{A + r - 2\ell}{A(r+1)}, && 0 \le \ell < \min(A, r+1), \\ T^{r,j}_{R,i,a} &= B_{R,i,a} + k_r - \sum_{\ell=0}^{\min(A,r+1)-1} \omega_{L,a,r,\ell} B_{R-r,j,a+\ell}. \end{aligned} \tag{3.29}$$

这些正系数之和为一，并将卷积的中心平均值表示为嵌套中心区间的平均值。这些行是：

(i) 29 个初始等式

$$B_{0,0,a} = \frac{1}{58-2a}\sum_{j=a}^{57-a} \frac{5\,\min(j, 57-j) - 57}{2}, \qquad 0 \le a \le 28;$$

(ii) 对每个选定的 $i \in I_R$，针对指定的前驱（r, j），有 $T^{r,}{}_{R}{}^{j}{}_{i,,a} = 0$；(iii) 对每个候选项，使用其固定的选定比较数组 D（R, r, j），有 $T^{r,}{}_{R}{}^{j}{}_{,D(R,r,j)\,a} \le 0$；(iv) 对每个最终选定的指标，有 $\tau \le B_{57,i,0}$，以及 $\rho \le \tau$，其中 τ 为自由变量。
指标集和映射包含在 [4] 的电子理想顶点数据中。结合连通族不等式，该系统包含 103,265 行和 5,754 个辅助变量。卷积的正性在每次增加因子时都保持比较关系。因此，每个总秩为 57 的乘积都具有至少 $\tau \ge \rho$ 的所需差值。固定的比较数组选择给出了一个充分的线性不等式系统；它们不必刻画每个有效的理想顶点权函数。

额外的理想角指示函数。 保留前述加性不等式，并单独处理χ_B。该指示函数不仅取决于秩12因子，也取决于其他因子，因此其贡献不能纳入 k_{12}的无条件变化中。如果发生 χ_B，变化中的 $B[13]$因子秩为 12，剩余有限秩为 45。三个秩15分量恰好耗尽该秩。完整的单节点删除分类恰好留下

$$\begin{aligned} \mathrm{I}: &\quad B[13] \times \Gamma_1[16] \times \Gamma_2[16] \times \Gamma_3[16], \\ \mathrm{II}: &\quad B[13] \times D[31] \times \Gamma[16], \qquad \Gamma_i, \Gamma \in \{A, B, D\}. \end{aligned} \tag{3.30}$$

设 $a_\chi = V^{-1}\sum_\kappa \chi_B\,(\kappa)$。其余各行为

$$\frac{57}{2}a_0^{58} + Ca_2^{58} + a_\chi \lambda + \rho \le K. \tag{3.31}$$

全部十三行都可用以下紧凑形式表示。令

$$(c_A, c_B, c_D) = (5, 25/4, 411/64), \qquad (d_A, d_B, d_D) = (1, 1/16, 1/4).$$

对于每个无序三元组 $\Gamma_1,\ \Gamma_2,\ \Gamma_3 \in \{A,\ B,\ D\}$ 在 I 型中，以及每个 $\Gamma \in \{A,\ B,\ D\}$ 在 II 型中，使用

$$\begin{array}{c|ccc} & C & a_\chi & K \\ \hline \mathrm{I} & 11/2 + \sum_{i=1}^{3} c_{\Gamma_i} & (2/13)\prod_{i=1}^{3} d_{\Gamma_i} & 331643/13312 \\ \mathrm{II} & 753/62 + c_\Gamma & (2/403) d_\Gamma & 16549/806. \end{array} \tag{3.32}$$

这里 d_Γ 表示给出所需剩余分支的单节点删除所占比例；删除计数为 16，1，4。K 的值按秩 (12，15，15，15) 和 (12，30，15) 计算，如 (3.27) 所示。因此，该规范保留了删除重数，而不只是仿射因子类型。

维数 59 中剩余的秩 58 乘积。 对系数 a^{tail}，补入所有秩不超过 16 的 63 个连通族链接，

$$k_r \geq \frac{r}{2} a_0^{\mathrm{tail}} + q_\Gamma a_2^{\mathrm{tail}}, \tag{3.33}$$

使用与上述相同的 因子界 k_r。令 $k_0 = 0$ 并引入 $\mu \geq 0$。十五行下降行如下：

$$k_r - k_{r-1} + \mu \leq h_r, \qquad 1 \leq r \leq 15, \tag{3.34}$$

其中

$$(h_1, \ldots, h_{15}) = \left(\frac{3}{4}, \frac{47}{66}, \frac{89}{132}, \frac{7}{11}, \frac{79}{132}, \frac{37}{66}, \frac{23}{44}, \frac{2213}{4374}, \frac{59}{132}, \frac{9}{22}, \frac{67}{156}, \frac{71}{168}, \frac{5}{12}, \frac{79}{192}, \frac{83}{204}\right).$$

秩约化定理适用于一个最大因子秩介于 10 和 16 之间的秩 58 乘积。它提供了一个秩可降低一阶的因子；恢复该因子时，归一化顶点界与因子界之和之间的差至少增加 μ。约化后的乘积秩为 57，并满足前述不等式。因此，维数 59 顶点不等式对这一类成立。为使比较有效，两个系统中必须使用相同的变量 k_r。

维度至少为 59 的所有其他理想链接。对于其他每个维数 59 的理想链接，以及维度至少为 60 的每个理想链接，解析顶点定理给出 $S_{(0,1)} \geq \varepsilon = 1/5307$。对于系数 a^{tail}，以下四个仿射不等式就足够了：

$$\begin{aligned} a_0^{\mathrm{tail}} &\leq 0, & a_0^{\mathrm{tail}} + a_2^{\mathrm{tail}} &\leq 1, \\ \rho + 29 a_0^{\mathrm{tail}} &\leq \varepsilon, & \rho + 29 a_0^{\mathrm{tail}} + 29 a_2^{\mathrm{tail}} &\leq 29 + \varepsilon. \end{aligned} \tag{3.35}$$

为了解释这一约化，写成 $t = 1/n$、$u_0 = a_0^{\mathrm{tail}}$、$u_1 = a_0^{\mathrm{tail}} + a_2^{\mathrm{tail}} - 1$ 和

$$P_i(t) = (\varepsilon - \rho)t - \frac{1-t}{2} u_i.$$

每个 P_i 都是仿射的，而 (3.35) 正好表示在 $[0, 1/59]$ 的两个端点处的非负性。解析输入还给出 $0 \leq C \leq R/2$。如果 $w = 2C/R$，那么

$$t(S_a - \rho) = t(S_{(0,1)} - \varepsilon) + (1 - w)P_0(t) + wP_1(t) \geq 0.$$

因此，这四个不等式证明了整个所述范围内的顶点界。该结论在该范围的每个维数中都使用了针对 $S_{(0,1)}$ 的解析估计。

维数至少为 59 时的有限顶点。令 $q \in \mathbb{Q}^{26}$ 为下文（3.38）中显示的向量。引入 $0 \le \xi \le 1$ 并施加

$$a_j^{\mathrm{tail}} \le q_j + 2\xi[\, j \in \{16, 17\}\,] \quad (j \neq 2), \qquad \rho \le \frac{1}{4}. \tag{3.36}$$

解析有限 顶点估计断言，对于每个秩为 $n \ge 59$ 的形式有限森林 ，

$$\beta_n - \big(q + 2\xi(u_{16} + u_{17})\big) \cdot \Phi_n \ge \frac{1}{4}.$$

由于有限顶点处的函数均为非负，且函数 2 为零，(3.36) 证明了其顶点界。解析估计允许其他每个分量和每个秩 $n \ge 59$；它与秩为 58 的有限计算相互独立。坐标不等式是关于 a^{tail} 的充分条件，而不是对所有有效有限顶点权重函数的刻画。

3.7 所选权重族内的最优界

固定一个形式森林的有限族 $\mathcal{T}$，以及一个满足局部面条件和理想顶点条件的权系数族$\mathcal{C}$ 。定义有限顶点权重和的最大值，并在$\mathcal{C}$上将其最小化：

$$U_{\mathcal{T}}(a) = \max_{F \in \mathcal{T}} a \cdot \Phi(F), \qquad \min_{a \in \mathcal{C}} U_{\mathcal{T}}(a). \tag{3.37}$$

这里， a 是有限顶点处使用的系数向量，而 $\Phi(F)$ 是其角函数向量之和。集合$\mathcal{C}$ 是联合系统在 a 上的投影，其中包括所有辅助变量条件。关联不等式提供了一个独立的上界，以便进行比较。要证明维数界，需要找到一个可行选择，使其最大有限顶点权重和不超过该上界，并且面不等式和理想顶点不等式由同一组系数满足。

在此应用中，$\mathcal{T}$是允许的秩为58的森林的穷尽族和 $\beta_{58} = 377$。我们为此系数族给出一个可行权函数和一个对偶下界。秩为58的计算仅在该秩下使用。

下面的有理点采用第 3.3 节中指定的坐标顺序：

$$\begin{aligned}
(q_0, \dots, q_{12}) &= (0, 1, 1, 1, 1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{5}{8}, \tfrac{5}{8}, \tfrac{1}{2}),\\
(q_{13}, \dots, q_{25}) &= (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{8}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{8}, \tfrac{5}{8}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}),\\
a^{58} &= q, \qquad a^{\mathrm{tail}} = q + \tfrac{1}{2}(u_{16} + u_{17}),\\
\lambda &= \tfrac{1}{2}, \qquad \rho = 0.
\end{aligned} \tag{3.38}$$

两个 D_{13} 系数在维数 58 时为负，在更高维度时为零。然而，它们与（3.14）中的其他项之和在每个允许的标记角处都是非负的。

辅助变量也具有精确值。对于高维有限顶点不等式和秩约化不等式，取 $\xi = 1/4$ 和 $\mu = 13/2187$。在所有连通仿射族上取 $k_r = \max_{\operatorname{rank}\Gamma = r} q_\Gamma$，并使用指定的理想数组及其定义等式，令$B_{R,i,a}$，其中 $\tau = 0$。有理数验证会检查所有这些变量，以及在相同系数值下的每个有限网络势。

例如，对于两个系数向量，面行 (3.17)–(3.18) 的取值分别为 $17/16$ 和 1。I 型中的理想指标不等式的松弛量至少为 $939/13312$，II 型中至少为 $50623/25792$。这些示例说明了赋值；有理数验证会在相同的系数下检查每个局部不等式和网络不等式。

除了可行性之外，还有一个有用的优化表述。设$\mathcal{A}$ 为完整局部系数系统在 $(a^{58}, a^{\mathrm{tail}}, \lambda)$ 上的投影，其中包括 (3.16)，并且 $\rho = 0$。对于一个自由公共变量 U，将最后一个网络行替换为 $U_S \le U$，并使 U 最小化。消去势后得到

$$\min_{(a^{58},a^{\mathrm{tail}},\lambda)\in\mathcal{A}} \max_{F} a^{58}\cdot\Phi(F), \tag{3.39}$$

其中 F 遍历允许的秩 58 森林的穷尽族。在此优化中，不再将 377 作为上界施加。

命题3.6（精确受限极小极大）。 （*3.39*）中的最优值为 37 γ.

证明。 可行赋值（3.38）连同其辅助局部变量和所有网络势，给出 377 的上界。反之，记 a_0, a_1 为 a^{58}的坐标 0 和 1。角和三角形不等式给出 $a_0 \ge 0$ 和 $3a_0 + 2a_1 \ge 2$。形式森林

$$F_* = 2D_{17} + D_{24}$$

的总秩为 58。普通表格给出 $S_{D_{17}} = 227/2$和 $S_{D_{24}} = 8\cdot 24 - 32 - 1 - 4 - 3 - 2 = 150$。所有跨分支权重和示性函数在该森林上均为零，因此其角和向量为 $\Phi(F_*) = 1653u_0 + 377u_1$。于是一个路径界给出 $U \ge 1653a_0 + 377a_1$。精确的非负线性组合

$$U - 377 = (U - 1653a_0 - 377a_1) + \frac{377}{2}(3a_0 + 2a_1 - 2) + \frac{2175}{2}a_0 \tag{3.40}$$

证明下界：第一项是该森林的网络行之和及其与 U 的连接，其他各项则是两个局部行的倍数。 □

关联不等式独立于该优化给出界 377。可行性和 (3.40) 证明，对于所选权重族和形式森林，377 也是最优值。森林 F_* 不必出现在多面体顶点处。更大的权函数族可能具有更小的最优值。

注 3.7（权重族的选择）。Vinberg [5, §6.12，第 91] 页给出了紧致情形下一类受限的非负角权重的相关 E_7 障碍。他要求当标记位于不同连通分支时权重必须为零，而第 3.3 节中的权重族并无此要求，因此允许跨分量贡献和上下文贡献。这类障碍涉及指定的图和权重类别，并不排除利用额外几何相容性得到更强的证书。

在上界为 377 的系统中，$\max_F a^{58}\cdot\Phi(F) + \rho \le 377$以及 $\rho \ge 0$。同样的不等式迫使 $a_0 = 0$、 $a_1 = 1$ 和 $\rho = 0$。因此，要求 $\rho > 0$ 将排除这个有效解。当 $\rho = 0$ 时，严格关联不等式已经给出了矛盾。

3.8 有限体积维数界

各维数中使用的估计总结如下。在每种情况下，面和顶点和使用相同的权函数。

类	所用估计
有限顶点，$n = 58$	有限有向图及其所有势不等式。
有限顶点，$n \geq 59$	解析有限顶点估计和坐标不等式（3.36）。
理想顶点，$n = 58$，无角	秩 57 乘积和连通族不等式的系统
其中 $\chi_B = 1$	
理想顶点，$n = 58$，一些角	9节点删除的穷尽分类 (3.30) 以及全部十
与 $\chi_B = 1$	三行 (3.31)。
理想顶点，$n = 59$，最大	相同的因子界和秩约化不等式。
因子秩 10–16	
59 处的其他理想顶点，以及	解析理想估计和四个不等式（3.35）。
所有 $n \geq 60$	
所有角和小面，$n \geq 58$	第 In- 中详尽的局部几何分类和定理 put 3.4。

定理 3.8（有限体积界）。 假设上述局部几何估计、穷尽的图分类以及关联不等式均成立。经验证的有理数解排除了所有整数维数 $n \geq 58$ 下存在有限体积双曲 *Coxeter* 多胞体的可能性。

证明。 假设这样的多胞体存在。表格的最后一行给出了非负角权重，其在每个三角形上的总和至少为二，在每个四边形上的总和至少为一。前面的各行给出

$$\sum_{\kappa \text{ at } v} w(\kappa) \leq b_n(v)$$

在每个有限顶点或理想顶点处成立的条件。对偶不等式与引理 3.2 给出的可行点矛盾。

□

4 投影范数平方的线性规划

两个紧致情形使用定理 2.3 的相同特化。对于每个构型类 b，令 e_b 为式 (2.3) 中定义的投影范数平方向量，并在方便时将正交分量归并。将此类上所有成立的局部不等式写为

$$A_b e_b \geq c_b, \qquad e_b \geq 0. \tag{4.1}$$

矩阵 A_b 和向量 c_b 是有理且非负的，并且 A_b 的每一行都有一个正项。在我们的应用中，A_b 的元素为 0 或 1：一行指定其所估计的和中包含哪些分量。允许使用一般的非负系数，论证仍然相同。

更一般地，假设几何上界为

$$h_b^T e_b < B_b, \qquad h_b > 0, \quad B_b > 0. \tag{4.2}$$

这里 h_b 和 B_b 是固定的有理数据。对于紧致情形 $h_b = \mathbf{1}$ 和 $B_b = 1$，根据（2.3）。属于不同构型类的变量彼此分开保留。在同一构型类内，涉及给定正交分量的每个不等式都使用 e_b的同一坐标。

4.1 归一化与对偶性

对于每个类，引入非负变量 τ_b、E_b 和 δ_b，并施加

$$\begin{aligned} A_b E_b \geq c_b \tau_b, \qquad & \delta_b = B_b \tau_b - h_b^T E_b \geq 0, \\ & \sum_b \delta_b = 1. \end{aligned} \tag{4.3}$$

标量 τ_b 是缩放系数， E_b 是缩放范数向量，而 δ_b 是它与缩放上界之差。对于被局部几何定理排除的类，添加

$$\tau_b = 0. \tag{4.4}$$

这也迫使 $E_b = 0$ 和 $\delta_b = 0$，因为 $h_b > 0$。通过 $\sum_b \delta_b$ 进行归一化，可以将严格不等式表示为闭线性可行性问题，而无需选择固定的正误差容限。

定理 4.1 （归一化与线性规划对偶性）。 对于构型类的有限穷尽族，以下断言成立。

（i）系统 （4.3）–（4.4）可行，当且仅当某个未被局部排除的类存在一个向量e_b ，满足 （4.1）和（4.2）。特别地，任一指定维度中的多胞体都确定一个可行点。

（ii）令

$$m_b = \min\{h_b^T e : e \geq 0,\ A_b e \geq c_b\}. \tag{4.5}$$

Then

$$m_b = \max\{c_b^T \alpha : \alpha \geq 0,\ A_b^T \alpha \leq h_b\}, \tag{4.6}$$

并且两个最优值都在有理点处取得。归一化系统不可行，当且仅当 $m_b \geq B_b$ 对每个未被局部排除的类都成立。

（iii）因此，满足以下条件的非负有理乘子

$$A_b^T \alpha_b \leq h_b, \qquad c_b^T \alpha_b \geq B_b \tag{4.7}$$

对每个这样的类，证明其不可行性。反过来，若归一化系统不可行，则这些乘子存在。

证明。给定一个带有 $s = B_b - h_b^T e_b > 0$ 的向量，取 $\tau_b = 1/s$、 $E_b = e_b/s$、 $\delta_b = 1$，并将其他类上的所有变量设为零。反过来，归一化可行点具有某个 $\delta_b > 0$。于是 $\tau_b > 0$，将其除以 τ_b ，即可得到局部不等式以及

$$h_b^T (E_b/\tau_b) = B_b - \delta_b/\tau_b < B_b.$$

每个多胞体都属于穷尽族中的某一类，因此第一种构造适用于其投影范数平方。缩放系数无需上界： s的正值很小时，可能需要较大的 τ_b。

对于最小值，取 $\mathbf{1}$ 的充分大倍数即可满足所有局部不等式。由于 $h_b > 0$，每个非空的有限目标子水平集都是紧的，因此最小值可以取到。为建立对偶性，省略下标并考虑多面体锥

$$K = \{(Ae - u, h^T e + t) : e, u, t \geq 0\}.$$

它包含 $(c,\ m)$，但不包含任何满足 $\varepsilon > 0$ 的 $(c,\ m - \varepsilon)$。一个在 K 上非负且在 $(c,\ m)$ 处为零的非零支撑泛函 $(-\alpha,\ \beta)$ 给出

$$\alpha \geq 0, \quad \beta \geq 0, \quad A^T \alpha \leq \beta h, \quad \alpha^T c = \beta m.$$

如果 $\beta = 0$，则 A 的每个非负行中的正项会迫使 $\alpha = 0$，这就产生矛盾。除以 β 即可得到一个对偶最优解。反向不等式则可通过将 $Ae \geq c$ 乘以任意可行

对偶向量得到。紧致原始最优面的一个顶点是可行多面体的有理顶点。因此，对偶最优面是一个非空的有理多面体，并且根据引理 2.2，它有一个有理点。

最后，将缩放后的不等式乘以对偶乘子，得到

$$h_b^T E_b \geq \alpha_b^T A_b E_b \geq (c_b^T \alpha_b)\tau_b \geq B_b \tau_b.$$

因此，每个 δ_b 都为零，这与其归一化矛盾。在定理 2.3 中，取 C_b 为由 (4.3) 定义的局部锥，对被排除的类取零缩放系数，$T_b = 0$ 和 $d_b = \delta_b$。所显示的不等式给出其对偶条件 $-d_b \geq 0$。第（ii）部分证明了第（iii）部分中的逆命题。 □

4.2 紧致情形中的对偶不等式

对于 $h_b = \mathbf{1}$，$B_b = 1$，所计算的对偶解满足

$$\alpha_b \geq 0, \qquad A_b^T \alpha_b \leq \mathbf{1}, \qquad c_b^T \alpha_b \geq \eta, \qquad \eta \geq 1. \tag{4.8}$$

对于支集在 S_ℓ 上的一行，所选组合中 e_{bj} 的系数为 $\sum_{\ell:\ j \in S_\ell} \alpha_{b\ell}$。不等式 $A_b^T \alpha_b \leq \mathbf{1}$ 要求每个分量中的该系数至多为一。未使用项的非负性随后将该组合界定在平方范数总和以内。

例。 假设 $e_I + e_A \geq a$ 和 $e_I + e_B \geq b$。将两个不等式均以系数一相加，会使 e_I 的系数变为二。系数 $1/2,\ 1/2$ 则给出

$$e_I + \tfrac{1}{2} e_A + \tfrac{1}{2} e_B \geq \tfrac{1}{2}(a + b).$$

由于三个变量均为非负数，左侧至多为 $e_I + e_A + e_B$。如果右侧至少为 **1**，这就与总平方范数的严格上界相矛盾。

对于一个固定的带维数标记的族，定义

$$\Gamma_N = \min_{\substack{b \text{ not locally excluded} \\ n_b \geq N}} m_b, \qquad \min \varnothing = +\infty. \tag{4.9}$$

归一化线性规划不可行，当且仅当 $\Gamma_N \geq 1$。增大 N 会移除构型类，因此 Γ_N 不可能减小。这是命题 2.4 的特例。该等价关系涉及所指定的线性不等式；一个可行向量不一定能由几何构型实现。

该计算施加 (4.8)，并最大化局部对偶目标值之和。所得有理数解经过精确检验。证明只需要其可行性。紧情形和紧算术情形在同一程序中使用不同的构型类和局部不等式。

5 紧情形

我们将补充材料 C 的局部估计应用于 x的正交投影的平方范数。这些估计在下文所述的假设下成立。

固定最远顶点以及（2.1）中定义的向量 x 。对于该顶点处考克斯特图的一个连通球面分量C ，令$\langle C\rangle$ 表示其面法向量的张成空间，并令

$$e_C = \|\mathrm{proj}_{\langle C\rangle}\, x\|^2.$$

各分量的张成空间彼此正交，并共同构成该顶点处的切空间。因此

$$e_C \geq 0, \qquad \sum_C e_C = \|x\|^2 < 1. \tag{5.1}$$

对于分量的不相交集合 $\mathcal{S}$，记作 $e_{\mathcal{S}} = \sum_{C \in \mathcal{S}} e_C$。本节中的所有此类量都指同一个向量 x。所谓允许任意其他分量的估计，不会对该顶点处其余球面分量施加额外条件；对侧面仍是同一多胞体的面。

Vinberg 定理 [5] 排除了维数至少为 30 的紧致考克斯特多面体。因此，我们直接考察每个维数 $18 \leq n \leq 29$。

5.1 小分支和例外墙配置

我们采用不可约球面Coxeter图的通常记法。秩二图为$I_2(m)$，其中 $m \geq 3$ 是整数； A_2 表示 $I_2(3)$。同构类型 B_2 和 D_3 不再单独列出。若某个分量不属于下文定义的例外构型之一，则称其为普通分量。

每个例外构型都由所选顶点处图中的若干分量以及一个指定的对面组成。因此，例如， O_7要求的不仅仅是出现一个标记为七的键。图上的标记始终描述多胞体的面之间的关系；投影辅助向量不赋予此类标记。

命题5.1（普通分量的局部估计）。 对于表*1*中的每个普通分量 C， e_C 都严格大于所列的界。这些估计在补充材料 *C* 中得到证明，并允许存在任意其他有限分量。

表1：普通分量的下界。本文中的每个小数都是精确有理数。

分量	下界	分量	下界
A_1	$1/10$	A_2	$319/2000$
$I_2(m)$ $m \geq 4$	$1/7$	A_3	$1/4$
B_3, H_3	$2/7$	A_4	$2/7$
B_4, D_4, F_4	$1/3$	H_4	$11/36$
A_5	$3/8$	D_5	$5/14$
A_6, B_5, B_6, D_6	$3/7$	B_7, D_7	$1/2$
B_8, D_8	$4/7$	E_6	$9/20$
E_7	$5/9$	E_8	$2/3$

该表格包含补充材料 C 中针对 B_3, H_3 给出的改进估计。二面角估计对每个整数 $m \geq 4$ 都成立。

接下来我们定义例外构型。设 p 为表示所选顶点的单位类时向量，设 u 为某个相邻 A_1 面的单位法向量。在短情形下，空间法向量位于该秩一分量中的一个对面，其单位法向量具有如下形式

$$c_I = \sqrt{h}\, p - \sqrt{1+h}\, u, \qquad 0 < h < \frac{1}{2}. \tag{5.2}$$

我们将此构型记为 I。构型 J 包含两个 A_1 分量，以及一个对面，其空间法向量位于它们的直和中，并且与其他所有分量正交。该

面与两个相邻面中的一个分离（对应的图边为虚线），并与另一个成角 $\pi/3$。其单位法向量中 p 的系数平方位于 $(1/3, 3/8)$ 内。两个 A_1 分量同时出现在此构型中。

两个秩二例外构型为

$$N_7 = (\text{incident } A_2,\ \text{isolated opposite contact } 7),$$
$$O_7 = (\text{incident } I_2(7),\ \text{isolated opposite contact } 3).$$

此处，接触标记记录了对面与所示分量中的一个相邻面之间的夹角。孤立意味着对面法向量的空间部分与所有其他分量正交。特别地，该定义既指定了一个对面，也指定了相邻的秩二图。

命题 5.2 (例外构型)。 在所选顶点处，例外构型I、 J、 N_7、 O_7 至多出现一种。补充材料 C 给出了以下界，约束所示相邻分量上的 e_C 之和：

构型	相邻分量 下界	
I	A_1	0
J	$A_1 + A_1$	$17/50$
N_7	A_2	$9/100$
O_7	$I_2(7)$	$9/100.$

正的界都是严格的。普通分量界不同时施加于属于例外构型的分量。

在图的和中，每个符号 I、 J、 N_7、 O_7 都表示其所指示的相邻分量，以及关于一个对面的所述条件。因此，相邻分量构成顶点图；附加的面不计入其秩中。

这些构型不能同时出现这一断言，是局部几何定理的一部分。其中包括两个候选对面涉及同一个相邻分量的情形。这个结论并不能仅由球面图类型列表推出。

补充材料 C 还给出了涉及多个分量的估计。如果 T_j 是秩为 j 的普通不可约分量，则

$$e_{I+A_1} > 1/5, \qquad e_{I+2A_1} > 3/10, \tag{5.3}$$
$$e_{I+T_2} > 21/100, \qquad e_{I+T_3} > 2/7. \tag{5.4}$$

每个左侧都是对其下标中所列分量求和。如果同时使用其中几个不等式，则 e_I 的系数必须满足定理 4.1 中相同的对偶不等式。

如果出现 N_7 或 O_7，则其他每个普通秩二分量的投影范数平方都大于 $1/5$。对于例外构型之外的普通 A_1 分量，在 N_7 情形下它大于 $1/5$，而在 O_7 情形下大于 $2/15$。这些界仅涉及附加分量。其假设以及前述不等式的假设，均在补充材料 C 的普通分量附录中说明。

5.2 大分量

A 分量定理给出

$$e_{A_r} > \frac{1}{2} \quad (r \geq 7), \qquad e_{A_r} > \frac{4}{7} \quad (r \geq 8), \qquad e_{A_r} > \frac{5}{7} \quad (r \geq 13). \tag{5.5}$$

这三种估计都允许存在任意其他有限分量。表 2 给出了指定秩下的附加估计。每一种都是固定向量 x 的 e_C 界，即使其证明中使用了辅助点或相邻顶点也是如此。

表 2：额外的 A 分量界，允许其他有限分量任意取值。

秩	下界
12	$13/20$
15	$413/500$
16	$43/50$
17	$6/7$
18	$91/100$
19	$563/625$
20	.92274

对于具有 $r \geq 9$ 的 B_r， D_r 分量，有

$$e_{B_r}, e_{D_r} > \frac{9}{14}. \tag{5.6}$$

下一个估计涉及坐标约定（见补充材料 C）中 a B_r 或 D_r 分量的一个初始坐标序列。

命题 5.3 (初始坐标的估计)。设 $6 \leq M \leq 16$。假设该分量为 B_r 且满足 $r \geq M + 5$，或者为 D_r 且满足 $r \geq M + 6$。令

$$f_i = \sqrt{i} - \frac{61}{100\sqrt{2}}, \quad E_M = \frac{f_5^2}{5} + \sum_{i=5}^{M-1} (\sqrt{i+1} - \sqrt{i})^2, \quad H_M = \left\lfloor \frac{M-5}{2} \right\rfloor.$$

投影到该分量上的 x 的前 $M+1$ 个坐标的平方和大于

$$E_M - H_M/3200 + 3969/800000. \tag{5.7}$$

该估计允许存在任意其他有限分量。

前两项给出了针对相同坐标的先前估计。最后一项在相同假设下改进了该估计；它不是来自另一个子空间的贡献。该程序使用有理下界 $P_M + 3969/800000$，其中

M	7	8	9	10	11
P_M	。7349975	。7683275	.797425	.823735	。8472225
M	12	13	14	15	16
P_M	。8689525	.88864	.90715	。9240775	。9401975

补充材料 C 证明了 $P_M < E_M - H_M/3200$。有限线性规划使用 $7 \leq M \leq 16$。如果对相同的坐标同时纳入较早的估计和改进估计，则较早的不等式是冗余的。

以下完整顶点图适用三个附加估计。之所以将它们分别陈述，是因为前述秩条件未涵盖相关的终端坐标：

(i) 如果18维的完整顶点图为 $B_{16} + T_2$ 或 $D_{16} + T_2$，且 T_2 为普通，则其在大分量上的投影范数平方大于。8689525。

（ii）如果18维的完整顶点图为 $B_{17}+A_1$，且普通非短 A_1，则其在 B_{17} 上的投影范数平方大于。90715。

(iii) 若完整顶点图在维数 20 中为 $D_{19}+A_1$，且 A_1 为普通非短型，则通过末端 D_4 子图的延拓以及改进的初始坐标估计给出 $e_{D_{19}}>.91211125$。

这些局部结果在所述秩下于补充材料 C 中得到证明。它们作为分量估计使用，与最终的维数排除无关。特别是，要求普通 T_2 的估计不应用于 N_7 或 O_7，而普通 A_1 估计不应用于 I。

5.3 配置的穷举族

若一个分量的类型为 A_r、$r\geq 7$ 或 B_r，D_r、$r\geq 9$，则称其为大分量 。由 (5.5) 和 (5.6) 可知，每个大分量的投影范数平方都大于二分之一。表1显示，其他每个普通分量的贡献至少为其秩的十四分之一。

引理 5.4（剩余分量的一个界）。 设 S 是一个由若干分量构成的集合，其中没有大分量，总秩为 S。每当出现例外构型时，将其所有相邻分量都纳入该集合。则

$$e_{\mathcal{S}}\geq\frac{S-1}{14}. \tag{5.8}$$

如果不存在例外构型，或构型为 J，则更强的界 $S/14$ 成立。在情形 I 下，可能的损失为 $1/14$；在情形 N_7 和 O_7 下，可能的损失为 $37/700$ 。

证明。 将普通分量上的秩除以十四的估计相加。构型 I 用一个非负量替代秩一贡献，因此使总和至多减少 $1/14$。 J 的两个相邻分量总秩为二，而界 $17/50$ 超过 $2/14$。每个秩二构型 N_7 或 O_7 至少贡献 $9/100$；与 $2/14$的差为 $37/700<1/14$。命题 5.2至多允许一个例外构型。

□

固定 $18\leq n\leq 29$。我们如下构造一个构型类的穷尽族。当不需要具体图类型时，一个构型类可以只规定分量秩和范数界。

1. 如果没有分量较大，则为所有分量贡献之和引入一个变量，并施加 $e\geq(n-1)/14$。

2. 如果至少有两个大分量，选取其中两个不同的大分量。为每个分量引入一个独立变量，其下界为 $1/2$，并引入第三个变量表示剩余分量之和。无需指定所选分量的确切秩：它们的正交性和共同下界已足够。

3. 如果恰有一个大分量，其类型为 T且秩为 r，令 $S=n-r$。应用任何满足其假设的局部排除。否则，如果 $S\geq 8$，则使用 $e_T\geq 1/2$ 和 $e_{\mathcal{S}}\geq(S-1)/14$。

4. 如果 $0<S<8$，令 $d(T,\ r)$ 表示第5.2节中允许其他有限分量任意取值的最强适用分量界。需要特定额外分量的估计不用于定义 $d(T,\ r)$。如果

$$d(T,r)+(S-1)/14\geq 1, \tag{5.9}$$

使用由大分量上的这两个界以及剩余分量之和所指定的类。

5. 对于每个剩余情形，列出所有不含大分量的秩为 S 的球面森林：先列出不含例外构型的情形，然后列出该森林上允许的每个例外构型。包括适用于此类的所有普通、大分量、联合和附加分支估计，以及第5.4节中带有其规定假设的局部排除条件。对于$S = 0$，完整顶点图由这一个大分量组成。

由分量之和描述的各类已纳入线性规划。它们列出的不等式均取乘子 1，已经推出总贡献至少为 1；这包括$S = 8$ 步骤三中的情形。检验 (5.9) 决定何时需要列出单独的剩余分量。它既不改变假设，也不影响任何局部估计的有效性。

命题 5.5 （紧致构型的完备性）。 设给定一个维数为 $18 \le n \le 29$ 的紧致考克斯特多面体及其一个最远顶点。其顶点构型要么满足所述局部排除条件之一，要么属于刚刚构造的某一类。 x 的投影范数平方满足分配给该类的每个不等式。

证明。 球面图没有大分量、至少有两个大分量，或恰好有一个大分量。前两种情形分别对应步骤一和步骤二。在第三种情形中，其类型和秩确定了S。当数值条件成立时，引理 5.4 和适用的分支估计为步骤三和步骤四提供依据。否则，步骤五将剩余分支多重集及其例外构型（如有）纳入其中。同类型的分量可以连同其面重新标号，以便将一个带标记的分量置于首位。这种重新标号不会改变任何其他参数：每个普通二面体分支保留其完整的整数范围，而一个 O_7 标记只在其所属分量上固定标签七。因此，每个不等式和局部排除条件都在其所要求的分量和面假设下应用。正交性给出固定向量 x所满足的 (5.1)。

□

对于第五步中的显式枚举，使用以下按顺序排列的秩不超过七的分支类型列表：

rank	types
1	A_1
2	$A_2 = I_2(3),\ I_2(m)\ (m \ge 4)$
3	A_3, B_3, H_3
4	A_4, B_4, D_4, F_4, H_4
5	A_5, B_5, D_5
6	A_6, B_6, D_6, E_6
7	B_7, D_7, E_7.

按非递减顺序选择类型，直到其秩之和达到 S。然后标记为无例外构型、一个 A_1 作为 I、两个 A_1 分量作为 J、一个 A_2 作为 N_7，或一个二面体分量作为 O_7。对相同分量排序并进行置换，可避免重复。所有二面体参数仍取全称量化。这得到下文使用的829个类。根据命题 5.5，这些类是完备的；这一点独立于该计数结果。

5.4 局部排除条件

表3列出了补充材料 C 中局部定理所排除的构型类。在归一化线性规划中，它们的缩放系数为零；不会为其分支范数指定人为下界。除 C1 外，每个展示的森林都是所选顶点处的完整考克斯特图，且这些论述仅用于这些完整图。分离面上的每个 Coxeter 标号和参数，均遍历所引用局部定理中的整个集合。

表3：紧致情形下的局部排除条件，证明见补充材料 C。

Code	完整顶点图或类	局部定理
C1	任意 A_r, $21 \le r \le 29$； B_r, $23 \le r \le 29$；或 D_r, $24 \le r \le 29$，其他部分任意有限分量	一个分量的秩上界
C2	$B_r + I$、 $r \ge 20$，或 $D_r + I$、 $r \ge 21$	经典分量定理在存在 I的情况下
C3	$A_{16} + N_7$ 或 $A_{16} + O_7$	N_7 和 O_7的端点定理在18维
C4	$A_{17} + A_1$ 或 $A_{17} + I$，其中 A_1为普通	关于秩一补在18维中的定理
C5	$B_{16} + N_7/O_7$ 或 $D_{16} + N_7/O_7$	针对 N_7 和的秩十六定理 O_7，包括 D 分叉处的两种符号
C6	$B_{17} + I$	关于一个短孤立与 A_1相关联的对面面分量
C7	$D_{17} + A_1$ 或 $D_{17} + I$，带有普通 A_1	关于普通多面体的各个定理 A_1 以及关于 I
C8	A_{18}	对于该端点的排除所示完整图
C9	B_{18}	终端面定理，包括重合和不同的对面
C10	D_{18}	端点与分叉定理，包括相交、平行和分离的对侧面
C11	$A_{17} + N_7/O_7$ 或 $A_{18} + I$	十九维中的独立局部定理十九维
C12	$D_{17} + T_2$、 $B_{17} + N_7/O_7$或 $B_{18}/D_{18} + A_1$，具有普通 T_2、 A_1	经典分量扩张十九维定理
C13	$D_{17} + N_7/O_7$、 $B_{18} + I$或 $D_{18} + I$	关于 N_7、 O_7 和 I 的定理在十九维
C14	A_{19}、 B_{19} 或 D_{19}	相应的完整图定理对于类型 A、 B 和 D
C15	$A_{19} + I$	对于带有 A_{19} 的定理配置 I
C16	$B_{18}/D_{18} + N_7/O_7$ 或 $B_{19}/D_{19} + I$	经典分量扩张二十维定理
C17	A_{20}、 B_{20} 或 D_{20}	相应的完整图定理二十维
C18	$A_{19} + N_7/O_7$ 或 $A_{20} + I$	N_7的 A-分量定理，O_7 和 I
C19	$D_{19} + N_7/O_7$ 或 $D_{20} + I$	D-分量扩展定理在二十一维中
C20	B_{21} 或 D_{21}	相应的完整图定理在二十一维

Code	完整顶点图或类	局部定理
C21	B_{22}, D_{22} or D_{23}	针对以下图的终端面定理 所示完整图

例如，C10 包含完整图 D_{18}的所有终端面和分叉替代方案。局部证明中使用的辅助顶点不会给 (5.1) 增加额外项。

5.5 对偶证书

该构造给出了 829 个构型类，其中 151 个被局部排除条件排除。对于每个其余的类，对偶问题针对每个适用的范数不等式各有一个非负乘子。每个分量贡献的系数都不超过一。该有理数解对所有类同时满足定理 4.1。特别地，涉及 I 的不等式使用同一个变量 e_I。

定理 5.6 (紧致维数上界)。 第 *5.1*、*5.2* 和 *5.4* 节的局部估计，加上球面分类，使归一化线性规划在维数18，*...*，29下无可行解。结合 *Vinberg* 上界 29，可推出 $n \le 17$ 对于紧致双曲 *Coxeter* 多胞体成立。

证明。 根据命题 5.5，假设存在的多胞体属于所列出的某个类。局部排除的类不可能存在。对于任何其他类，定理 4.1 和有理数对偶解推出总平方投影范数至少为一，这与 (5.1) 矛盾。精确验证检查了全部 3157 个对偶变量和 2224 个不等式；记录见复现附录。Vinberg 定理排除了 $n \ge 30$。

□

配置列表由球面分类和所述分量估计得出。它不依赖于此前秩为十八时的十一种森林列表。

6 紧致算术情形

对于紧的算术 Coxeter 多面体，其反射群是一个算术格。我们应用补充材料 A 的 [2]，中额外的局部结果，同时保留其关于定义域和面法线的假设。范数不等式仍为 (5.1)。前述紧类适用于维数 18、.....、29；我们在秩 16 和 17 时加入算术类。

6.1 算术假设和局部结果

在补充材料 A 的 K 中所用的二次型模型里， K 是一个全实数域， q 是定义在 K 上的二次型，而 B 是与之关联的对称双线性型。在一个指定的实嵌入 $\sigma_0 \colon K, \to \mathbb{R}$ 下，形式 q 具有洛伦兹型符号，并定义包含该多胞体的双曲空间。在其他每个实嵌入 σ 下，共轭形式 q^σ 均为正定。

在同一域上选择面法向量直线上的向量 α_i；这些是下文所使用的根向量。相应的 Cartan 条目为

$$C_{ij} = \frac{2B(\alpha_i, \alpha_j)}{B(\alpha_i, \alpha_i)}. \tag{6.1}$$

局部算术定理要求循环乘积

$$C_{i_1 i_2} C_{i_2 i_3} \cdots C_{i_\ell i_1} \tag{6.2}$$

属于整数环 $\mathcal{O}_K$。将 α_i 替换为 $t_i\alpha_i$，其中 $t_i \in K^\times$，会使 C_{ij} 乘以 t_j/t_i；这些因子在每个循环乘积中都会相互抵消。下文使用的域约化是在这些假设下于补充材料 A 中证明的。

在嵌入 $\sigma \neq \sigma_0$ 下，线性无关的共轭法向量具有正定的格拉姆矩阵。所有面法向量的格拉姆矩阵可能是冗余的，此时它只是半正定的。将每个向量归一化为单位长度可能会引入平方根。因此，所得的实余弦项域不能取代公共域 K 或根范数的平方类。α_i 的范数类是 $K^\times/(K^\times)^2$ 中 $B(\alpha_i,\ \alpha_i)$ 的类；按 $t_i \in K^\times$ 重新缩放会使该范数乘以 t_i^2，但其范数类保持不变。

Bugaenko 定理 [6] 的应用使用指定的不变格 L，以及已证明的包含关系 $\Gamma(P) \subseteq \mathrm{Ref}(L)$。这里，$\Gamma(P)$ 是多胞体的反射群，而 $\mathrm{Ref}(L)$ 是该格的完整反射群。仅定义域相同并不能证明这种包含关系。

对于秩 16 和 17，补充材料 A 在进行局部算术约化后给出了必要的构型列表。我们将这些列表视为已证明的局部结果。线性规划结合了其中的范数不等式和局部排除条件；它并未推导出前述约化。

输入 6.1（局部算术结果）。补充材料 A 中的以下结果均在其所述假设下使用。

（i）共同的全实域、面法向量直线、整 Cartan 环、根范数平方类，以及除指定实嵌入外每个实嵌入处的正性，均符合各局部定理的要求。（ii）表 5 和表 6 中的十四个秩十七族和十九个秩十六族构成完备的必要列表，其中包括证明中出现的所有例外构型、其他分量和域选项。（iii）第 6.2 节和表 5–6 中的估计适用于完整顶点图中指定的分量。每个分量界均包含其局部证明中用到的全部贡献。（iv）表 7 的局部排除条件适用于所述面构型，包括边界值，以及与某个 A_1 分量相关联的每个对面的识别。（v）表 4 中的四种有限分类在其所述参数集上是完备的。几何约化证明了相关面构型属于这些参数集。（vi）每次应用黄金格定理时，均使用上述指定的格和完整反射群包含关系。

这些陈述除了关于实Gram矩阵半正定性的信息外，还包含算术信息。

在情形 (ii) 中，域分别为 $\mathbb{Q}(2\cos(2\pi/7))$ 和 $\mathbb{Q}(2\cos(2\pi/9))$。所需的有限接触的 Coxeter 标号分别为七或十八。因此，端点对面墙分别以 $\pi/7$ 或 $\pi/18$ 的角度与相应被移除的相邻壁相交。这是补充材料 A 中 A_{17} 端点约化的两种情形。

完整图 D_{16} 的排除通过对二进完备化的直接论证单独证明。该证明未使用表 4 中的四种有限分类之一。这与在秩十七时排除 $D_{16}+I$ 是两回事。

表 4：补充材料 A 中使用的四个有限分类。代数解不一定对应一个多胞体。

No.	已分类的参数集	局部证明中使用的结论
(i)	完整的二次域参数集 图 A_{17} 的二次域参数集	无解
(ii)	完整的两个三次域参数集 for full 图 A_{17}的两个三次域参数集，每个都具有所需的	两个参数集中均无解
（ iii）	有限 Coxeter 角处的端点接触 共同的二次参数集 通过对完整 图 B_{17} 和 D_{17}	两组可能的参数对；每组 随后均须接受适当的 B- 或 D-分量范数估计
(iv)	得到的二次参数集 来自完整图 B_{16}	一组可能的参数，其 指定边上的估计适用于这些参数 指定边上的估计适用

6.2 记号与局部范数不等式

量 e_C 仍表示固定向量x的正交投影的平方范数。记 T_2 为普通不可约 $I_2(m)$， $m \geq 3$、 T_3 为 A_3， B_3 或 H_3，并记 T_4 为以下之一： A_4， B_4， D_4， F_4， H_4。令 $\mathcal{K}$ 表示任一例外构型 N_7 或 O_7 ； 二者作为不同的替代方案分别处理。未加限定的 A_1 表示普通且非短的。构型 I， J， N_7， O_7为第5.1节中的构型。

Set

$$\mathcal{R}_5 = \{A_5, D_5, A_4 + A_1, H_4 + A_1, T_3 + T_2, 2T_2 + A_1\},$$
$$\mathcal{R}'_5 = \{A_5, D_5, A_4 + A_1, H_4 + A_1, A_3 + T_2, 2T_2 + A_1\}.$$

根据表1，每个成员至少贡献 $5/14$ 。对$\mathcal{R}'_5$ 中 A_3 的限制是秩十六分类的一部分。

除了表1中的普通估计外，补充材料 A 还给出了

$$e_{I+T_2} > 21/100, \qquad e_{I+T_3} > 2/7, \qquad e_{I+T_4} > 23/70, \tag{6.3}$$
$$e_{I+A_1} > 5051/25000 = .20204. \tag{6.4}$$

它还给出了 $e_{T_2} > 1/5$ ，适用于位于 N_7 或 O_7 外部的普通分量；以及 $e_{A_1} > 2/15$ ，适用于位于 O_7 外部的普通分量。

表 5 和表 6 在中间列列出了完整顶点图上剩余的局部界。每个列出的二面体参数和域选项均取自局部定理中指定的集合。除非明确标注为联合估计，否则各个求和项分别对应于互不相交的分量集上的估计。分配给大分量的估计仅对该分量给出界，即使其证明使用了其他面。例如， $16/19$ 对于 A_{14} 且带有普通 T_2和。91286445198，以及带有 N_7 或 O_7 ，是不同的陈述。普通 T_2 估计 $3/19$ 在 $m \geq 4$时由算术二面体定理推出，在 $m = 3$时则由 $319/2000 > 3/19$ 推出。对于所指示的 B/D 分量，在带有 N_7 或 O_7的情况下，界。91859 和。93859已经包含来自对面的修正。0487。该修正属于同一分量的界，而不是单独的求和项。下面列出证书所使用的不等式。电子模型中的其他有效不等式可以被赋予零乘子。

6.3 十七秩配置

表 5 给出了补充材料 A 中的十四个族。大括号和分号用于分隔替代方案，所有替代方案均包括在内。局部排除条件 X1–X13 载于表 7。

表 5：十七秩族及对偶解中使用的不等式。

No.	完整顶点图	范数界之和至少为一，或局部排除
1	$A_{11}+I+$（A_5 或 D_5）	$13/20+5/14=141/140$；非负来自 I 的贡献被省略
2	$A_{11}+K+U_4$, $U_4\in\{A_4,B_4,D_4,F_4\}$	$13/20+9/100+2/7$
3	$A_{12}+R$, $R\in\mathcal{R}_5$	$5/7+5/14$
4	A_{12} 加上 $I+T_4$； $I+T_3+A_1$；或者 $I+2T_2$	$5/7$分别加上联合 $23/70$；联合 $2/7$和 $1/10$；或联合 $21/100$ 和 $1/7$
5	A_{14} 加上 T_3； T_2+A_1；或 $I+T_2$	$4/5$ 分别加上 $1/4$； $1/7+1/10$；或联合 $21/100$
6	A_{15} 加上 T_2； $2A_1$； $I+A_1$； N_7；或 O_7	T_2：X1。接下来的两个给出 $.8348+.2$ 和 $.8348+.20204$。任一例外构型给出 $.9191408+.09$
7	A_{16} 加上普通 A_1 或构型 I	对于两种秩一替代方案均为X2
8	A_{17}	X3，使用分类 (i)、(ii) 以及对其参数集的约化
9	$B_{15}+N_7$ 或 $B_{15}+O_7$	$.93859+.09=1.02859$
10	$B_{16}+I$	X4
11	B_{17}	$e_{B_{17}}\geq 1.00184$，在分别进行约化并估计两个参数对的范数之后
12	$D_{15}+N_7$ 或 $D_{15}+O_7$	$.91859+.09=1.00859$
13	D_{16} 加上普通 A_1 或构型 I	普通 A_1的 X5； I的 X6
14	D_{17}	$e_{D_{17}}\geq 1.00184$，在对 D 分叉进行约化之后以及其针对两个参数对的范数估计

十四个族扩展为 39 个参数化构型类。其中一些可能无法几何可实现。诸如 $2T_2$ 这样的重复符号表示具有独立参数的分量。对于 $I+2T_2$，将联合估计应用于 I 和一个二面体分量，并将普通估计应用于另一个二面体分量。因此， e_I 以系数一出现。

6.4 十六秩构型

Ta表 6 列出了十九个秩十六族，包括受限族$\mathcal{R}$ $'_5$.

表6：秩十六族及对偶解中使用的不等式。

No.	完整顶点图	范数界之和至少为一，或局部排除
1	$A_{10}+I+$(或 A_5 D_5)	$404/625+5/14$
2	$A_{10}+K+U_4$, $U_4\in\{A_4, B_4, D_4, F_4\}$	$404/625+9/100+2/7$
3	$A_{11}+R$, $R\in\mathcal{R}'_5$	$13/20+5/14=141/140$
4	$A_{11}+I+T_4$	联合 $A_{11}+I$ 界 $18/25$，再加上不相交的 T_4 界 $2/7$，得到 $176/175$
5	$A_{11}+O_7+A_3$	$13/20+9/100+13/50=1$
6	A_{12} 再加上 A_4； H_4；或 $2T_2$	$5/7+2/7=1$
7	$A_{12}+I+T_3$	$5/7$ 再加上联合 $I+T_3$ 界 $2/7$
8	$A_{12}+K+T_2$	$5/7+9/100+1/5$，使用更强的在存在 N_7的情况下的普通分量界或 O_7
9	A_{13} 加上 A_3； T_2+A_1； $I+T_2$；或 O_7+A_1	分别为： $53/70+1/4$； $53/70+1/7+1/10=1$； X7；或 $233/300+9/100+2/15=1$
10	A_{14} 加上 T_2； $2A_1$； $I+A_1$； N_7；或 O_7	分别为： $16/19+3/19=1$； $4/5+.2=1$； $4/5+.20204$；或 $.91286445198+.09$ 与任一 N_7 或 O_7
11	A_{15} 加上普通 A_1 或构型 I	对于每个孤立和非孤立的秩一 X8 替代方案
12	A_{16}	X9
13	$B_{14}+N_7$ 或 $B_{14}+O_7$	$.91859+.09=1.00859$
14	B_{15} 加上普通 A_1 或构型 I	普通 A_1 的 X10； I 的 X11
15	B_{16}	$e_{B_{16}}\geq 1.00640742675$，在其约化为 (iv) 中的参数集和针对该项的边缘估计单个解
16	D_{13} 加上 $I+T_2$ 或 O_7+A_1	.82436 加上其余部分的界 .21 分量；在 $I+T_2$ 上联合，并由.....粗化而来 $.09+2/15$ 在 O_7+A_1 上
17	D_{14} 加上普通 $I_2(m)$， $m\geq 4$； N_7；或 O_7	普通： $.84816+3/19$。任一例外构型： $.91859+.09$
18	D_{15} 加上普通 A_1 或配置 I	普通 A_1对应 X10； I对应 X12
19	D_{16}	X13、二次域约化和二进制定理

每个展示出的和都至少为一，因此与 (5.1) 矛盾。无需与一之间存在一致正差。例如，族 5 使用了针对互不相交的分量集的三个估计，其界之和为一。族 4 使用了针对 $A_{11}+I$ 的联合估计：

$$e_{A_{11}}+e_I\geq 18/25,\qquad e_{T_4}\geq 2/7.$$

这两个不等式中的分量集互不相交。界 $18/25$适用于 $A_{11}+I$上的和；不能将其单独赋给 A_{11}，也不能将其与对 e_I另行给出的、带有完整系数的估计相加。

这十九个族给出了 49 个参数化构型类。两份列表合计包含 88 个替代方案：其中 72 个通过范数不等式处理，16 个通过局部排除条件处理。二面体参数保留其完整范围，这些范围可能无界。

6.5 局部算术排除

表 7 列出了表 5 和表 6 中使用的每个局部排除情形。每一项都是补充材料 A 中的局部定理，并满足其中所述的算术和几何假设。它将该构型类在线性规划中的缩放系数设为零，而不是给出额外的范数估计。

表 7：局部算术排除。所示图为完整顶点图。

Code	完整顶点图	局部定理
X1	$A_{15}+T_2$，秩17	普通二面体定理，包括所有定义域和小范数替代方案。
X2	$A_{16}+A_1$ 或 $A_{16}+I$，秩17	与以下内容相关的相对面定理 A_1 分量，包括孤立和非孤立种情形。
X3	A_{17}，秩17	端点以及对有限 (i) 和 (ii) 中参数集的域约化。
X4	$B_{16}+I$，秩17	关于短孤立对面面的定理，针对二次域和三次域。
X5	$D_{16}+A_1$，秩17，具有普通 A_1	普通秩一定理，包括分叉处的两种替代方案。
X6	$D_{16}+I$，秩17	关于此完整图在次数为二、三和四的域上的定理，包括两种分叉符号和所有二进情形。
X7	$A_{13}+I+T_2$，秩16	涉及剩余分量的端点定理，包含每个普通二面体标记。
X8	$A_{15}+A_1$ 或 $A_{15}+I$，秩16	秩一对向面定理，包括所有高度边界。
X9	A_{16}，秩16	完整的端点与场定理图的端点与场定理，包括其有限接触情形以及洛伦兹时间坐标之比。
X10	$B_{15}+A_1$ 或 $D_{15}+A_1$，秩16，具有普通 A_1	相应的非孤立约化和普通孤立定理，包括 $h=1/2$。
X11	$B_{15}+I$，秩16	$0<h<1/2$的孤立短定理。
X12	$D_{15}+I$，秩16	$0<h<1/2$的孤立短定理，包括所有带符号分叉。
X13	D_{16}，秩16	二次域约化和二进制定理，包括奇数、惰性、分歧和分裂情形。

对于每个秩一定理，固定与所指示的 A_1 分量相关联的对面。若其空间法向量在大分量上的投影非零，则适用非孤立情形。否则，该面是孤立的，并且其单位法向量中 p 的系数的平方所给出的参数满足 $0 < h < 1/2$ 或 $h \geq 1/2$。等号情形包含在通常定理中。因此，这些替代方案涉及多胞体的面，而不是其图的任意形式扩展。

对于完整图 B_{17} 和 D_{17}，局部约化分别将参数归入表 4 的 (iii) 类。随后对两种可能的参数对应用分量估计。对于B_{16}，约化到 (iv) 类，并沿其指定边进行估计，从而处理唯一可能的参数对。这些有限分类并未得到空参数集。完整图 D_{16} 则由二进定理 X13 排除。

6.6 算术情形的对偶证书

算术表给出了一个显式对偶解。对于每个通过范数不等式处理的替代方案，在互不相交的分量集上，对列出的不等式赋予乘子 1，对任何额外的不等式赋予乘子 0。这样，每个分量变量的系数总和至多为 1，而下界之和至少为 1。替代方案 X1–X13 的缩放系数为零，因此根据其局部排除定理，归一化亏量为零。

对全部 88 种算术备选情形以及维数 18–29 中的 829 个紧类，计算均采用相同的线性规划构造。总计有 917 个类，其中 167 个被局部排除。经核验的对偶问题有 3324 个变量和 2488 个不等式。复现附录将这些线性验证与局部几何证明分别记录。

定理 6.2 （紧致算术维数界）。 假设输入 *6.1* 的局部结果、第 *5* 节的紧致局部结果，以及 *Vinberg* 的紧致上界29。对于维数16、.....、29，合并后的归一化线性规划不可行。因此，紧致算术双曲 *Coxeter* 多面体满足 $n \leq 15$。

证明。 在秩 16 和 17 时，每个算术面构型都属于相应的必要列表之一。局部排除的类是不可能的。对于每个剩余的类，对偶不等式迫使投影范数平方之和至少为一，这与 (5.1) 矛盾。在维数 18–29 中，紧类和定理 5.6 仍可直接适用。Vinberg 定理排除了维数 30 及以上的情形。

□

7 排除所有更高维度

命题 2.4 适用于三个固定构型族中的每一个。下表总结了覆盖完整维数范围所需的附加估计。

Case	有限计算	高维
有限体积	$n = 58$处的有限顶点与理想顶点	解析面与顶点估计， 连同所述的 理想链接约化，适用于每个 $n \geq 59$
紧的	在.....处的完整分类 $18 \leq n \leq 29$	Vinberg 定理给出 $n \leq 29$
紧的 算术	算术分类位于 $n = 16$，17，以及紧类位于 $18 \leq n \leq 29$	同一个紧的定理给出 $n \leq 29$

Vinberg界排除了维度 $n \geq 30$ [5, 7]中的紧多胞体。算术程序对维数 18–29 使用未作修改的紧类和不等式。一般有限体积情形则使用针对每个更高维度所证明的解析估计。因此，这些证书分别排除了至少为 58、18 和 16 的所有维度。该结论需要上述高维估计；仅凭某个孤立的精确维数问题不可行，并不能推出这一结论。

要得到更低的下界，就需要对新纳入的维度构造一个穷尽的类别族，并给出有效的局部不等式。单调性命题并未断言 Coxeter 多面体的任意一个面本身也是 Coxeter 多面体。

8 线性证书的精确验证

对于紧致情形，矩阵记录了每个局部不等式的支集、有理下界和适用性类别。所有类别的对偶程序会一并求解。数值求解器给出乘子，将其转换为有理数后，再通过精确算术逐一检查其是否满足矩阵的每一行和变量界。另行运行程序重新生成配置列表以及原始矩阵和对偶矩阵，逐字节比较生成的文件，并再次检查有理数解。

问题	类别	局部排除项	原始变量/行	Dual 变量/行
紧的	829	151	3471/4876	3157/2224
算术和紧类	917	167	3869/5147	3324/2488

在有限体积情形下，局部矩阵有 5 810 个变量和 103 606 行。秩为58的森林不等式由有限网络的完整集合表示。局部矩阵和每个网络使用相同的权系数。它们的精确可行赋值给出上界 377，而八行对偶组合给出相匹配的下界。这些检查未使用数值优化器，并将网络不等式保存在彼此独立的矩阵中。后续验证重复了局部不等式、连接各网络的完整性检查以及下界证书，并使用了此前已检查的网络。

某个不等式在一个类上可能是冗余的。例如，在初始段范数估计中加入正修正项，会在同一支集上得到更强的不等式。两者中的任一个都可以保留在矩阵中。相反，某个对偶解中的零乘子只能证明该解没有使用相应的不等式；它不能证明该不等式是冗余的。

9 进一步约束

额外的必要条件可能会限制一个构型类，或向其锥中加入不等式。角的额外函数可能扩大有限体积情形下可用的权函数类。当每个多胞体仍然确定一个可行点，且构型数据在维数阈值变化时保持不变时，这些修改不会影响论证。

一些局部结果也可以改用 Gram矩阵上的半定约束来表述。此类表述必须保留每项约束的几何适用性。在算术情形下，还必须考虑整 Cartan 环、其他实嵌入处的共轭形式，以及格中指定的反射群包含。仅有实 Gram正性并不能推出这些算术条件。

A 来源与可复现性

几何结果见维数界文章及其补充材料 [1, 2]。有限体积权函数还用到了其两个维数范围之间的比较，以及研究笔记中所述的解析估计。代码仓库 [4] 提供了阅读指南 `notes/lp/UNIFORM_LP_PARADIGM.md` 和结果摘要 `notes/lp/existing_proof_lp_recovery_results_20261118.md`。主要源文件和验证记录列于下方。代码仓库的复现指南区分了公开可用的文件与尚未随源代码检出目录一同发布的更大规模研究数据。

记录	Path
有限体积验证	`audit/joint58_complete_lp_execution_20261110.json`
后续验证	`audit/lp_rerun_report_execution_20261115.json`
紧致构型生成器	`scripts/compact17_proof_recovery_energy_catalogue_20261118.py`
算术配置生成器	`scripts/existing_proof_arithmetic_energy_domains_20261118.py`
通用线性规划构造	`scripts/run_existing_proof_energy_lp_20261118.py`
精确矩阵检查器	`scripts/finite_volume_lp_matrix_20261106.py`
紧凑矩阵和证书	`results/existing_proof_compact17_energy_master01_20261118/`
算术矩阵和证书	`results/existing_proof_arithmetic15_energy_master01_20261118/`
独立验证审查	`audit/existing_proof_energy_lp_execution_independent_review_20261118.json`
验证摘要	`audit/existing_proof_lp_recovery_completion_root_acceptance_20261118.json`

每个紧的输出目录都包含配置列表、规范化原问题、对偶问题、有理数解，以及构造和验证报告。执行记录包含命令、源文件哈希值、资源限制和测量数据。每个局部不等式在数学上的适用性都经过源代码审查；有理数检查器会验证其线性组合。文件哈希值用于标识所用的确切版本。

复现过程使用代码仓库中的串行监控运行器。 `export-solve` 阶段构造问题并求得对偶解；另一个独立的 `verify` 阶段会重新生成两个矩阵，并检查有理证书。对于算术部分，提供了算术配置生成器和紧配置生成器。每次运行都需要使用新的输出路径和监控路径。执行报告列出了确切的命令和资源限制。

所得证书证明了所述局部定理和分类的线性推论。几何证明、域约化、四项有限算术分类以及格定理均保留了文中所述的假设。此前的验证记录与新的全局线性规划检查分开引用。

致谢。 作者使用 OpenAI 的 Codex 作为研究和编程助手，探讨证明思路、构建线性规划表述、改进论述，并生成和审查随附的 Python 代码。作者审查了由此得到的数学内容和代码，并对最终内容负责。

参考文献

[1] A. Kolpakov。双曲 Coxeter 多面体的维数界。工作论文，2026年。
https://github.com/sashakolpakov/CoxeterPolytopes/tree/main/arxiv/hyperbolic_coxeter dimension bounds._ _[2] A. Kolpakov。双曲 Coxeter 多面体的维数界：补充证明，2026年。
https://github.com/sashakolpakov/CoxeterPolytopes/tree/main/manuscripts/addenda/dimension_bounds_20261030.[3] L. Guo 和 F. Zheng。有限体积双曲 Coxeter 多胞体的维数界。arXiv:2611.01795v1，2026年。 https://arxiv.org/abs/2611.01795.[4] A. Kolpakov。CoxeterPolytopes：证明来源和线性规划研究记录。研究代码仓库，2026年。
https://github.com/sashakolpakov/CoxeterPolytopes.[5] E. B. Vinberg。高维罗巴切夫斯基空间中不存在晶体反射群。莫斯科数学会会刊，47：68–102，1984年。英文译本，莫斯科数学会汇刊（1985年），75–112。 https://www.mathnet.ru/eng/mmo444.[6] V. O. Bugaenko。关于$\mathbb{Z}[(\sqrt{5}+1)/2]$上的幺模双曲二次型的自同构群。莫斯科大学学报第*1*辑：数学与力学，第6–12页，1984年。第5期。 https://www.mathnet.ru/eng/vmumm3408.[7] E. B. Vinberg。双曲反射群。俄罗斯数学调查，40(1)：31–75，1985年。
https://doi.org/10.1070/RM1985v040n01ABEH003527。