arXiv:2611.31920v1 [math.NT] 24 Nov 2026

Eisenstein上同调与某些L函数的临界值：根论组合引理

FARID HOSSEINIJAFARI

摘要。本文将 Harder–Raghuram 组合引理推广到根论框架。该引理将相邻 L–值的临界性与幂零根基上同调中的次数联系起来；本文则将这一联系拓展至连通分裂约化群的极大抛物子群，其中配备不可约且本质上温和的上同调诱导数据。

对于实处，本文分类了在正则平移下边界比较中的两个 Kostant 次数可能相等的极大抛物子群。对于其中每个抛物子群，存在一个可容许平移，使得两个相邻自变量在每个 Langlands–Shahidi 分级中同时为临界值，当且仅当两个 Kostant 次数都等于 $\dim U/2$。该分类涵盖了块大小乘积为偶数的 A 型双块抛物子群（Harder–Raghuram，证明者为 Weselmann），以及 $m \geq 2$ 的 D_{2m+1} 型各向同性直线抛物子群（Bhagwat–Raghuram）。仅有的例外情形是 E_6型的 P_1 和 P_6 。在所有其他情形中，被 Levi Weyl 群最长元固定的 U 之根会将同时临界性限制在奇异墙上，这推广了 GL_N的奇块阻碍。其数目等于 M 与 G的基本秩之差。当 Kostant 次数不同时，如 Harder 的 GL_2 情形，本文确定哪些边界次数仍可能相等。

在一个复位置，可容许平移恰好同时临界，当且仅当平移后的两个共轭 Levi 权出现在次数之和为 $\dim U$ 的 Kostant 次数中。在具有公共相对中心的情况下，正则可容许平移特征的总次数平衡刻画了每个阿基米德位置处的同时临界性。对于分裂的 E_6 在 $\mathbb{Q}$ 上，一个半自旋族在次数 20 和 21 中产生 Eisenstein 上同调类，其中包括一个对两种相伴边界面类型的限制均非零的 20 次数上同调类。

1. 引言

本文确定了边界上同调中的 Kostant 次数何时刻画 Langlands–Shahidi L-函数 [59]的相邻临界参数。这个问题始于*Harder* 的 *Eisenstein* 上同调计划中的逆 Kostant 问题 [25]。给定一个 Levi 系数，它是否出现在幂零根基上同调中？如果出现，那么对于哪个支配环境权，以及出现在哪个次数中？Harder 和 Raghuram 的组合引理赋予了这一问题算术意义。在他们的 Rankin–Selberg 情形中，实现该
所需的 Kostant 次数恰好是那些能给出两个相邻临界自变量的次数，不多也不少 [27, 引理 7.14]。

该组合引理的分次表述源于作者关于在全虚域上分裂 G_2 的研究。其两个极大抛物子群分别为 Eisenstein 常数项贡献两个和三个L因子。伴随立方因子允许的平移可以由行列式因子排除，而该行列式因子是在参数的两倍处取值的。关于 G_2 [28, 引理 6.1–6.2] 的组合引理由此提出了一个一般性问题。对于连通分裂约化群的一个极大抛物子群，两个相应的 Kostant 次数相等在每个分级中何时等价于

2020 数学主题分类。 主要分类 11F75；次要分类 11F66、17B22、22E46。关键词与短语。 Eisenstein 上同调、临界值、Kostant 代表元、实 Weil 参数、基本 Cartan 子群。

相邻临界性？本文证明了该等价性在复处成立，并对实处的障碍进行了分类。

在一个实处，本文对极大抛物子群进行了分类：对于某个在特征意义下自对偶的整Levi权，哪些极大抛物子群允许其在中间Kostant次数上具有正则平移。Harder 和 Raghuram 猜想，组合引理在 $\mathbb{Q}$对于 n 偶 n' 和奇 [26,猜想51]中成立。他们的专著陈述了全实域上关于 nn' 偶数情形的引理，并给出了 Weselmann 在 [27, 引理7.14和§7.24]中的证明。Bhagwat 和 Raghuram 处理了正交直线抛物子群 [5, §53] ，并确定了两个奇数块为 GL_N[27, §7.41]时的障碍。唯一的例外情形是 P_1 和 P_6 类型的 E_6。对于其他所有极大抛物子群，固定的诱导数据至多允许一个同时临界的平移。在该平移处，如果它存在，则没有支配环境权能在幂零根基上同调中实现平移后的Levi系数。

在受阻情形下，本文延续了 Harder 对 Kostant 长度不等情形的研究[24, §9.3.1，第 421 页起422]。Levi类的次数差异可以抵消 Kostant 长度不等的影响，本文精确确定了两项贡献能够共有的边界次数。结合阿基米德极点计算，这为两个算术问题提供了明确的上同调背景。在GL_4 例子中，次数 4 是共同的边界次数，可据此寻求对有限 L-函数在其 $s=-1$处单零点的一阶导数的解释。在GSp_4 Klingen例子中，计算指出了一个临界值；其周期归一化被纳入作者关于 Eisenstein 类分母的猜想 [29]。两个例子均在第1.3节讨论。

1.1. 背景。 设 $P=MU$ 是数域 F上连通分裂约化群 G 的一个极大标准抛物子群。在嵌入 $\eta:F\hookrightarrow\mathbb{C}$处，令 $\mathfrak{u}$ 为 U的复李代数，并用 $\mathcal{M}_\lambda$ 和 $\mathcal{M}_\mu^M$表示 G 和M 的不可约代数表示，其最高权分别为 λ 和 μ。根据Kostant定理，当且仅当

$$\mu=w\cdot\lambda:=w(\lambda+\rho)-\rho,\qquad \ell=\ell(w),$$

对于 Kostant代表元 w，其中 ρ 是正根的半和。在附属于 P 的边界面上，次数为 k 的一个 Levi 类对次数 $k+\sum_\eta \ell\,(w^\eta)$ 有贡献。因此，当伴随侧上两个 Levi 类的次数相同时，若它们的 Kostant 长度总和相等，就可以在共同的边界次数中进行比较。Harder 通过改变 Levi 系数的相对中心特征来寻找这样的平移 [24, §9.1.4, (9.88)–(9.90)]。

与 L 值的联系来自常数项。对于全纯艾森斯坦类，边界限制涉及标准交织算子 [55, 25]。对于尖点诱导数据 σ，其归一化中包含商

$$\prod_j \frac{L^S(js,\sigma,r_j)}{L^S(js+1,\sigma,r_j)},$$

其中 S 包含阿基米德位置以及 σ 分歧的有限处，而 r_j 是对偶 Levi 在对偶幂零根基 [39, 59] 的分级 j 上的作用。Harder 和 Raghuram 通过比较复算子与有理边界直和项之间的映射，证明其有理性除周期因子外成立 [27]。组合引理提供了开始这一比较所需的系数和次数。

在局部结果中，诱导表示固定、不可约、本质 tempered，并且相对于整数Levi系数是上同调的。一个可容许平移在每个嵌入处确定一个整数Levi系数以及一个求值点 s (定义 2.5)。该平移是

同时临界 的，当且仅当对于每个分级为 j 的 Langlands–Shahidi因子， js 和 $js+1$均为临界（定义 2.28）。这里，在自变量 t 处的临界性 t 是指 $1-t$ 处的阿基米德因子及其在 [16, 处的对偶均为有限，遵循 Deligne判据3]。

1.2. **主要定理**。 以下各处，诱导数据均满足上一小节的假设。称 U 固定 ，如果 Levi Weyl 群的最长元将其固定。若平移后的Levi权加上 ρ 不落在任何根超平面上（推论 2.8），则称该平移是 正则。

定理 A（ 实处的组合引理）。 在实处有两种情形 .

(1) 如果 U 没有固定根，则可容许平移同时为临界平移，当且仅当平移后的*Levi*系数出现在 $H^{\dim U/2}(\mathfrak{u}, M_\lambda)$ 中，其中 λ 是 G的某个主导权。此时，*Kostant*代表元恰好将每个分级中一半的根作为逆序。没有固定根的极大抛物子群，恰好是下表中的那些。类型取自包含省略的单根的不可约分支，并采用 *Bourbaki*编号。

Type	*Maximal parabolic*
A_{N-1}	$P_k,\quad 1\le k<N,\quad k(N-k)$ *even*
$D_{2m+1},\ m\ge 2$	$P_1,\quad$ *the stabilizer of an isotropic line*
E_6	$P_1,\ P_6$

(2) 如果 U 有固定根，则给定的诱导数据至多允许一个同时为临界平移的平移。在任何此类平移下， G 的任何主导权都不能在幂零根基上同调中实现平移后的*Levi*系数。

定理3.1 给出了临界性判据，包括第（2）部分候选平移处的Weil符号检验。定理 3.3给出了第（1）部分的分类。不动根的数量是 M 的基本秩减去 G （定理3.5）。

定理B （复位置处的组合引理）。 在复位置处，一个可容许平移同时为临界平移，当且仅当，在各自的嵌入处，两个共轭嵌入对应的平移后的*Levi*系数分别以支配环境权出现在幂零根基上同调中，且其次数之和为维数 U。此时，两个*Kostant*代表元唯一且互为补集。这个等式按分级逐级成立：在分级 j 中，两个逆序计数之和为维数r_j，即该分级中的根数。

对于两个一般线性块，定理4.1 在全虚域 [46, 引理3。16]中恢复了Raghuram组合引理。方程（4.2）给出了每个分级中的平衡。对于固定的诱导数据，同时为临界的平移恰好是一个明确开区间内的可容许点；该区间可能为空（命题 4.6）。

该证明结合了 Saper 对成对根中 Kostant 反演的计数 [50,引理 17.6] 以及 Shahidi 用 Artin 因子描述阿基米德局部系数的方法 [57, §3]。在实处，固定根贡献一个实伽马因子，其奇偶性由 Weil 群在其根线上作用所决定。在复位置，成对根坐标除以分级后具有共同中点。因此，次数平衡迫使每一对中的符号相反，这恰好是相应伽马因子具有相邻临界性的条件。

注记 1.1。 定理4.1 证明了复处上的完整组合引理。在其局部假设下，每个 Langlands–Shahidi 分级中的同时临界性，等价于两个共轭 Levi 系数分别出现在 Kostant 次数之中，且这两个次数之和为 维数 U。

完成这项工作后，作者得知 Raghuram 和 Zou 已独立证明了在其取值点处的正向蕴含，并从其超临界性条件 [47, 定义 5.8 和引理 715]中获得了互补的 Kostant 代表元。注记 4.2 比较了这些归一化。

在 Harder 和 Raghuram 的实一般线性情形中，平衡意味着 Kostant代表元的长度为 $\dim U/2$ [27, Lemma 7.14]。在复位置，相应的条件是两个共轭Kostant度之和为 $\dim U$。下面的推论说明，何时总次数的一个等式能够检验每个阿基米德赋值处的这些局部条件。

推论1.2 (整体平衡与同时临界性)。 假设所有阿基米德赋值处的相对中心都相同。一个在每个嵌入处都正则的可容许平移，在所有阿基米德赋值处同时临界，当且仅当两个伴随侧的总*Kostant*度相等。

更准确地说，在每个分级中，两侧对所有嵌入求和所得的*Kostant* 次数之差的绝对值，等于阿基米德因子在相邻自变量处及其对偶因子在反射自变量处的极点阶总和。

共同的相对中心迫使所有非零的局部次数差具有相同符号。因此，它们的和恰好在每个局部差都为零时为零（定理 5.2）。逐分级的极点计数见推论 5.3。

定理C （半自旋Eisenstein类）。 设 G 是 $\mathbb{Q}$上 E_6 型的分裂群，且为单连通群或伴随群。对每个整数 $t \geq 1$，取环境最高权 $2t\rho$。在适当的公共有限层级上，由 P_1 诱导、取半自旋族的中心平移处的全纯*Eisenstein*级数，在次数20 和21 中给出类，并且其在诱导面上的限制非零。在次数20中，由一个尖点诱导数据产生的单个类对两种边界面类型 P_1 和 P_6 的限制均非平凡。

的十六个根 分成八对，每对中各有一次逆序。由此得到的Kostant 次数八，将次数 12 和以及 13 的Levi类，映射到边界次数20 和以及21。定理 6.1 表明，限制到诱导面的像在 $\mathbb{Q}$上包含指定长度八分量中的整个内部Levi Hecke子空间。推论6.4给出了关于两种面的断言。

1.3. **Kostant 次数不相等时的算术问题**。 Harder计划还提出，当两个 Kostant 次数不同时，Eisenstein上同调能够检测到什么 [24, §9.3.1]。此时，次数差异会提供两方面的信息。在上同调侧，只有当 Levi上同调度之差恰好弥补 Kostant 次数之差时，两个边界贡献才会在同一个次数上相遇（引理 5.10）。在解析侧，当平移正则且相对中心相同时，每个分级中的绝对次数差会统计直接阿基米德因子和反射阿基米德因子在相邻自变量处的极点（推论 5.3）。

对于 $(3,\ 1)$-抛物子 $\mathrm{GL}_4/\mathbb{Q}$，Ramanujan 的尖点形式的对称平方提升给出了一个共同的边界次数 $4 = 3 + 1 = 2 + 2$。在相邻自变量 -2 和-1中，第一个是临界的。在第二个自变量处，一个简单的阿基米德极点以及反射自变量处的不消失性意味着有限 L-函数具有一个单零点（例 5.6）。这同时确定了寻求其上同调解释时所应考察的一个导数和一个边界次数。

Klingen 抛物子引出了一个不同的算术问题。对于 Sp_{2n} 在全实域上，取 $n \geq 2$，适当的全局泛型尖点 Levi 数据使奇异平移成为在每个实处同时临界的唯一平移（命题 3.14）。对于 $\mathrm{GSp}_4/\mathbb{Q}$，分母问题出现在 Kostant 长度为二的相邻室中。对于处于上同调参数处的代数扭曲诱导表示，只有上方自变量是临界的（例 5.14）。作者的 Klingen 分母猜想将这个临界值在周期归一化后，与一个 Eisenstein 类的分母联系起来 [29]，该 Eisenstein 类遵循 Harder 关于 Sp_4 [23,§1.5.1, (93)] 的 Siegel 抛物子猜想。

第 2 节介绍系数线和逆 Kostant 判据。第 3 节和4节证明局部引理。第 5 节讨论全局缺陷和边界次数。第 6节构造半旋量类。附录 A 验证实分类中的不动根。

致谢。 作者感谢 Leslie Saper 将他引入关于$\mathcal{L}$-模和微支撑的研究，感谢 Sug Woo Shin 就纯性问题进行的有益讨论，也感谢 Jayce Getz 多次进行有益讨论并提出改进稿件的建议。作者衷心感谢美国国家科学基金会通过 RTG 项目资助 DMS-2231514 提供的部分资助。本文中表达的任何意见、发现、结论或建议均属于作者本人，并不一定反映美国国家科学基金会的观点。

2. 逆 Kostant 问题的分次根坐标

相同的根坐标可计算 Kostant 次数和阿基米德临界性检验。它们的斜率即为 Langlands–Shahidi 分级，而对立则将它们成对地置于中心（命题 2.12）。

2.1. 逆 Kostant 问题及其次数。设 F 为一个数域， G为定义在 F上的连通分裂约化群。固定一个分裂极大环面 T、一个 Borel 子群$B \supset T$以及一个极大真标准抛物子群 $P = MU_P \supset B$。令 $X = X^*(T)$和$W = W_G$，设 W_M 为 Levi Weyl 群，并将 w_G 和 w_M 记为最长元。对于 $H \in \{G, M\}$，令 Φ_H^+和 Δ_H为由 $B \cap H$确定的正根和单根，其半和为 ρ_H；令 $\rho = \rho_G$和 $\Delta = \Delta_G$。通过限制到 T，将特征标群 $X^*(H)$与湮灭 H的每个余根的整权相识别，并令

$$\mathfrak{a}_{H,\mathbb{Q}}^* = X^*(H) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}, \qquad \mathfrak{a}_H^* = \mathfrak{a}_{H,\mathbb{Q}}^* \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R},$$
$$X_H^+ = \{\nu \in X : \langle \nu, \alpha^\vee \rangle \geq 0 \text{ for all } \alpha \in \Delta_H\}.$$

固定$\mathbb{Q} \subset \mathbb{C}$ 并记 $\Sigma_F = \mathrm{Hom}(F, \mathbb{C})$。在选定的嵌入下， $\mathfrak{u}_P$ 是 U_P的复化李代数。令 $\mathcal{M}_\lambda$为最高权为 $\lambda \in X_G^+$的不可约代数 G-模，并令 $\widetilde{\ }\mathcal{M}_\lambda$ 表示与之对应的局部系统。对于 $\mu \in X_M^+$，我们将$\mathcal{M}_\mu^M$和 $\widetilde{\ }\mathcal{M}_\mu^M$分别记为相应的 Levi 模及其对应的局部系统。令

$$\Psi_P = \Phi_G^+ \setminus \Phi_M^+, \qquad \rho_P = \rho - \rho_M, \qquad d_P = |\Psi_P| = \dim U_P.$$

集合 $W^P = \{w \in W : w^{-1}\Phi_M^+ \subset \Phi_G^+\}$ 由$W_M \backslash W$ [25, §6.2.5]中的最小代表元组成。它们的长度为 $\ell(w) = |\mathrm{Inv}_P(w)|$，其中 $\mathrm{Inv}_P(w) = \{\beta \in \Psi_P : w^{-1}\beta \in -\Phi_G^+\}$ [31]。当 $w \cdot \lambda = w(\lambda + \rho) - \rho$ 时，Kostant定理 [37] 给出

$$H^q(\mathfrak{u}_P, \mathcal{M}_\lambda) = \bigoplus_{\substack{w \in W^P \\ \ell(w) = q}} \mathcal{M}_{w\cdot\lambda}^M \qquad (\lambda \in X_G^+), \tag{2.1}$$

这是 [25, §6.2.5] 和 [55]中边界上同调构造的基础。逆问题是问给定的 $\mu \in X_M^+$是否具有 $w\cdot\lambda$的形式，其中 $\lambda \in X_G^+$且 $w \in W^P$。

权 $x \in X\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}$称为 H-正则，如果对于每个 $\alpha \in \Phi_H$都有 $\langle x,\alpha^\vee\rangle \neq 0$；如果它与 H 的简单余根的配对均为正，则称其为严格 H-支配。

在对边界上同调的研究中，Harder 和 Schwermer 使用 Kostant定理来确定 Levi 系数及其次数。下面的逆判据采用了 Clozel 对其方法的论述中的室论证 [13, §3.3, (3.5)–(3.6)]。它明确说明了整性和唯一性，并将上同调次数表示为负根配对的数量。

命题 2.1 (逆 Kostant 判据)。设 $\mu \in X_M^+$并令 $x = \mu+\rho$。当且仅当 x 为 G-正则时，存在$\lambda \in X_G^+$和 $w \in W^P$满足 $\mu = w\cdot\lambda$。在此情形下，w 是 W 中使 $w^{-1}x$严格 G-支配的唯一元素，并且

$$\lambda = w^{-1}x-\rho, \qquad \mathrm{Inv}_P(w) = \{\beta\in\Psi_P : \langle x,\beta^\vee\rangle < 0\}.$$

特别是，

$$\ell(w) = \#\{\beta\in\Psi_P : \langle x,\beta^\vee\rangle<0\}. \tag{2.2}$$

证明。若对支配的 λ 有 $\mu = w\cdot\lambda$，则 $x = w(\lambda+\rho)$ 是正则的。反之，正则的 x 有唯一的严格支配平移 $y = w^{-1}x$。对于 $\alpha\in\Phi_M^+$，严格的 Levi 优势给出 $y,(w^{-1}\alpha)^\vee = x,\alpha^\vee > 0$。因此 $w^{-1}\alpha$ 为正，且 $w\in W^P$。权 $\lambda = y-\rho$ 是整数权，因为 $w^{-1}\rho-\rho$ 属于根格。其单余根配对均为非负，因为 y 的单余根配对均为正整数。最后，$x,\beta^\vee = y,(w^{-1}\beta)^\vee$ 恰在 $\mathrm{Inv}_P(w)$ 上为负。□

该论证适用于任意标准抛物子群，并允许 $\lambda = 0$。极大性使得$\mathfrak{a}_M^*/\mathfrak{a}_G^*$成为一条直线。在 [13, §3.3，定理 3。6] 的情形中，正则性在扭曲半直线上成立。第 2.4 节确定了整条直线上的室区间。

2.2. 分级、系数移位与诱导参数。

2.2.1. 相对权与对偶分次。令 α_P为 $\Delta\setminus\Delta_M$中的唯一元素。基本权 $\gamma_P\in\mathrm{span}_{\mathbb{Q}}(\Phi_G)$ 由 $\langle\gamma_P,\alpha_P^\vee\rangle = 1$ 以及 $\langle\gamma_P,\alpha^\vee\rangle = 0$（$\alpha\in\Delta_M$）刻画。其类张成 $\mathfrak{a}_{M,\mathbb{Q}}^*/\mathfrak{a}_{G,\mathbb{Q}}^*$，而根张成条件确定代表元[24, §9.1.3]。由于 W_M置换 Ψ_P，权 ρ_P是 W_M-不变的，并且

$$\rho_P = f_P\gamma_P, \qquad f_P := \langle\rho_P,\alpha_P^\vee\rangle = 1-\langle\rho_M,\alpha_P^\vee\rangle\in\tfrac12\mathbb{Z}, \qquad f_P\geq 1, \tag{2.3}$$

不等式成立，因为 ρ_M 是 Levi单根的非负组合。因此，γ_P 是 Langlands–Shahidi归一化的权 $\tilde\alpha$ [59]。

定义 2.2（根分级）。$\beta\in\Psi_P$的分级 $j(\beta) = \langle\gamma_P,\beta^\vee\rangle$ 是 $\beta^\vee$的简单余根展开中$\alpha_P^\vee$ 的系数。由于 β 和 $\beta^\vee$ 具有相同的支集，它是正整数。

在非单纯连通类型中，分级不一定等于 α_P 在 β 中的系数。对于 $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$复对偶群 G 及其标准Levi子群 M，正对偶幂零根基分解为

$$\mathfrak{u}_P^\vee = \bigoplus_{j\geq1} V_j, \qquad V_j = \bigoplus_{\beta\in\Psi_{P,j}}\widehat{\mathfrak{g}}_{\beta^\vee}, \qquad \Psi_{P,j} := \{\beta\in\Psi_P : j(\beta) = j\}.$$

$\widehat{\ }$的伴随作用保持每个 V_j不变；其限制 r_j 是 Langlands–Shahidi构造的分次表示 [59]。记 $\widetilde{r}_j = r_j^\vee$为其对偶表示。设

$$d_j := \dim V_j = |\Psi_{P,j}|, \qquad \ell_j(w) := |\operatorname{Inv}_P(w) \cap \Psi_{P,j}|, \qquad \ell(w) = \sum_j \ell_j(w).$$

乘积遍历非零的 V_j。

2.2.2. 系数平移与代数可容许性。 对于$\mathcal{P} = \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}} P$在$\mathcal{G} = \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}} G$内，整数 Levi 系数权是一个族 $\mu = (\mu^\eta)_{\eta\in\Sigma_F}$ ，满足 $\mu^\eta \in X^+_M$。令 $\gamma_{P,\eta}$ 支撑在 η-因子上。

定义 2.3（系数平移）. 令

$$\gamma_{\mathcal{P}} := \sum_{\eta\in\Sigma_F} \gamma_{P,\eta}, \qquad \mu + b\gamma_{\mathcal{P}} = (\mu^\eta + b\gamma_P)_{\eta\in\Sigma_F}, \qquad b \in \mathbb{R}.$$

实数 b 是系数平移参数。

这个族使用伽罗瓦不变方向 $\gamma_{\mathcal{P}}$ ，并在每个嵌入处使用相同的参数 b 。根计算在省略嵌入的单个因子中进行；其条件必须在每个嵌入处都成立。允许环境中心特征变化，令

$$\Lambda_{\mathrm{alg}} := \{b \in \mathbb{R} : b\gamma_P + z \in X^*(M) \text{ for some } z \in \mathfrak{a}^*_{G,\mathbb{Q}}\}. \tag{2.4}$$

引理 2.4。 存在一个整数 $d_{\mathrm{alg}} > 0$ ，使得 $\Lambda_{\mathrm{alg}} = d_{\mathrm{alg}}\mathbb{Z}$。对于 $\mu \in X^+_M$，权$\mu + b\gamma_P + z$ 对某个 $z \in \mathfrak{a}^*_{G,\mathbb{Q}}$ 是整数，当且仅当 $b \in \Lambda_{\mathrm{alg}}$。每个此类平移都保持 μ的 *Levi* 余根配对。

证明。 令 $\mu \in X^+_M$。 Λ_{alg} 是 $\mathbb{R}$ 的一个子群。它包含于 $\mathbb{Z}$ 中，因为 $b = \langle b\gamma_P + z, \alpha_P^\vee\rangle$，并且它非零，因为 γ_P 的某个正倍数属于 $X^*(M)$。如果 $\mu + b\gamma_P + z$ 是整数，则 $b\gamma_P + z$ 是整数并湮灭 Levi 子群余根，因此是 M 的一个特征；反之显然。□

定义 2.5（代数可容许平移）。 若 $b \in \Lambda_{\mathrm{alg}}$，则平移 b 是代数可容许的 。选取 $z_b \in \mathfrak{a}^*_{G,\mathbb{Q}}$ ，使得 $\theta_b = b\gamma_P + z_b \in X^*(M)$。在每个嵌入处使用相同的特征，并令 $\mu_b^\eta = \mu^\eta + \theta_b \in X^+_M$；或者在省略嵌入时令 μ_b 。于是$\mathcal{M}^M_{\mu_b^\eta} \simeq \mathcal{M}^M_{\mu^\eta} \otimes \mathbb{C}_{\theta_b}$。

对于 $G = \mathrm{GL}_N$ 和 $M = \mathrm{GL}_n \times \mathrm{GL}_{n'}$，其中 $N = n + n'$，

$$\gamma_P = \left(\frac{n'}{N}\mathbf{1}_n, -\frac{n}{N}\mathbf{1}_{n'}\right), \qquad b\gamma_P + \frac{bn}{N}\mathbf{1}_N = (b\mathbf{1}_n, 0),$$

因此 $\Lambda_{\mathrm{alg}} = \mathbb{Z}$ ，且第一个因子上的修正平移为 $\det^b$ 。

对于 $G = \mathrm{PGL}_2$ 和 $P = B$，单根 α 生成 $X^*(T)$、 $\gamma_P = \alpha/2$和 $\mathfrak{a}^*_{G,\ \mathbb{Q}} = 0$。因此 $\Lambda_{\mathrm{alg}} = 2\mathbb{Z}$。对于给定的环境中心特征，将（2.4）中的修正限制为与其相容的那些修正。

2.2.3. 诱导参数与根超平面。 在 F 的一个赋值 v 处，选取 $n>0$，使得$n\gamma_P \in X^*(M)$。定义正特征 $|\gamma_P|_v$，并且对于 $s\in\mathbb{C}$,

$$|\gamma_P|_v(m) := |(n\gamma_P)(m)|_v^{1/n}, \qquad \chi_s(m) := |\gamma_P|_v(m)^s.$$

该定义与 n 无关；这里 $|\cdot|_v$ 是归一化绝对值（$|z|_{\mathbb{C}} = zz$）。由于李 U_P 上的伴随作用的行-列式具有权 $2\rho_P$,

$$\delta_P = |\gamma_P|_v^{2f_P}, \qquad \delta_P^{1/2} = \chi_{f_P}.$$

对于 $M(F_v)$ 的容许表示 σ，在阿基米德赋值处以光滑方式实现且具有中等增长，$I_P(s,\ \sigma)$ 是 $\sigma\otimes\chi_s$ 的归一化诱导，其截面满足

$$f(mug) = \delta_P(m)^{1/2}\chi_s(m)\sigma(m)f(g).$$

将非归一化诱导记作 ${}_{\mathrm{a}}\mathrm{Ind}$,

$$I_P(s,\sigma) = {}^{\mathrm{a}}\operatorname{Ind}_P^G(\sigma\otimes\chi_{s+f_P}), \qquad k_P := -f_P. \tag{2.5}$$

因此 $I_P(k_P,\ \sigma) = {}_{\mathrm{a}}\operatorname{Ind}_P^G(\sigma)$；$k_P$是 [45, 定义 2.1 的取值点。

命题 2.6。 设在一个阿基米德位置，σ 是不可约且具有系数 M_μ^M 的上同调表示，采用约定 $\sigma\otimes M_\mu^M$。在一个嵌入因子中进行讨论，并令

$$\nu_M = -w_M(\mu+\rho_M), \qquad x(b) = \mu+\rho+b\gamma_P.$$

$I_P(s,\sigma)$ 的无穷小特征模 W_G 可由 $\nu_P(s) := \nu_M + s\gamma_P$ 表示。对于每个实数 b,

$$\nu_P(k_P-b) = -w_M x(b), \qquad s = k_P - b, \qquad s+f_P = -b. \tag{2.6}$$

在复位置处，这些公式对两个嵌入因子都成立。

证明。 根据维格纳引理 [9, 第一章，定理 5.3(ii)]，σ 具有最高权为 $-w_M\mu$、参数为 ν_M的对偶系数的无穷小特征。将其扭曲 χ_s会增加 $s\gamma_P$，而归一化诱导保持该参数；根据引理 3.2(2)]，现在模 W_G [62, 考虑。由于 $w_M\gamma_P = \gamma_P$和 $\rho = \rho_M + f_P\gamma_P$，我们得到 $\nu_M - (f_P+b)\gamma_P = -w_M(\mu+\rho+b\gamma_P)$。□

对于 $b=0$ 和 $\mu = w\cdot\lambda$，将 (2.6) 沿 Levi 根张成的空间投影到 $\mathfrak{a}_M^*$，得到 $-w(\lambda+\rho)$ 的 Levi 中心分量。在 $s=k_P$ 中，其模 $\mathfrak{a}_G^*$ 的类给出边界构造中的上同调评价点 [55](另见 [13, (4.1)])。

注记 2.7（中心修正与实分量）。 对于定义 2.5 中的修正后的系数，$-w_M(x(b)+z_b) = \nu_P(k_P-b) - z_b$：精确比较还会使诱导参数发生 $-z_b$ 的变化，而所有根配对均保持不变。在实处，

$$\theta_b(m)^{-1} = \operatorname{sgn}(\theta_b(m))|\gamma_P|_v(m)^{-b}|z_b|_v(m)^{-1},$$

其中 $|z_b|_v$ 由相同的清除分母约定定义。分量特征$\varepsilon_b = \operatorname{sgn}\circ\theta_b$无法由无穷小参数检测。对于每个 $\beta\in\Psi_P$,

$$\varepsilon_b(\beta^\vee(-1)) = (-1)^{\langle\theta_b,\beta^\vee\rangle} = (-1)^{bj(\beta)}.$$

换言之，ε_b 的 Langlands 参数取值于 M 的中心，并通过 $W_{\mathbb{R}}$的特征 sgn^{bj} 作用于 V_j。这记录了代数扭曲所贡献的符号；完整的实 Weil 作用还包括诱导参数中已经存在的作用，而下文的实处判据保留了实际的韦伊符号。

对于 $\beta \in \Psi_P$，定义

$$q_\beta(b) := \langle x(b), \beta^\vee \rangle = \langle \mu + \rho, \beta^\vee \rangle + bj(\beta) = -\langle \nu_P(k_P - b), (w_M\beta)^\vee \rangle. \tag{2.7}$$

对于 $\alpha \in \Phi_G$，$H_\alpha = \{x : \langle x, \alpha^\vee \rangle = 0\}$ 中的超平面是一面墙。正则平移是一个参数 b，使得 $x(b)$ 不位于任何墙上。在正则可容许平移下，当且仅当 $x(b)$ 的支配 Weyl 平移与 G 的每个简单余根的配对均至少为二时，环境最高权才是严格支配的。在正则可容许平移下，当且仅当 $x(b)$ 的支配 Weyl 平移与 G 的每个简单余根的配对均至少为二时，环境最高权才是严格支配的。

推论 2.8 (系数线上的墙)。对于每个实数 b，权 $x(b)$ 是严格M-支配的。当且仅当 b 避开穿墙参数时，它才是 G-正则的

$$b_\beta = -\frac{\langle \mu + \rho, \beta^\vee \rangle}{j(\beta)} \qquad (\beta \in \Psi_P). \tag{2.8}$$

在 $\mathbb{R} \setminus \{b_\beta : \beta \in \Psi_P\}$ 的每个连通分支上，所有根配对的符号以及包含 $x(b)$ 的室都保持不变。

证明。对于 $\delta \in \Delta_M$，

$$\langle x(b), \delta^\vee \rangle = \langle \mu, \delta^\vee \rangle + 1 > 0.$$

因此 $x(b)$ 与每个正 Levi 余根的配对均为正。对于每个 $\beta \in \Psi_P$，配对（2.7）具有正斜率 $j(\beta)$，且唯一零点为 b_β。□

2.3. 对立纯性、根居中与符号计数。 我们将共轭逆反表示性条件模掉 Levi 中心来表示，并为分次根对导出一个共同中心，从而为临界性判据提供符号条件。术语对立纯性 指的是对立 involution $-w_M$，它将 Levi 最高权映射为对偶表示的最高权。回忆

$$w_M\rho_M = -\rho_M, \qquad w_M\gamma_P = \gamma_P, \qquad \rho + w_M\rho = 2f_P\gamma_P,$$

并且 w_M 将 Ψ_P 与 $j(w_M\beta) = j(\beta)$置换。

定义 2.9（对立纯性）。设 $\mu = (\mu^\eta)_{\eta : F, \to \mathbb{C}}$ 是一族 M-支配整权，并令 $\eta = \mathfrak{c} \circ \eta$，其中 $\mathfrak{c}$ 是复共轭。若对于每个由 η 表示的阿基米德位置 v，则称 μ 局部对立纯，

$$\mu^{\overline{\eta}} + w_M\mu^\eta = c_v \in \mathfrak{a}^*_{M,\mathbb{Q}}, \qquad a_v := \langle c_v, \alpha_P^\vee \rangle. \tag{2.9}$$

若每个重新编号的族都满足强对立纯，则称其为 μ

$$({}^\tau\mu)^\eta := \mu^{\tau^{-1} \circ \eta}, \qquad \tau \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}),$$

is l局部对置纯。中心权可能同时取决于 τ 和 v。

局部对立纯性是 Saper 共轭自反对偶条件在各赋值处的导出群形式 [50, 定义 7.2(ii)，命题 8。4]。事实上，（2.9）恰好表明，η 和η 处的系数在限制到 M_{der}后互为对偶 c_v，因此它们的最高权经对偶后相差一个 Levi 特征 v，该特征可能随 ${}^0L_P$而变化。Saper 将其条件施加于 [50, §0.11.5，（0.2.1）]。对于标量限制，去掉有理分裂中心后，仍可能留下连接不同阿基米德赋值的中心方向。

由于 w_M 固定 Levi 特征，该关系对于两个嵌入是对称的。P 的极大性给出 $c_v - a_v\gamma_P \in \mathfrak{a}^*_{G,\,\mathbb{Q}}$。添加 Levi 特征 ζ^η 保持局部性和强

对立纯性，并将 $\zeta^\eta+\zeta^\eta$ 添加到 c_v。定义 θ_b 中的公共平移 2.5 因此将 $2b$ 添加到 a_v，并且与重新索引可交换。

备注 2.10（局部纯性与全局中心）。对于 $M=\mathrm{GL}_n$，（2.9）读作 $\mu_i^\eta+\mu_{n+1-i}^\eta=\mathrm{w}_v\in\mathbb{Z}$，其中 $1\le i\le n$。对于$\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$的上同调尖点表示的系数，Clozel 纯性引理给出一个单一的纯性权 w，适用于所有阿基米德位置 [12,Lemme 4.9]。强纯性要求系数的每个算术共轭都具有相同的纯性权 w [46, §2.3.。在 Harder 和 Raghuram 的全实情形中，[27],这是由纯性推出的，因为算术共轭会置换实嵌入。

例如，实二次域的两个实嵌入处的权 $(1,0)$ 和 $(2,0)$ 是强对立纯的，其纯性权分别为 1 和2。例2.21 说明了另一种区别：具有单一纯性权的族在重新索引后可能失去对称性。对于 $M=\mathrm{GL}_n\times\mathrm{GL}_{n'}$，两个分块权给出 $a_v=\mathrm{w}_v-\mathrm{w}'_v$。

引理 2.11。设 σ_v 是不可约、本质幺正且具有上同调的局部系数权 $(\mu^\xi)_{\xi|v}$，并采用命题 2.6中的约定。则这些权满足(2.9)。

证明。这是幺正性导致的标准系数纯性结论 [9, 第二章，命题 6.12(1) 及第 6 节13]；在我们的记号下，它表述如下。模 Levi 中心权而言，我们可以假设 σ_v 是酉的，因此其复共轭是其对偶表示。复共轭在复位置交换两个无穷小特征因子，而在实处固定唯一的因子；对偶表示则将它们取负。$\nu_M^\xi=-w_M(\mu^\xi+\rho_M)$的导出坐标均为实数，因此支配代表的唯一性给出$\nu_M^\eta\equiv-w_M\nu_M^\eta$模 $\mathfrak{a}_M^*$。结合 $w_M\rho_M=-\rho_M$，这说明整权 $\mu^\eta+w_M\mu^\eta$是 Levi 中心的。□

因此，对于局部判据中的本质 tempered 上同调数据，局部对立纯性自动成立。命题2.12 用 a_v刻画了每个赋值内的共同中点。全局平衡判据要求 a_v 在每个赋值处都相同。对于自守数据，引理 5.7给出了更强的结论：在其连通中心特征假设下，c_v 是共同的。

命题 2.12（分次根对的中心）。假设 μ 具有局部对立纯性，并在（2.7）中恢复嵌入指标：$q_\beta^\xi(b):=\langle\mu^\xi+\rho+b\gamma_P,\ \beta^\vee\rangle$。对于每个 $b\in\mathbb{R}$和 $\beta\in\Psi_P$，

$$q_\beta^\eta(b)+q_{w_M\beta}^{\overline{\eta}}(b)=2j(\beta)(b-b_v^\circ),\qquad b_v^\circ=-f_P-\frac{a_v}{2}. \tag{2.10}$$

除以 $j(\beta)$ 后，每一对的中点为 $b-b_v^\circ$。记 $T_v(b)=2(b-b_v^\circ)=a_v-2s$ 为归一化和。

证明。由（2.9）的对称性和 Weyl 不变性，

$$\begin{aligned}q_\beta^\eta(b)+q_{w_M\beta}^{\overline{\eta}}(b)&=\langle\mu^\eta+w_M\mu^{\overline{\eta}}+\rho+w_M\rho+2b\gamma_P,\beta^\vee\rangle\\&=\langle c_v+2(f_P+b)\gamma_P,\beta^\vee\rangle=j(\beta)(a_v+2f_P+2b),\end{aligned}$$

最后一步，因为 $c_v-a_v\gamma_P$ 是环境中心的。最后，$s=-f_P-b$。□

恒等式对实平移成立，而 z_b 使配对保持不变。由于每个 $j(\beta)>0$，配对和要么全都非负，要么全都非正。以下计数适用于坐标均非零的情形。

引理 2.13. 设$(x_i, y_i)_{i\in I}$ 为非零实数对的有限族，并令$D = |I|$。假设对每个 i，都有 $x_i + y_i \geq 0$；或者对每个 i，都有 $x_i + y_i \leq 0$。那么，该族中负项的总数为 D，当且仅当对每个 i，都有 $x_i y_i < 0$。

证明。令 n_- 和 n_+ 分别统计具有两个负项和两个正项的配对。负项的数量为 $D + n_- - n_+$。同号假设迫使 $n_- = 0$或 $n_+ = 0$，因此当且仅当两种计数都为零时，该数量才等于 D。□

注 2.14。按照 [50, 命题 8.4、引理 17.6 和基本引理 24 的记号，2], 对合 τ'_P在复位置处将 $(\eta,\ \beta)$ 映射为 $(\eta,\ w_M\beta)$，且 Φ_w是两个逆序集的并。对于出现在幂零根基上同调中的共轭自反对偶成分，Saper 通过在根的配对中计数 Kostant 反演，来界定每个相对根空间中的逆序数量。关于标量限制对 Levi 中心的影响，参见定义 2.9之后的讨论。

这里，同一配对按 Langlands–Shahidi 分级对偶根线进行分组。

2.4. 室与代数可容许平移。 根坐标的符号决定了实现每个 Kostant 代表元的平移区间及其在各个分级中的长度。

固定一个嵌入并将其略去。令 $C = \{x : x, \alpha^\vee > 0 \text{ 对每个 } \alpha \in \Delta\}$ 为 $X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ 中严格 G-占优的室。每当 $x(b)$ 是 G-正则时，令 $w(b)$ 为满足 $w(b)^{-1}x(b) \in C$ 的唯一元素。命题 2.1 的论证在不要求代数可容许性的情况下给出：

$$w(b) \in W^P, \qquad \mathrm{Inv}_P(w(b)) = \{\beta \in \Psi_P : q_\beta(b) < 0\},$$

而推论 2.8给出

$$q_\beta(b) = j(\beta)(b - b_\beta), \qquad j(\beta) > 0. \tag{2.11}$$

命题 2.15（沿系数线的室）。对于 $w \in W^P$，使 $x(b)$ G-正则且 $w(b) = w$ 的参数集合为

$$I_w = (b_w^-, b_w^+), \qquad b_w^- = \max_{\beta\in\Psi_P\setminus \mathrm{Inv}_P(w)} b_\beta, \qquad b_w^+ = \min_{\beta\in \mathrm{Inv}_P(w)} b_\beta, \tag{2.12}$$

其中最大值为 $\max \varnothing = -\infty$，最小值为 $\min \varnothing = +\infty$。若 $b_w^- \geq b_w^+$，则该区间为空；若 $0 < \ell(w) < d_P$，则两个端点均有限。非空区间 I_w 恰为 $\mathbb{R} \setminus \{b_\beta : \beta \in \Psi_P\}$ 的各个连通分支。每当 $x(b)$ 是 G-正则时，

$$\ell_j(w(b)) = \#\{\beta \in \Psi_{P,j} : b < b_\beta\}, \qquad \ell(w(b)) = \#\{\beta \in \Psi_P : b < b_\beta\}. \tag{2.13}$$

共有 $1 + \#\{b_\beta : \beta \in \Psi_P\}$ 个 $\leq d_P + 1$ 非空室区间，当且仅当所有交叉参数互不相同时取等号。

证明。由（2.11），$w(b) = w$表示 $b < b_\beta$对 $\beta \in \mathrm{Inv}_P(w)$ 成立，且 $b > b_\beta$对另一个 $\beta \in \Psi_P$成立；结合正的 Levi 根配对，这些符号确定了 wC。由此得到（2.12），并且当 $0 < \ell(w) < d_P$ 时，两个指标集都非空。相邻交叉参数之间符号保持不变，而每个交叉参数处至少有一个符号改变，因此得到各个连通分支及其数目。按分级统计负配对数即可证明（2.13）。□

推论 2.16 (指定室中的代数实现)。 设 $b \in \Lambda_{\mathrm{alg}}$，其中 z_b 和$\mu_b = \mu + b\gamma_P + z_b$如定义 *2.5* 所述。对于 $w \in W^P$，存在 $\lambda_b \in X_G^+$使得 $\mu_b = w \cdot \lambda_b$当且仅当 $b \in I_w$。在这种情况下，

$$\lambda_b = w^{-1}x(b) - \rho + z_b.$$

因此，以代表元 w 表示的代数可容许平移构成 $I_w \cap \Lambda_{\mathrm{alg}}$；即使 I_w 非空，该集合也可能为空。

证明。修正项 z_b 由 W 固定，并湮灭 G的每个余根，因此 $\mu_b+\rho = x(b)+z_b$具有 $x(b)$的根配对。应用命题 2.1。□

对于标量限制，定义2.3 和2.5 在每个嵌入处使用相同的参数和中心修正。因而，实现指定元组 $(w_\eta)_\eta$ 的平移为$\Lambda_{\mathrm{alg}} \cap \bigcap_\eta I^\eta_{w_\eta}$，其中 $I^\eta_{w_\eta}$ 使用 μ^η计算。

备注 2.17（与相对权坐标的比较）。在 [24, §9.1.3], 的相对权坐标中，唯一地写成 $\mu \equiv \mu^{(1,M)} + a_0\gamma_P$模 $\mathfrak{a}^*_{G,\,\mathbb{Q}}$，其中 $\mu^{(1,M)} \in \mathrm{span}_{\mathbb{Q}}(\Phi_M)$ 和 $a_0 \in \mathbb{Q}$，并令 $\widetilde{\mu}^{(1)} := \mu^{(1,M)} + \rho_M$。于是

$$x(b) \equiv \widetilde{\mu}^{(1)} + b_{\mathrm{H}}\gamma_P \pmod{\mathfrak{a}^*_{G,\mathbb{Q}}}, \qquad b_{\mathrm{H}} = a_0 + f_P + b. \tag{2.14}$$

因此，b 表示相对于固定系数 μ的位移，而 b_{H} 是 x（b）的相对坐标；I_w 的端点变为 $a_0 + f_P + b^-_w$ 和 $a_0 + f_P + b^+_w$。μ_b 的相对坐标为 $a_0 + b$。

2.5. 算术共轭与转至伴随抛物子群。

2.5.1. 纯性检验与传递。

强对置纯性意味着

$$\mu^{\tau^{-1}\circ\overline{\eta}} + w_M\mu^{\tau^{-1}\circ\eta} \in \mathfrak{a}^*_{M,\mathbb{Q}} \qquad (\tau \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}),\ \eta \in \Sigma_F), \tag{2.15}$$

其中一般而言，$\tau^{-1}\circ\overline{\eta}$不必等于 $\overline{\tau^{-1}\circ\eta}$。

命题 2.18。固定一个嵌入 $F \subset \mathbb{C}$以及 $\mathbb{C}$中的一个有限伽罗瓦扩张 $L/\mathbb{Q}$，其中包含 F的正规闭包。令 $\Gamma = \mathrm{伽罗瓦群}(L/\mathbb{Q})$、$c_L = \mathfrak{c}|_L$以及 $\mathcal{C} = \{g^{-1}c_Lg : \ g \in \Gamma\}$。则 μ是强对置纯的，当且仅当

$$\mu^{\delta\circ\xi} + w_M\mu^{\xi} \in \mathfrak{a}^*_{M,\mathbb{Q}} \qquad (\xi \in \mathrm{Hom}(F,L),\ \delta \in \mathcal{C}). \tag{2.16}$$

因此，可以通过$\mathfrak{a}^*_M/(X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})_{\mathbb{Q}\text{中的}}$有限个等式对其进行检验。

证明。F 到 $\mathbb{C}$ 的每个嵌入的像都在 L中。对于 $\tau \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$，令 $g = \tau|_L$，并令$\xi = g^{-1}\circ\eta$。于是 $\tau^{-1}\circ\eta = \xi$且 $\tau^{-1}\circ\eta = (g^{-1}c_Lg)\circ\xi$，因此（2.16）蕴含（2.15）。反过来，每个 $g \in \Gamma$ 都可延拓为 τ的自同构 $\mathbb{C}$，而（2.15）中的 $\eta = g\circ\xi$ 给出（2.16）。□

可以将 [46, 命题 2.6]的下降论证调整到模 Levi 中心的权。令 $X_M := (X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})/\mathfrak{a}^*_{M,\,\mathbb{Q}}$，并将权 ν的等价类记为 $[\nu]$。由于 w_M 固定 Levi 特征，$-w_M$ 在 X_M上诱导出一个对合。

命题 2.19。若 F存在，则令 F_1 为 F的极大复乘子域；否则令其为 F的极大全实子域。那么，当且仅当存在一个 X_M 中的族 $(\kappa^\zeta)_{\zeta\in\Sigma_{F_1}}$，使得 μ 是强对立纯的。

$$[\mu^\eta] = \kappa^{\eta|_{F_1}}, \qquad \kappa^{\overline{\zeta}} = -w_M\kappa^\zeta.$$

下降得到的类族是唯一的。

证明。沿用命题 2.18中的记号，令 N 为由以下乘积生成的 Γ子群：$\delta\delta'$其中 $\delta,\ \delta' \in \mathcal{C}$，并令 $E = L^N$。则 N是正规子群，且 $\mathcal{C}$中的所有元素在 t 中的像 Γ/N都相同，并且该像与 $t^2 = 1$交换。每个 K 的 E 子域因此都在 t下保持不变；在 K的每个嵌入下，该对合都是复共轭；因此 K 是全实的

若 $t|_K = 1$，否则为复乘。反之，$\mathcal{C}$ 中的每个元素在 L 的全实子域上作用平凡，并在复乘子域上作为复乘对合作用，因此 N 固定这两个子域，而它们都包含于 E中。因此 $F_1 = F \cap E$，且 F_1 的每个嵌入的像都包含于 E 中。

置 H =伽罗瓦群(L/F)。则伽罗瓦群(L/F_1) $= NH$，因此限制映射 Hom$(F,\ L)$ $= \Gamma/H \to$Hom$(F_1,\ L)$ $= \Gamma/NH$的纤维恰好是 N-轨道。有限检验写作 $[\mu^{\delta\xi}] = -w_M[\mu^{\xi}]$。由于 $(-w_M)^2 = 1$，它蕴含 N-不变性，因而下降到 F_1，其特例 $\delta = c_L$ 给出了关于 κ的关系。反之，所有 $\delta \in \mathcal{C}$ 在 E上都与 c_L 一致，因此，关于一个已下降族的关系蕴含有限检验。嵌入上的限制映射的满射性给出唯一性。□

对于全实域和复乘域 $F_1 = F$，因此局部纯性与强对置纯性相同；比较 [46, §2.3。3]。

注 2.20（与通常的强纯性比较）。 在全虚域上，完全强纯的 GL$_n$ 权下降到 F_1 [46, 命题 2.6]。关于一般数域上的相应结果，参见 [15,命题 3.3]。

命题 2.19 给出了任意分裂 Levi 子群下模 Levi 特征的权下降。沿着 γ_P 的相对坐标仍可在 F_1的一个嵌入上变化，因此临界区间需要单独进行比较。

例 2.21 （局部对置纯性不必是强的）。 改编自 [46, §2.3.4], 令$F = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2},\ \omega)$，其中 $\omega = e^{2\pi i/3}$，并将其嵌入与 S_3对应，复共轭$c =$(23)从左侧作用。对于 $M =$GL$_2$, 令 $\kappa =$ (1, -1)，并令 $\mu^g = 0$ 当 $g \in \{e,\ c\}$，否则为$\mu^g = \kappa$。这些权是支配整的，$\mu^{cg} = \mu^g$，且 $w_M\kappa = -\kappa$，因此每个局部对置和都为零。然而，对于一个限制到 $d =$ (12) 且满足 $\eta = d$ 的自同构 ${}^{\tau}$，

$$({}^{\tau}\mu)^{\eta} = 0, \qquad ({}^{\tau}\mu)^{\overline{\eta}} = \mu^{dcd} = \kappa \notin \mathbb{Q}(1,1).$$

因此，该族按照通常的 GL$_2$ 意义是权为零的纯族，但并非强对立纯的：这里 $N = A_3$ 和 $F_1 = \mathbb{Q}$（ω），并且导出权在限制到 F_1的纤维上并不恒定。由于通常的强纯性是尖点 GL$_2$-上同调 [4,§1.2],所必需的，该族没有尖点实现。

推论 2.22 （由共轭实现得到的纯性）。 假设对于每个 $\tau \in$Aut$(\mathbb{C})$以及每个阿基米德位置 v，由 ${}^{\tau}\mu$ 在 v 处的分量所确定的系数都具有 M （F_v）的不可约本质酉上同调表示。那么 μ 是强对立纯的。

证明。 将引理2.11 应用于每个 ${}^{\tau}\mu$。 □

设 σ 是 $M(\mathbb{A}_F)$ 的尖点自守表示，其关于系数族 μ 是上同调的。对于每个 $\tau \in$ Aut$(\mathbb{C})$，存在一个有限部分为 ${}^{\tau}\sigma_f$（光滑表示的标量共轭）且关于 ${}^{\tau}\mu$ 具有非零上同调的离散自守表示。这可通过将 [18, 命题 2.4] 应用于 $\mathbf{M} := \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}} M$ 得到。

按照允许分裂中心扭曲的约定，离散自守表示本质幺正。事实上，令 $A_{\mathbf{M}}$ 为 $\mathbf{M}$ 的极大 $\mathbb{Q}$-分裂中心环面，并令 $\mathbf{M}(\mathbb{A})^1$为有理特征的阿代尔绝对值的公共核。分解

$$\mathbf{M}(\mathbb{A}) = A_{\mathbf{M}}(\mathbb{R})^0 \times \mathbf{M}(\mathbb{A})^1$$

允许一个正自守特征（在 $\mathbf{M}(\mathbb{A})^1$, 上为平凡特征）来抵消分裂中心特征的模 [1, §3，第 16]页。共轭表示的阿基米德分量因此本质幺正，推论 2.22 可直接应用于它，而无需进行扭曲。

对于 GL_n，可以取共轭表示为尖点的 [12]（另见 [18, 定理 3.1]）。对于一般的 Levi，尖点性和本质 tempered 性还需要进一步的输入。

2.5.2. 伴随抛物子群上的对立。对立自同构 $\Theta = -w_G$ 保留 Δ。令 Q 为标准抛物子群，其 Levi M_Q 的单根为$\Delta_{M_Q} = \Theta(\Delta_M)$；它与 P的相反抛物子群共轭，并且可能等于 P。按 P的定义定义 W^Q、Ψ_Q 和 Inv^Q。遵循 [24, §9.1.3]，置

$$w_P := w_M w_G, \qquad v_P := w_P^{-1} = w_G w_M, \qquad \iota := -v_P = \Theta w_M.$$

命题 2.23。元素 w_P是 W^P的最长元。映射

$$i_{P,Q} : W^P \longrightarrow W^Q, \qquad w \longmapsto w' := v_P w$$

是一个双射，并且 ι 将 Ψ_P 双射到 Ψ_Q上。此外，

$$\mathrm{Inv}_Q(w') = \iota\Big(\Psi_P \setminus \mathrm{Inv}_P(w)\Big), \qquad \ell(w') = d_P - \ell(w). \tag{2.17}$$

令 γ_Q 和 j_Q 分别为 Q的基本权和分级，并令 $\ell_j^Q(u) = \#\{\beta' \in \mathrm{Inv}^Q(u) : j_Q(\beta') = j\}$。则 $\gamma_Q = \Theta\gamma_P$ 和 $j_Q(\iota\beta) = j(\beta)$。因此，

$$\ell_j^Q(w') = d_j - \ell_j(w). \tag{2.18}$$

证明。由于 $w_M\Phi_M^+ = -\Phi_M^+$和 $w_M\Psi_P = \Psi_P$，我们有 $v_P\Phi_M^+ = \Phi_{M_Q}^+$和 $v_P\Psi_P = -\Psi_Q$。因此，$w_P \in W^P$ 的逆序集为 Ψ_P。对于 $w \in W^P$，$(w')^{-1}\Phi_{M_Q}^+ = w^{-1}\Phi_M^+ \subseteq \Phi_G^+$，所以 $w' \in W^Q$；逆映射为 $u \mapsto w_P u$。对于 $\beta \in \Psi_P$，有 $(w')^{-1}(\iota\beta) = -w^{-1}\beta$，这就证明了 (2.17)。最后，$\Theta$将 γ_P映射到 γ_Q，而 $w_M\gamma_P = \gamma_P$ 给出 $\gamma_Q, (\iota\beta)^\vee = \Theta\gamma_P, (\Theta w_M\beta)^\vee = \gamma_P, \beta^\vee$；与每个分级相交即可证明 (2.18)。□

引理 2.24. 对于 $\mu \in X_M^+$ 令

$$\widetilde{\mu} := v_P\mu, \qquad \mu' := v_P(\mu + \rho) - \rho = \widetilde{\mu} - 2f_P\gamma_Q.$$

两个权都属于 $X_{M_Q}^+$。若 $\mu = w\cdot\lambda$，则对 $w' = v_P w$，$\mu' = w'\cdot\lambda$。记作$x_P^\mu(b) = \mu + \rho + b\gamma_P$，并对 Q采用相同记号，则有

$$x_Q^{\mu'}(-b) = x_Q^{\widetilde{\mu}}(-b - 2f_P) = v_P x_P^\mu(b). \tag{2.19}$$

令$I_u^R(\kappa)$ 表示命题*2.15* 中抛物子 R 和基权κ所对应的室区间。则

$$I_{w'}^Q(\mu') = -I_w^P(\mu), \qquad I_{w'}^Q(\widetilde{\mu}) = -2f_P - I_w^P(\mu). \tag{2.20}$$

在命题*2.6*的谱约定下，

$$s = k_P - b, \qquad b'' = -b - 2f_P \quad\Longrightarrow\quad k_Q - b'' = -s.$$

证明。置 $\rho_Q = \rho - \rho_{M_Q}$。根传输给出 $\rho_Q = \Theta\rho_P = f_P\gamma_Q$，因此 $f_Q = f_P$，$v_P\gamma_P = -\gamma_Q$，以及 $v_P\rho = \rho - 2\rho_Q$。权 $v_P\mu$是整的且 M_Q-支配，而$2\rho_Q$ 是 M_Q的一个特征；这就证明了关于权以及（2.19）的断言。由于$(w')^{-1}v_P = w^{-1}$，因此（2.19）两边具有相同的严格占优代表，从而得到（2.20）。最后 $k_Q = k_P = -f_P$。□

环境中心修正由 v_P确定： $v_P(x_P^{\mu}(b)+z_b)-\rho=\mu'-b\gamma_Q+z_b$，并且$v_P(b\gamma_P+z_b)=-b\gamma_Q+z_b$确定了 P和 Q的代数平移格。由于 $2f_P\gamma_Q=2\rho_Q\in X^*(M_Q)$，在（ b （2.19）中对 的两种变换都保持代数可容许性。

注记 2.25. 第 $\beta\mapsto w_M\beta$ 节的配对 2.3 保持在 Ψ_P 内，而 $\iota=\Theta w_M$将根传输至 Ψ_Q。这些相伴抛物恒等式无需对立纯性即可成立。

2.6. **局部因子与交织归一化**。设 $Q=v_PPv_P^{-1}$和 $v_P=w_Gw_M$如第 2.5.2 节所述。固定一个 F-有理的钉扎，使其与 (T,B) 相容。全局及每个赋值处均使用其 Tits 代表元 $\dot v_P$，并在 $(v_P\sigma)(m')=\sigma(\dot v_P^{-1}m'\dot v_P)$ 上取 $M_Q(F_v)$。

在无穷处取极大紧子群 $K_{G,\,v}$，它与钉扎的 Cartan 对合相联系；在非分歧处则取钉扎的超特殊子群。元素 $\dot v_P$ 属于每一个这样的子群：其简单反射因子是 $\left(\begin{smallmatrix}0&1\\-1&0\end{smallmatrix}\right)$ 在钉扎的 SL_2 同态 [30,下的像（命题 2.8] 的证明）。因此，共轭将 $K_{M,\,v}=K_{G,\,v}\cap M(F_v)$ 映至 $K_{M_Q,\,v}=K_{G,\,v}\cap M_Q(F_v)$，包括 $Q=P$ 的情形。它将 $K_{M,\,\infty}=\prod_{v|\infty}K_{M,\,v}$、其分量特征以及 $A_M=A_{\mathbf{M}}(\mathbb{R})^0$ 映至对应于 M_Q 的对象。这给出了两种紧子群约定下的相对复形的等同，无论是否包含分裂因子。特别地，$v_P\sigma$ 对于带有 $\tilde\mu=v_P\mu$ 的 $\mathcal{M}_{\tilde\mu}^{M_Q}$ 是上同调的，因为 $v_P\Phi_M^+=\Phi_{M_Q}^+$。

注记 2.26（采用哪个紧子群）。在连通覆盖上使用 $K_{M,\infty}A_M$，或 $K_{M,\infty}^{\circ}A_M$。全紧复形是后者的 $\pi_0(K_{M,\infty})$-不变子复形，分支群作用于上链。一个中心的 $z\in Z(M(F_\infty))\cap K_{M,\infty}$ 在它们的外幂定义域上作用平凡，因此除非 $\omega_{\sigma_\infty}(z)\omega_\mu(z)=1$ [9, Ch. I, §5.1]，否则全复形消失。对于 $\mathrm{GL}_1(\mathbb{R})$ 上的 $\mathrm{sgn}^{\epsilon}|\cdot|^t\otimes\mathbf{M}_u$，这给出全紧子群上的 $\epsilon+u\in2\mathbb{Z}$。第 6 节使用全紧子群，其中 $\zeta_M(K_{M,\infty})=\{\pm1\}$。

由于 $v_P\gamma_P=-\gamma_Q$，标准交织算子为

$$\begin{aligned}A_v(s,\sigma)&:I_P(s,\sigma)\longrightarrow I_Q(-s,v_P\sigma),\\(A_v(s,\sigma)f)(g)&:=\int_{U_Q(F_v)}f(\dot v_P^{-1}ug)\,du,\end{aligned}\tag{2.21}$$

由绝对收敛和亚纯延拓定义；关于有限处的这些约定，参见 [45, §2.2]。反向算子使用 $\dot v_P^{-1}$，它可能与 w_P 的 Tits代表元相差 T 中的一个二阶元素 F。由引理 2.24，对于 μ 的源平移 b，对应的目标平移是 $\tilde\mu$ 的 $b''=-b-2f_P$。

在非分歧处 v，假设 σ 不可约，且有一个$K_{M,\,v}$-不变向量。令$U_Q(F_v)\cap K_{G,\,v}$的体积为一。设f_v°，$f_{\prime\circ v}$为在恒等元处具有同一不变向量的球截面。若 q_v 为剩余域大小，且$t_{\sigma,\,v}$为Satake参数，则对非分歧环面特征采用约定$\beta^\vee(t_{\xi,\,v})=\xi(\beta^\vee(\varpi_v))$，并设

$$L_v(t,\sigma,r_j)=\det(1-q_v^{-t}r_j(t_{\sigma,v}))^{-1}.$$

正对偶幂零根基给出表示 r_j。按分级对 Gindikin–Karpelevich 因子分组 [39, Ch. 4]，得到

$$\mathcal{R}_{P,v}(s,\sigma):=\prod_j\frac{L_v(js,\sigma,r_j)}{L_v(js+1,\sigma,r_j)},\tag{2.22}$$

and

$$A_v(s,\sigma)f_v^{\circ}=\mathcal{R}_{P,v}(s,\sigma)f_v'^{\circ}.\tag{2.23}$$

因此，$N_v(s,\ \sigma) := \mathcal{R}_{P,\ v}(s,\ \sigma)^{-1} A_v(s,\ \sigma)$ 将 $f_{\circ v}$ 映射为 f'°_v，这是一条亚纯恒等式。对于 GL_2 的上三角博雷尔子群以及 $\sigma = \xi_1 \boxtimes \xi_2$，这一约定给出 $\mathcal{R}_{B,\ v}(s,\ \sigma) = L_v(s,\ \xi_1\xi_2^{-1})/L_v(s+1,\ \xi_1\xi_2^{-1})$。

在阿基米德位置，使用局部朗兰兹参数 ϕ_{σ_v}。由于 M 是分裂的，将 r_j 在韦伊因子上平凡地延拓至 ${}^L M = \widehat{M} \times W_{F_v}$，并定义

$$L_v(t, \sigma, r_j) := L(t, r_j \circ \phi_{\sigma_v})$$

通过阿廷局部因子 [57, §3], 和$\mathcal{R}_{P,\ v}$，并以相同公式定义 N_v。因此，实位置的因子保留了完整韦伊群的作用，包括其在 $\mathbb{C}^\times$ 之外的部分。

注 2.27（归一化的比较）。 在无穷远处，上同调成分上的作用需要进行局部计算。对于具有相等分块的 $\mathrm{GL}_{2m}(\mathbb{R})$，若 m 为偶数，且诱导数据为温和的，并且相对于平凡 Levi 系数是上同调的，则完整交织算子在取值点处有极点。它在唯一不可约子模上的限制在该处全纯 [13, §4.2]。

必须使韦伊表示、谱参数以及算子 [45, (1.0.1) 的方向相匹配，§2.3] [58, 59]。惠特克归一化还要求一般位置数据，以及相容的泛函和测度。

2.6.1. 同时临界性与复伽马因子。

定义 2.28（同时临界性）。 设 v 为一个阿基米德位置，并令 $s \in k_P - \mathbb{Z}$表示我们在上同调归一化下的谱格。若对于每个非空分级 j，以下四个因子均为有限的，则称 s 在 v 处同时临界

$$L_v(js, \sigma_v, r_j), \quad L_v(js+1, \sigma_v, r_j), \quad L_v(1-js, \sigma_v, \widetilde{r}_j), \quad L_v(-js, \sigma_v, \widetilde{r}_j) \tag{2.24}$$

。

如果这一条件在每个阿基米德位置处都成立，则称 s 同时临界。对于代数可容许平移 $b \in \Lambda_{\mathrm{alg}}$，如果 $s = k_P - b$ 在 v处同时临界，则称 b 为一个在 v处的临界扭曲；如果在每个阿基米德位置处都同时临界，则分别称为临界扭曲。

对于复伽马因子，记 $\Gamma_{\mathbb{C}}(t) = 2(2\pi)^{-t}\Gamma(t)$。若特征 $z^A z^B$ 满足$A + js = -q$ 且 $B + js = -q'$，其局部因子为 $L(t) = \Gamma_{\mathbb{C}}(t + \max(A, B))$ [60, p。 13]。代入后得到（2.24）中的四个参数，依次为

$$-\min(q, q'), \quad 1 - \min(q, q'), \quad 1 + \max(q, q'), \quad \max(q, q'). \tag{2.25}$$

对于整数 q，q'，当且仅当 $\min(q,\ q') < 0 < \max(q,\ q')$ 时，四个因子均有限，等价地 $qq' < 0$。在正则平移下，这等价于两个坐标中恰有一个为负，因此该交换对在计数式（2.2）中贡献一个逆序。这个计算也适用于与一对交换的实韦伊权 [35, （4.6）] 相连的 $\Gamma_{\mathbb{C}}$ 因子。

注 2.29。 在复位置，命题 4.4 表明，对于 $b \in \Lambda_{\mathrm{alg}}$，（2.24）中的每个伽马函数自变量都是整数。因此，当且仅当所有这些自变量均为正数时，四个因子才有限。在实处，一维 Weil 特征会引入引理3.11的奇偶性检验。

注记 2.30。 对于每个分裂 G_2的极大抛物子群，在取值点处，同时临界性具体化为 [28, §5、引理6.1–6.2]中的相邻临界条件。朗兰兹–沙希迪分级将这些条件统一表达为 js和 $js+1$在每个分级中均具有临界性。关于与临界点格的相容性，参见 [28, §7.2]。

3. 实处：固定直线与正则分类

对于给定的上同调表示和可容许平移，实数域组合引理检验每个韦伊轨道上的相邻临界性。其第一个推论是，对可出现正则情形的抛物子群进行分类。Klingen例子则对全局尖点诱导数据实现了另一种可能性，即奇异临界墙。

3.1. 实处的组合引理。令 $\mathrm{F}_P = \{\beta \in \Psi_P : w_M\beta = \beta\}$ 和 $n_{\mathrm{fix}}(P) = |\mathrm{F}_P|$。记 O_P为 Ψ_P 中二元素 w_M-轨道的集合。记 $W_{\mathbb{R}} = \mathbb{C}^\times \sqcup J\mathbb{C}^\times$、$JzJ^{-1} = z$、 $J^2 = -1$。固定一个不可约、本质温和的表示 σ_v，它属于 $M(\mathbb{R})$，且是上同调的，其系数取自 M_μ^M，对应于一个整系数 M-主导权 μ。引理 2.11 给出局部对立纯性：

$$\mu + w_M\mu = c_v \in \mathfrak{a}^*_{M,\mathbb{Q}}, \qquad a_v = \langle c_v, \alpha_P^\vee\rangle.$$

记 ϕ_{σ_v} 为其局部朗兰兹参数。由于 M 是分裂的，我们将其对偶群部分$\widehat{\ }$视为到 M中的同态。保留 $b \in \Lambda_{\mathrm{alg}}$、 $s = k_P - b$以及坐标 $x(b)$和 $q_\beta(b)$（2.7）中的信息。整系数为 $\mu_b = \mu + \theta_b$，其中 $\theta_b = b\gamma_P + z_b$如定义 2.5所述；修正项 z_b 不会改变这些根坐标。默认的解析检验使用固定表示 σ_v。

在一个实嵌入处，命题 2.12 表述如下

$$q_\beta(b) + q_{w_M\beta}(b) = 2j(\beta)(b - b_v^\circ). \tag{3.1}$$

对于一个固定根，两个坐标重合，因此

$$q_\beta(b) = j(\beta)(b - b_v^\circ). \tag{3.2}$$

因此，所有固定根都在同一个平移处消失。

定义 2.28 讨论的是固定表示 σ_v，也就是备注 3.12中的绝对值族；这仍是我们的主要约定。对于代数族，若 $b \in \Lambda_{\mathrm{alg}}$在 v处的四个因子 $\sigma_v \otimes \theta_b^{-1}$在 jk_P和 jk_P+1 的每个分级中都有限，则称其为临界扭曲。

对于固定根 β，记 $(-1)^{\epsilon_\beta(0)}$ 为 J 在其对偶根直线上的作用。扭曲族是这两者之一，其固定直线符号为 $\epsilon_\beta(b) = \epsilon_\beta^{\mathrm{abs}}(b)$ 或 $\epsilon_\beta(b) = \epsilon_\beta^{\mathrm{alg}}(b)$。两者的根坐标相同。

定理 3.1（实处临界性与固定壁二择一）。设 σ_v 是 $M(\mathbb{R})$的一个不可约、本质 *tempered* 表示，对于 M_μ^M是上同调的，且具有 $\mu \in X_M^+$。令$b \in \Lambda_{\mathrm{alg}}$ 和 $s = k_P - b$，并固定一个扭曲族。则对于所选族，平移 b 在 v 处是临界扭曲，当且仅当

(1) $q_\beta(b)\, q_{w_M\beta}(b) < 0$ 对每个 $\{\beta, w_M\beta\} \in \mathrm{O}_P$ 均成立；
(2) $q_\beta(b) = 0$ 以及 $\epsilon_\beta(b) = 1$ 对每个 $\beta \in \mathrm{F}_P$ 均成立。

所选族的临界扭曲构成 v 处的临界集。

(a) 若 $\mathrm{F}_P = \varnothing$，临界性等价于存在一个支配整的环境实现 n

$$\mu_b = u \cdot \lambda, \qquad u \in W^P, \qquad \ell(u) = d_P/2.$$

当这些等价条件成立时，$x(b)$ 是正则的，并且 $\ell_j(u) = d_j/2$ 对每个非空分级 j 都成立，其中 $d_j = |\Psi_{P,\,j}|$。

(b) 如果 $\mathrm{F}_P \neq \varnothing$，临界集要么为空，要么是单元素集 $\{b_v^\circ\}$。它恰好为单元素集，当且仅当

$$b_v^\circ \in \Lambda_{\mathrm{alg}}, \qquad \epsilon_\beta(b_v^\circ) = 1 \ (\beta \in \mathcal{F}_P), \qquad q_\beta(b_v^\circ) \neq 0 \ (\beta \in \Psi_P \setminus \mathcal{F}_P). \tag{3.3}$$

此时 $x(b_v^\circ)$ 是奇异的，并且修正后的系数$\mu_{b_v^\circ}$ 没有支配性环境 *Kostant* 实现。

根条件不依赖于扭曲族，因此在两个族中，临界集要么是格上的一个区间，要么可能是一个单元素集；只有 b_v° 处的符号检验不同。证明见第 3.11 节 3.3 中引理的端点检验之后。

3.2. **正则实分支的分类**。 对于哪些极大抛物子群，定理 3.1 的正则情形会对某个整Levi权发生？下面的定义完全用系数来表述这一问题。

定义 3.2（正则根构型）。 正则根构型是一个二元组 (μ, b)，其中 $\mu \in X_M^+$、 $b \in \Lambda_{\mathrm{alg}}$ 和 $\mu + w_M\mu \in \mathfrak{a}_{M,\ \mathbb{Q}}^*$，满足

$$q_\beta(b)q_{w_M\beta}(b) < 0 \qquad (\beta \in \Psi_P).$$

这些不等式蕴含 G-正则性（关于 $x(b)$ ），并排除固定正规根。本小节中的存在性是对系数和室作量化的。应用于一个表示时，还需要满足定理 3.1 的上同调局部假设，以及所选定的紧性分量约定。

定理 3.3 (按省略节点分类**)**。 对于连通分裂约化 $G/\mathbb{R}$的极大抛物子群 P_k ， 在其分支 Φ中标记省略节点 k 。正则根构型恰好存在于表中所列的零点处（*Bourbaki*编号）。

Φ	$n_{\mathrm{fix}}(P_k)$	Φ	$(n_{\mathrm{fix}}(P_k))_k$
A_{N-1}	$\mathbf{1}_{\{k,\ N-k\ \text{奇}\}}$	E_6	$(0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 0)$
$B_n,\ \ C_n$	$\lceil k/2 \rceil$	E_7	$(1,\ 4,3,\ 3,4,\ 2,\ 3)$
$D_n,\ k \le n-2$	$\lfloor k/2 \rfloor + 2\mathbf{1}_{\{k,\ n-k\ \text{奇}\}}$	E_8	$(2,\ 4,4,\ 4,\ 4,\ 3,\ 3,\ 1)$
$D_n,\ k = n-1, n$	$\lfloor n/2 \rfloor$	F_4	$(1,\ 2,\ 2,\ 1)$
		G_2	$(1,\ 1)$

因此，正则节点为 k ，其中 k（$N-k$） 在 A_{N-1} 中为偶数；直线节点为 D_{2m+1} 中的1 （对于 $m \ge 2$），而在 E_6 中，节点为1、6 。对于 $n \ge 4$，我们使用 D_n ，其中 $D_3 = A_3$ 和 $D_2 = A_1 \times A_1$。

对于给定的系数，所列抛物子可能具有空的临界区间。对于 SO_{2n+2} 的 n 为偶数的情形，当 $\mu_n = 0$ 时，涉及最后一个正交权坐标的两个根坐标在每个平移处都重合。因此，对于该系数，临界区间为空（第 3.5 节）。

证明遵循定理 3.5，该定理将固定根计数与基本秩联系起来。

在 Saper 的记号中，分裂带基根数据上的对合为 $\tau_G = -w_G$、 $\tau_P = -w_M$ 和 $\tau_P' = -\tau_P = w_M$ [50, (8.2.3)]。因此，对于 $u \in W^P$，条件 $u\tau_G u^{-1} = \tau_P$ 变为 $uw_G u^{-1} = w_M$。它刻画了基本 Weyl 元素。等价地，w_M 将 $\mathrm{Inv}_P(u)$ 与其在 Ψ_P 中的补集互换。这样的元素具有长度 $d_P/2$ [50]，见引理 8.7(ii)–(iii) 和 8.8(i)]。

下面的命题通过每种等源形式上的整系数，实现了相应的室。

命题 3.4（对立与存在性）。 具有室代表元 $u \in W^P$ 的正则根构型满足

$$w_M = uw_G u^{-1}.$$

正则根构型存在当且仅当 $F_P = \varnothing$。当它们存在时，可以取根格中的 $\mu = u\rho - \rho$、 $b = 0$, 以及平凡环境系数 $\lambda = 0$。因此，这种系数构造适用于每一种同源形式。

证明。 设 $x \in uC$ 严格 Levi 支配且正则，并在每个正规对上具有相反符号。由于 $-w_M$ 保持正 Levi 根，故 $-w_M x$ 严格 Levi 支配。对于正规根 β，其配对为 $-\langle x, (w_M\beta)^\vee\rangle$，其符号与 $\langle x, \beta^\vee\rangle$相同。因此$x$和 $-w_M x$位于同一个室中。由于 $-C = w_G C$，这就得到 $uC = w_M u w_G C$。Weyl 群在各室上的作用是自由的，因此 $w_M = u w_G u^{-1}$。若某个正规根不变，则它会与自身配对，因此这种情况不可能发生。

反过来，设$\mathcal{F}_P = \varnothing$。在半单根空间中， w_M的 -1 特征空间 V_- 包含 ρ_M。没有正规根泛函在 V_-上处处为零，因为这样的根会被 w_M固定。取一个靠近 ρ_M的 $x \in V_-$，使其严格 Levi 支配且不落在正规根超平面上。其相反坐标具有相反的符号。将上述室论证应用于这个 x ，便得到 $w_M u\rho = u w_G \rho = -u\rho$。于是 $u\rho$ 属于 V_- ，且与 x位于同一个室中。其 Levi 单余根配对是正整数，因此 $\mu = u\rho - \rho$ 是 M支配的，并属于根格。由于 $\mu + w_M\mu = -\rho - w_M\rho = -2\rho_P$，有序对$(\mu, 0)$满足纯性和符号条件，且 $\mu = u\cdot 0$。□

构造中的平凡环境系数只是一个起点。对于任意这样的u，令 $\lambda_t = 2t\rho$ 和 $\mu_t = (2t+1)u\rho - \rho = u\cdot\lambda_t$ ，其中 $t \geq 1$为整数。由于 2ρ和 $u\rho - \rho$属于根格，这两个权也都属于根格。正规符号保持不变，并且 $\mu_t + w_M\mu_t = -2\rho_P$； μ_t 的每个单 Levi 配对都至少为 $2t$ ，因为 $u\rho$的相应配对是正整数。因此，对于每一种分类情形，以及每一种同源形式，都存在严格支配的环境最高权和 Levi 最高权。

定理 3.5 (固定正规根与基本秩**)**。 设 G 是域 $\mathbb{R}$上的连通分裂约化群，令 $P = MU_P$ 为一个极大真抛物子群，并选择一个使 P 为标准的正根系。令

$$\mathcal{F}_P = \{\beta \in \Phi_G^+ \setminus \Phi_M^+ : w_M\beta = \beta\}, \qquad n_{\mathrm{fix}}(P) = |\mathcal{F}_P|.$$

回顾 $d_P = |\Psi_P| =$ 维数$_{\mathbb{R}}\, U_P(\mathbb{R})$。对于实约化群 H，记 e

$$\ell_0(H) = \mathrm{rk}_{\mathbb{C}}\,\mathfrak{h}_{\mathbb{C}} - \mathrm{rk}_{\mathbb{C}}\,\mathfrak{k}_{H,\mathbb{C}}, \qquad q_0(H) = \frac{\dim_{\mathbb{R}}(H(\mathbb{R})/K_{H,v}) - \ell_0(H)}{2},$$

其中 $K_{H,\,v}$是极大紧子群，采用第 2 节中针对 $H = G$， M所作的选择。所有分裂中心方向均保留在这些不变量中；参见 [9, 第三章，第 4.1、4 节。3]于是 $\mathcal{F}_P$是两两强正交的，并且

$$n_{\mathrm{fix}}(P) = \ell_0(M) - \ell_0(G), \qquad q_0(G) = q_0(M) + \frac{d_P + n_{\mathrm{fix}}(P)}{2}. \tag{3.4}$$

选取一个 *Cartan* 对合 θ，使其稳定 M，其中 $K_{M,\,v} = K_{G,\,v} \cap M$（$\mathbb{R}$）。在这种对应下，一个由 θ-稳定的基本 *Cartan* 子群 $H_M \subset M$（$\mathbb{R}$）的根与所选抽象根系相对应，并且其 *Cartan* 对合通过 $-w_M$作用。它在 G 中的实根恰好是 $F_P \sqcup$（$-F_P$）。特别地，以下各项彼此等价：

(1) $F_P = \varnothing$; *(2)* H_M 在 G（$\mathbb{R}$） 中是基本的; *(3)* ℓ_0（M） $= \ell_0$（G）；

(4) M 包含 $G(\mathbb{R})$-共轭的 $Z_G(A_f)$，其中 A_f 是 $G(\mathbb{R})$ 的基本 *Cartan* 子群的连通分裂部分；*(5)* P 包含一个基本实抛物子。

条件 *(5)* 等价于存在一个基本 *Weyl* 元素 [50, 引理 8.7(i)– (ii)]。关于基本抛物子判据，另见 [6, §1。8]。

证明。 强正交性见引理A.1，位于附录 A。为确定 Cartan 对合，从 M的一个分裂 Cartan 子群出发。其 Cartan 对合的作用为 -1。Kostant 级联是正 Levi 根的一个强正交集合，其彼此对易的反射相乘得到 w_M[38,命题 1。10]。

沿这些根进行实 Cayley 变换。对于实根 α，通过其 Cayley 变换进行传输会将 θ 变为 $s_\alpha\theta$: 该变换固定 $\ker\alpha$，并改变余根直线 [36, p. 392, (6.67a)–(6.68c)]上的 Cartan 对合符号。从 $\theta=-1$出发，这些彼此对易的变换因此给出对合 $-w_M$。没有 Levi 根被 w_M固定，因为w_M 会交换正、负 Levi 根。因此，所得 Cartan 子群在 M 中没有实 Levi 根，并且根据 [36, 命题 6.70]是基本的。由于所有基本 Cartan 子群均共轭，这就为 H_M的任意选择给出了所断言的识别（在共轭意义下）。

关于在基本 Levi Cartan 子群上将 Cartan 对合与 τ_P 等同，参见[50, §8.5]。该 Cartan 子群在 G 中的实根是满足 β $(-w_M)\,\beta=-\beta$的根，即w_M-不动根。不存在不动的 Levi 根，并且 w_M 保持正法向根，因此这些根恰好是 $\pm\mathcal{F}_P$。

Saper 使用正实根的一个强正交子集，在等秩假设下得到维数界 [50, 引理 25.2 的证明，(25.2.2)]。对于此处考察的极大抛物子群，正实根的全集 $\mathcal{F}_P$ 是强正交的，见引理 A.1。

对 $\mathcal{F}_P$中的每个根依次进行实 Cayley 变换。对于强正交的实根，相应的秩一根子代数彼此对易。因此，每个尚未使用的根在其他变换之后仍为实根，且这些变换彼此对易。若 $s_{\mathcal{F}}=\prod_{\beta\in\mathcal{F}_P}s_\beta$，传输后的 Cartan 对合为 $\theta'=-w_M s_{\mathcal{F}}$。在实根空间 V上，其负一特征空间为

$$V^{\theta'=-1}=V^{w_M}\cap\mathcal{F}_P^{\perp}.$$

此空间中没有根：这样的根会被 w_M 固定，因此必属于 $\pm\mathcal{F}_P$ 之一，但不可能与自身正交。因此，变换后的 Cartan 子群在 G 中是基本的。每次变换都会使分裂维数减少一。H 的基本 Cartan 子群的分裂维数为 $\ell_0(H)$；这是因为可将其紧部分取为 $K_{H,v}$ 的一个极大环面。因此，$n_{\mathrm{fix}}(P)=\ell_0(M)-\ell_0(G)$，其中包括未发生变化的 G 的分裂中心。

最后，$G(\mathbb{R})=U_P(\mathbb{R})M(\mathbb{R})K_G$，$_v$给出 $\dim(G/K_{G,v})=d_P+\dim(M/K_{M,v})$。代入 q_0 的定义即可得到第二个等式。这就证明了(1)–(3)，因为 H_M 在 G 中是基本的，当且仅当它在 G中没有实根。为说明(5)等价于(1)，使用 [50, 引理 8.7]中的基本 Weyl 元素判据。这样的元素会交换逆序与非逆序，从而排除不动根。反之，当不存在不动根时，命题 3.4 构造出这样的元素。对于(4)，当 H_M 在 G中是基本的时，其分裂部分 A_f包含 M的连通分裂中心，因而 $Z_G(A_f)\subseteq M$。反之，(4)中的 Levi 包含一个基本的 G-Cartan 子群。该 Cartan 子群在 M中也同样是基本的，因为其紧维数在 G中已经达到最大。M 中基本 Cartan 子群的共轭性给出(2)。□

定理 3.3 的证明。根据命题 3.4，不存在不动根等价于存在不动根，包括在每一种等源形式上具有整系数。定理 3.5 给出 $n_{\mathrm{fix}} = \ell_0(M) - \ell_0(G)$。环境分裂中心以及远离 k 的每个分量都会在这个差值中抵消。在包含省略节点的分量上，删除 k 会给出一个分裂中心方向和简单 Levi 分量 M_i，因此计数为 $1 + \sum_i \ell_0(M_i) - \ell_0(G_{\mathrm{active}})$。定理 3.5 中的 Cayley 变换论证表明，分裂半单群 H 的基本秩等于 $+1$在其根空间上的 w_H 特征子空间的维数。因而， [14, §3] 中所述的最长元素作用给出：对于 A_{N-1}，为 $\lceil N/2 \rceil - 1$；对于 D_n，模 2 为 n；对于 E_6，为 2；其他类型则为 0。代入即可得到该表；附录 A 列出了各个根。□

对于 SL_N，基本 Levi 子群由大小为二的块组成；对于奇数 N，还包含一个大小为一的块。在奇数D_n 中，直线 Levi 子群的 D_{n-1} 导出群上具有紧 Cartan 子代数。在 E_6 中， D_4 上的 {2、3、4、5}具有秩为四的紧部分，即 $E_6(\mathbb{R})$的紧部分，从而在两个端 Levi 子群中都有一个基本 Levi 子群。关于命题 3.4中出现的 Weyl 群对合的分类，参见 [48,定理 A]。

移除 c_H 中心维数后，约化缺陷为 $\delta_H = \ell_0(H) - c_H$；从维数和缺陷中同时移除这些维数后， $q_0(H)$ 保持不变。特别地，在移除完整的分裂中心后， $n_{\mathrm{fix}}(P) = \delta_M - \delta_G + 1$。由命题 5.11 和定理 3.1 的符号条件给出的临界固定墙两侧长度，将 $q_0(M)$ 变为 $q_0(G)$，并将 $q_0(G) - n_{\mathrm{fix}} P$。

关于指定环境模的 Borel–Casselman 上同调判据，参见[50, 命题 8.9]。Saper 的逆序界 [50, 引理 17.6] 遵循 Saper–Stern [53]的配对根论证。关于相关界，参见 [51, 引理 15.2 和命题 18.2–18.3] ；而在秩一情形下，参见 [11,命题 2.6]。

按群分类。对于 G 的正半单秩情形，当且仅当图包含一个类型为 A_r且具有 $r \geq 2$、类型为奇数 D_n 且具有 $n \geq 5$或 E_6的连通分支时，至少有一个极大抛物子群具有正则根构型。当且仅当每个连通分支的类型均为 A_{2m}、 $m \geq 1$时，每个极大抛物子群都具有一个正则根构型。分裂环面没有真抛物子群。极大性至关重要。对于分裂 SL_3 的 Borel 子群，三个正根均保持不变，因为 M 是一个环面；而 $\ell_0(M) - \ell_0(G) = 1$。

推论 3.6（临界扭曲与环境 Kostant 实现）。设 v 为一个实处，设 σ_v 和 μ 如定理 *3.1*所述，并固定一个扭曲族。若 $n_{\mathrm{fix}}(P) > 0$，则 v 处的任一临界扭曲b_v°都必须等于该值。若这样的扭曲存在，其修正后的整系数 $\mu_{b_v^\circ}$ 没有支配性环境 *Kostant* 实现。因此，只有当活跃单分量和省略节点属于定理 *3.3*所列的情形时，同时临界性才可能与普通环境 *Kostant* 实现并存。

证明。前两项断言即定理 3.1（b）。若 $n_{\mathrm{fix}}(P) = 0$，该定理的（a）部分给出了每个临界扭曲的环境实现，而定理 3.3 列出了这些抛物子群。

□

正则构形的存在性涉及系数。例外正则情形中的尖点诱导数据在引理 6.3中构造。

注记 3.7（固定墙处的留数与喷流）。固定诱导数据，并令$s_0 = k_P - b_v^\circ$ 位于一个临界固定墙上。诱导无穷小特征由$\nu_P(s_0) = -w_M(\mu + \rho + b_v^\circ \gamma_P)$表示。其 Weyl 轨道是奇异的。由该固定诱导族的有限 Laurent 喷射生成的表示

具有相同的广义无穷小特征。事实上，消去极点并对 $DE(s) = \chi_{\nu_P(s)}(D)E(s)$ 关于 $D \in Z(U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}))$ 求导。在所得的有限喷流上，$D - \chi_{\nu_P(s_0)}(D)$ 会降低喷流阶数，因此是幂零的。这也适用于留数和子商。

每个有限维代数的$\mathcal{M}_\lambda^\vee$ 都具有正则平移无穷小特征。取一个中心元 D，使该特征与奇异特征区分开来。两个 D在相应 Ext 群上的作用相同；它们的差是一个非零标量加上一个幂零算子，因此可逆。这些 Ext 群因而消失，代数系数上同调也随之消失。这是第 [9, I 章定理 5.3(ii)]中所回顾的无穷小特征障碍的广义特征版本。关于正则无穷小特征下的剩余上同调，见 [20]。

若 d_P 为奇数，则 Ψ_P 的对合有一个固定根，因此同时临界性要求存在公共墙。为计算 $\mathcal{F}_P = \varnothing$ 时的区间，令

$$\Delta_{v,\beta} = q_\beta(b) - q_{w_M\beta}(b) = \langle \mu - w_M\mu + 2\rho_M, \beta^\vee \rangle. \tag{3.5}$$

这个差与 b 无关。每一对中的两个项符号相反，当且仅当它们的和的绝对值小于它们的差的绝对值。由（3.1），可容许临界平移因此满足

$$|b - b_v^\circ| < \min_{\beta \in \Psi_P} \frac{|\Delta_{v,\beta}|}{2j(\beta)}.$$

在临界固定墙处，命题 5.11 适用于消失根 $\mathcal{F}_P$。令 $n_{\mathrm{fix}} = |\mathcal{F}_P|$和 $n_{\mathrm{fix},\,j} = |\mathcal{F}_P \cap \Psi_{P,\,j}|$。每个非不动对在墙的两侧各贡献一次逆序。所有 $n_{\mathrm{fix},\,j}$ 个分级为 j 的不动根，都会随着 b 增大而由负变正。因此，邻近室长度在左侧为 $(d_P + n_{\mathrm{fix}})/2$，在右侧为 $(d_P - n_{\mathrm{fix}})/2$；在分级 j 中，它们为 $(d_j \pm n_{\mathrm{fix},\,j})/2$。这些是关于实室的陈述，并非关于紧邻墙的格点的断言。

例 3.8（另一个分级可以迫使墙出现）。对于 Sp_4的 Siegel 抛物子，$\gamma_P = e_1 + e_2$和 $f_P = 3/2$。交换根 $2e_i$ 的余根为 e_i，分级为一级；而 $e_1 + e_2$ 的分级为二级，并在对偶 Levi GL_2上携带行列式。取 $\mu = (0,\ -1)$ 和 $b = -1$。于是 $x = (1,\ -1)$，$s = -1/2$，坐标为 $(1,\ -1;\ 0)$。这个上同调的二维 Weil 参数的指数差为 $\mu_1 - \mu_2 + 1 = 2$。在其交换权直线上，J 的行列式为 $-(-1)^2 = -1$（使用 $J^2 = -1$），所以固定行列式线是奇的。其奇偶性不因这个二级代数扭曲而改变。两个轨道的参数均为 1，2，2，1。该元组是临界的，但平移是奇异的，其相邻室长度分别为二和一。

3.3. 实 Weil 作用与端点检验。我们确定实 Weil 作用在分次根空间上的作用，并将相邻临界性转化为根符号和奇偶性条件，同时区分交换的根对与固定根直线。

$\mathrm{sgn}^\epsilon|\cdot|^h$ 的实因子为

$$L(t, \mathrm{sgn}^\epsilon|\cdot|^h) = \Gamma_{\mathbb{R}}(t + h + \epsilon), \qquad \Gamma_{\mathbb{R}}(t) = \pi^{-t/2}\Gamma(t/2). \tag{3.6}$$

对于 $A,\ B \in \mathbb{R}$，其中 $A - B \in \mathbb{Z}$ 和 $A \neq B$，诱导的 Weil 表示具有因子

$$L\Big(t, \mathrm{Ind}_{\mathbb{C}^\times}^{W_{\mathbb{R}}}(z^A\bar{z}^B)\Big) = \Gamma_{\mathbb{C}}(t + \max(A, B)) \tag{3.7}$$

[35, (3.6)，第 404]页。

对于一个固定根 β，将其实 Weil 线的特征写作$\mathrm{sgn}^{\epsilon}|\cdot|^{h}$。由于 $w_M\beta=\beta$，其指数在 $h=A_\beta=B_\beta$ 命题 3.10中为。因此，(3.9)给出 $h+js=-q_\beta(b)$，而(2.24)中的四个参数为

$$-q_\beta(b)+\epsilon,\quad 1-q_\beta(b)+\epsilon,\quad 1+q_\beta(b)+\epsilon,\quad q_\beta(b)+\epsilon. \tag{3.8}$$

引理 3.9（实参数对齐）。 在定理 σ_v 的假设下，*3.1*将其共轭到对偶 *Levi* 中后，该参数满足

$$\phi_{\sigma_v}(z)=z^{\nu_M}\bar z^{w_M\nu_M},\qquad \nu_M=-w_M(\mu+\rho_M),\qquad z\in\mathbb{C}^\times.$$

此外， ϕ_{σ_v}（J）正规化所选的对偶极大环面，并在其根上诱导出 w_M。因此，它交换由 （$w_M\beta$）$^\vee$ 和 $\beta^\vee$ 标记的对偶根线。

证明。实参数的无穷小特征公式 [43, §2，引理 1] 允许我们写成 $\phi_{\sigma_v}(z)=z^{\nu_M}z^{\nu'}$，其中第一个指数等于所显示的严格$^{-}$ M-支配代表元。第二个指数是实的，因为 $\nu_M-\nu'$ 是一个整余特征。 ν_M 的正则性意味着，对偶 Levi 中 $\phi_{\sigma_v}(\mathbb{C}^\times)$ 的中心化子就是所选的极大环面：没有对偶根在该像上取平凡值。Weil 关系意味着 $\phi_{\sigma_v}(J)$ 正规化该极大环面。令 $v_0\in W_M$ 为其 Weyl 群作用；同一关系给出 $\nu'=v_0\nu_M$。

本质 tempered 性使实径向指数 $\nu_M+\nu'$ 成为中心的。因此， ν' 在 Levi 子群余根上严格反支配。由于 $\nu'=v_0\nu_M$ 和 ν_M 严格支配，其 Weyl 轨道中反支配元素的唯一性给出 $\nu'=w_M\nu_M$。正则性随即蕴含 $v_0=w_M$。□

命题 3.10 (实根–Gamma 对照表)。 在定理 σ_v 中的假设下 *3.1*，在标记为 $(w_M\beta)^\vee$ 的对偶根直线上， $\mathbb{C}^\times$ 的限制具有如下指数

$$A_\beta=-\langle\mu+\rho_M,\beta^\vee\rangle,\qquad B_\beta=-\langle\mu+\rho_M,(w_M\beta)^\vee\rangle.$$

在 $s=k_P-b$ 处，它们满足

$$A_\beta+js=-q_\beta(b),\qquad B_\beta+js=-q_{w_M\beta}(b). \tag{3.9}$$

对于二元轨道，将 $q=q_\beta(b)$ 和 $q'=q_{w_M\beta}(b)$ 代入 (2.25)，即可得到四个 $\Gamma_{\mathbb{C}}$参数。每个固定根都会贡献四个实伽马因子，其参数为 (3.8)，其中符号指数 $\epsilon=\epsilon_\beta\in\{0,1\}$ 由 $(-1)^{\epsilon_\beta}$ 对该直线的作用定义。 J 在该直线上。

证明。将引理 3.9 中的两个指数与 $(w_M\beta)^\vee$ 配对。由于 $\rho_P,\beta^\vee=jf_P$，加上 $js=-jf_P-jb$ 便得到 (3.9)。在二元轨道上，两个特征由J交换。当 $A_\beta\neq B_\beta$ 时，它们的张成空间是 (3.7) 的诱导二维 Weil 表示。当 $A_\beta=B_\beta=h$ 时，它则分裂为 $|\cdot|^h$ 和 $\mathrm{sgn}|\cdot|^h$：交换矩阵的特征值为 $1,-1$，因为 $\phi_{\sigma_v}(J)^2$ 在 -1 处的特征作用为一。恒等元

$$\Gamma_{\mathbb{R}}(t+h)\Gamma_{\mathbb{R}}(t+h+1)=\Gamma_{\mathbb{C}}(t+h)$$

于是也对偶给出完全相同的乘积公式。在固定根线 $A_\beta=B_\beta$上，其延拓有一个符号 ϵ_β。应用 (3.6) 和对偶特征公式。□

引理 3.11 (任一端点的临界性)。 固定 $b\in\mathbb{Z}$，令 $s=k_P-b$，并考虑一个单独的分级 j。对于一个复伽马因子，使用其成对坐标 q、q'，并令 $q_{\min}=\min(q,q')$， $q_{\max}=\max(q,q')$。对于固定根 β 的实 *Weil* 线，其坐标为

$q_\beta(b) \in \mathbb{Z}$ 和 ϵ 表示符号指数。表中列出了每个端点在该因子上为临界点的条件。

因子	js	$js+1$
$\Gamma_{\mathbb{C}}$ (复位置或交换的实数对) $q_{\min} < 0 \le q_{\max}$		$q_{\min} \le 0 < q_{\max}$
$\Gamma_{\mathbb{R}}$, $q_\beta(b) > 0$	$q_\beta(b) - \epsilon$ 奇数	$q_\beta(b) - \epsilon$ 偶数
$\Gamma_{\mathbb{R}}$, $q_\beta(b) < 0$	$q_\beta(b) - \epsilon$ 偶数	$q_\beta(b) - \epsilon$ 奇数
$\Gamma_{\mathbb{R}}$, $q_\beta(b) = 0$	$\epsilon = 1$	$\epsilon = 1$

如果端点在 v 处对于该分级是临界的，则它会通过位于 v处的每个因子。全局临界性要求在所有阿基米德赋值处都通过这些检验，如定义2.28所述。在固定的实直线上，两个端点恰好同时临界，当且仅当

$$q_\beta(b) = 0 \quad and \quad \epsilon = 1. \tag{3.10}$$

证明。在 (2.25) 和 (3.8) 中，第一和第三个因子检验 js，第二和第四个检验 $js+1$。在整数自变量处，$\Gamma_{\mathbb{C}}$ 在非正整数处有极点，而 $\Gamma_{\mathbb{R}}$ 在非正偶整数处有极点。对于 $q_\beta(b) > 0$，可能的极点分别来自 $-q_\beta(b) + \epsilon$、$1 - q_\beta(b) + \epsilon$；对于 $q_\beta(b) < 0$，它们分别来自 $1 + q_\beta(b) + \epsilon$、$q_\beta(b) + \epsilon$。在 $q_\beta(b) = 0$处，每个端点都检验 ϵ和$1 + \epsilon$。□

定理 3.1的证明。 命题 3.10 表明，每个交换对对应一个复伽马因子，每个局部中的每个不动根对应一个实伽马因子 L-因子。引理 3.11 中的端点检验给出了第一个等价关系。假设不存在不动根。于是每个轨道都含有两个元素。相反符号恰好给出 $d_P/2$ 个负的正规根坐标，且没有零坐标。 $x(b)$ 的 Levi 坐标均严格为正。应用于 μ_b的命题 2.1因此给出唯一的 $u \in W^P$和一个支配整 λ，其中 $\ell(u) = d_P/2$。每个分级在每个轨道中有一个逆序，因此 $\ell_j(u) = d_j/2$。

反之，环境实现意味着正则性，并且（2.2）通过负的正规根坐标计算其长度。（3.1）中的各和具有一个共同的弱符号。因此，将引理 2.13应用于 $d_P/2$ 二元轨道后，当长度为 $d_P/2$ 时，便迫使每个轨道中的符号相反。这就证明了临界性。

如果存在固定根，其极点检验迫使 $q_\beta(b) = 0$以及 $\epsilon_\beta(b) = 1$。由于每个分级均为正数，（3.2）迫使 $b = b_v^\circ$。此时，根据（3.1），一个非不动对的和为零，因此当且仅当 $q_\beta(b_v^\circ) \neq 0$ 时，其中的项具有相反符号。这就证明了（3.3）。最后，根坐标为零会使 $x(b_v^\circ)$ 奇异。每个 $\lambda + \rho$ 对于支配整的 λ 都是正则的，因此其 Weyl 轨道不可能包含 $x(b_v^\circ) + z_{b_v^\circ}$。□

特别地，对于 $s \in k_P - \mathbb{Z}$ 实处的所有Gamma参数都是整数。定义2.28 随后成为 Deligne 的临界性判据的局部自守类比 [16, 定义 1。3]在 js 以及 $js+1$。

备注 3.12（代数扭曲与绝对值扭曲）。使用定义 θ_b 中的特征2.5。在 k_P处， $\sigma_v \otimes \chi_{-b}$和$\sigma_v \otimes \theta_b^{-1}$都与 σ_v 在 $s = k_P - b$处给出相同的根坐标；但它们的符号不必一致。绝对值扭曲在 J上是平凡的。根据备注2.7，代数整数扭曲带有分级j 符号 $(-1)^{jb}$，因此它会将 ϵ_β 改变 jb （模 2）。特别地，

$$\epsilon_\beta^{\mathrm{abs}}(b) = \epsilon_\beta(0), \qquad \epsilon_\beta^{\mathrm{alg}}(b) \equiv \epsilon_\beta(0) + j(\beta)b \pmod 2.$$

同时进行逆代数扭曲总会抵消系数张量的变化，包括其分量特征；绝对值扭曲则不一定如此。实极点检验总是使用指定族的符号。

对于只包含一条固定直线的分级，其符号可由 $\det(r_j(\phi_{\sigma_v}(J)))$ 读出。对于每个指数差为 $m_O = A_\beta - B_\beta$ 的交换对 O，J 的行列式为 $(-1)^{m_O+1}$，因为 $J^2 = -1$。用总行列式除以这些符号的乘积，即可得到固定直线符号。若有多条固定直线，这一计算给出它们符号的乘积。

3.4. 一般线性实抛物子群。 令 $G = \mathrm{GL}_N$, $N = n+n'$，且 $M = \mathrm{GL}_n \times \mathrm{GL}_{n'}$。省略实嵌入，记 $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n;\ \mu'_1, \dots, \mu'_{n'})$。正规根及其坐标为

$$\beta_{it} = e_i - e_{n+t}, \qquad q_{it}(b) = \mu_i - \mu'_t + n + t - i + b. \tag{3.11}$$

每个分级均为 1，$d_P = nn'$，且

$$\gamma_P = (\underbrace{n'/N, \dots, n'/N}_{n};\ \underbrace{-n/N, \dots, -n/N}_{n'}), \qquad f_P = N/2.$$

虽然 γ_P 不必是整数，但加上一个 G-中心修正后，扭曲在第一块上加上 b，在第二块上则为零。反过来，被省略的单余根配对迫使 $b \in \mathbb{Z}$，因此 $\Lambda_{\mathrm{alg}} = \mathbb{Z}$。

设两个块的纯性权为 w_1,w_2。那么

$$a_v = \mathrm{w}_1 - \mathrm{w}_2, \qquad T_v(b) = \mathrm{w}_1 - \mathrm{w}_2 + N + 2b, \qquad w_M \beta_{it} = \beta_{n+1-i,n'+1-t}.$$

块反转恰好在两个块都具有中间项时固定正规指标 $(i,\ t)$。若 nn' 为偶数，则不存在不动根：该条件是长度为 $nn'/2$的环境实现。对于在全实域上具有互不相交尖点参数的强内数据，在每个实处取 $b = 0$ 应用此判据，便得到 Harder–Raghuram 的组合引理；该引理由 Weselmann 在 [27,引理 7.14 和 §§ 7.2.4 中证明。]。

对于两个奇数块，每个实参数的中间特征都是一条直线。它们的张量商的奇偶性之和按模二计算。因此，临界性要求

$$b = -(\mathrm{w}_1 - \mathrm{w}_2 + N)/2 \in \mathbb{Z}, \quad \epsilon_{\mathrm{middle}} + \epsilon'_{\mathrm{middle}} \equiv 1 \pmod 2.$$

其余各对都必须具有非零间隔。在此平移下，$x(b) = \mu + \rho + b\gamma_P$ 是奇异的，因为其中间根坐标为零。这里的中间符号是指平移后的谱参数处实际固定表示所对应的符号。对于 k_P 处的代数扭曲，应使用传输符号。这便得到 Bhagwat–Raghuram 关于奇奇临界性与非实现性的结论，见 [27, 引理 7.14 和 §7.2。4]。远离墙时，推论 5.5 给出相同的边界次数；关于5.6 中的 $(3,\ 1)$，参见例。

对于实纯权，分别将每个块居中会很有用：

$$A_i = \mu_i - \frac{\mathrm{w}_1}{2} + \frac{n+1-2i}{2}, \qquad A'_t = \mu'_t - \frac{\mathrm{w}_2}{2} + \frac{n'+1-2t}{2}.$$

那么 $A_{n+1-i} = -A_i$、$A'_{n'+1-t} = -A'_t$，以及

$$q_{it} = A_i - A'_t + \frac{T_v}{2}, \qquad \Delta_{v,it} = 2(A_i - A'_t).$$

当不存在固定根时，判据为 $|T_v| < \min_{i,\ t} 2|A_i - A'_t|$。对于给定的一对分块权，即使没有固定根，零间隔也会使此区间为空。

在 Harder–Raghuram 的全实情形中，记 $A_{i,\,v}$ 和$A'_{t,\,v}$ 为 v处的中心坐标。两个分块的尖点参数为 $2A_{i,\,v}$ 和 $2A'_{t,\,v}$ [27, §7.4.1]。其中记作 $\ell(\mu,\ \mu')$ 的尖点宽度不同于 Kostant 长度 $\ell(w)$。根据 [27,定义 7.4], ， 它等于

$$\ell(\mu,\mu') = \min_{v|\infty}\ \min_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le t\le n'}} |\Delta_{v,it}|.$$

Hodge 计算给出了相同的最小值。张量积 Hodge 型之间的差异 $p-q$ 是尖点参数之和。由于$A'_{n'+1-t,\ v} = -A'_{t,\ v}$，将第二个块反向即可把最小的 $|p-q|$ 与最小的$|\Delta_{v\text{对应起来},\ it}|$。当参数互不相交时，该宽度等于 $q_{\min}-p_{\max}$ [27, §§7.1.3 和 7.2.21]。关于全虚域上的一般线性组合引理，参见推论4.10。

例 3.13（GL_3 与两个可容许扭曲）。取$\mathbb{R}$上的 $P=(2,1)$和 $\mu=(0,-2;0)$。两个坐标为 $2+b$、$-1+b$，因此临界区间为（$-2,1$），其格点为 $b=-1$、0。两个长度均为一。对于 $b=0$，支配环境权为$(0,-1,-1)$。对于 $b=-1$，选择中心修正使得 $\mu_b=(-1,-3;0)$；其支配环境权为$(-1,-1,-2)$。两者均通过排列 $\mu_b+\rho$ 并减去$\rho=(1,0,-1)$得到。选取共同的 Levi 底部次数一，得到总边界次数二，这就是第 5 节的次数恒等式。

3.5. Klingen 墙与两个经典比较。Klingen。在 Sp_{2n} $(n\ge 2)$ 上，令$M=\mathrm{GL}_1\times\mathrm{Sp}_{2n-2}$ 且 $\mu=(u;\ \mu_2,\dots,\mu_n)$。所有分级均为 1；$\gamma_P=e_1$, $f_P=n$, $d_P=2n-1$。设 $z=u+n+b$ 且 $t_i=\mu_i+n+1-i>0$。固定根 $2e_1$ 的坐标为 $q_{2e_1}(b)=z$，交换根 $e_1\pm e_i$ 的坐标为 $z\pm t_i$。取辛因子的上同调离散级数参数以及特征 $\mathrm{sgn}^{\delta}|\cdot|^{-u}$，$\delta\equiv u$ 模 2。标准正交参数的行列式为 1；其 $n-1$ 个二维块的指数为$2t_i$，且在 J处的行列式为 -1。因此，其剩余的一维块的符号为 $(-1)^{n-1}$。与该特征张量积后，固定符号为 $(-1)^{u+n-1}$。墙 $b_v^{\circ}=-u-n$ 对于绝对值族来说恰为临界，当且仅当 $u+n$ 为偶数；对于代数族，则对每个 u都为临界。其他间隔均非零，相邻长度为 $n, n-1$（缺陷 1，-1）。

在复位置，相同的根 $2e_1$ 具有间隔 $d=u^{\eta}-u^{\eta}$；其他根具有间隔 $d\pm 2t_i$。中心在 b 坐标中为 $-n-(u^{\eta}+u^{\eta})/2$。

命题 3.14（全局数据的一个临界 Klingen 墙）。设 F 为全实的，$n\ge 2$，并设 P 为 Sp_{2n} 的 ***Klingen*** 抛物子，其 ***Levi*** 子群为 $M=\mathrm{GL}_1\times\mathrm{Sp}_{2n-2}$。对于每个实处 v，固定一个主积分辛权 μ'_v，使得其上同调离散系列包包含一个可积一般成员。则存在 $(\mathbb{A}_F)$ 的全局一般尖点自守表示 M，它在每个实处 v都是本质 ***tempered*** 且为上同调的，权为 $\mu^v=(-n;\ \mu'_v)$；并且对于两个扭曲族，$b=0$ 都是每个实处唯一的临界扭曲。在此扭曲下，x（0） 是奇异的。充分深的权 μ'_v 满足假设 [42]。

证明。群 $\mathbf{H}=\mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}\mathrm{Sp}_{2n-2}$ 在 $\mathbb{Q}$ 上是半单且拟分裂的，而 $\mathbf{H}(\mathbb{R})=\prod_{v|\infty}\mathrm{Sp}_{2n-2}(\mathbb{R})$ 是连通的，且具有紧 Cartan 子代数。一般性和可积性在所选实表示的外张量积下保持不变。利用 F 中的弱逼近，我们可以指定全局 Whittaker 特征的单根系数的实符号，使每个选定的成员对于其局部化都是一般的。Muić 的整体化定理运用了 Khare–Larsen–Savin 的方法，现在给出了一个全局一般的尖点表示

$\mathbf{H}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$具有指定阿基米德分量的 [42, 32]。无穷远处选定的一般离散级数在所选系数 [9, 第二章]。

在 GL_1 上取 $\omega^n_{F(i)/F}|\cdot|^n_{\mathbb{A}_F}$，其中 $\omega_{F(i)/F}$ 是二次海克特征。在每个实处，这都是 $\mathrm{sgn}^n|\cdot|^n$，因此 $u=-n$ 和 $\delta\equiv n$ 模 2，并且会抵消系数特征。该特征在用于 Whittaker 系数的 Levi 幂零根上是平凡的。

在每个实处，$\mu^v+w_M\mu^v=(-2n;\,0,\,\ldots\ldots,\,0)$，所以 $b_v^\circ=0$，这是可容许的。固定符号为 $(-1)^{u+n-1}=-1$，而墙上的其他根坐标为 $\pm t_i$，其中 $t_i>0$。两个扭曲族在 $b=0$ 处的符号相同。定理 3.1(b) 现在适用于每个实处。□

Siegel。对于 Sp_{2m} 的 Siegel 抛物子，令 $t_i=\mu_i+m+1-i$。根 $2e_i$ 的分级为一级，坐标为 t_i+b；根 e_i+e_k（$i<k$）的分级为二级，坐标为 t_i+t_k+2b。这里，$r_1=\mathrm{Std}_m$，当非零时 $r_2=\Lambda^2\mathrm{Std}_m$，$d_P=m(m+1)/2$，且 $f_P=(m+1)/2$。Levi最长元素反转指标，因此其不动根是镜像和；当m为奇数时，还包括单个中间对角根。设 $\mu_i+\mu_{m+1-i}=\mathrm{w}$，并取一个本质 tempered 的上同调参数，其具有与系数相容的完整-K 中心特征。在墙 $b_v^\circ=-(\mathrm{w}+m+1)/2$ 处，数值 $t_i+b_v^\circ$ 严格递减且反对称：恰好是不动坐标为零。每个镜像根 e_i+e_{m+1-i}（其中 $i<m+1-i$）对应于交换块的行列式线，其角指数为 t_i-t_{m+1-i}。由于 $J^2=-1$，根据纯性关系，J 处的行列式为 $(-1)^{t_i-t_{m+1-i}+1}=(-1)^{\mathrm{w}+m}$。因此，对于偶数 m，可容许性和奇奇偶性都要求 w 为奇数；也只有在这种情况下，b_v° 才适用于任一扭曲族。

对于 $m=2h+1$，记 $c=\mu_{h+1}=\mathrm{w}/2$。那么 $b_v^\circ=-c-h-1$ 是整数，且所有镜像直线都是奇数。令 $(-1)^{\epsilon_0}$ 表示 J 在标准参数的中间 Weil线上作用。其余每个 h 二维块在 J处的行列式均为 -1，因此标准参数在 J 处的行列式为 $(-1)^{\epsilon_0+h}$。中心特征与 $-I$ 处系数的相容性给出 $\epsilon_0+h\equiv\sum_i\mu_i\equiv c$（模 2）。因此，当且仅当 $c+h$ 为奇数时，绝对值族是临界的；代数扭曲会将 b_v° 加到中间符号上，使其对每个 c都成为奇数。这里所有临界墙都是奇异的。

连通偶正交群。 对于 SO_{2n+2} 的直线抛物子，$M=\mathrm{GL}_1\times\mathrm{SO}_{2n}(n\geq 2)$。令 $\mu=(u;\mu_1,\ldots,\mu_n)$，$z=u+n+b$，$t_i=\mu_i+n-i$。所有 $2n$ 坐标都处于 $z\pm t_i$ 一级，且有 $t_1>\cdots>t_{n-1}>|t_n|$。当 n 为偶数时，D_n 的最长元将所有 t_i取负；因此临界性为 $|z|<\min_i|t_i|=|\mu_n|$，等价于环境实现的长度为n。存在 $\max(0,2|\mu_n|-1)$ 个整值扭曲；因此，即使没有不动根，间隔为零也可能排除所有点。

对于偶数 n，Bhagwat 和 Raghuram 在分裂群 $\mathrm{O}(2n+2)$ [5, §5.3] 的各向同性直线抛物子情形下证明了该组合引理。不等式 $|z|<|\mu_n|$ 重现了他们判据中由根理论得到的部分。对非连通群的比较还涉及分支和簇数据。

对于奇数 n，最后一个坐标由 Levi 作用固定，而纯性迫使 $\mu_n=0$。两个固定根的坐标为 z：在 $z=0$ 处，两种符号都必须为奇数，而相邻的长度为 $n+1$，$n-1$。

3.6. 实处的两个 G_2 抛物子群。记 α 为短根，记 β 为长根，并以保留根标记抛物子群。唯一的固定根对于P_β是 $2\alpha+\beta$，对于 P_α是 $3\alpha+2\beta$。在两种情形下，其分级均为二，其Weil线均为标准 GL_2 参数的行列式。对于 Levi单余根配对 $n\geq 0$，角度差

为 $n+1$，因此 J 作用于行列式上为$(-1)^n$。将省略的单余根配对记为 a，固定坐标分别为 $2a+3n+5+2b$和 $2a+n+3+2b$。当且仅当 n 为奇数时，它们的零点位于 $\Lambda_{\mathrm{alg}}=\mathbb{Z}$ 中。在这样的零点处，对于任一扭曲族，行列式都是奇的。对于 P_β，交换对的绝对间隔为 3$(n+1)$ $n+1$，而对于 P_α则为 $n+1, n+1$。因此，对于任一极大抛物子群和任一扭曲族，定理 3.1 表明：当 n 为偶数时，临界集为空；当 n为奇数时，存在唯一的临界平移 b_v°。在该平移处，环境无穷小特征是奇异的。

在全实域上，平凡的诱导中心特征在二级中给出因子 $\zeta_F(2s)$。在 $b=0$处，其相邻自变量对于 P_β 为 $(-5,\ -4)$，对于 P_α 为 $(-3,\ -2)$。负奇数自变量是临界的，见 [44, 命题 23(i)]。在负偶数自变量 $-2m$ 处，ζ_F 的阿基米德因子 $\Gamma_{\mathbb{R}}(s)^{[F:\mathbb{Q}]}(s)$ 具有 $[F$ 阶极点：$\mathbb{Q}]$。反射值$\zeta_F(1+2m)$ 根据欧拉乘积非零，因此函数方程表明，有限部分ζ函数在 $-2m$ [44,§4.2.4] 处恰有同阶的零点。

4. 复处：临界区间及其逆命题

在复位置，我们刻画使分级归一化元组具有相邻临界自变量的代数系数平移。我们证明，该条件等价于具有互补总次数的环境 Kostant 实现，因而也等价于每个分级中的平衡。随后，我们将临界平移明确确定为系数线上的一个区间的代数格点。

令 $v=\{\overline{\eta},\eta\}$ 为一个复处。在本节中，σ_v 是 $M(F_v)$ 的不可约、本质温和表示，其上同调对应于惯例 $\sigma_v\otimes\mathbf{M}_{\mu,v}$ 下的整 M-支配系数对 (μ^η,μ^η)，其中 $\mathbf{M}_{\mu,v}=\mathbf{M}^M_{\mu^\eta}\boxtimes\mathbf{M}^M_{\mu^\eta}$ 作用于两个复化嵌入因子上。由于 σ_v 本质幺正，引理 2.11 给出 (2.9)，其中 c_v 和 a_v 与该引理中相同。

对于 $b\in\Lambda_{\mathrm{alg}}$，令 $s=k_P-b$ 和 $x^\xi(b)=\mu^\xi+\rho+b\gamma_P$，并设

$$\mu_b^\xi=\mu^\xi+\theta_b=x^\xi(b)-\rho+z_b\in X\qquad(\xi=\eta,\overline{\eta})$$

为定义 2.5 中的权。我们将这些称为赋值 v 处的局部假设。

下一条定理中的异号检验使用了 (2.25) 中的四个伽马函数自变量。

定理 4.1 (复处上的组合引理)。设 $v=\{\eta,\eta\}$ 为一个复处，且 σ_v 是 $M(F_v)$ 的不可约、本质温和表示，其上同调对应于整 M-支配系数对 (μ^η,μ^η)。设 $b\in\Lambda_{\mathrm{alg}}$，其中 μ_b^ξ 如定义 2.5。以下条件等价：

(1) $s=k_P-b$ 在 v 处同时为临界。*(2)* 对每个 $\beta\in\Psi_P$，$q_\beta^\eta(b)\,q_{w_M\beta}^\eta(b)<0$。*(3)* 在 $\xi=\eta$ 和 η 处，整*Levi*权可实现为 $\mu_b^\xi=u^\xi\cdot\lambda^\xi$，其中 $u^\xi\in W^P$ 和 $\lambda^\xi\in X_G^+$，且两个 *Kostant* 次数满足 $\ell(u^\eta)+\ell(u^\eta)=d_P$。

当这些等价条件成立时，室代表 u^η、u^η 是唯一的，

$$\mathrm{Inv}_P(u^{\overline{\eta}})=w_M\Big(\Psi_P\setminus\mathrm{Inv}_P(u^\eta)\Big),\qquad equivalently\qquad u^{\overline{\eta}}=w_Mu^\eta w_G, \tag{4.1}$$

因此

$$\ell_j(u^\eta)+\ell_j(u^{\overline{\eta}})=d_j\qquad for\ every\ grade\ j. \tag{4.2}$$

注 4.2（与 Raghuram 及 Raghuram–Zou 的关系）。对于 GL_N，推论 4.10 在相应的假设与规范化条件下恢复了 Raghuram组合引理 [46, 引理 3。16]。引理 2.13给出了本文所使用的 Saper 配对根计数的形式，其中 $(\eta,\ \beta)$ 与 $(\eta,\ w_M\beta)$ [50, 引理 8.7(iii) 和 17。6]。

在 $s_0 = k_P (b = 0$ 此处)，Raghuram 和 Zou 独立地从超临界性 [47, 引理 7.15 及 (7.17)–(7.18)] 推导出互补的 Kostant 代表元。对于 $\alpha = w_M\beta$，他们记作 ξ 和 ξ' 的权满足

$$(\langle \xi, \alpha^\vee\rangle, \langle \xi', \alpha^\vee\rangle) = (-q^\eta_\beta(0), -q^{\overline{\eta}}_{w_M\beta}(0))$$

通过 [47, (7.7)、(7.9)–(7.13)], 以及 js_0 和 $js_0 + 1$ 都位于其临界点格 $c_\alpha + \mathbb{Z}$[47, 定义 5.8 及 (7.14)]。在他们的假设下，在 θ_b^{-1}处计算 s_0扭曲的数据，等价于在 $s = k_P - b$ [47, (5.6)]处计算固定数据。定理 4.1 还通过从总次数平衡推导出相反符号的不等式，证明了每个可容许 b处的逆命题。命题 4.6 将临界平移确定为系数线上的一个显式开区间中的可容许点。

4.1. **从参数到符号检验。** 本质 tempered 性决定了这两个无穷小特征在阿基米德 Artin 因子中的配对方式。

引理 4.3. 记作 $\nu_M^\xi = -w_M(\mu^\xi + \rho_M)$，如引理 *2.11*所述。在 $\widehat{M}$中经共轭后，σ_v 在 $W_{F_v} = \mathbb{C}^\times$ 上的 *Langlands* 参数为

$$z \longmapsto z^{\nu_M^\eta}\, \overline{z}^{\,w_M\nu_M^{\overline{\eta}}}, \qquad \nu_M^\eta - w_M\nu_M^{\overline{\eta}} = \mu^{\overline{\eta}} - w_M\mu^\eta + 2\rho_M \in X.$$

证明。无穷小特征将两个指数确定到各自独立的 W_M-轨道为止 [43,§11，推论 3]。经共轭后，第一个为 ν_M^η，第二个为 $v_0\nu_M^\eta$，其中某个 $v_0 \in W_M$；按照上同调约定，二者均为实数。

本质 tempered 性使径向指数 $\nu_M^\eta + v_0\nu_M^\eta$ 成为 Levi 中心。因此，$-v_0\nu_M^\eta$具有与 ν_M^η 相同的 Levi 余根配对，并且严格 M-支配。$-w_M\nu_M^\eta$ 也如此，且二者都属于 $-\nu_M^\eta$的 W_M-轨道；因此它们相等，而正则性给出 $v_0 = w_M$。显示的差由 $w_M\rho_M = -\rho_M$ 计算得出。□

特别地 $\nu_M^\eta + w_M\nu_M^\eta = -c_v$，这再次体现了局部纯性。

命题 4.4 （根–伽马对应表）。令 $b \in \mathbb{R}$ 和 $s = k_P - b$。固定 $\beta \in \Psi_{P,\ j}$ 并记 $(q、\ q') = (q^\eta_\beta(b)\ q^\eta_{w_M\beta}(b)$。在 V_j的直线 $\widehat{\mathfrak{g}}_{(w_M\beta)^\vee}$上，表示 $r_j \circ \phi_{\sigma_v}$ 由 $\mathbb{C}^\times$作用，其作用为 $z^A z^B$，其中

$$A = jf_P - q^\eta_\beta(0), \qquad B = jf_P - q^{\overline{\eta}}_{w_M\beta}(0).$$

该直线对 (2.24) 的贡献是 $\Gamma_{\mathbb{C}}$ 因子 (2.25) 中的四个因子。如果 $b \in \mathbb{Z}$，那么 q和 q' 是整数，并且这四个因子全都有限，当且仅当 $qq' < 0$。

证明。将引理 4.3 中的指数与 $(w_M\beta)^\vee$配对，并利用 $\langle \rho_P,\ \beta^\vee\rangle = jf_P$。由此得到所述指数以及恒等式 $A + js = -q$和 $B + js = -q'$。

$z^A z^B$ 的局部因子为 $\Gamma_{\mathbb{C}}(t + \max(A,\ B))$，其中 $\Gamma_{\mathbb{C}}(t) = 2(2\pi)^{-t}\Gamma(t)$（见 [60, 第 13] 页和 [35, (4.6)]）。将此公式应用于特征及其逆特征，可得到四个伽马函数自变量。对于 $b \in \mathbb{Z}$，它们是整数；当且仅当 $\min(q,\ q') < 0 < \max(q,\ q')$ 时，它们全部为正数。伽马函数没有零点，因此其乘积中的极点不可能相互抵消。□

4.2. **复组合引理的证明。**

定理 *4.1* 的证明。 命题 4.4 给出 (1) $\Leftrightarrow$ (2)。在 (2) 的条件下，严格的 Levi 优势使两个平移权均为正则权。命题2.1 给出了这些实现，而每一对中的一次逆序则给出 (3) 以及（4.1）的第一种形式。

在条件 (3) 下，两个平移向量都是正则的。为证明 (2)，如 Saper 的论证所示，成对计算逆序 [50, 引理 17。6]。由 (2.2)，它们的总长度等于 d_P 对中负坐标的个数

$$(q^{\eta}_{\beta}(b), q^{\overline{\eta}}_{w_M\beta}(b)), \qquad \beta \in \Psi_P.$$

由 (2.10)，配对和为 $2j(\beta)(b-b^{\circ}_v)$。由于每个分级都为正，它们的符号相同。因此，引理 2.13 迫使每一对中的符号都相反，而负项总数为 d_P，从而证明了 (2)。在 $b = b^{\circ}_v$ 处，每一对的和都为零，且由正则性可知其各项均非零。

对于 $u \in W^P$，元素 $w_M u w_G$属于 W^P，并且 $\beta \in \Psi_P$是它的逆序，当且仅当 $w_M\beta$不是 u的逆序；由于 W^P中的元素由其逆序集唯一确定，这就给出了 (4.1) 的第二种形式。最后， w_M 保持分级，因此互补逆序集给出 (4.2)。□

没有同号假设时，完全负的配对与完全正的配对的相等数量的正数可以在总计数中相互抵消，从而得到一个平衡但非补集的族。

例如，在 GL_3 上取 $P = B$（这不是极大的），考虑两个平移权 $(0, 1, -1)$ 和 $(-1, 1, 0)$，它们都是 ρ 的排列。在 $e_1 - e_2$、$e_2 - e_3$、$e_1 - e_3$ 上，这些配对为 $(-1, -2)$、$(2, 1)$、$(1, -1)$。两个 Kostant 长度分别为 1 和 2，因此它们的和等于正规根的数量。然而，第一个配对完全为负，第二个配对完全为正：它们的贡献在总计数中相互抵消。更一般地，只要没有配对坐标为零，且配对和要么全部非负、要么全部非正，引理 2.13 就适用。在这些假设下，总次数平衡会迫使每个配对中的符号相反。

在更高相对秩的情形下，这是对相对中心参数的一个额外室条件：它与所有正法余根的配对必须位于同一个闭半轴内。在相对秩一的情形下，纯性在（2.10）中给出了这一条件。即使对于极大抛物子群，如果没有命题 4.4 中的整性，坐标对 $(q, q') = (1/2, 1/2)$ 也会通过全部四项伽马检验，尽管其符号相同。

4.3. **临界区间与可容许平移。** 现在我们确定满足前述判据的平移。分次根不等式定义了一个显式区间，该区间与 Λ_{alg} 的交集给出临界代数平移。在复处上对这些区间取交，便可确定是否存在公共平移。对于分裂的 G_2，每个分级中的临界范围及其在 Tate 扭曲下的变化，均在 [28, §§5.1–5.2 和 §6.3] 中计算。正规根坐标为所有极大抛物子群给出一致界。

差值

$$\Delta_{v,\beta} = q^{\eta}_{\beta}(b) - q^{\overline{\eta}}_{w_M\beta}(b) = \langle \mu^{\eta} - w_M\mu^{\overline{\eta}} + 2\rho_M, \beta^{\vee} \rangle \tag{4.3}$$

与 b 无关，且等于 $B - A$。根据（2.10），

$$4qq' = 4j(\beta)^2(b - b^{\circ}_v)^2 - \Delta^2_{v,\beta}. \tag{4.4}$$

因此，当且仅当 $2j(\beta)|b-b_v^\circ| < |\Delta_{v,\beta}|$ 时，这些项的符号相反。对于整数 b，两个坐标之和与之差具有相同的奇偶性，因此它们的绝对值之间若有严格间隔，至少为二。令

$$R_v = \min_{\beta\in\Psi_P} \frac{|\Delta_{v,\beta}|}{j(\beta)}. \tag{4.5}$$

临界宽度 R_v 是各个分级中宽度的最小值。该区间的半径为 $R_v/2$。

备注 4.5（被 Levi 对合固定的根）。若 $\beta\in\Psi_P$ 满足 $w_M\beta=\beta$，则 $\langle\rho_M,\beta^\vee\rangle = 0$ 且 $\Delta_{v,\beta} = \langle\mu^\eta-\mu^\eta,\beta^\vee\rangle$。因此，当存在这样的根时，相等的共轭权 $\mu^\eta=\mu^\eta$ 会给出 $R_v=0$，且在 v 处不存在临界扭曲。

这一障碍出现在 Sp_{2n} 的 Siegel 和 Klingen 抛物子群中，也出现在 G_2 的两个极大抛物子群中。对于 Klingen，固定根 $2e_1$ 的间隔为 $u^\eta-u^\eta$，因此两个 GL_1 权相等就足以推出 $R_v=0$（第 3.5 节）。

命题 4.6（临界区间）。所有成对根坐标均具有相反符号的实参数构成

$$\mathcal{I}_v = (b_v^\circ - R_v/2,\, b_v^\circ + R_v/2). \tag{4.6}$$

当 $R_v=0$ 时，该区间为空。在 v 处，代数上允许的临界平移恰好是 $I_v\cap\Lambda_{\mathrm{alg}}$。在谱变量中，同一区间为

$$\frac{a_v-R_v}{2} < s < \frac{a_v+R_v}{2}. \tag{4.7}$$

在一个非空的 $\mathcal{I}_v$ 上，两个 *Kostant* 代表元 u^η、u^η 保持不变，并且按照命题 $\mathcal{I}_v = I^\eta_{u^\eta}\cap I^\eta_{u^\eta}$ 的记号，*2.15*；其端点是两个嵌入之一的穿墙参数 (2.8)。

证明。由（4.4），所有成对取相反符号等价于 $2|b-b_v^\circ| < R_v$。这给出（4.6），代入 $s=k_P-b$ 得到（4.7）。该定理证明了代数格上的断言。在此区间内部没有根坐标可以为零，因此其符号在区间内保持不变。室判据随后给出保持不变的代表元，因此 $\mathcal{I}_v$ 同时包含于两个室区间中。在它们的交集上，每个根坐标的符号都与其在 $\mathcal{I}_v$ 上的符号相同，从而得到相等性。在端点处，某个乘积 qq' 为零，因此某个坐标也为零。□

对于 $\Lambda_{\mathrm{alg}} = d_{\mathrm{alg}}\mathbb{Z}$ 开区间 $(b_-,\ b_+)$ 中的格点数 is

$$\max\{0, \lceil b_+/d_{\mathrm{alg}}\rceil - \lfloor b_-/d_{\mathrm{alg}}\rfloor - 1\};$$

非空时，极端指标为 $n = b/d_{\mathrm{alg}}\ \lfloor b_-/d_{\mathrm{alg}}\rfloor+1$ 和 $\lceil b_+/d_{\mathrm{alg}}\rceil-1$。

在全虚域上，取 $b_- = \max_v(b_v^\circ - R_v/2)$ 和 $b_+ = \min_v(b_v^\circ+R_v/2)$。因此，局部宽度为零、开区间互不相交，或交集不含格点，都会排除公共扭转。此处计数针对系数；这与尖点存在性无关。

例4.7（更高的分级会缩小复区间）。对于 Sp_4，的 Siegel 抛物子，使用分级为（1，2，1）的正规根（$2e_1$，e_1+e_2，$2e_2$），以及 $\mu^\eta=(-1,\ -3)$、$\mu^\eta=(0,\ -2)$。这里 $\rho=(2,\ 1)$，$\gamma_P=(1,\ 1)$，$f_P=3/2$，且 $c_v=(-3,\ -3)$，所以 $a_v=-3$。在 $b=0$，成对坐标为（1，-1）、（-1，1）、（-2，2）。分级一和分级二中的宽度分别为 2 和 1，而中心 $b_v^\circ=0$ 给出区间 $(-1/2,\ 1/2)$ 以及唯一的格点 $b=0$。

这两个平移向量是 ρ 的带符号置换，因此两个环境系数都是平凡的，而长度 2、1 之和为 3。由 Levi 对合固定的根在列表中间将这里的两个不同嵌入配成一对（在实处，其 Weil 特征会进入引理3.11的奇偶性检验）。

例 4.8 （一个含奇数 d_P 的非一般线性 Levi 子群）。 对于 Sp_6，的 Klingen 抛物子，取 $M = \mathrm{GL}_1 \times \mathrm{Sp}_4$、 $\gamma_P = e_1$、 $f_P = 3$ 和 $d_P = 5$。所有正规根的分级均为一级。在根序中

$$e_1 - e_2,\ e_1 - e_3,\ 2e_1,\ e_1 + e_3,\ e_1 + e_2,$$

选择系数对

$$\mu^{\eta} = (-2; 1, 1), \qquad \mu^{\overline{\eta}} = (-4; 1, 1).$$

于是 $c_v = -6e_1$、 $a_v = -6$ 和 $b_v^{\circ} = 0$。 $b = 0$ 处的坐标为

$$q^{\eta} = (-2, -1, 1, 3, 4), \qquad (q^{\overline{\eta}}_{w_M\beta})_{\beta} = (2, 1, -1, -3, -4).$$

因此 $\Delta_v = (-4,\ -2,\ 2,\ 6,\ 8)$、 $R_v = 2$ 和 $\mathcal{I}_v = (-1,\ 1)$。恰有 $b = 0$ 属于其代数格 $\mathbb{Z}$。在 $s = -3$ 处，选定参数为 $-3,\ -2$。次数为 $2 + 3 = 5$，且两个环境权均为零。这实现了奇维复处情形，且无需对导出 Levi 子群作一般线性假设。此计算适用于具有这些权的本质 tempered 上同调诱导数据。

根坐标及其所在的室是为实数 b 定义的。对于整数 b，四个伽马因子有限，当且仅当成对坐标符号相反。整数环境科斯坦特实现还要求 $b \in \Lambda_{\mathrm{alg}}$，如下例所示。

在 PGL_2 上写作 $\omega = \alpha/2$ 并取 $\mu^{\eta} = 0, \bar{\mu}^{\eta} = -4\omega$。在 $b = 1$ 处，成对坐标为 2，-2，四个伽马函数自变量为 2，3，3，2。但移位系数 $\omega,\ -3\omega$ 不属于 $X = 2\mathbb{Z}\omega$；不存在 G-中心修正。因此，即使一个上同调环面参数通过了所有整数伽马检验，在 Λ_{alg} 之外也未必能给出整数环境实现。

推论 4.9 (Harder 坐标中的临界区间)。 假设在复位置满足定理 *4.1* 的局部假设，或在实处满足定理*3.1* 的局部假设。若一个正则容许扭曲的 *Kostant* 代表元满足 v，则称其在 $\ell(u^{\eta}) + \ell(u^{\eta}) = d_P$（复位置），或满足 $\ell(u) = d_P/2$（实处）时称其为平衡的。正则容许扭曲平衡，当且仅当它同时是临界的。

在复位置处，记 $b^{\xi}{}_{\mathrm{H}} = a_0^{\xi} + f_P + b$ 为 (2.14)中的两个坐标。平衡扭曲恰好是那些 $b \in \Lambda_{\mathrm{alg}}$ 满足以下条件的扭曲：

$$|b^{\eta}_{\mathrm{H}} + b^{\overline{\eta}}_{\mathrm{H}}| < \min_{\beta \in \Psi_P} \frac{|\Delta_{v,\beta}|}{j(\beta)}.$$

在实处，令 $F_P = \varnothing$，置 $h_{\beta} = \langle \tilde{\mu}^{(1)}, \beta^{\vee} \rangle$。所有平衡实现的平移中心坐标构成集合

$$\left\{ b_{\mathrm{H}} \in a_0 + f_P + \Lambda_{\mathrm{alg}} : \quad |b_{\mathrm{H}}| < \min_{\beta \in \Psi_P} \frac{|h_{\beta}|}{j(\beta)} \right\}.$$

若 $F_P \neq \varnothing$，同时临界性要求 $b_{\mathrm{H}} = 0$。当且仅当扭曲是可容许的、每条固定直线都是奇的，并且所有二元轨道的间隔均非零时，该点处才会出现这种情况。该点处的平移权没有环境科斯坦特实现。

证明。 在 γ_P 的中心投影中，$\mu^\eta + w_M\mu^\eta$ 的系数为 $a_0^\eta + a_0^\eta$。因此，归一化和 $T_v^-(b)$ 在（2.10）中等于 $b^\eta{}_{\mathrm{H}} + b^\eta{}_{\mathrm{H}}$。应用命题 4.6。

在实处，Levi 根张成空间上的对立纯性给出 $w_M\tilde{\mu}^{(1)} = -\tilde{\mu}^{(1)}$。轨道中的两个坐标为 $j(\beta)b_{\mathrm{H}} + h_\beta$ 和 $j(\beta)b_{\mathrm{H}} - h_\beta$。当且仅当 $j(\beta)|b_{\mathrm{H}}| < |h_\beta|$时，它们的符号相反。在固定根 $h_\beta = 0$上，因此定理 3.1 给出了最后一个断言。□

4.4. 一般线性与例外归一化元组。 GL_N 特化只有一个分级。对于 G_2，较高的分级可能会限制共同临界区间。在这两种情形下，根坐标也给出每个可容许临界平移处的阿基米德欧拉商。

推论 *4.10*（*Raghuram* 的一般线性组合引理）。设 F 为全虚域，$G = \mathrm{GL}_N$，$N = n + n'$，且 P 的 *Levi* 为 $M = \mathrm{GL}_n \times \mathrm{GL}_{n'}$。取满足每个无穷点处定理 *4.1* 的局部假设的上同调诱导数据 $\sigma_1 \boxtimes \sigma_2$，其整系数族为 $\mu = \mu_1 \oplus \mu_2$。在 $b = 0$ 处，点 $-N/2$ 和 $1 - N/2$ 对 $L(s, \sigma_1 \times \sigma_2^\vee)$ 均为临界点，当且仅当 μ 在每个复位置 [46, 都具有满足 $\ell(u^\eta) + \ell(u^\eta) = \overline{nn'}$ 的支配整环境实现 引理 *3.*16]。

证明。 所有 nn' 正规根 $e_i - e_{n+t}$以及 $1 \le i \le n$ 和 $1 \le t \le n'$的分级均为一级。因此

$$r_1 = \mathrm{Std}_n \otimes \mathrm{Std}_{n'}^\vee, \qquad L_v(s, \sigma_{1,v} \boxtimes \sigma_{2,v}, r_1) = L_v(s, \sigma_{1,v} \times \sigma_{2,v}^\vee).$$

由于 $\rho_P = (N/2)\gamma_P$，我们有 $k_P = -N/2$。因此，将定理 4.1应用于每个复位置即可得到该断言。

对于 [46, 引理 3.16], 中的上同调的尖点数据，强纯性在两个Le维因子上均给出局部对立纯性。阿基米德分量是不可约的、本质上温和的，并且是上同调的 [46, §2.5，命题 2.13], ，因此上述局部假设在每个复位置均成立。□

在这一级分级中，[46, (3.11)] 中定义的尖点宽度为 $\min_v R_v = \min_{v,\ \beta} |\Delta_{v,\ \beta}|$。在 $b = 0$，该判据对于两个全局纯权表示为 $|\mathrm{w}_1 - \mathrm{w}_2 + N| \le \min_v R_v - 2$。间隔为二，这源于整性和奇偶性。

对于分裂的 G_2，令 α 为短的、β 为长的，并以保留的 Levi 单根标记每个极大抛物子群。两个 Levi 均同构于 GL_2。分次表示和取值点如下表所示 [28, §§3.1–3.2]。

(4.8)

P	j	r_j	d_j	$jk_P,\ jk_P + 1$
P_β	1	Ad^3	4	$-5/2,\ -3/2$
	2	det	1	$-5,\ -4$
P_α	1	Std	2	$-3/2,\ -1/2$
	2	det	1	$-3,\ -2$
	3	$\mathrm{Std} \otimes \mathrm{det}$	2	$-9/2,\ -7/2$

此处 $\mathrm{Ad}^3 = \mathrm{Sym}^3 \otimes \mathrm{det}^{-1}$。在系数移位 b 处，次数 j 中的两个参数均减少 jb。

对于这些抛物子群，定理4.1 恢复了相邻临界性与互补 Kostant 次数之间的等价性，这一等价性已在 [28, 引理 6.1–6.2]中确立。共轭的 Kostant 长度之和为五，其中

$$\ell_j(u^\eta) + \ell_j(u^{\overline{\eta}}) = d_j.$$

因此，分次和为 $(4,\ 1)$ 对应 P_β，而 $(2,\ 1,\ 2)$ 对应 P_α。命题 4.6 通过求所有分级的限制的交集，确定同时成立的临界扭曲。

例4.11（三级决定区间）。对于 P_α，取

$$\mu^\eta = (4,-3), \qquad \mu^{\overline{\eta}} = (4,-4)$$

按 $(\alpha,\ \beta)$ 排列的 Dynkin坐标。该区间以零为中心，分级宽度为

$$R_{v,1} = 4, \qquad R_{v,2} = 1, \qquad R_{v,3} = 2/3.$$

因此

$$\mathcal{I}_v = (-1/3, 1/3), \qquad \mathcal{I}_v \cap \Lambda_{\mathrm{alg}} = \{0\}.$$

系数平移表述还纳入了 [28,§6.3]中讨论的 Tate 扭曲变体。

复局部检验的一个直接推论是归一化检验。对于一个临界格点，令

$$h_{v,\beta}(b) = -\min\bigl(q^\eta_\beta(b), q^{\overline{\eta}}_{w_M\beta}(b)\bigr) \in \mathbb{Z}_{>0}.$$

Gamma递推关系给出

$$\prod_j \frac{L_v(js,\sigma_v,r_j)}{L_v(js+1,\sigma_v,r_j)} = \frac{(2\pi)^{d_P}}{\prod_{\beta\in\Psi_P} h_{v,\beta}(b)}. \tag{4.9}$$

事实上 $\Gamma_{\mathbb{C}}(t+1) = t\Gamma_{\mathbb{C}}(t)/(2\pi)$，且该字典对每个正规根都有一个因子。这就计算出了进入备注 6.6 的周期约定中的阿基米德欧拉商。

5. 全局平衡与共同边界次数

一个次数等式即可检测每个阿基米德位置处的临界性。原因在于，共同的相对中心迫使所有非零局部长度缺陷具有相同的符号。同一个计数还衡量了当两个 Kostant 长度不同时，边界次数范围中尚余多少。

5.1. 缺陷公式与全局组合引理。 从 F 到 $\mathbb{Q}$作标量限制后，Kostant 族 $w = (w^\eta)_\eta$ 是 F的各个嵌入所对应的乘积 Weyl 群中的一个元素。其长度是各分量长度之和，因此

$$\ell(w) = \sum_{\eta:F\hookrightarrow\mathbb{C}} \ell(w^\eta), \qquad d_{P,F} = [F:\mathbb{Q}]d_P.$$

一个复位置按两次计数。命题 2.23 的伴随族满足 $\ell(w') = d_{P,F} - \ell(w)$。

定义带符号长度缺陷

$$\mathrm{Def}(w) = \ell(w) - \ell(w') = 2\ell(w) - d_{P,F}. \tag{5.1}$$

交换源与目标会改变其符号。其奇偶性为 $\mathrm{Def}(w) \equiv d_{P,F} \pmod 2$。

对于每个 $x^\eta(b)$ 都是 G-正则的参数 b，令 $w^\eta = w^\eta(b) \in W^P$ 为满足 $(w^\eta)^{-1}x^\eta(b)$ 严格 G-占优的唯一代表元。在实处 v，记其唯一嵌入为 $w^v = w^\eta$。置 $\mathrm{Def}(b) = \mathrm{Def}(w(b))$，并定义

$$\mathrm{Def}_v = \begin{cases} 2\ell(w^v) - d_P, & v \text{ real}, \\ 2(\ell(w^\eta) + \ell(w^{\overline{\eta}})) - 2d_P, & v \text{ complex}. \end{cases} \qquad \mathrm{Def} = \sum_{v|\infty} \mathrm{Def}_v. \tag{5.2}$$

局部量可以通过计算负坐标的数量得到。当Def $=0$时，称该族为整体平衡；当 v 时，称其在$\mathrm{Def}_v=0$处局部平衡；后者与推论4.9一致。

命题 5.1 (正则平移处的全局缺陷)。 假设该系数族在每个阿基米德位置都局部对立纯，且具有 $a_v=a$ 。设 $b\in\mathbb{R}$ 在每个嵌入处都正则，并令

$$T(b)=a+2f_P+2b=a-2s,\qquad s=k_P-b.$$

对于一个实处 v，令 $m_v(b)$表示 Ψ_P 中坐标符号相同的二元 w_M-轨道的数量，并令 $n_{\mathrm{fix},\mathrm{v}}=n_{\mathrm{fix}}(P)$。对于一个复位置 $v=\{\eta,\bar\eta\}$，令 $m_v(b)$表示坐标符号相同的配对 $(q_\beta^\eta(b)\ q_{w_M\beta}^\eta(b))$、$\beta\in\Psi_P$ 的数量，并令 $n_{\mathrm{fix},\mathrm{v}}=0$。设$m(b)=\sum_{v|\infty}m_v(b)$，并令 $r_1(F)$表示实处的数量。则

$$\begin{aligned}\mathrm{Def}_v(b)&=-\operatorname{sgn}(T(b))\Big(n_{\mathrm{fix},\mathrm{v}}+2m_v(b)\Big),\\ \mathrm{Def}(b)&=-\operatorname{sgn}(T(b))\Big(r_1(F)n_{\mathrm{fix}}(P)+2m(b)\Big).\end{aligned}\tag{5.3}$$

这里 $\operatorname{sgn}(0)=0$。若 $T(b)=0$，则正则性迫使 $r_1(F)n_{\mathrm{fix}}(P)=m(b)=0$。因此，局部缺陷要么全都非负，要么全都非正。

证明。这是引理 2.13 的定量形式。由命题 2.12，每个配对和都是 $j(\beta)T(b)$，其中 $j(\beta)>0$；固定的实坐标是 $j(\beta)T(b)/2$。在符号计数（5.2）中，异号对的贡献为零。同号对贡献 $-2\operatorname{sgn}(T(b))$，而固定坐标贡献 $-\operatorname{sgn}(T(b))$。这就证明了 $T(b)\neq0$ 时的公式。若 $T(b)=0$，则正则性排除了固定坐标，并使其余每一对的符号均相反。□

定理 5.2 (正则平移下的全局组合引理)。 设 P 为极大，设 $b\in\Lambda_{\mathrm{alg}}$在每个嵌入处均为正则，并假设系数族在每个阿基米德位置处均为局部对立纯，且具有 $a_v=a$ 。以下条件等价：

(1) $\mathrm{Def}(b)=0$，等价地，$\ell(w)=\ell(w')$；*(2)* $\mathrm{Def}_v(b)=0$ 在每个阿基米德位置处成立；*(3)* 在复位置处，每一对 $(q_\beta^\eta(b)\ q_{w_M\beta}^\eta(b))$ 的符号均相反；在实处，$F_P=\varnothing$ ，且每个二元 w_M-轨道中的两个元素符号相反。

此外，假设每个诱导表示 σ_v 对于所述权均为不可约、本质 *tempered* 且具有上同调的，并采用实位置和复位置判据（定理 *3.1* 和 *4.1*）中的归一化。那么，这些条件等价于在每个阿基米德位置同时具有临界性，对于备注 *3.12*中的任一扭曲族：对于 σ_v 固定的绝对值族，在 $s=k_P-b$处检验；对于 $\sigma_v\otimes\theta_b^{-1}$的代数族，在 k_P处检验。

如果所选的两个 *Levi*上同调块的次数支集为$\{k_0\}$ （定义*5.4*），则这些条件也等价于它们的边界项在某个公共次数上发生重叠。

证明。 命题 5.1 表明，局部缺陷要么全都非负，要么全都非正；并且当且仅当每一对局部缺陷符号相反且不存在实固定根时，它们的和才为零。

在一个复位置处，伽马因子仅取决于根坐标，而两族的根坐标相同，因此临界性等价由定理 4.1给出。在实处，首先设 $\mathcal{F}_P\neq\varnothing$。此时条件 (3) 不成立，而定理 3.1中的固定线判据要求 $q_\beta(b)=0$ 对于 $\beta\in\mathcal{F}_P$ 在任一族中均成立，但正则 b 排除了这一点；因此两个族都

不可能同时具有临界性。若 $\mathcal{F}_P = \varnothing$，两个族仅在固定直线符号上有所不同，因此它们的检验一致，并归结为定理 3.1的 (a) 部分。

最后一个断言中的两个边界项分别出现在次数 $k_0 + \ell(w)$ 和 $k_0 + \ell(w')$ 中。□

推论 5.3 (次数缺陷计数阿基米德极点)。 固定每个阿基米德赋值处的不可约、本质 *tempered* 上同调诱导数据。设 $b \in \Lambda_{\mathrm{alg}}$ 在每个嵌入处均正则，并令 $s = k_P - b$。对每个非空分级 j，定义其对次数缺陷的贡献如下：

$$\mathrm{Def}_j(b) = 2 \sum_{\eta : F \hookrightarrow \mathbb{C}} \ell_j(w^\eta) - [F : \mathbb{Q}] d_j.$$

在 (2.24)中，令 p_j^{dir}为前两个因子的极点阶数之和，在所有阿基米德赋值处于 js，$js+1$ 处取值。令 p_j^{dual}为对偶因子在$1-js$，$-js$处对应的和。有限因子的贡献为零。于是

$$\mathrm{Def}_j(b) = p_j^{\mathrm{dual}} - p_j^{\mathrm{dir}}, \qquad \mathrm{Def}(b) = \sum_j \mathrm{Def}_j(b).$$

若相对中心坐标 a_v 独立于 v，则在每个分级中，$|\mathrm{Def}j(b)| = p_j^{\mathrm{dual}} + p_j^{\mathrm{dir}}$，且 $|\mathrm{Def}(b)| = \sum_j |\mathrm{Def}j(b)|$。当相对中心一致时，$js$ 和 $js+1$ 在每个阿基米德赋值处的分级 j 中均为临界，当且仅当 $\mathrm{Def}j(b) = 0$。

证明。 根据命题 2.23，转到伴随抛物子群会补去每个分级中的逆序。因此 $\mathrm{Def}j(b)$是两个分级j 逆序计数之差。在命题 4.4 和 3.10的字典中，异号对对该差的贡献为零，并产生四个有限伽马因子。两个正坐标贡献 -2，并在直接一侧给出两个简单极点。两个负坐标贡献 $+2$，并在对偶一侧给出两个简单极点。

对于固定的实根 β，正则性给出 $q_\beta(b) \neq 0$。若 $q_\beta(b) > 0$，该根对缺陷的贡献为 -1。直接参数 $-q_\beta(b) + \epsilon$和 $1 - q_\beta(b) + \epsilon$中恰有一个是非正偶整数。若 $q_\beta(b) < 0$，该根的贡献为 $+1$，且对偶参数$1 + q_\beta(b) + \epsilon$ 和 $q_\beta(b) + \epsilon$ 中恰有一个产生极点。两种情形下，另一侧的两个因子均为有限值（引理 3.11）。由于伽马因子没有零点，极点阶数相加。这就证明了带符号恒等式。

在共同中心假设下，每个配对和都是 $jT(b)$，每个固定坐标都是 $jT(b)/2$。因此，所有极点贡献（如有）在所有赋值和分级中都出现在同一侧。绝对值恒等式和临界性断言随之成立。□

5.2. **共同边界次数范围**。

定义5.4 （保留上调块）。 逐个嵌入地固定一个整数环境系数 λ 和 Kostant 系数 $\mu_w = w \cdot \lambda$。选择一个相容的边界层级$K_{M,\ f}$ 并令

$$S^M_{K_{M,f}} = M(F) \backslash M(\mathbb{A}_F) / (A_M K_{M,\infty} K_{M,f}), \qquad H^\bullet_! = \mathrm{im}(H^\bullet_c \longrightarrow H^\bullet),$$

其中，A_M是 $\mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}} M$ 的正有理分裂中心。保留 Levi 块是一个指定的有限维分次子空间

$$H^\bullet_{M,w} \subseteq H^\bullet_!(S^M_{K_{M,f}}, \widetilde{\mathcal{M}}^M_{\mu_w}), \qquad \mathcal{D}_w = \{k \in \mathbb{Z} : H^k_{M,w} \neq 0\}.$$

所有 Hecke选择、有限层向量、重数和分量投影均包含在此选择中。如果在连通紧覆盖上保留了分量特征，则始终使用相应的覆盖和相容的边界投影。在伴随Levi子群上对 w' 作出相应的选择。

例如，一个完整的尖点 σ-块由下式得到

$$\mathrm{Mult}_{\mathrm{cusp}}(\sigma)\otimes H^{\bullet}(\mathfrak{m}_{\infty},K_{M,\infty}A_M;\sigma_{\infty}\otimes\mathcal{M}^{M}_{\mu_w})\otimes\sigma_f^{K_{M,f}},$$

在该覆盖上进行计算时，以 $K^{\circ}_{M,\infty}$ 代替 $K_{M,\infty}$。A_M 的合成作用是平凡的。次数论证涉及这些实际的上同调空间；它们并未提供权族的自守实现。

Kostant定理（2.1）给出所选的边界项

$$\mathcal{B}^q_w = H^{q-\ell(w)}_{M,w}.$$

对于 $H=G$，M，记 $H_\infty=\prod_{v\mid\infty}H(F_v)$，并令 A_H 为 $\mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}H$ 的正有理分裂中心。置

$$D_H=\dim_{\mathbb{R}}(H_\infty/(K_{H,\infty}A_H)),\qquad \delta_H=\ell_0(H_\infty)-\dim A_H. \tag{5.4}$$

按照定理 $q_0(H)=q_0(H_\infty)$ 中的约定使用，并对阿基米德赋值作加性延拓。去掉 A_H 会从对称空间维数和ℓ_0中都减去其维数，因此

$$D_H=2q_0(H)+\delta_H. \tag{5.5}$$

特别地，$q_0(H)$ 的值保持不变。

推论5.5（正则扭曲下的公共边界次数）。在定理 5.2 的系数假设下，令 $m(b)$ 表示（5.3）中的同号配对数。若两个保留 *Levi* 块的次数支集

$$[q_0(M),q_0(M)+\delta_M]\cap\mathbb{Z},$$

它们的公共边界次数恰好为

$$q_0(G)+m(b)\le q\le q_0(G)+\delta_G-1-m(b),\qquad q\in\mathbb{Z}. \tag{5.6}$$

当且仅当 $2m(b)<\delta_G$时，该区间非空。若这些支集仅包含于所述 *Levi* 区间内，（5.6）是一个必要条件。

证明。在实处，（3.4）给出基本秩差；在复处，该差为零。由于 维 A_M − 维 $A_G=1$，我们得到

$$\delta_M-\delta_G=r_1(F)n_{\mathrm{fix}}(P)-1,\qquad D_G-D_M=d_{P,F}+1.$$

等式（5.5）现在给出 $2(q_0(G)-q_0(M))=d_{P,F}+r_1(F)n_{\mathrm{fix}}(P)$。两个长度之和为$d_{P,F}$，其绝对值之差为 $r_1(F)n_{\mathrm{fix}}(P)+2m(b)$。取 Levi 次数区间的两个平移的交集即可证明该结论。□

相同的计数具有解析意义。在正则扭曲下，一个同号交换对会在其分级中排除两个端点。如果该分级的所有交换对都具有相反符号，则根据引理 3.11，每条固定直线都会选定一个端点。在这一假设下，当且仅当某个端点的所有固定直线都允许它时，该端点在该分级中是临界的。如果该分级没有固定直线，且每个交换对都具有相反符号，则两个端点都是临界的。

例5.6（(3, 1)抛物子群的边界四次上同调）。对于 $\mathrm{GL}_4/\mathbb{Q}$，取 $\Pi\boxtimes 1$，其中$\Pi=\mathrm{Sym}^2\,\pi_\Delta$ 是权12 Δ 一级尖点形式的酉 Gelbart–Jacquet提升[19]。该数据的 Levi 系数具有最高权 $(10,\,0,\,-10;\,0)$。在 $b=0$处，(3.11)给出 $(13,\,2,\,-9)$：外部坐标构成一个异号对，而中间根由 w_M固定。两个相伴长度分别为 1 和 2。采用所使用的连通紧子群并移除正分裂中心后，Levi上同调出现在次数 $2,3$ [27, §3.1.5，命题 3.4]中。因此，两个平移区间仅在次数 $4=1+3=2+2$相交。

只有一个分级，其相邻自变量为 -2，-1。酉归一化中的阿基米德因子具有形式 [41,§2.4，命题 2.4 及注 2.5]

$$L_\infty(s,\Pi)=\Gamma_{\mathbb{C}}(s+11)\Gamma_{\mathbb{R}}(s+1).$$

下端参数是临界的，而在上端参数处，实因子有一个简单极点。函数方程将 -2，-1 反映到 3，2，此处欧拉乘积绝对收敛且非零。因此，

$$L_{\mathrm{fin}}(-2,\Pi)\neq 0,\qquad \operatorname{ord}_{s=-1}L_{\mathrm{fin}}(s,\Pi)=1.$$

因此，次数重叠伴随着一个临界值和一个简单平凡零点。要在上同调中解释该导数，还需要进一步的构造。

5.3. 自守数据的公共中心。 缺陷公式只要求相对坐标 a_v 一致。整体上同调数据的中心特征在以下相容性假设下保证了这一点。

引理 5.7（整体上同调数据的中心）。设 M 在 F上分裂，并设 σ是 $M(\mathbb{A}_F)$ 的不可约自守表示，其中心特征为 ω_σ。假设每个 σ_v $v\mid\infty$都是本质幺正的，并且关于系数权 $(\mu^\xi)_{\xi|v}$具有上同调性。置 $Z=Z_M^\circ$，并将 $\omega_{\mu,\,\infty}$ 记作 $Z(F_\infty)$ 作用于系数表示时所对应的特征。假设连通中心相容性

$$\omega_{\sigma,\infty}\big|_{Z(F_\infty)^\circ}=\omega_{\mu,\infty}^{-1}\big|_{Z(F_\infty)^\circ}. \tag{5.7}$$

那么，μ 是局部对立纯的，并且存在一个$c\in\mathfrak{a}_{M,\,\mathbb{Q}}^*$ 使得

$$\mu^{\overline{\eta}}+w_M\mu^{\eta}=c\qquad(\eta\in\Sigma_F).$$

特别地，$a_v=\langle c,\alpha_P^\vee\rangle$与 v无关。

证明。局部对立纯性由引理 2.11 得出。对于一个 F-有理余特征$y\colon\ \mathbb{G}_m\to Z$，拉回 $\chi_y=\omega_\sigma\circ y$ 是一个具有连通无穷型指数的Hecke特征

$$n_{y,\eta}=-\langle\mu^\eta,y\rangle\in\mathbb{Z}.$$

在实处，其符号不受（5.7）限制，但 χ_y^2 是一个无穷型为 $(2n_{y,\,\eta})_\eta$的代数Hecke特征。因此，代数Hecke特征的纯性 [44, §4.1，引理 17] 给出一个整数w_y 使得

$$n_{y,\tau^{-1}\circ\eta}+n_{y,\tau^{-1}\circ\overline{\eta}}=\mathrm{w}_y\qquad(\tau\in\mathrm{Aut}(\mathbb{C}),\ \eta\in\Sigma_F). \tag{5.8}$$

如果 F 有一个实处，同一个引理给出更强的结论，即所有 $n_{y,\,\eta}$ 都相等，且 $\mathrm{w}_y=2n_{y,\,\eta}$。

取 τ 为恒等元，并利用 w_M 固定 Z，可得 $\langle c_v,\ y\rangle = -\mathrm{w}_y$，且与 v 无关。由于 M 是分裂的，F-有理余特征张成 $X_*(Z)\otimes\mathbb{Q}$。此外，限制诱导出一个同构

$$\mathfrak{a}_{M,\mathbb{Q}}^{*} \xrightarrow{\sim} X^{*}(Z)\otimes\mathbb{Q},$$

因为 $Z\to M/M_{\mathrm{der}}$ 是一个等源。因此，这些配对确定了同一个 c。 □

该引理适用于第2.3节分裂中心正规化下的尖点自守数据和离散自守数据，只要条件（5.7）成立。其证明不需要尖点性。连通相容性是在对正分裂中心取商之前施加的；实符号特征仍属于诱导数据的一部分。

推论5.8（算术共轭下的中心）。在引理 5.7的假设下，进一步假设 μ 是强对立纯的。那么，每个算术重新索引都有相同的中心 c：

$$({}^{\tau}\mu)^{\overline{\eta}} + w_M({}^{\tau}\mu)^{\eta} = c \qquad (\tau\in\mathrm{Aut}(\mathbb{C}),\ \eta\in\Sigma_F).$$

特别是，当共轭系数族满足推论 2.22的实现假设时，结论成立。

证明。强对立纯性使每个写出的和都是 Levi 中心的。将其与 y配对，$-\mathrm{w}_y$ 由（5.8）得出。引理 5.7 证明中的限制同构将其识别为c。 □

在推论 5.8的假设下，对于定义 $\mu_b^{\eta}=\mu^{\eta}+\theta_b$2.5中的共同中心系数平移，每个赋值处以及每种算术重编号下，中心都变为 $c_b = c + 2\theta_b$。其相对坐标为 $a+2b$；这一断言针对系数族，并不意味着每种平移都存在自守实现。

例5.9（局部缺陷可以相互抵消，而不必存在共同中心）。设 F 是一个四次CM域，其复处为 v_1, v_2，并设 η_i,η_i 是位于 v_i之上的嵌入。取 $G=\mathbf{GL}_4$,$M=\mathbf{GL}_3\times\mathbf{GL}_1$, $b=0$, 并且

$$\mu^{\eta_1}=\mu^{\overline{\eta}_1}=(2,1,0;0),\qquad \mu^{\eta_2}=\mu^{\overline{\eta}_2}=(2,1,0;6).$$

这里 $f_P=2$、$d_P=3$以及所有正规根 $\beta_i=e_i-e_4$ 的分级均为一级。由于 w_M 反转前三个坐标，

$$c_{v_1}=(2,2,2;0),\qquad c_{v_2}=(2,2,2;12),\qquad a_{v_1}=2,\quad a_{v_2}=-10.$$

该族是对置纯的。在 $\mathbf{GL}_3$ 因子上，这一条件并非空泛：对于相等的共轭权 (u,v,w)，它要求 $u+w=2v$。

在 v_1 上方的两个嵌入处，法向坐标均为 (5, 3, 1)；在 v_2 上方，法向坐标为 $(-1,-3,-5)$。四个平移权均为正则的，其 Kostant 代表元分别为恒等元和 w_P，环境最高权分别为 (2, 1, 0, 0) 和 (3, 3, 2, 1)。对置对的和为 $T_{v_1}(0)=6$ 和 $T_{v_2}(0)=-6$，如命题 2.12 所述。因此

$$\mathrm{Def}_{v_1}=-6,\qquad \mathrm{Def}_{v_2}=6,\qquad \mathrm{Def}=0,$$

尽管这两个赋值都不平衡。

这些权具有本质温和的上同调局部实现。令 $\mathbb{J}$表示在 [46, (2.8)–(2.10)、命题 2.13]中为系数对 ((2，1，0)，(2，1，0)) 所指定的 $\mathbf{GL}_3(\mathbb{C})$ 的本质温和表示。取

$$\sigma_{v_1}=\mathbb{J}\boxtimes\mathbf{1},\qquad \sigma_{v_2}=\mathbb{J}\boxtimes|\cdot|_{\mathbb{C}}^{-6}.$$

不存在自守表示 $M(\mathbb{A}_F)$ 具有这些局部分量：其 GL_1 因子将具有共轭指数和 0 和 -12，这与代数Hecke特征的纯性相矛盾[44, 引理 17(ii)]。因此，对立纯性将根对置于每个赋值内的中心，而为了防止局部缺陷在不同赋值之间相互抵消，则需要一个共同的相对中心。

5.4. 选定的次数支集与诱导上同调。 对于实现该 Levi 块的匹配诱导模，相对 Shapiro 归纳在商去 A_G后可能保留一个分裂李代数$\mathfrak{a}_{\mathrm{rel}}$ 。若其维数为 d ，且其在合并后的诱导模和系数上的作用是平凡的，则该项为

$$\mathcal{J}_w^q = \bigoplus_{e=0}^{d} H_{M,w}^{q-\ell(w)-e} \otimes \Lambda^e \mathfrak{a}_{\mathrm{rel},\mathbb{C}}^*. \tag{5.9}$$

这是相对 Shapiro 归纳中的外代数因子 [9, 第 III 章，命题 2.5(ii) 及定理 3.3(ii)]。仅当分支投影保持该张量因子时，公式才在分支投影之后使用；否则应使用投影复形的支撑。

若剩余作用是非零标量泛函 ζ，则微分为 $\zeta\wedge$，并且与满足 $\zeta(a) = 1$的元素 a 进行压缩会压缩该复形。对于极大有理抛物子群，当恰好保留 Lie(A_M/A_G) 时， $d = 1$ 。

对于有限集 X， $Y \subset \mathbb{Z}$，记 $X - Y = \{x - y : x \in X,\ y \in Y\}$ 以及 $X + Y = \{x + y : x \in X,\ y \in Y\}$。

引理 5.10 (次数重叠)。 对于上面选取的分级项：

(1) 这些 边界项 $B_w^\bullet$ 和 $B_{w'}^\bullet$ 具有公共非零次数，当且仅当

$$\mathrm{Def}(w) \in \mathcal{D}_{w'} - \mathcal{D}_w. \tag{5.10}$$

(2) 如果两个诱导项都具有维数为 d 的剩余外因子（见 (5.9)），那么它们具有公共非零次数，当且仅当

$$\mathrm{Def}(w) \in (\mathcal{D}_{w'} - \mathcal{D}_w) + \{-d, -d+1, \dots, d\}. \tag{5.11}$$

因此，对于相应实现项之间的次数保持比较，以上是其非零的必要次数条件。

证明。 边界次数恰好在以下条件成立时重合： $\ell(w) + k = \ell(w') + k'$ 其中 $k \in \mathcal{D}_w$ 且$k' \in \mathcal{D}_{w'}$，或者 $\mathrm{Def}(w) = k' - k$。在（ 5.9 ）中会出现一个额外差值 $e' - e$ 。从 $-d$ 到 d 的每个整数都由两个非零外幂实现，这便得到（5.11）。 □

若两侧具有相同的单元素支撑 $\{k_0\}$ ，边界检验变为 Def $= 0$，而 $d = 1$ 的诱导重叠允许 Def $= 0, \pm 1$ ，且具有其规定的奇偶性。若两个 Levi 支集都位于 $[k_{\min}, k_{\max}]$ 中，边界重叠要求 $|\mathrm{Def}| \le k_{\max} - k_{\min}$。对于诱导重叠，上界增加 d。例如，支撑 $\{0,4\}$ 的差集为$\{-4, 0, 4\}$。

在某个共同次数上，可以考察交织算子是否非平凡，以及哪些类可以提升到普通上同调。目标次数与源次数之间可能的差值构成集合（$\mathcal{D}_{w'} - \mathcal{D}_w$） $-\mathrm{Def}(w)$。在这些次数之一上构造映射是进一步要做的工作。

5.5. **墙上的边界次数变化。** 对于固定的嵌入，Kostant 长度给出边界项中的次数平移。我们使用第 2.4 节的记号来描述它在墙上的跃变。

在穿过单面墙 H_β时，令 w_- 和 w_+ 分别表示随着 b增大而穿越前后的代表元。这些室在 H_β中共享一个面，且只有 q_β 改变符号。因此，$w_+ = s_\beta w_-$ 和 $\ell(w_+) = \ell(w_-) - 1$。所以，不同的穿越给出一条饱和的 Bruhat 下降链。在同一分级内，当 $\beta'^\vee - \beta^\vee$ 是 Levi 单根余根的非零非负和时，严格的 M-支配性保证 $b_{\beta'} < b_\beta$。关于其与反射序的关系，参见 [17,§2]。

对于多重穿越，令 $x \in X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ 严格 M-支配，并令

$$N_-(x) = \{\beta \in \Psi_P : \langle x, \beta^\vee \rangle < 0\}, \qquad Z(x) = \{\beta \in \Psi_P : \langle x, \beta^\vee \rangle = 0\}.$$

消失根构成根子系统 Φ_x，满足 $\Phi_x^+ := \Phi_x \cap \Phi_G^+ = Z(x)$，因为严格的 M-支配性排除了 Levi 根。令 W_x 为其 Weyl 群，$w_{0,x}$为其相对于 Φ_x^+的最长元，并令 $\mathcal{W}_P(x) := \{w \in W : x \in wC\}$ 为相邻代表元的集合，其中 wC表示室 wC的闭包。

命题 5.11（奇异参数处的室）. 每个 $w \in \mathcal{W}_P(x)$ 属于 W^P且满足

$$N_-(x) \subseteq \mathrm{Inv}_P(w) \subseteq N_-(x) \cup Z(x).$$

群 W_x 在相邻的室上简单传递作用。存在唯一的代表元 $w_{\min}$ 和 $w_{\max}$，其长度分别最小和最大，并且

$$\mathrm{Inv}_P(w_{\min}) = N_-(x), \qquad \mathrm{Inv}_P(w_{\max}) = N_-(x) \cup Z(x), \qquad w_{\max} = w_{0,x} w_{\min}.$$

若 $x = x(b_*)$ 是奇异的，则对充分小的 $\varepsilon > 0$，

$$w(b_* - \varepsilon) = w_{\max}, \qquad w(b_* + \varepsilon) = w_{\min}.$$

b_*处的次数下降为 $|Z(x)|$，其分次贡献为 $\ell_j(w_{\max}) - \ell_j(w_{\min}) = |Z(x) \cap \Psi_{P,\,j}|$。

证明。 x 的小扰动保持所有非零根配对以及严格的 M-支配性，因此属于 W^P 并满足这些包含关系。在 x 的局部邻域中，只有 Φ_x的超平面出现，因此面穿越通过关于 W_x的反射连接相邻的室；由于 W 在室 [31, §§1.8, 1.12]上简单传递作用，该作用是自由的。

对于 $\beta \in Z(x)$，配对 $\langle \gamma_P, \beta^\vee \rangle = j(\beta)$ 为正，因此 $x \pm \varepsilon \gamma_P$使每个消失的配对分别为正、负，且不改变其他符号。这些扰动给出两个极端的室；其他所有相邻的室的长度都严格介于两者之间。元素 $w_{0,x}$ 固定 x并交换 Φ_x的正室与负室，因此$w_{\max} = w_{0,x} w_{\min}$。对于 $x = x(b_*)$，这些扰动为 $x(b_* \pm \varepsilon)$。□

下降量统计的是正消失根的数量，而非 Φ_x的秩：一个 A_2 子系统贡献三个。若 $b_* \in \Lambda_{\mathrm{alg}}$ 是一个交叉参数，则 $\mu_{b_*} + \rho = x(b_*) + z_{b_*}$ 是奇异的，而命题 2.1 排除了这样的实现 $\mu_{b_*} = w \cdot \lambda$，其中 $\lambda \in X_G^+$。

5.6. **经典与例外情形中的边界次数。** 对于 $\mathrm{GL}_{n+n'}/\mathbb{Q}$，令 $\mathrm{b}_n = \lfloor n^2/4 \rfloor$。当 nn' 为偶数时，$\mathrm{b}_{n+n'} = \mathrm{b}_n + \mathrm{b}_{n'} + nn'/2$。因此，一个平衡代表元将 Levi 底部次数带到环境底次数 [27, Ch. 3]。

例 5.12（复 G_2 底次数）。 设 F为纯虚数域，具有 r 个复处。对于任一极大 G_2 抛物子，$M \simeq \mathrm{GL}_2$ 和$d_{P,\,F} = 10r$。对于完整温和尖点 Levi 块，每个半单复因子贡献一次数和二次数，并且

中心模去正有理分裂中心贡献一个宽度为$r-1$的外部范围。因此，完整 Levi 范围为 $[r,3r-1]\cap\mathbb{Z}$（参见 [46, 命题 2。15]）。

在临界分支 $\ell(w)=\ell(w')=5r$中，因此 Levi 底部次数给出次数为$6r$的比较，见 [28]。对于完整范围，(5.6) 给出

$$6r+m(b)\le q\le 8r-1-m(b).$$

长度不等的重叠要求 $1\le m(b)\le r-1$，并且发生在底部次数之上。

注记 5.13（Harder 的属三计算）。 在一级的 GSp_6，中，中间抛物子P_2 稳定一个各向同性二平面。两个椭圆尖点输入的 Levi 次数总和为二。因此，Kostant 长度四和三分别给出边界次数六和五。

对偶幂零根基的两个分级的维数分别为六和一。第二个分级贡献 $\zeta(n_i+1)/\zeta(n_i+2)$，其中 $n_i>0$ 即使在所考虑的 [24, §9.6.3，第459–461页，(9.235)、(9.244)–(9.248)、(9.252)] 情形中也是如此。正奇数分子自变量是非临界的，因为对偶因子 $\Gamma_{\mathbb{R}}(-n_i)$ 有一个极点，尽管有限ζ值非零。正偶数分母自变量是临界的。关于带有平凡零点的非临界端点，参见第 3.6 节。

例 5.14 (Klingen 边界次数)。 设 F 为次数 r 的全实域，$n\ge 2$，且P为 Sp_{2n} 的 Klingen 抛物子。存在一个 w_M-固定正规根，且 $d_P=2n-1$。若其他轨道间隔均非零，则与中央墙相邻的两个室的长度为 n和 $n-1$，见第 3 节。对于满足引理 5.7 的全局上同调诱导数据，这是所有实处上的公共墙 b°。在足够小的公共邻域中，其下侧具有

$$\ell(w)=rn,\qquad \ell(w')=r(n-1),\qquad \mathrm{Def}(w)=r;$$

上侧的缺陷为 $-r$。任一侧的容许格点未必落在此邻域内。命题 3.14 证明，对于适当的权，全局泛型尖点 Levi 数据可以实现公共奇异墙 $b^\circ=0$。

对于这些中心化数据，固定根的坐标为 $q_{2e_1}(b)=b$，且在墙上具有奇符号。在一个实处，设 b 为任一相邻室中的可容许平移，因此 $0<|b|<\min_{i\ge 2}t_i$。每个交换对都允许两个端点。由引理 3.11，固定直线选取其中一个。在代数族中，其符号指数为 $\epsilon\equiv 1+b$ (模 2)，因此 $q_{2e_1}(b)-\epsilon$ 始终为奇数。上端点 k_P+1 在墙下方为临界端点，而下端点 k_P 在墙上方为临界端点。对于固定表示，符号指数始终等于一。在它的两个参数s、$s+1$中，当b为偶数时，临界端点所处的位置与代数族中的相同；当 b为奇数时则相反（注 3.12）。

在 -1有理数域GL_1 因子中，移位系数获得符号 $(-1)^b$。逆代数扭曲对每个 b都会抵消这一符号，而绝对值扭曲恰好仅在 b 为偶数时满足全紧致奇偶条件（备注 2.26）。对于 $n=2$，配套论文中的诱导指数在长度二室中为 $-b=s+2$。 [29]

远离公共墙时，公共中心符号论证给出 $|\mathrm{Def}|\ge r$。例如，对于 $\mathrm{Sp}_4/\mathbb{Q}$ 中的 Klingen，经过 $\mu=(0;0)$ 的直线在 $b=-6$ 处具有 $x=(-4,\ 1)$。三个法向坐标均为负，因此得到 $\mathrm{Def}=3$。

假设保留 Levi 块的辛离散级数上同调集中在一个次数上，并且在次数 0、……、$r-1$上保留中心。其宽度 $r-1$ 小于 $|\mathrm{Def}|$，因此两个边界范围互不相交。在 $\mathrm{Def}=r$ 的相邻室中，保留一个

剩余分裂方向允许诱导上同调

$$rn + t_0 = r(n-1) + (t_0 + r - 1) + 1,$$

其中 t_0 是共同的 Levi 底部次数，最后的1 是（5.9）中的剩余外次数。对于$\mathrm{Sp}_4/\mathbb{Q}$，约化缺陷 δ_G 为零，因此（5.6）对于两个极大抛物子群都是空的。对于 Klingen，次数为一的尖点 Levi 类给出边界次数 3和 2。

备注 5.15（分母需要整比较）。对于偶数 $n \geq 2$，Harder 的 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 一级 Eisenstein 类的分母是 $\zeta(-n-1)$[3, 定理 2.13] 的正分子。这里，w_M 确定唯一的正根，两个 Kostant 长度为 0 和 1；在相邻的 zeta 函数自变量 $-n-1$ 和 $-n$ 中，只有第一个是临界的。

Harder 的 Siegel 计算将一种次级上同调构造与一个模L-值比以及 $\zeta'(-n_1)/\pi$ 联系起来，并提出如下问题：周期归一化值的分母如何反映在 Eisenstein 类中 [22, §§2.2.1–2.2.3], [24, §9.6.2，第 453–455] 页。关于另一个猜想中的分母理想，以及涉及中心导数的一个拟议高度配对，参见 [23, (93)、(112)]。

GSp_4 的 Klingen 抛物子限制到 Sp_4的 Klingen 抛物子。例 5.14表明，在长度二室中，该代数族的上端点是临界的。

在一份正在撰写的配套手稿中，[29], 作者猜想，对于该室中的本原三次边界类，该端点处经周期归一化的扭曲伴随L-值会生成有理 Eisenstein 提升的分母理想（除去坏素数）。这一整比较需要选取格。本文的所有结果均独立于这一猜想。

5.7. **内 Levi 类与整体 Hecke 上同调**。Clozel 将 Scholze 的构造 [54, §5.2] 推广到具有代数系数的内 Levi 类 [13, 定理 3.4、3.7 和命题 3.5]。由此得到的每个边界类，要么提升到的普通上同调中，要么在紧支撑上同调中具有非零连接像。下文的表述记录了广义特征子空间及其在第2节 Hecke 归一化下的重数。

在本小节中，设 $G/\mathbb{Q}$ 为连通约化群，$P = MU_P$为极大真有理抛物子。对数域上的群，采用标量限制处理。选取相容的极大紧子群 $K_{G,\infty}$ 和 $K_{M,\infty}$，以及一个在 [13,§2.1] 中所用的强意义下整洁的乘积层 $K_f = \prod_p K_p$。令

$$K_{P,f} = K_f \cap P(\mathbb{A}_f), \qquad K_{M,f} = \mathrm{pr}_M(K_{P,f}),$$

并令

$$S^G_{K_f} = G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})/(A_G K_{G,\infty} K_f), \qquad S^M_{K_{M,f}} = M(\mathbb{Q})\backslash M(\mathbb{A})/(A_M K_{M,\infty} K_{M,f}).$$

这里，A_H 是H的极大 $\mathbb{Q}$-分裂中心环面实点的单位元分支。Borel–Serre 紧化 $\overline{S}^G_{K_f}$ [7]具有一个开边界片

$$Y_P = P(\mathbb{Q})\backslash P(\mathbb{A})/(A_M K_{M,\infty} K_{P,f}), \qquad j : Y_P \hookrightarrow \partial\overline{S}^G_{K_f}.$$

类型为 P 的完整层是这类片段的有限不交并；投影 $Y_P \to S^M_{K_{M,f}}$ 具有紧致幂零流形纤维。令 $\mathcal{M}$ 为代数 G-模 $\mathcal{M}$在 $\mathbb{Q}$上的局部系统。以下所有上同调均取在 $\mathbb{Q}$ 上，$H_!$ 表示紧支撑上同调到普通上同调的像。

取一个有限集 S，使得在其外 S 各层级均为所选的相容超特殊子群，并且 $G(\mathbb{Q}_p) = P(\mathbb{Q}_p)K_p$。在分裂情形下，使用第 2.6节的钉扎模型。令每个整子群的体积为一。球面 Hecke 转移是未归一化的常数项

$$C_P^{\mathrm{a}} : \mathcal{H}_G^S \longrightarrow \mathcal{H}_M^S, \qquad C_P^{\mathrm{a}}(f)(m) = \int_{U_P(\mathbb{A}_f^S)} f(mu)\, du,$$

§2.2] 中的映射 $\lambda \circ \rho$。对于 $\mathcal{H}_M^S$ 的特征 χ，令 $\chi' = \chi \circ C_P^{\mathrm{a}}$。下标 χ 和 χ' 表示广义特征子空间。下述定理使用全紧商；若分支投影与其映射相容，则可以保留该投影。

定理 5.16 (Clozel)。设 M_μ^M 是 $H^{q_U}(\mathfrak{u}_P, M)$ 的一个固定 *Kostant* 直和项，令 $q = k + q_U$，并假设

$$A_\chi := H_!^k(S_{K_{M,f}}^M, \widetilde{\mathcal{M}}_\mu^M)_\chi \neq 0.$$

$\widetilde{\ }$通过幂零流形纤维化分解，将 A_χ 视为 $H^q{}_!(Y_P, M)$ 的一个子空间。每个非零 $\alpha \in A_\chi$ 都有一个延拓 $\gamma \in H^q(\partial S_{K_f}^G, \widetilde{M})_{\chi'}$，且 $j^*\gamma = \alpha$。对于每个这样的延拓，以下两种情况恰有一种成立：

(1) $\gamma = \mathrm{res}\ \beta$ 对某个非零 $\beta \in H^q(S_{K_f}^G, \widetilde{M})_{\chi'}$ 成立；

(2) 连接像 $\partial\gamma \in H_c^{q+1}(S_{K_f}^G, \widetilde{M})_{\chi'}$ 非零。

此外，

$$\dim H^q(S_{K_f}^G, \widetilde{\mathcal{M}})_{\chi'} + \dim H_c^{q+1}(S_{K_f}^G, \widetilde{\mathcal{M}})_{\chi'} \geq \dim A_\chi. \tag{5.12}$$

这些结论由 [13, 定理 3.4、3.7 以及命题 3.5]推出；无需本质温和性或最高权的正则性。

证明。Clozel 的 Hecke 等变形式的 Harder–Schwermer 纤维化分解同时适用于普通上同调和紧支撑上同调 [13, 引理 3.1–3.3，第 3 节4]。取像得到

$$H_!^q(Y_P, \widetilde{\mathcal{M}}) \simeq \bigoplus_{q_M + q_U = q} H_!^{q_M}(S_{K_{M,f}}^M, \widetilde{H^{q_U}(\mathfrak{u}_P, \mathcal{M})}).$$

零延拓定义了 $j_*\colon H_c^q(Y_P, \widetilde{\mathcal{M}}) \to H^q(\partial S_{K_f}^G, \widetilde{\mathcal{M}})$。其像 $\mathcal{E}$ 在 j^*作用下满射映到 $H^q{}_!(Y_P, \mathcal{M})\widetilde{\ }$，其中 Hecke 作用通过 C_P^{a}作用于 $H^q{}_!(Y_P, \mathcal{M})$。对于交换代数上的有限维模，取广义特征子空间是正合的。因此，每个指定的 α 都能在 $\mathcal{E}_{\chi'}$ 中找到提升。

Hecke 等变正合列

$$H_c^q(S_{K_f}^G, \widetilde{\mathcal{M}}) \longrightarrow H^q(S_{K_f}^G, \widetilde{\mathcal{M}}) \xrightarrow{\mathrm{res}} H^q(\partial\overline{S}_{K_f}^G, \widetilde{\mathcal{M}}) \xrightarrow{\partial} H_c^{q+1}(S_{K_f}^G, \widetilde{\mathcal{M}}) \tag{5.13}$$

在 χ'-广义特征子空间上仍然正合。对于固定的 γ，两种情形恰好是$\partial\gamma = 0$ 和 $\partial\gamma \neq 0$；任意普通提升都非零，因为 $j^*\gamma = \alpha \neq 0$。

到所选 Kostant 和 χ-直和项的投影给出满射 $\mathcal{E}_{\chi'} \twoheadrightarrow A_\chi$。由正合性，边界广义特征子空间的维数至多为（5.12）左侧各项之和，从而证明了该界。□

这些可能性分别针对每个选定的延拓 γ；同一个 α 的不同延拓可能有不同的连接像。它们并未断言两个整体上同调空间中恰有一个非零。

对于自守成分，采用如下约定

$$H^\bullet(\mathfrak{m}, K_{M,\infty}A_M; \sigma_\infty \otimes \mathcal{M}_\mu^M) \neq 0,$$

如上所述匹配分裂中心特征。转移 C_P^{a} 是非归一化诱导的 Hecke 转移 [13, §2]。在第 2 节的分裂极大抛物子设置中，这是通过 $I_P(k_P,\ \sigma)$ 中的 2.5 得到的有限部分 Hecke 归一化。系数扭曲伴随着逆表示扭曲；Kostant 分解中不插入对偶系数。

对于非极大有理面，庞加莱对偶定义了一个 Gysin 映射 j_* ，使次数增加 dim(A_M/A_G) -1。对于常复系数，Clozel 根据 Saper 变形定理 $j^*j_* = 0$§5.1，命题 5.1，定理 5.2] 推出了这一点。因此，该 Gysin 映射的像中的每个类限制到该面上都为零。

关于高相对秩中统一符号的另一个问题，请参见第 GL_3 Borel 例 4。

引理 5.17 (严格支配系数与内次数)。 设 λ 是严格支配的整数环境最高权，且 $\mu = w\cdot\lambda$ 是一个 *Kostant* 系数。采用 (5.4)中的不变量，

$$H_!^k(S^M_{K_{M,f}}, \widetilde{\mathcal{M}}^M_\mu) = 0 \quad unless \quad q_0(M) \le k \le q_0(M) + \delta_M.$$

对于标量限制，环境最高权必须在每个嵌入下都严格支配。

证明。 对于一个 Levi 单根余根 $\alpha^\vee$，余根 $w^{-1}\alpha^\vee$是正的，因为 $w \in W^P$。 $\lambda+\rho$ 的每个单余根配对都至少为二；因此

$$\langle \mu, \alpha^\vee\rangle = \langle \lambda+\rho, w^{-1}\alpha^\vee\rangle - 1 \ge 1.$$

Th因此， μ及其对偶最高权都是严格 Levi 支配的 t.

Li 和 Schwermer 证明，对于正则系数，普通上同调在低于 $q_0(M)$ [40] 的次数上消失。Saper 证明了等秩情形，并说明其方法也给出一般界 [52, 定理 5 和注 4，第 332–333] 页。

对偶系数的庞加莱对偶性给出紧支撑上同调在高于 $D_M - q_0(M) = q_0(M) + \delta_M$ 的次数上消失。可以先取一个可定向整洁有限覆盖，再在特征零下下降。将紧支撑上同调映入普通上同调，便得到所述区间。□

对于严格支配的环境最高权，引理为推论 5.5中的两个 Levi 支集都给出了界。反射 $q \mapsto D_G - 1 - q$ 交换了（5.6）的两个端点，因为$D_G = 2q_0(G) + \delta_G$。因此，对于此区间内的任意次数，对偶障碍次数也不小于 $q_0(G)$。因此，仅凭普通上同调低次数消失界，无法判定定理 5.16 中的哪一种情形成立。

6. 分裂 E的半自旋抛物子群的 Eisenstein 类 6

分裂 $E_6/\mathbb{Q}$的两个端抛物子群是定理3.3中的例外项。对于这些抛物子群，实数域组合引理的正则分支导出实际的 Eisenstein 类。采用 Bourbaki编号，取 $P = P_1$，并令

$$u = s_1s_3s_4s_5s_2s_4s_3s_1, \qquad \lambda_t = 2t\rho, \qquad \mu_t = u\cdot\lambda_t \quad (t \in \mathbb{Z}_{\ge 0}).$$

代表元 u 的长度为八。在中心平移 $b=0$处，上同调评价点为 $s=-6$。对于酉诱导数据 π，记作 $\sigma_t=\pi\otimes|\xi|_{\mathbb{A}}$，其中 ξ 是权为 $6\gamma_1$的 Levi 特征。于是

$$I_P(-6,\sigma_t)=I_P(0,\pi).$$

因此，中心化Eisenstein级数是在酉公理上取值的 s.

定理*6.1*（中心化扭曲处的*Eisenstein*类）。设 $G/\mathbb{Q}$ 是 E_6 型的分裂半单（任一同源形式）、$P=P_1$和 $t\geq 1$。采用定理 *5.16* 中的有限层和有理结构。记 $A_\chi=H^k(S^M_{K_M,f},\widetilde{M}^M_{\mu_t})_\chi$、$q=k+8$ 以及 $\chi'=\chi\circ C_P^{\mathrm{a}}$。通过 $\sim u$-*Kostant* 直和项，如定理 *5.16* 所示，将 A_χ 视为 $H^q(Y_P,\widetilde{M}_{\lambda_t})$ 的子空间。那么

$$A_\chi\ \subseteq\ \operatorname{im}\Big[H^q(S^G_{K_f},\widetilde{\mathcal{M}}_{\lambda_t})_{\chi'}\xrightarrow{j^*\,\mathrm{res}}H^q(Y_P,\widetilde{\mathcal{M}}_{\lambda_t})\Big]\quad over\ \overline{\mathbb{Q}}. \tag{6.1}$$

特别地，维数 $H^q(S^G_{K_f},\widetilde{M}_{\lambda_t})_{\chi'}\geq$维数 A_χ。对于每个 t，在一个共同的充分小的有限层上，$k=12$ 和 $k=13$ 都具有非零的内部*Levi*上同调。在次数20 和 21 中，全纯*Eisenstein*族在中心化参数处的取值给出一个上同调类，其在诱导面上的限制非零。*Hecke*特征可能不同。图自反同构给出关于 P_6 的相应陈述，同时传输有限层、权和*Hecke*特征。

长度为八的平移将 12 和 13 次的 Levi类提升至环境次数 20和 21。在 20次中，一个尖点诱导数据给出一个 Eisenstein 类，其在两种伴随面类型上的限制均非零（推论 6.4）。根计算给出了完整的临界区间。在其中心，扭曲Lefschetz数为尖点Levi上同调提供了所需的非消失性，而 Eisenstein 级数的全纯取值则提升了 Levi类。

6.1. **根坐标与临界区间**。 按照附录A的编号，用单余根配对表示权。代数扭曲格为 $\mathbb{Z}$（对于单连通群）以及 $3\mathbb{Z}$（对于伴随群）。事实上，

$$\gamma_1=\frac{4\alpha_1+3\alpha_2+5\alpha_3+6\alpha_4+4\alpha_5+2\alpha_6}{3},$$

因此，γ_1 在模掉根格后具有三阶。下面构造的系数属于根格，因此其中心成员对两种等源形式均有效。令

$$\mu=(-8,0,0,0,0,4),\qquad x=\mu+\rho=(-7,1,1,1,1,5).$$

按顺序 1、 3、 4、 2、 5、4、 3、 1 对 $\rho=$（1、 1、1、 1、 1、1）应用 u 的定义反射，得到 $x=u\rho$。于是 $\mu=u\cdot 0\in\mathbb{Z}\Phi_G$。正Levi配对将 u置于 W^P 中，因此 μ是平凡环境系数的一个 Kostant 直和项的最高权。

下面的八个根的第六个系数均为零。它们在 w_M 下的像由（A.1）给出，是另外八个正规根。

β	q_β	β	q_β
(1, 0, 0, 0,0, 0)	-7	(1, 1, 1, 1, 0, 0)	-4
(1, 0, 1, 0, 0, 0)	-6	(1, 1,1, 1, 1, 0)	-3
(1, 0,1, 1,0, 0)	-5	(1, 1, 1, 2, 1, 0)	-2
(1, 0, 1, 1, 1, 0)	-4	(1, 1, 2, 2, 1, 0)	-1

反射规则 $s_i(x)_j = x_j - C_{ji}x_i$给出了显示坐标。由（A.1）， $w_M x = -x$，因此另外八个坐标具有相反的符号和相同的绝对值。于是$d_P = 16$ 以及 $\ell(u) = 8$。所有正规根的余根等级均为一级，且没有一个被 w_M 固定。

正规根之和为 $12\gamma_1$，因此 $f_P = 6$。此外， $\mu + w_M\mu = -12\gamma_1$。投影到 Levi 中心得到 $a_0 = -6$。按照 Harder 约定， $b_{\mathrm{H}} = b$，因此中心平移 $b = 0$对应于 $s_0 = -6$。

在类型为 D_5的导出对偶 Levi 子群的单连通覆盖上，对偶幂零根基上的作用是一个 16 维半旋量表示 [33, §2.5.4]。完整对偶 Levi 子群在对偶幂零根基上的作用确定了半旋量因子的中心特征 r_1。对于单连通 E_6，完整对偶 Levi 子群的修正描述见 [34, §5, 第 293] 页。 r_1 的取向在注 2.27 中固定。按重数递增排列，正根坐标为（h_1, . . ., h_8）=(1, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 7)。

命题 6.2 (半自旋族的临界扭曲)。 记作 $m_t = 2t + 1$。移位权与 *Levi* 系数满足

$$x_t = \mu_t + \rho = m_t u\rho, \qquad \mu_t = x_t - \rho = (-14t - 8, 2t, 2t, 2t, 2t, 10t + 4).$$

λ_t和 μ_t均属于根格， $\mu_t = u \cdot \lambda_t$，且 $M^M_{\mu_t}$出现在 $H^8(\mathfrak{u}_P, M_{\lambda_t})$中。对于$t \geq 1$ ，两个最高权分别对其对应的群严格支配。

按照第 2 节的表示约定，固定一个不可约本质 *tempered* 实表示 $\sigma_{t,\infty}$ 其关于系数 $\mathcal{M}^M_{\mu_t}$ 是上同调的。对于 $t \geq 1$ ，本质温和性已可由本质酉性与上同调推出，其中中心特征按引理 3.9 中的约定规范化。对于固定的诱导表示，在代数可容许系数移位 $b \in \Lambda_{\mathrm{alg}}$中，使半旋量阿廷因子在 $s_b = -6 - b$ 和 $s_b + 1$ 处均为临界的移位恰为

$$\mathcal{I}_t = [-2t, 2t] \cap \Lambda_{\mathrm{alg}}.$$

由于不存在固定正规根，根据定理 3.1，代数扭曲族具有相同的临界集。在单连通形式上，临界平移的数量为 $4t + 1$ ，在伴随形式上则为$2\lfloor 2t/3 \rfloor + 1$ 。对于每个这样的 b ，移位系数由相同的 u （其环境权为）

$$\lambda_{t,b} = (2t - b, 2t, 2t, 2t, 2t + b).$$

对于 $t \geq 1$ ，恰好是扭曲 $|b| < 2t$ *in* I_t 给出严格支配的环境最高权，因此 $4t - 1$ 位于单连通形式上。

取上述的 h_1、...、 h_8 ，阿基米德商为

$$\frac{L_\infty(s_b, \sigma_{t,\infty}, r_1)}{L_\infty(s_b + 1, \sigma_{t,\infty}, r_1)} = \frac{(2\pi)^8}{\prod_{i=1}^8 (m_t h_i - b)}. \tag{6.2}$$

特别地，其中心化值为 $4\pi^8/(315m_t^8)$。

证明。 2ρ 和 $u\rho - \rho$ 都属于根格。显示坐标以及 $\ell(u) = 8$ 根据 Kostant定理给出了断言。由于 $w_M u\rho = -u\rho$，有 $\mu_t + w_M\mu_t = -\rho - w_M\rho = -12\gamma_1$。因此在整个族中， $a_0 = -6$ 和 $b_{\mathrm{H}} = b$ 均成立。所有分级都等于一，因此平移系数后，轨道中的坐标为 $b + m_t h_i, b - m_t h_i$, 其中 $1 \leq i \leq 8$。对于所有 i，实极点检验为 $(b + m_t h_i)(b - m_t h_i) < 0$ ，或者 $|b| < m_t$。特别是，墙$|b| = m_t$ 被排除在外。与 $\mathbb{Z}$ 或 $3\mathbb{Z}$ 相交，便得到这两个计数。

对于 $|b| < m_t$，室保持不变。反射词给出 $u^{-1}\gamma_1 = -\gamma_1 + \gamma_6$。因此$u \cdot \lambda_{t,b} = \mu_t + b\gamma_1$，如所断言。每个 $b \in \mathcal{I}_t$都是正则平移。对于 $t \geq 1$，其环境最高

权严格支配当且仅当 $|b|<2t$。在可容许端点 $|b|=2t$ 处，平移仍然是正则的，而 $\lambda_{t,b}$ 的一个单余根配对为零。

Levi最高权的严格支配性使得 $t\geq 1$ 根据Vogan–Zuckerman分类，每个酉上同调实现都模中心温和 [63]。关于正则权论证，参见 [21, §7.3。1]。因此，引理3.9给出了半旋量因子 $\prod_{i=1}^{8}\Gamma_{\mathbb{C}}(s+6+m_t h_i)$。其在相邻点处的商给出（6.2）。□

6.2。 尖点Levi上同调及限制定理的证明 m.

引理 6.3（非零中心化Levi上同调）。令 $t\geq 1$ 并置 $\nu_t=\mu_t+6\gamma_1$。对于 G的任一同源形式，存在充分小的强整洁环境层，并带有诱导*Levi*层 $K_{M,\,f}$，使得

$$H^{12}_{!}(S^{M}_{K_{M,f}},\widetilde{\mathcal{M}}^{M}_{\mu_t})\neq 0,\qquad H^{13}_{!}(S^{M}_{K_{M,f}},\widetilde{\mathcal{M}}^{M}_{\mu_t})\neq 0.$$

证明。 置 $H=M_{\mathrm{der}}$。这是 D_5型的分裂单连通群：从单连通群到伴随 E_6 的变换不会改变它，因为核 μ_3 与其中心 μ_4的交是平凡的。权 ν_t 的中心分量为零且是自对偶的。将Levi单根按（6，5、 4、 3、2）排序，其Dynkin坐标为（$10t+4$， $2t$， $2t$， $2t$， $2t$）；在 D_5 的标准正交坐标中，它是

$$\nu_t=(16t+4,6t,4t,2t,0).$$

这些坐标均为整数且和为偶数，因此 ν_t 属于 D_5 根格。特别地，$F_t:=\mathcal{M}^{M}_{\nu_t}|_H$ 是自对偶代数系数。

为了得到 H的尖点上同调，首先考虑局部Lefschetz数。令 ϑ 为 H的有理 Chevalley Cartan对合。取一个基本 Cartan 子群以及 $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$中一个由 ϑ稳定的 Borel 子群。在相应的 D_5 坐标中，ϑ 将第五个坐标变号，并固定其余四个坐标。因此， ν_t 是 ϑ不变的，并且在此 Cartan 子群的分裂方向上为零。它定义了 Cartan 子群的一个酉特征，由于其占优，对这个 Borel 子群是容许的。

Vogan–Zuckerman构造及上同调公式给出一个不可约酉表示 $A_{\mathfrak{b}}(\nu_t)$，其 F_t-上同调 [63, 非零（定理 5.3 和 5.5]）。对于 Cartan Levi子群， [63, 命题 6.5] 中关于非紧单因子的假设不适用。偶数 Dynkin坐标使最高权属于 [49, 定义 3.1.1]中指定的格。Rohlfs–Speh Lefschetz公式 [49,命题 4.3] 给出

$$\Big|\mathrm{Lef}(\vartheta,A_{\mathfrak{b}}(\nu_t)\otimes F_t)\Big|=\sum_{q}\dim H^{q}(\mathfrak{h},K_H;A_{\mathfrak{b}}(\nu_t)\otimes F_t)>0,$$

其中 $K_H=H(\mathbb{R})\cap K_{M,\,\infty}$ 是连通的。

群 H 是绝对几乎单的，并且具有正的 $\mathbb{Q}$-秩。Borel–Labesse–Schwermer 非消失定理应用于 $S=\{\infty\}$ 及系数 F_t，因此对某个同余子群 $\Gamma_H\subset H(\mathbb{Q})$ [10, 定理 10.4]给出了非零的尖点上同调。该定理通过所显示的局部 Lefschetz 条件适用于非平凡系数。从包含一个有限处的扩张集合 S 回到 $S=\{\infty\}$的过程，见 [10, 定理 6.5 以及定理 10.4]的证明。

为转到完整的 Levi 商，令 $\zeta_M:\ M\longrightarrow M/H\simeq\mathbb{G}_m$ 为一个本原商特征。选择有限层，使得

$$\Gamma':=H(\mathbb{Q})\cap K_{M,f}\subseteq\Gamma_H,\qquad \zeta_M(K_{M,p})\subseteq 1+p\mathbb{Z}_p$$

在某个奇素数 p 处成立。这些条件在缩小环境层级时仍然保持。对于每个算术稳定子 $\Gamma_g = M(\mathbb{Q}) \cap gK_{M,f}g^{-1}$，局部特征映射像的紧性给出 $\zeta_M(\Gamma_g) \subseteq \{\pm 1\}$；因此，$p$ 处的条件给出 $\Gamma_g \subset H(\mathbb{Q})$。

设 A_M 为无穷远处的连通分裂中心。特征 ζ_M 在分裂极大环面上是本原的，因此它将 $M(\mathbb{R})$ 映到 $\mathbb{R}^\times$。它将 A_M 映到 $\mathbb{R}_{>0}$，而 Cartan分解给出 $\zeta_M(K_{M,\infty}) = \{\pm 1\}$。$\zeta_M$ 到 $K_{M,\infty}$ 的限制具有连通核 $K_H = H(\mathbb{R}) \cap K_{M,\infty}$，因此 $K_{M,\infty}$ 恰有两个连通分支。这里，$K_{M,\infty} = K_{G,\infty} \cap M(\mathbb{R})$ 是第 2.6 节中固定的全紧子群。与注记 2.26 中一样，$S^M_{K_M,f}$ 以及下文的诱导上同调都使用这个全紧子群。由此可得

$$M(\mathbb{R})/(K_{M,\infty}A_M) \simeq H(\mathbb{R})/K_H.$$

事实上，$M(\mathbb{R}) = H(\mathbb{R})K_{M,\infty}A_M$ 且 $H(\mathbb{R}) \cap K_{M,\infty}A_M = K_H$。因此，由恒等元有限双陪集标记的连通分支为 $\Gamma' \backslash H(\mathbb{R})/K_H$。

尖点上同调嵌入内上同调。从 Γ_H 拉回到其有限指数子群 Γ' 是单射，这是由有限覆盖迹保证的，并且保持内上同调。将类零延拓到其他开闭连通分支，便在 $S^M_{K_M,f}$ 上得到一个非零的内上同调类。在每个连通分支上，$\widetilde{\mathcal{M}}^M_{\mu_t}$ 都与自对偶系数 F_t 一致，因为 $\mu_t - \nu_t = -6\gamma_1$ 在 H 上消失。

群 $H(\mathbb{R})$ 是连通的 [8, 推论 4。7]，因此，这些整洁分支是维数为 25 的可定向流形。约化缺陷为 $\delta_M = 1$，因为复化导出群的秩为五，而其极大紧子群的秩为四。因此，引理 5.17 将内上同调限制在次数 12 和 13。自对偶系数的庞加莱对偶将这两个内上同调空间完美地配对：从紧支撑上同调到普通上同调的映射在对偶性下互为转置。因此，一个次数中的非零性会推出两个次数中均非零。□

定理 *6.1* 的证明。固定定理中的层级，并任取一个类 $\alpha \in A_\chi \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$，它属于 u-Kostant 直和项。我们构造一个提升，使其满足 P_1-限制 α。

***Levi* 上的尖点分解。** 在任一同源形式上，ξ 是权为 $3\gamma_1$ 的特征的平方。因此，$\xi = |\xi|$ 在 $M(\mathbb{R})$ 上以及 ξ 对每个算术稳定子都平凡，因为它在那里取正有理单位值。通过 $\nu_t = \mu_t + 6\gamma_1$ 对系数作中心化。根据命题 6.2，它具有平凡的分裂中心权。对于带有该系数的酉数据 π，定义 σ_t 的扭曲给出一个保持全紧子群的同构，

$$\sigma_{t,\infty} \otimes \mathcal{M}^M_{\mu_t} \simeq \pi_\infty \otimes \mathcal{M}^M_{\nu_t}.$$

在 $\mathbb{C}$ 上，尖点上同调属于内上同调，而内上同调又属于离散 L^2 上同调 [61, §1.3.3] 的像。Levi 最高权 ν_t 是严格支配的，因为 $t \geq 1$。上文所使用的正则权论证表明，对于这个系数而言，每个上同调离散成分在无穷处模中心 [21, 都是温和的 §7.3.1]。随后，半单算术分量上的 Wallach 尖点性判据将其完整的离散重数置于尖点谱中 [64, 定理 4.3]。因此，在给定的有限层上，我们可以将 $\alpha = \sum_l \alpha_l$ 写成尖点类的有限和，同时保留它们的重数空间以及 $K_{M,f}$- 不变向量。

提升所指定的类。对于每个 α_l，选取一个类型为（π_l, u）的尖点余循环。在有限诱导表示中，取一个截面，使其在定义 Y_P 的双陪集上具有所指定的值，并且支集包含于该双陪集。由 $K_{M,f}$-不变性，这样的截面存在。由于 $w_M x_t = -x_t$（即 $x_t = u(\lambda_t + \rho)$ 在 W_M-不变中心方向上的投影）是

零。因此， $I_P(\cdot\ \pi_l)$ 中的上同调评价点为零（命题 2.6）。在此 Kostant 直和项上，相对分裂直线平凡作用。将 α_l 提升到（5.9）的外次数零部分中，记为 $\alpha_l \otimes 1$，并将诱导上循环记为 ϕ_l。对诱导面的切向限制取外次数零分量，因此在两个 Levi 次数中都恢复 α_l。在次数13中，可能还存在一个额外的外次数一分量。

根据 [1, 定理 7.2(a)] 的表述，Eisenstein 级数由 Langlands 酉轴定理可知在零点全纯。Schwermer 构造给出一个闭的 Eisenstein 形式 $E(\phi_l,\ 0)$，其切向限制由尖点常数项计算，见 [55, 定理 4.11]。限制公式见 [56, 定理 3.1 和 §3.2]。这里 P_1 有不同的标准伴随对象 P_6，因此 $W(A_P,\ A_P) = \{1\}$。诱导面上唯一的项是恒等元，并且 $j^* \operatorname{res}[E(\phi_l,\ 0)] = \alpha_l$。对 l 的提升求和 α。

限制定义在 $\mathbb{Q}$ 上，且面上的非分歧 Hecke 作用通过 C_P^{a}，如定理 5.16 所述。将提升投影到 χ'-主空间，仍可在面上得到 α。像与主空间和标量扩张可交换，由此证明在6.1) 于 $\mathbb{Q}$ 上成立。 _

在两个次数中均出现。引理6.3 给出了一个在次数 12 和 13 中具有非零内类的共同层。将包含映射分别应用于每个次数中的非零 Hecke 直和项，便得到次数 20 和 21 中的断言，因为 $\ell(u) = 8$。钉扎图对合将该论证传输到 P_6。□

6.3. **伴随面与阿基米德归一化**。

推论 *6.4*（中心化扭曲处的两个限制）。置 $P = P_1$、$Q = P_6$ 和 $v_P = w_G w_M$。设 Θ 为 G 的钉扎图自同构，其在权上诱导 $-w_G$；对该作用仍使用同一符号。首先在 $\mathbb{C}$ 上工作。对于 $R = P$、Q，记 $Y_{[R]}$ 为层级 K_f 处所有 R 型开面的并集，并记 *res*$^{[R]}$ 为到该并集的切向限制。设 ϕ 为如定理*6.1*中的尖点诱导上循环，其诱导面类为 α。$e_\phi = [E(\phi, 0)]$ 的两个限制为

$$\left(\operatorname{res}_{[P]} e_\phi, \operatorname{res}_{[Q]} e_\phi\right) = \left(\alpha,\ [M(v_P, 0)\phi]|_{Y_{[Q]}}\right).$$

此处 α 通过零延拓到其他类型为 P 的开部分。算子 $M(v_P, 0)$ 是归一化诱导中的标准整体交织算子，使用第 $\dot{v}_P$ 节中固定的有理代表元 *2.6* 定义。目标 *Kostant* 权为，其代表元长度为八。对于一个固定的有贡献尖点，取 在约化 *Levi* 同调（包括紧分量作用）非零的条件下的最小值。在次数，从整个 -直和项到其传输后的尖点直和项在上的所示比较是一个同构。特别地，在此最小次数下的非零 会在其出现的任意层级上给出两个非零限制。对于每个，这便在适当层级上于次数*20* 得到一个在两种面类型上均可检测到的 *Eisenstein* 类。

证明。集合 $W(A_P, A_Q)$ 只有一个元素，由 v_P 表示，因为 $W(A_P, A_P) = 1$。边界限制的常数项公式给出所示的一对 [56, §3.2，第 137] 页。由于 $w_M x_t = -x_t$，我们有 $v_P x_t = \Theta x_t$。由于 Θ 固定了 $\lambda_t + \rho$ 和 ρ，目标代表元为 $\Theta u \Theta^{-1}$，其权为 $\Theta\mu_t$，长度为八。居中的 Levi 系数也会传输：v_P 将正 Levi 根映到 Q 的正 Levi 根，因此 $v_P \nu_t = v_P(x_t - \rho_M) = \Theta x_t - \rho_{M_Q}$。

要看出为何两个面限制都能检测次数 $k+8$ 中的比较，考虑归一化诱导 $I_P(0,\ \pi)$。一个有贡献的 Kostant 行必须具有被 π_∞ 固定的导出 Levi 无穷小特征。因此，其平移后的 Levi-支配权位于 $x_t + \mathbb{R}\gamma_1$ 上，且其

范数为 $\|x_t\|$，因为它与 $\lambda_t+\rho$ 韦伊共轭。在韦伊不变度量 $x_t \perp \gamma_1$ 下：对合 w_M 将 x_t 取负并固定 γ_1。因此只出现 x_t。传输证明了 Q 上的唯一性，并确定了约化莱维次数范围。

在相对 Shapiro 归纳（5.9）中，对面进行求值时会省略相对分裂切方向。在次数 $k+8$这一行中，只有外次数零有贡献，因为外次数一需要约化莱维次数为 $k-1$。因此，面求值在两侧分别都是同构。该计算保留了尖点重数空间和所有有限截面；Levi 分量在相对分裂直线上平凡作用，而取紧分量不变量是正合的。

根据朗兰兹泛函方程，利用 $\dot{v}_P^{-1}$ 构造的 $M(v_P^{-1},\ 0)$ 是 $M(v_P,\ 0)$[1, 定理 7.2(a)] 的逆。这些算子交织环境群作用并保持 K_f-不变量，因而在相对上同调上诱导出互逆映射。两个面求值将后面的映射分别识别为所断言的比较及其逆映射。

在定理 6.1的层面，选择一个在 Levi 上于次数 12 产生贡献的尖点。较低的约化次数若在那里产生贡献，就会以相同的有限向量得到内上同调，这与引理 5.17矛盾。因此 $k=12$ 在次数 20给出了所断言的两个限制。□

注记 6.5（两种面类型上的有理贝蒂类）。 在共同层级上，次数 20 和 21中的每一个还包含一个分别限制到两种面类型上都非平凡的有理贝蒂类。保留第2.6节的钉扎的阿基米德极大紧子群，并利用钉扎图自同构将 K_f 替换为$K_f\cap\Theta$（K_f）。在这一较小层级上，同样的有限向量仍然有贡献。权 $2t\rho$ 是 Θ-不变的，并且根据分裂最高权理论具有一个 $\mathbb{Q}$-模型。在每个次数中，定理6.1 给出到 $Y_{[P]}$的非零限制；应用 Θ给出到 $Y_{[Q]}$的非零限制。对于该有理局部系统，这两个映射都与通过 Borel–Serre 紧化及其开分层的有限 CW 模型进行的标量扩张相交换 [7]。因此，每个有理限制都有真核。两个真子空间不可能覆盖一个 $\mathbb{Q}$ 上的向量空间，所以在每个次数中，都存在一个限制到两者均非零的有理类。

无论是哪一次数，有理类都可能涉及多个海克特征系，因为 Θ 可以将 χ' 映到不同的 Hecke 特征。在次数20时，推论6.4还给出了一个来自单个尖点诱导数据的复埃森斯坦类，其在两种面类型上的限制均非零。

对于同一尖点数据，考虑无穷远处的局部标准交织算子。对温和表示 π_∞ 在酉参数零点处采用 Arthur 的局部归一化和 Haar测度 [2, 定理 2.1 和 §3，（3.2）]。在相反抛物子群方向，归一化因子中的对偶伴随表示为 r_1。

对于 $\mathbb{R}$的标准加性特征，阿基米德 ε因子为 1。事实上，八个二维直和项贡献 $i^{2m_t h_i+1}$，且 $\sum_i h_i=32$。采用这些测度，归一化标量为

$$\mathcal{R}_\infty(t)=\frac{L_\infty(0,\pi_\infty,r_1)}{L_\infty(1,\pi_\infty,r_1)}=\frac{4\pi^8}{315m_t^8}\neq 0.$$

归一化算子在零点处全纯且酉。将其乘以 $\mathcal{R}_\infty(t)$可得到一个全纯同构 $A_\infty(-6,\sigma_{t,\infty})$。改用第2.6 节规定的 Haar测度，会使该算子乘上一个非零常数。

注记 6.6（有理图与周期约定）。 按照 Harder 和 Raghuram [27, 第 6 章至7], 的算术比较，固定一个嵌入 $\iota\colon\ E\,,\to\mathbb{C}$ 以及两个选定的

同次数的边界 Hecke 直和项 U_E， V_E。假设投影映射将限制像在 $U_E \oplus V_E$ 上同构地投影到 U_E，并且从U_E 到 V_E 的 Hecke-等变映射构成由同构 A_E生成的一个 E-线上空间。于是，该像就是$t_E A_E$ 的图，其中某个 $t_E \in E$。

假设 $A_E = B_E \otimes (e_U \mapsto e_V)$ 属于相容的有理模型，其中 B_E 标识有限部分，而 e_U，e_V 生成一维比较直线。将解析生成元记为 $p_U e_U$， $p_V e_V$，并令 $c_\infty \neq 0$ 为它们之间标准阿基米德算子的标量。当阿基米德欧拉商$\mathcal{R}_\infty$ 有限且非零时，其欧拉归一化标量为 $c_\infty / \mathcal{R}_\infty$ 。

若常数项将复化图与这些直和项上的标准整体算子相识别，非分歧商 $\mathcal{R}^S$ 有限且非零，并且其余有限算子与 B_E 的比较关系为 $\iota(\kappa_E)$， $\kappa_E \in E^\times$，那么在 e_U， e_V 上进行比较可得

$$D_F^{-\dim U_P/2}\,\frac{\mathcal{R}^S}{\mathcal{P}_\iota} = \iota(t_E/\kappa_E), \qquad \mathcal{P}_\iota = \frac{p_U}{c_\infty p_V}.$$

此处 $D_F = |\mathrm{disc}(F/\mathbb{Q})|$ ，而 U_P 是幺幂根基。测度因子采用整体余体积为一的归一化，并且在有限位置的 $\mathcal{O}_v$ 、实处的 dx 以及复处的 $2\,dx\,dy$ 上，根坐标测度的体积均为一 [46, §5.2.3, (5.12)–(5.14)]。

对于半自旋族，双面结果给出了次数为 20 时的解析比较。应用所示恒等式需要该诱导数据的有理图，以及有限比较和周期比较。

附录 A. 固定正规根：按类型验证

引理 A.1 (极大抛物子群的固定根引理)。 设 Φ 是一个约化晶体根系，选定单根系 Δ，并设 $I = \Delta\setminus\{\alpha_k\}$。最长元 w_I 固定的正根两两强正交。在包含 α_k 的不可约分支上，它们恰好是下文证明中列出的根。

证明。 只有包含 α_k 的不可约分支有贡献，因为其他每个分支的最长元都没有不动根。因此，设 Φ 不可约。证明采用根系 [31], 的分类和标准坐标模型，并为例外系统提供有限格证书。每个固定正根都位于 Φ_I 之外，因为 $w_I \Phi_I^+ = -\Phi_I^+$。

对于 A_{N-1}，使用根 $e_i - e_j$ 和分块分解 $(k, N-k)$。元素 w_I反转每个块。若两个块的大小均为奇数，则有一个固定正根连接它们的中间坐标；否则没有。

对于 B_n和 C_n， w_I反转 $e_1, \dots, e_k$并将其余所有坐标取反。在这两种情况下，不动根都包括

$$e_i + e_{k+1-i} \quad (1 \le i \le \lfloor k/2 \rfloor).$$

若 k 为奇数，则还有一个根：对于 B_n 是 $e_{(k+1)/2}$ ，对于 C_n是 $2e_{(k+1)/2}$ 。这些就是所有不动根，可直接从坐标根列表看出。它们的支撑彼此不相交，且所列任意两个根的和或差都不是根。

对于 D_n ，当 $n \ge 4$ 和 $k \le n-2$时，前 k 个坐标会反转。在剩余的$n-k$ 个坐标上，当 $n-k$为偶数时，最长元会将每个坐标取负；当 $n-k$ 为奇数时，则固定e_n ，同时将其余坐标取负。因此，不动根为镜像和

如上所示，以及

$$e_{(k+1)/2}+e_n,\quad e_{(k+1)/2}-e_n\quad \text{if both } k \text{ and } n-k \text{ are odd.}$$

这些根彼此强正交：另外两个根的和与差分别是坐标向量的两倍，并非 D_n 根，而所有其他支撑彼此不相交。对于端抛物子群 P_n，不动根为 e_i+e_{n+1-i}，$1\le i\le\lfloor n/2\rfloor$。另一个端抛物子群可通过图自同构 $e_n\mapsto -e_n$得到。

对于例外系统，采用 Bourbaki编号： E_n 边为 1–3–4–5–6–7–8，并酌情截断，再加上 2–4；在 F_4 中，根 α_1，α_2 为长根，而 α_3，α_4 为短根；在G_2中，α_1 为短根。数字串表示单根系数。

对于单纯连边型，我们使用以下事实。在 ADE 根格中，若非零向量 x 的范数平方为二，且其单根系数 c_i非负，则它是一个根。事实上$\sum_i c_i(x,\ \alpha_i)=(x,\ x)=2$，因此对于支集中的某个 i，有 $(x,\ \alpha_i)>0$。由柯西–施瓦茨不等式，该整数至多为二，且仅在 $x=\alpha_i$ 时取等号。否则它等于一，而反射 $x-\alpha_i$ 具有更小的高度、非负系数和相同的范数；对高度作归纳即可。

在 E_6 中，正根 $c=(c_1,\ \ldots\ldots,\ c_6)$ 按坐标满足 $0\le c\le(1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 2,\ 1)$。每个图对称轨道取一个代表元，其不动向量方程为

k	$w_I c=c$
1	$c_2+c_3=2c_1,\quad 2c_4=3c_1,\quad c_5=c_1,\quad 2c_6=c_1,$
2	$c_1+c_6=c_2,\quad c_3+c_5=2c_2,\quad 2c_4=3c_2,$
3	$2c_1=c_3,\quad c_2+c_6=c_3,\quad c_4+c_5=2c_3,$
4	$c_1+c_3=c_4,\quad 2c_2=c_4,\quad c_5+c_6=c_4.$

为便于后文引用，在 P_1 中，Levi最长元素 $w_I=w_M$ 作用于单根上为 (A.1)

$$w_I\alpha_1=(\ 1,2,2,3,2,1),\qquad w_I\alpha_2=-\alpha_3,\quad w_I\alpha_3=-\alpha_2,\quad w_I\alpha_i=-\alpha_i\quad (i=4,5,6).$$

结合 $c_k>0$ 以及 $(c,\ c)=2$，它们分别给出 $\varnothing$、{122321}、{112221} 和{111211}。例如，第三行强制 $c_3=2,\ c_1=1$，并留下平方范数为 2、4、6、4 的四种可能；第四行同样留下平方范数为 4、6、2、4 的四种可能。根据上述事实，每个保留下来的向量都是根。图对称性给出情形$k=5,\ 6$。每个不动集合至多包含一个成员。

对于其余的例外类型，每张表的最后一列列出由不动根列组成的矩阵的极大子式的行索引。一个未加标记的子式的行列式为±1。如果给出了两个子式，则它们所显示的行列式互素。在这两种情况下

这些列张成根格的一个原始子格。

Φ	k	不动根	rows
E_7	1	2234321	7
	2	$0112111, 1112110, 1122100, 1223321$	1234
	3	$1122221, 1123211, 1223210$	124
	4	$1112111, 1112210, 1234321$	125
	5	$0111110, 1011110, 1122211, 1224321$	1236
	6	$1123321, 1223221$	12
	7	$0112221, 1112211, 1122111$	123
E_8	1	22454321 , 23354321	28
	2	$12233321, 12243221, 12343211, 22343210$	1234: 2; 1345: 3
	3	$11222221, 11232211, 12232210, 23465321$	1245
	4	$11121111, 11122110, 12343221, 23465421$	1256
	5	$11222111, 11222210, 13354321, 22354321$	1367
	6	$11233211, 12232211, 23465431$	127
	7	$12244321, 12343321, 22343221$	138
	8	23465432	1: 2; 2: 3

对于两个具有长度不等的根的例外系统，相应的列表为

Φ	k	固定根行	
F_4	1	2342	1 : 2; 2 : 3
	2	$1222, 1231$	13
	3	$1121, 1342$	14
	4	1232	1
G_2	1	21	2
	2	32	1 : 3; 2 : 2

不动空间取在根系的实张成空间中。Levi最长元素固定被省略的基本权，并在删去节点的图的每个连通分支上按其最长元作用；该最长元的不动空间维数为 $\lfloor m/2 \rfloor$（对于 A_m），对于 D_m 且 m为奇数时为一，对于 E_6为二，其他情形下为零。将这些维数加上被省略基本权所张成的直线，得到

$$\dim \operatorname{Fix}(w_I) = \begin{cases} (1,4,3,3,4,2,3) & E_7, \\ (2,4,4,4,4,3,3,1) & E_8, \\ (1,2,2,1) & F_4, \\ (1,1) & G_2, \end{cases} \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

这就是为每个 k所列出的列数。此计数未使用定理 3.3；它与该处的表格一致。对于 E_6，此计数并未使用，因为不动根并不张成不动空间。简单反射乘法验证了所列各列是不动的。对于E_7，E_8 它们的 Gram 矩阵为 $2I$，因此根据上述事实，每列都是一个根。由此，这些列给出强正交根。根据维数计数，它们张成不动空间。由本原性，它们构成其整格的一组基，其 Gram 矩阵 $2I$ 表明只有带符号基向量的范数平方可以为二。

对于 F_4，取 $\alpha_1 = e_2 - e_3$、$\alpha_2 = e_3 - e_4$、$\alpha_3 = e_4$ 和 $\alpha_4 = (e_1 - e_2 - e_3 - e_4)/2$。列出的列向量是根，其 Gram 矩阵分别为 (2)、diag(2,1)、diag(1, 2) 和 (1)。同样，它们是固定格的整基。使用两个基方向的向量具有

至少为三的范数平方，而绝对系数至少为二的非平凡倍数具有至少为四的范数平方。由于根的范数平方为一或二，因此只有带符号基向量是根。对于 G_2，每个固定空间都是一条直线，以所显示的本原根为生成元。这证明了每种类型中的完备性和强正交性。□

参考文献

1. J. Arthur，《迹公式导论》，《调和分析、迹公式与志村簇》，Clay数学会议录，第4卷，美国数学会，2005年，第1–263页。14, 50, 51 2. James Arthur，《交织算子与留数。I. 加权特征》，《函数分析杂志》84（1989），第1期，19–84页。51 3. Hohto Bekki 和 Ryotaro Sakamoto，《$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 的 Harder分母问题及其应用》，《基础数论》4（2025），第2期，251–326页。43 4. C. Bhagwat 和 A. Raghuram，《GL(n) 的端oscopy与上同调》，《伊朗数学会通报》43（2017），第4期，317–335页，纪念 Freydoon Shahidi 专刊；arXiv:1506.01941。13 5.，《正交群的 Eisenstein上同调与 $\mathrm{GL}_1\times\mathrm{O}(2n)$ 的 L 函数特殊值》，《朱西厄数学研究所杂志》24（2025），第6期，2463–2522页，doi:10.1017/S1474748025101096；arXiv:2005.01062。2, 27 6. A. Borel 和 W. Casselman，《有限体积局部对称流形的 L^2-上同调》，《杜克数学杂志》50（1983），625–647页，doi:10.1215/S0012-7094-83-05029-9。20 7. A. Borel 和 J.-P. Serre，《角与算术群》，《瑞士数学评论》48（1973），436–491页。43, 51 8. A. Borel 和 J. Tits，《〈约化群〉一文补遗》，《高等科学研究所数学出版物》41（1972），253–276页，doi:10.1007/BF02715545。49 9. A. Borel 和 N. Wallach，《连续上同调、离散子群与约化群的表示》，第2版，数学调查与专著，第67卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛，2000年，doi:10.1090/surv/067。8, 10, 15, 19, 22, 27, 40 10. Armand Borel、Jean-Pierre Labesse 和 Joachim Schwermer，《数域上约化群的 S-算术子群的尖点上同调》，《数学汇刊》102（1996），第1期，1–40页。48 11. W. Casselman，《实秩一群的 L^2-上同调》，载于《约化群表示论》（P. C. Trombi 编），数学进展，第40卷，Birkhäuser，波士顿，1983年，作者扫描件，第69–84页。21 12. L. Clozel，《动机与自守形式：函子性原理的应用》，《自守形式、志村簇与 L函数》，第I卷，数学展望，第10卷，Academic Press，1990年，第77–159页。10, 14 13.，《极大抛物子群的上同调中的Eisenstein函子性》，《数学精选》（新系列）28（2022），第4期，论文编号80，doi:10.1007/s00029-022-00794-y；arXiv:2006.08474v1。6, 8, 16, 43, 44, 45 14. B. Conrad，《几何Bruhat分解》，Math 249B 讲义，斯坦福大学，第3节。https://math.stanford.edu/~conrad/249BW16Page/handouts/bruhat.pdf。21 15. N. Darshan 和 A. Raghuram，《数域上 GL(n) 的尖点上同调》，预印本，2024年，arXiv:2407.10859。13 16. P. Deligne，《L 函数的值与积分周期》，《自守形式、表示与L函数》，第2部分，《纯粹数学专题讨论会论文集》第33卷，美国数学会，1979年，第313–346页。3, 24 17. M. J. Dyer，《Hecke代数与 Bruhat区间的壳化》，《数学汇刊》89（1993），第1期，91–115页，Numdam。41 18. W. T. Gan 和 A. Raghuram，《自守形式周期的算术性》，《自守表示与 L函数》，塔塔基础研究院数学研究丛书，第22卷，塔塔基础研究院，孟买，2013年，arXiv:1207.4641，第187–229页。13, 14 19. S. Gelbart 和 H. Jacquet，《GL(2) 与 GL(3) 的自守表示之间的一种关系》，《高等师范学校科学年刊》（第4辑）11（1978），471–542页，doi:10.24033/asens.1355。38

20. N. Grbac 和 J. Schwermer，《Eisenstein级数与算术群的上同调》，《巴黎科学院数学报告》348（2010），597–600页，doi:10.1016/j.crma.2010.04.007。22 21. H. Grobner，《Eisenstein级数的留数与约化群的自守上同调》，《数学汇刊》149（2013），1061–1090页，doi:10.1112/S0010437X12000863。48, 49 22. G. Harder，《Eisenstein上同调的算术方面》，未发表讲义，2013年，2月16日，第2.2节，第17–22页。43 23.，《我们能否计算 Eisenstein类的分母？》，《欧洲—第比利斯数学杂志进阶研究》（2021），131–165页，特刊9。5, 43 24.，《算术群上同调》，未发表的第三卷手稿，2022年8月版，第9章，Eisenstein上同调。关于逆问题，见第402–403页；关于所提出的组合引理，见第421页，（9.88）–（9.89）。2, 4, 6, 12, 14, 42, 43 25.，《算术群上同调》，Springer数学专著，Springer，Cham，2026年，版权年份为2025年。doi:10.1007/978-3-032-10378-9。1, 2, 5, 6 26. G. Harder 和 A. Raghuram，《Eisenstein上同调与 Rankin–Selberg$L$函数临界值之比》，《巴黎科学院数学报告》349（2011），719–724页，doi:10.1016/j.crma.2011.06.013。2 27.，《GL_N 的 Eisenstein上同调与 Rankin–Selberg L函数的特殊值》，《数学年刊研究丛书》第203卷，普林斯顿大学出版社，2020年，附有 U. Weselmann 撰写的一章。doi:10.1515/9780691197937。1, 2, 4, 10, 25, 26, 38, 41, 51 28. F. HosseiniJafari，《某些 L 函数的 Eisenstein上同调与临界值：G_2 情形》，预印本，2025年，arXiv:2501.03546。1, 16, 30, 33, 34, 42 29.，《某些 L 函数的 Eisenstein上同调与临界值：GSp_4，的 Klingen分母问题》，准备中的手稿，2026年。2, 5, 42, 43 30. B. J. Howard 和 J. J. Millson，《Chevalley对合与权簇的对偶性》，《亚洲数学杂志》8（2004），第4期，685–732页，doi:10.4310/AJM.2004.v8.n4.a20；arXiv:math/0409260。15 31. J. E. Humphreys，《反射群与 Coxeter群》，剑桥高等数学研究丛书，第29卷，剑桥大学出版社，剑桥，1990年，doi:10.1017/CBO9780511623646。5, 41, 52 32. C. Khare、M. Larsen 和 G. Savin，《函子性与逆伽罗瓦问题》，《数学汇刊》144（2008），541–564页，doi:10.1112/S0010437X07003284。27 33. H. H. Kim，《局部 L 函数与归一化交织算子》，《加拿大数学杂志》57（2005），第3期，535–597页，doi:10.4153/CJM-2005-023-x。47 34. H. H. Kim 和 W. Kim，《局部 L 函数与归一化交织算子 II；拟分裂群》，载于《某些 L 函数》，Clay数学会议录，第13卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛，2011年，尤见第5节。出版者文本，第265–295页。47 35. A. W. Knapp，《局部 Langlands 对应：阿基米德情形》，载于《动机》第2部分，《纯粹数学专题讨论会论文集》第55卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛，1994年，doi:10.1090/pspum/055.2/1265560，第393–410页。16, 22, 29 36.，《李群：超越入门》，第2版，数学进展，第140卷，Birkhäuser，波士顿，2002年，第VI.7节，尤见第392页，（6.67a）–（6.68c），以及命题6.70，第393–394页。作者的数字版第二版。20 37. B. Kostant，《李代数上同调与广义 Borel–Weil定理》，《数学年刊》（第2辑）74（1961），329–387页，doi:10.2307/1970237。5 38. Bertram Kostant，《正交根的级联与半单李群的 Borel 子群幂零根基的余伴随结构》，《莫斯科数学杂志》12（2012），第3期，605–620页，doi:10.17323/1609-4514-2012-12-3-605-620。20 39. R. P. Langlands，《欧拉乘积》，耶鲁数学专著，第1卷，耶鲁大学出版社，纽黑文，康涅狄格州，1971年，作者文本。2, 15 40. J.-S. Li 和 J. Schwermer，《算术群的 Eisenstein上同调》，《杜克数学杂志》123（2004），第1期，141–169页，doi:10.1215/S0012-7094-04-12315-2。45 41. D. Loeffler 和 C. Williams，《GL(3) 的 p 进 L 函数》，《数学年刊》394（2026），论文编号96，doi:10.1007/s00208-026-03377-w。38 42. G. Muić，《自守形式的傅里叶系数与可积离散级数》，《函数分析杂志》270（2016），3639–3674页，doi:10.1016/j.jfa.2016.03.009；作者版本，定理6-9和引理7-3。26, 27 43. A. N. Nair 和 D. Prasad，《实约化群的上同调表示》，《伦敦数学学会杂志》（第2辑）104（2021），第4期，1515–1571页，doi:10.1112/jlms.12468。23, 29

44. A. Raghuram，《Hecke L-函数算术札记》，印度科学院数学科学会刊 132 (2022)，第 2 期，论文编号 71，共 37 页；定理编号依据 arXiv 版本。doi:10.1007/s12044- 022-00708-0；arXiv:2207.03399。28，38，40 45.，p-进群交织算子的一个算术性质，《加拿大数学杂志》75 (2023)，第 1 期，83–107，doi:10.4153/S0008414X21000535；arXiv:2106.00960。8，15，16 46.，GL_N 的 Eisenstein 上同调及全虚数域上 Rankin–Selberg L-函数的特殊值，Forum Math. Sigma 13 (2025)，1–68，e86。doi:10.1017/fms.2025.48。3，10，12，13，29，33，39，42，52 47. A. Raghuram 和 X. Zou，实约化群交织算子的一个算术性质，预印本，2026，arXiv:2610.40261v1。4，29 48. R. W. Richardson，Coxeter群中对合的共轭类，澳大利亚数学学会通报 26 (1982)，1–15，doi:10.1017/S0004972700005554。21 49. Joachim Rohlfs 和 Birgit Speh，自守表示与勒夫谢茨数，法国高等师范学校科学年刊 22 (1989)，第 3 期，473–499。48 50. L. Saper，L-模与微支撑，2001，修订于 2026 年 10 月 1 日。arXiv:math/0112251v4。3，9，11，18，20，21，29，30 51.，关于局部对称空间及其紧化的上同调，《数学当前进展 2002》，International Press，马萨诸塞州萨默维尔，2003，引理 15.2 和命题 18.2。出版商文本，第 219–289 页。21 52.，L-模与 Rapoport 与 Goresky–MacPherson 猜想，Astérisque 298 (2005)，319–334，Numdam。45 53. L. Saper 和 M. Stern，算术簇的 L_2-上同调，《数学年刊》(2) 132 (1990)，1–69。21 54. P. Scholze，关于局部对称簇上同调中的挠，《数学年刊》(2) 182 (2015)，第 3 期，945–1066，doi:10.4007/annals.2015.182.3.3。43 55. J. Schwermer，《算术定义群的上同调与艾森斯坦级数》，数学讲义，第 988 卷，Springer-Verlag，柏林，1983。2，6，8，50 56.，$\mathrm{SL}_n/\mathbb{Q}$ 的算术子群的 Eisenstein 级数与最高次数上同调，纯粹与应用数学杂志 777 (2021)，127–155，doi:10.1515/crelle-2021-0022。50 57. F. Shahidi，实群的局部系数作为 Artin 因子，《杜克数学杂志》52 (1985)，第 4 期，973–1007，doi:10.1215/S0012-7094-85-05252-4。3，16 58.，Langlands 关于 Plancherel 测度的猜想之证明；p-进群的互补级数，《数学年刊》(2) 132 (1990)，273–330，doi:10.2307/1971524。16 59.，《Eisenstein 级数与自守 L-函数》，美国数学会讨论会出版物，第 58 卷，美国数学会，2010，doi:10.1090/coll/058。1，2，6，7，16 60. J. Tate，数论背景，《自守形式、表示与 L- 函数》，第 2 部分，纯粹数学专题讨论会论文集，第 33 卷，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1979，第 3–26 页。16，29 61. E. Urban，约化群的特征簇，《数学年刊》(2) 174 (2011)，1685–1784，doi:10.4007/annals.2011.174.3.7。49 62. D. A. Vogan, Jr.，酉表示的 Langlands 分类，《齐性空间上的分析与李群表示论》，冈山–京都 (1997)，纯粹数学高级研究，第 26 卷，日本数学会，东京，2000，作者文本，第 299–324 页。8 63. D. A. Vogan, Jr. 和 G. J. Zuckerman，具有非零上同调的酉表示，Compositio Math. 53 (1984)，51–90，Numdam。48 64. N. R. Wallach，关于平方可积自守形式的常数项，《算子代数与群表示》，第 II 卷，数学专著与研究，第 18 卷，Pitman，波士顿，1984，第 227–237 页。49

数学系，杜克大学，达勒姆，北卡罗来纳州，美国电子邮箱地址： farid.hj@duke.edu