arXiv:2611.31934v1 [math.DS] 24 Nov 2026

四维异宿轨道从鞍焦点到鞍点的转变：类似于某些耗散型 Boussinesq 系统中的振荡激波和正则化激波

REZWANA RAZZAQUE ANGANA、BRENDAN HARDING 和 DIMITRIOS MITSAKOTAKIS

Abstract. 长期以来，人们一直研究振荡激波和正则化激波，以理解浅水中波状涌潮的形成与动力学；这些现象通常源于色散、非线性和耗散之间的相互作用。在本文中，我们研究并描述了在耗散作用下，类似于某些称为 Bona–Smith系统的 Boussinesq型水波模型中振荡激波和正则化激波的行波解的性质与形态。相关的行波方程是四维动力系统的解，从而带来了计算上的挑战和丰富的结构行为。特别是，为了描述这些行波的性质，我们分析了连接两个不同平衡点的异宿轨道，其中一个平衡点随着耗散参数的增大，在四维相空间中经历了从鞍焦点到鞍点的转变。这一转变决定了波形的性质，使其从振荡激波平滑地演变为正则化（非振荡）激波。为计算此类解，我们针对这类问题提出了一种基于有限差分的数值方法。

1. Introduction

波状涌潮是发生在浅水中的非线性波动现象，当两种不同流动状态之间发生快速过渡时，会产生振荡波列。不同于导致尖锐不连续面的经典水跃，波状涌潮主要受色散作用支配，并呈现一系列平滑的衰减振荡。当初始扰动（例如水深或流速的突然变化）传播到静止或流速较慢的区域时，通常会形成这类结构。波状涌潮常见于河流和潮汐流中，并且已通过弱非线性色散方程得到有效建模 [13, 34]。

非线性色散水波方程，如 Korteweg–de Vries（KdV）方程和 Benjamin–Bona–Mahony（BBM）方程，在不存在耗散的情况下通常存在行波解 [5, 35]。这些行波对应于相平面中的同宿轨道（离开并返回同一平衡态的轨迹）

相关动力系统的例子，参见 [35, 36]。这类行进水波可由相空间中的同宿轨道表示，称为孤立波；它们通常既稳定又渐近稳定，参见 [4, 30]。

当非线性色散方程（不存在耗散）的初始条件连接不同的渐近态（即不同的平衡点）时，所产生的动力学通常会形成称为色散激波（DSWs）的结构 [21]。这些结构具有一个不断扩大的快速振荡区域，让人联想到波状涌潮；正是这种相似性促使人们将其用于此类物理现象的建模 [31]。不同于孤立波，DSWs 并不是精确的行波解。然而，它们表现出显著的稳健性，并持续存在于系统的长时间动力学中。

Date: 2026年11月25日。2000 *Mathematics Subject Classification.* 35Q35, 37C29, 37N10。
Key words and phrases. Boussinesq–Burgers系统、鞍焦点、异宿轨道、扩散-色散激波、涌浪。

DSWs 的形成通常通过其与原系统弱耗散扰动中的行波解之间的联系来理解。在这类扰动模型中，人们通常会观察到扩散-色散冲击波的出现；这些行波解源于色散与弱耗散之间的相互作用 [22]。原模型与扰动模型之间的渐近相似性可以解释：为什么在某些状态下，由相同初始条件产生的解在较长时间内往往保持接近 [6, 7]。

一个经过深入研究的例子是具有阶跃型初始条件的KdV方程，该初始条件连接不同的渐近态。在耗散较小时，KdV方程和KdV–Burgers 方程的解在有限时间区间内保持接近，因此产生的色散冲击波可以视为KdV–Burgers 方程的扩散-色散冲击波的扰动 [23, 21, 10]。预计BBM方程及其耗散对应方程也具有类似行为。然而，BBM黎曼问题的动力学远比KdV方程的动力学丰富；对于较大的跳跃，其解可能与KdV方程和KdV–Burgers 方程的解存在显著差异 [17]。类似地，对于Boussinesq型系统，例如经典的Boussinesq–Peregrine系统和Serre–Green–Naghdi系统，也已证明色散冲击波能够近似相关耗散变体的激波结构 [6, 7]。

扩散-色散激波大致可分为两类：振荡激波和正则化激波。二者都连接不同的渐近态，并且都是行波解。振荡激波的特征是尖锐的前沿之后伴随着由衰减振荡组成的波列，它通常出现在具有微小但不可忽略耗散的非线性色散方程中。随着耗散增加，振荡的振幅减小；当耗散超过某一阈值后，振荡结构便会消失。所得行波变为严格单调的（若向右传播则递减，若向左传播则递增），并被称为正则化激波。

本文研究了水波理论中在存在耗散的情况下产生的某些 Boussinesq 系统的行波解，重点考察平底地形假设下的耗散型 Bona–Smith系统 [8, 9], 。Bona–Smith系统是一族耦合的非线性色散偏微分方程，用于描述长波峰、小振幅表面水波的双向传播。

令 $\eta = \eta(x,t)$ 表示水平位置 $x \in \mathbb{R}$ 和时间 $t \geq 0$处高于未扰动水位的自由表面高程，令 $u = u(x,t)$ 表示在固定深度 z处测得的流体水平速度。记流体的未扰动深度为 $D > 0$ ，则耗散Bona–Smith系统的形式为：

$$
\begin{aligned}
&\eta_t + Du_x + (\eta u)_x - bD^2\eta_{xxt} = 0 \ , \\
&u_t + g\eta_x + uu_x - cgD^2\eta_{xxx} - bD^2u_{xxt} = \mu u_{xx} \ ,
\end{aligned} \tag{1}
$$

其中， g 为重力加速度， $\mu > 0$ 为用于描述流体黏性影响（不包括底部摩擦 [18, 20]）的扩散参数。参数 b 和 c 由无量纲常数 θ^2 （其中 $\frac{2}{3} \leq \theta^2 \leq 1$）的选取通过以下关系确定

$$
b = \frac{3\theta^2 - 1}{6} \qquad \text{and} \qquad c = \frac{3\theta^2 - 2}{3} \ .
$$

已证明，该系统配以适当的初始条件 $\eta(x,0) = H_0(x)$ 和 $u(x,0) = U_0(x)$ 后，在适当的索伯列夫空间 [26]中适定且全局成立。

式（1）中的耗散项 μu_{xx} 描述了由流体黏度引起的耗散。基于弱阻尼势流理论，文献 [18, 20], 从 Navier–Stokes方程推导出了含有这类耗散项的 Boussinesq 系统，其中黏性耗散只出现在动量方程中。文献还从含耗散的 Euler 方程推导出了类似的耗散型 Boussinesq–Peregrine 系统，其中黏性

扩散被忽略。由于 Bona–Smith系统与 Boussinesq–Peregrine 系统渐近等价，同样的论证也能为式（1）中的耗散项提供依据，并可构造类似的推导。此外， u_{xx} 是使 Bona–Smith系统成为浅水方程扩散-色散正则化的最简单耗散项，这与 KdV–Burgers 方程类似。

不同于描述单向波传播的 KdV 和 BBM 方程，Bona–Smith 系统描述了沿空间两个方向的波动。在不存在耗散的情况下，已知这些系统可以存在以行波形式表现的孤立波解 [14, 15, 19]。然而，据我们所知，关于存在耗散时行波的相关结果尚未见报道。因此，我们研究耗散型 Bona–Smith 系统的行波解，这些解对应于连接相应动力系统中两个不同平衡点的异宿轨道。

我们首先对相关四维动力系统中平衡点的稳定性进行理论分析，建立了耗散参数 μ 的一个临界值 μ_0，在该临界值处会发生分岔，对应于从鞍焦点向鞍平衡点的转变。这一结果推广了低维情形中广为人知的焦点到节点分岔，尤其是其他 Boussinesq 类模型（如经典 Boussinesq–Peregrine 系统）以及 KdV–Burgers 方程所对应的二维动力系统中观察到的情形 [12, 10]。

值得注意的是，关于鞍焦点转变的研究相对较少，尤其是在四维系统中。现有文献通常聚焦于与此类平衡态相关的同宿分岔 [27, 28]。

耗散参数的临界值 μ_0 以及平衡态从鞍焦点转变为鞍点，会直接影响异宿轨道的结构。与二维情形一样，当 $\mu < \mu_0$ 时，行波解表现为振荡激波；而当 $\mu \geq \mu_0$时，则转变为正则化（严格单调）激波。不过，由于底层动力系统是四维的，因此不能排除还存在具有定性差异的剖面的其他异宿轨道。

这些发现基于数值计算，结果表明，异宿轨道具有结构稳定性，并且关于参数μ构成一个连续解族。此外，这些轨道似乎是对应于无阻尼情形 $\mu = 0$的对称同宿轨道的自然延拓。这种情形是同宿分岔现象的典型特征，反映了由异宿轨道连接的平衡态的稳定流形与不稳定流形之间的横截相交。

在四维动力系统中捕获异宿轨道面临着显著挑战，主要原因在于其非唯一性。这些轨道之所以具有内在的非唯一性，不仅是因为它们在水平平移下具有不变性，还因为涉及多脉冲同宿轨道的同宿分岔可能产生额外的、潜在非物理的异宿连接，如 [15] 所述。

为解决这些困难，我们提出了一种专门用于计算类似振荡激波和正则化激波的异宿轨道的有限差分法。该方法应用于相应的四维常微分方程，并在由异宿轨道连接的两个平衡点处施加边界条件。通过施加适当的渐近条件，促进收敛并抑制非物理解。为规避平移不变性所导致的非唯一性，我们对解进行居中处理，使速度分量 u 在 $x = 0$ 处具有一个拐点，从而提供一致且具有物理意义的参考系。

本文结构如下。第 2 节概述耗散 Bona–Smith 系统的基本性质，并简要讨论 Peregrine（经典

Boussinesq）系统。在第 3 节中，为了简化讨论，我们主要聚焦于含有 $c = 0$ 的 BBM–BBM系统，并研究由行波拟设导出的相应动力系统。具体而言，我们分析平衡点对参数 μ 的依赖关系，揭示了在临界值 μ_0 处发生的鞍焦点到鞍点分岔。这一分岔在决定行波的定性结构方面发挥着关键作用。我们还讨论了相关异宿轨道的一些性质。在第 4 节中，我们将分析扩展至含有$c > 0$的完整 Bona–Smith系统。尽管所得表达式更加复杂，但底层动力系统的定性行为仍与含有 $c = 0$ 的情形一致。第 5 节介绍一种用于计算类似波状涌潮的异宿轨道的数值方法。第 6 节比较了采用第 5 节介绍的数值方法计算得到的不同系统的行波剖面，并探讨参数 μ对所得波形的影响。第 7 节总结了本研究的主要发现。最后，附录 A 给出了关于非平凡平衡点处线性化的特征值的详细分析，该分析导出了第 3 节所述的鞍焦点到鞍点转变。

2. Review of the mathematical models

无量纲化和缩放形式的耗散型 Bona–Smith 系统族（1）可写为

$$\begin{aligned} &\eta_t + u_x + \varepsilon(\eta u)_x - \sigma^2 b\eta_{xxt} = 0 \ , \\ &u_t + \eta_x + \varepsilon u u_x - \sigma^2 c\eta_{xxx} - \sigma^2 b u_{xxt} = \nu u_{xx} \ , \end{aligned} \tag{2}$$

其中，对于 $\frac{2}{3} \le \theta^2 \le 1$ ，系数 b、c 通过以下公式相关

$$b = \frac{3\theta^2 - 1}{6} \qquad \text{and} \qquad c = \frac{3\theta^2 - 2}{3} \ .$$

参数 $0 < \varepsilon < 1$ 和 $0 < \sigma < 1$ 分别表征波幅与静水深之比，以及水深与波长 [8]之比。在缩放变量中，水平底床位于 $D = -1$ ，缩放后的扩散参数为 $\nu = \varepsilon\kappa > 0$，其中$\kappa = O$（1）描述了内部黏性引起的耗散效应。

情形 $\theta^2 = 2/3$ 对应于所谓的 BBM–BBM系统，由于其相对简单，我们将对其单独进行研究。然而，正如我们稍后将展示的那样，它的行为与更一般的 $2/3 < \theta^2 \le 1$ Bona–Smith系统非常相似。具有 $\theta^2 = 1$的系统通常被称为经典 Bona–Smith 系统，因为它是 Bona 和 Smith 在其奠基性工作 [11]中推导出的原始模型。

当斯托克斯数 $S = \varepsilon/\sigma^2$ 为 1 阶，即 $S = O$（1） [35]时，Boussinesq系统可在长波区间内对完整的 Euler 方程作出有效近似。为简单起见，我们假设 $\varepsilon = \sigma^2$，其满足这一条件。

应用变量替换:

$$\eta \to \varepsilon\eta, \quad u \to \varepsilon u, \quad x \to \frac{x}{\sqrt{\varepsilon b}}, \quad t \to \frac{t}{\sqrt{\varepsilon b}} \ , \tag{3}$$

我们对系统（2）进行重新缩放，得到无量纲形式:

$$\begin{aligned} &\eta_t + u_x + (\eta u)_x - \eta_{xxt} = 0 \ , \\ &u_t + \eta_x + u u_x - \gamma\eta_{xxx} - u_{xxt} = \delta u_{xx} \ , \end{aligned} \tag{4}$$

其中

$$\gamma = \frac{c}{b} = \frac{2(3\theta^2 - 2)}{3\theta^2 - 1} \qquad \text{and} \qquad \delta = \frac{\nu}{\sqrt{b\varepsilon}} \ .$$

注意，对于 $\theta^2 \in [2/3, 1]$，参数 γ 位于区间 $[0, 1]$ 内。

考虑冲量泛函

$$I(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (u\eta + u_x\eta_x)\ dx\ . \tag{5}$$

那么，对于 $I(t)$ 有定义的系统 (4) 的解，其时间导数满足

$$\frac{d}{dt}I(t) = -\delta \int_{-\infty}^{+\infty} u_x\eta_x\ dx\ . \tag{6}$$

同样，如果

$$E(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\eta^2 + \gamma\eta_x^2 + (1+\eta)u^2\right)\ dx \tag{7}$$

是能量泛函，那么

$$\frac{d}{dt}E(t) = 2\delta \int_{-\infty}^{+\infty} u_x\eta_t\ dx\ . \tag{8}$$

这些关系在通常意义下并不构成耗散律。另一方面，对于前述积分有意义的系统 (4) 的解，[16], 中已经对其进行了研究，并证明其 L^2 范数以速率 $O(t^{-1/4})$ 衰减。因此，当 $2/3 \le \theta^2 \le 1$ 时，Bona–Smith型系统 (4) 可视为耗散系统。此外，对于满足 $\theta^2 > 2/3$ 的系统，[16] 中还证明了 η 的 H^1 范数随时间以相同的速率 $O(t^{-1/4})$ 衰减。然而，现有的理论框架并不涵盖范数无界的解，尤其是不随 $x \to -\infty$ 衰减至零的波状涌潮所对应的解。在本文中，我们关注这类正行波解，其特征渐近行为为

$$\lim_{x\to-\infty}(u,\eta) = (u_0,\eta_0) \qquad \text{and} \qquad \lim_{x\to+\infty}(u,\eta) = (0,0)\ ,$$

其中 $u_0 > 0$ 和 $\eta_0 > 0$。

用于研究波状涌潮的一个渐近等价系统是经典Boussinesq–Peregrine系统 [31, 32, 12]，其无量纲形式写作

$$\begin{aligned} &\eta_t + u_x + \varepsilon(\eta u)_x = 0\ , \\ &u_t + \eta_x + \varepsilon u u_x - \sigma^2 b u_{xxt} = \nu u_{xx}\ . \end{aligned} \tag{9}$$

此类系统已在 [1] 中进行了分析。

采用与Bona–Smith系统情形相同的变量替换，可得到系统

$$\begin{aligned} &\eta_t + u_x + (\eta u)_x = 0\ , \\ &u_t + \eta_x + u u_x - u_{xxt} = \bar{\delta} u_{xx}\ , \end{aligned} \tag{10}$$

其中 $\bar{\delta} = \nu/\sqrt{b\varepsilon}$，对于经典Boussinesq–Peregrine系统，$b = 1/3$。对于相同的 ν 和 ε 值，该参数与Bona–Smith系统 (4) 的参数 δ 之间满足关系$\bar{\delta} = \delta/\sqrt{2-\gamma}$。特别地，对于 $\gamma = 1$，$\bar{\delta} = \delta$；对于BBM–BBM系统，$\bar{\delta} = \delta/\sqrt{2}$。这一特定系统的行波已在 [12], 中研究，其耗散特性则在[1, 16] 中分析。

系统（10）对所有波速 $s > 1$ （当 $\delta = 0$ [15, 19]）均以行波形式存在经典孤立波解。这些解对应于二维相空间中原点的对称同宿轨道，并且随着

δ 从零过渡到正值 [12]。
更准确地说，对于所有 $s > 1$ 和 $\delta > 0$，存在一条从原点连接到正平衡点的唯一异宿轨道，其形式为

$$u_0 = \frac{3s - \sqrt{s^2+8}}{2} \quad \text{and} \quad \eta_0 = \frac{u_0}{s - u_0} \ .$$

此外，[12] 还表明，存在一个临界分岔值 δ_0，它可以通过解析方法计算为

$$\bar{\delta}_0 = \sqrt{4s\,\alpha(s)}, \qquad \text{where} \quad \alpha(s) = \frac{s - \sqrt{s^2+8}}{2} + \frac{4s}{(s - \sqrt{s^2+8})^2} \ , \tag{11}$$

因此，异宿轨道的性质取决于 δ 的取值。当 $\delta < \delta_0$ 时，解呈现为振荡激波；而当 $\delta \geq \delta_0$ 时，所形成的波为正则化激波，即光滑、单调且无振荡的行波。当色散参数b 相对于同样逐渐减小的扩散参数 ν以特定速率减小时，这些行波会收敛至无色散浅水方程 [6]的熵激波。

尽管系统 (2) 和 (9) 在长波弱非线性区域内渐近等价，但它们的数学结构存在根本差异。具体而言，Bona–Smith系统行波解对应的相空间是四维的，而经典Boussinesq–Peregrine系统的相空间则只有二维。这一区别引出了自然的问题：维数对底层动力学有何影响，以及增加的复杂性如何改变相应波解的定性特征。

3. Dynamics of heteroclinic orbits of dissipative BBM–BBM system

为清晰起见，我们详细考察耗散BBM–BBM系统（$\gamma = 0$）的行波动力学。对于更一般的耗散Bona–Smith系统（ $\gamma \in (0, 1]$ ，我们仅作简要讨论，因为其分析更加复杂，且BBM–BBM系统的若干性质无法直接推广到这种情形。

对于 $\delta > 0$，考虑BBM–BBM系统

$$\begin{aligned} \eta_t + u_x + (\eta u)_x - \eta_{xxt} &= 0 \ , \\ u_t + \eta_x + u u_x - u_{xxt} &= \delta u_{xx} \ . \end{aligned} \tag{12}$$

我们寻找 $s > 1$ 的右行波，其形式为:

$$u(\xi) = u(x - st) > 0, \quad \eta(\xi) = \eta(x - st) > 0 \ , \tag{13}$$

边界条件为

$$\lim_{\xi \to +\infty} (\partial_\xi^j u(\xi), \partial_\xi^j \eta(\xi)) = (0, 0) \quad \text{for } j = 0, 1, 2, \dots \ , \tag{14}$$

而

$$\begin{aligned} &\lim_{\xi \to -\infty} (u(\xi), \eta(\xi)) = (u_0, \eta_0) \ , \\ &\lim_{\xi \to -\infty} (\partial_\xi^j u(\xi), \partial_\xi^j \eta(\xi)) = (0, 0) \quad \text{for } j = 1, 2, \dots \ . \end{aligned} \tag{15}$$

这类特殊解表示连接该系统两个不同平衡点的异宿轨道

$$\begin{aligned} -s\eta'' + s\eta - u - \eta u &= 0 \ , \\ -su'' + su - \eta - \tfrac{1}{2}u^2 &= -\delta u' \ , \end{aligned} \tag{16}$$

这是将试探解 (13) 代入 (12)，并对 $(\xi, +\infty)$ 积分所得的结果，其中 $\xi \in \mathbb{R}$ 取某些值。

对于满足 $|s|>1$ 的波速，预计系统 (12) 存在具有物理意义的行波解，因为 $|s|=1$ 对应于线性无限长波传播波速的极限情形。系统 (16) 具有如下对称性

$$\xi \to -\xi, \quad u \to -u, \quad \eta \to \eta, \quad s \to -s \ , \tag{17}$$

这意味着，如果（u（ξ） η（ξ） s）是方程（12）中速度为 $s>1$ 的行波解，那么反射剖面（$-u$（ζ） η（ζ） $-s$）（其中 $\zeta=-\xi$）也是一个解，但此时速度为 $s<-1$。由于这一对称性，只需考虑满足 $s>1$ 的行波即可。这类行波向右传播，而满足 $s<-1$ 的行波则向左传播。

3.1. 动力学图景。系统（16）可以写成如下形式

$$\mathbf{S}\mathbf{u}'' + \nabla f(\mathbf{u}) = \delta\ \mathbf{K}\mathbf{u}' \ , \tag{18}$$

其中 $\mathbf{u}=(u,\ \eta)^{T}$，$\mathbf{u}'=(u',\ \eta')^{T}$，

$$\mathbf{S}=\begin{pmatrix} 0 & -s \\ -s & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad f(\mathbf{u}) = s\ u\eta - \tfrac{1}{2}(\eta^2+u^2+u^2\eta) \ . \tag{19}$$

特殊情形 $\delta=0$ 已在 [33, 15], 中得到研究，在该情形下，系统（16）保持哈密顿量

$$H(\mathbf{u}) = Q(\mathbf{u}') + f(\mathbf{u}) \ ,$$

其中 Q（u） $=\frac{1}{2}\mathbf{u}^{T}\mathbf{S}\mathbf{u}$ $=-su\eta$ 表示一个不定二次型（即 det(S) <0），Q（u） <0 位于平面的第一、第三象限，而 Q（u） >0 位于第二、第四象限。此外，我们有 Q（u） $=0$ 沿着直线 ℓ_1 和 ℓ_2 成立；在 BBM–BBM 情形下，这两条直线分别与 u 轴和 η 轴重合。函数 f 满足 f（0, 0） $=0$，其零水平集

$$\mathcal{C} = \{\mathbf{u}\in\mathbb{R}^2 :\ f(\mathbf{u})=0\} \ ,$$

位于满足 Q(u) ≤ 0 的区域内，即物理平面 (u,η) 的闭第一、第三象限。其在第一象限的部分是一条闭凸曲线，除原点外处处光滑；原点处有一个角点，其切线为 $\eta=(s\pm\sqrt{s^2-1})u$。其在第三象限的部分由两条无界分支组成。通常，这条曲线在 (u,η) 平面上呈倒置的 γ 形。图 1 展示了 $\mathcal{C}$ 在第一、第三象限内的部分。值得注意的是，在点 $P_1=((s^2-1)/s, s^2-1)$ 处， $\mathcal{C}$ 的切线为水平线（即平行于 ℓ_1）；而在 $P_2=(2(s-1), 2(s-1))$ 处，切线为垂直线（即平行于 ℓ_2），也就是说，它们平行于满足 Q(u) $=0$ 的直线。分别经过 P_1 和 P_2、平行于 ℓ_1 和 ℓ_2 的直线相交于点 $P_3=(2(s-1)\ s^2-1)$。

下文中，我们用 $\mathcal{R}=\{$u$(\xi)=(u(\xi)\ \eta(\xi)) :\ \xi\in\mathbb{R}\}$ 表示系统 (18) 的任意轨道，其中 $\mathbf{u}=(u,\eta)$。第一象限内由 $\mathcal{C}$ 围成的区域，其边界由弧 Γ_1 和 Γ_2构成；这两条弧分别将原点 O 与点 P_1 和 P_2连接，此外还有弧 P_1P_2，从而形成一个凸闭区域。

尽管我们没有提供理论论证，但后文给出的数值证据表明，呈现振荡激波或正则化激波结构的 Bona–Smith系统（包括 BBM–BBM系统）的异宿轨道完全位于该区域的内部

$$\mathcal{D} = \mathring{\mathcal{C}} \cap \{u>0,\ \eta>0\} \ ,$$

其中，$\mathring{\mathcal{C}}$ 表示曲线 $\mathcal{C}$的内部。如果 $\mathcal{R}$ 与 $\mathcal{C}$ 可能相交，那么这种情况似乎只会在圆弧 P_1P_2 上非常小的范围内发生，而且参数δ的取值也必须非常小。图 1 中的阴影区域表示该区域。具体而言，可以证明，对于满足 H(U) >0 对所有 $\xi\in\mathbb{R}$均成立的方程 (18) 的异宿轨道，它们被限制在区域 $\mathring{\mathcal{C}}\cup\mathcal{T}$内，其中$\mathcal{T}$是由弧 P_1P_2、 P_1P_3 和 P_2P_3围成的区域，包括开弧 P_1P_2。值得注意的是，在没有耗散的情况下，原点处的对称同宿轨道位于 $\mathcal{D}$ 内部，但它们在圆弧 P_1P_2 [33]上达到最大值。

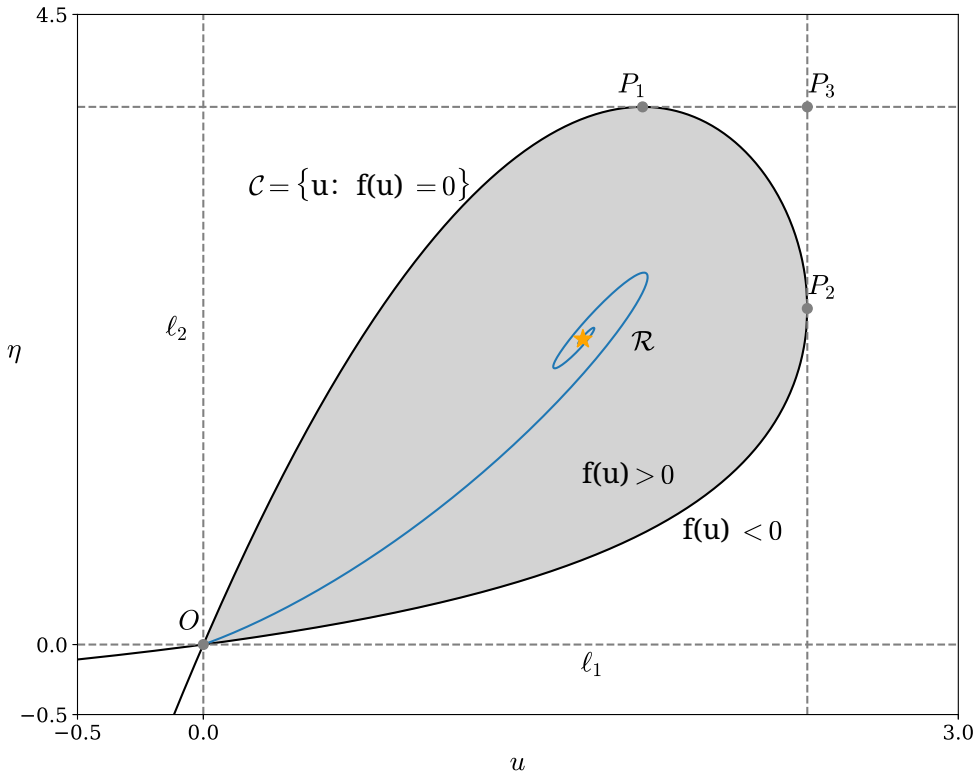


FIGURE 1. 物理空间中连接临界点 $\mathbf{0}$ 和 $\mathbf{U}_0$（以星号表示）的异宿轨道的投影，其中 $s = 2.2$ 以及 $\delta = 1.8$。投影轨道 $\mathcal{R}$ 完全位于阴影区域 $\mathcal{D}$的内部。

关于 u 求解方程 $f(\mathbf{u}) = 0$，得到 [15]:

$$u_\pm = \frac{s\eta \pm \eta\sqrt{s^2 - 1 - \eta}}{1 + \eta} ,$$

即 当 $0 < \eta \le s^2 - 1$时有意义。类似地，关于 η 求解可得 n:

$$\eta_\pm = u\frac{2s - u \pm \sqrt{(u - 2(s+1))(u - 2(s-1))}}{2} ,$$

当 $0 < u \le 2(s-1)$ 时有意义。显然,

$$f(\mathbf{u}) = -\tfrac{1}{2}(1+\eta)(u - u_-)(u - u_+) ,$$

°且对所有 $\mathbf{u} \in \mathcal{C}$, $f(\mathbf{u}) > 0$。此外，除 $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ 外，对所有 $\mathbf{u} \in \mathcal{C}$, $\nabla f(\mathbf{u}) \neq \mathbf{0}$。曲线 $\mathcal{C}$ 和一条被包围的异宿轨道 $\mathcal{R}$ 的示例见图 1。

动力系统 (18) 有三个平衡点，它们对应于函数 f 的临界点，即 $\nabla f(\mathbf{u}) = 0$ 的位置。这些平衡点通过求解以下系统确定

$$su - \frac{u}{s-u} - \frac{1}{2}u^2 = \frac{u(u^2 - 3su + 2(s^2-1))}{2(s-u)} = 0 \quad \text{and} \quad \eta = \frac{u}{s-u} . \tag{20}$$

该系统的解为原点 $\mathbf{0}=(0,0)$ 以及两个非平凡平衡点 $\mathbf{u}_0=(u_0,\eta_0)$ 和 $\mathbf{u}_1=(u_1,\eta_1)$，其中

$$u_0=\frac{3s-\sqrt{s^2+8}}{2} \quad \text{and} \quad \eta_0=\frac{u_0}{s-u_0}=-1+\tfrac{1}{4}(s^2+s\sqrt{s^2+8}) \ , \tag{21}$$

and

$$u_1=\frac{3s+\sqrt{s^2+8}}{2} \quad \text{and} \quad \eta_1=\frac{u_1}{s-u_1}=-1+\tfrac{1}{4}(s^2-s\sqrt{s^2+8}) \ .$$

对于 $s>1$，平衡态 $\mathbf{u}_1$ 位于非物理区域内，因为 $\eta_1<-1$时波会低于不可渗透底部，因此不在本文分析范围内。注意，式 (20) 中的二次多项式 $u^2-3su+2(s^2-1)$ 对于 $u<u_0$ 和 $u>u_1$为正。

°我们注意到，临界点 $(u_0,\eta_0)\in\mathcal{C}$，因为

$$f(\mathbf{u}_0)=\left(\tfrac{3s-\sqrt{s^2+8}}{2(s-\sqrt{s^2+8})}\right)^2(-2-s^2+s\sqrt{s^2+8})>0 \quad \text{for all } s>1 \ . \tag{22}$$

°此外，在 $\mathcal{C}$ 内，$f(\mathbf{u}_0)$ 是函数 $f(\mathbf{u})$ 的局部最大值。事实上，$\nabla f(\mathbf{u}_0)=0$，且二阶条件给出 $f_{uu}(\mathbf{u}_0)=-(1+\eta_0)<0$ 以及

$$D^2f(\mathbf{u}_0)=\begin{vmatrix} f_{uu}(\mathbf{u}_0) & f_{u\eta}(\mathbf{u}_0) \\ f_{\eta u}(\mathbf{u}_0) & f_{\eta\eta}(\mathbf{u}_0)\end{vmatrix}=1+\eta_0-(s-u_0)^2>0 \ ,$$

对所有 $s>1$ 均成立。（最后一个不等式成立是因为 $u_0>s-\sqrt[3]{s}$。）相比之下，在原点 $\mathbf{0}=(0,0)$ 处，我们有 $f_{uu}(0)=-1<0$ 且 $D^2f(0)=1-s^2<0$，对于 $s>1$，这意味着原点是一个鞍点¯（在闭包 $\mathcal{D}$ 内为局部极小值）。点 $\mathbf{u}_1$ 也是 $f(\mathbf{u})$ 的鞍点，因为$D^2f(\mathbf{u}_1)=1+\eta_1-(s-u_1)^2<0$，这是由于 $\eta_1<-1$。由于 $\mathcal{D}$ 中没有其他临界点，我们得出，式 (18) 的任何位于内部 $\mathcal{D}$ 的解都满足 $0<f(\mathbf{u})\le f(\mathbf{u}_0)$。

为了分析 系统 (16)，将其视为四维动力系统，我们将其改写为 m

$$\mathbf{U}'=\mathbf{F}(\mathbf{U})\doteq\mathbf{A}\mathbf{U}+\mathbf{G}(\mathbf{U}) \ , \tag{23}$$

其中 $\mathbf{U}=(u,\eta,v,h)^T$，

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{s} \\ s & -1 & \frac{\delta}{s} & 0 \\ -1 & s & 0 & 0\end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{G}(\mathbf{U})=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2}u^2 \\ -u\eta\end{pmatrix} \ . \tag{24}$$

系统 (18) 的物理空间 (u,η) 对应于与系统 (23) 相关联的完整四维相空间 (u,η,v,h) 在 (u,η)-平面上的自然投影。系统 (23) 有两个具有物理意义的平衡点：原点 $\mathbf{0}=(0,0,0,0)^T$，以及 $\mathbf{U}_0=(u_0,\eta_0,0,0)^T$，其中 u_0 和 η_0 由式 (21) 给出。在原点附近进行线性化后，得到由矩阵 $\mathbf{A}$ 控制的线性系统，其特征值是特征多项式的根

$$P_1(\lambda)=\lambda^4-\frac{\delta}{s}\lambda^3-2\lambda^2+\frac{\delta}{s}\lambda+\left(1-\frac{1}{s^2}\right) \ . \tag{25}$$

对 $P_1(\lambda)$ 应用笛卡尔符号法则（见 [36]）可知，正实根至多有两个。同样，对 $P_1(-\lambda)$ 应用该法则可知，负实根至多有两个。为确定确切数目，我们注意到 $P_1(0)=1-1/s^2>0$, $P_1(\pm1)=-1/s^2<0$且 $P_1(\pm\infty)=+\infty$。这些符号变化表明，该多项式恰有两个正实根和两个负实根。因此，对于所有 $\delta\ge0$ 和 $s>1$，原点都是一个鞍点，在相空间中具有两个不稳定方向和两个稳定方向。此外，还可按大小对特征值进行分类：主导特征值位于区间 $(-1,1)$ 内，其余两个特征值分别位于 $(1,+\infty)$ 和 $(-\infty,-1)$ 内。

当 $\delta = 0$ 时，矩阵 A 有显式特征值

$$\rho_1 = -\sqrt{1+\frac{1}{s}} < -1, \quad \rho^- = -\sqrt{1-\frac{1}{s}} > -1, \quad \rho^+ = \sqrt{1-\frac{1}{s}} < 1, \quad \rho_2 = \sqrt{1+\frac{1}{s}} > 1 \ ,$$

其中，我们用 ρ^- 和 ρ^+ 表示主导特征值，即最接近原点的特征值。在这种情况下，鞍量定义为主导稳定特征值与不稳定特征值之和，其值为 $\sigma_0 = \rho^+ + \rho^- = 0$。这是一个退化情形，因为 $\sigma_0 = 0$ 恰好位于耗散鞍行为与保守鞍行为的分界线上。据我们所知，标准同宿分岔理论并未涵盖这种情形；例如参见 [28]。在本文中，当 $\delta = 0$ 时，我们用记号 ρ 表示平衡点的特征值；而当 $\delta > 0$ 时，则用 λ 表示。

此外，假设当 $\delta > 0$ 较小时，矩阵 A 的特征值具有如下形式的渐近展开： $\lambda = \lambda^0 + \delta\lambda^1 + O(\delta^2)$。我们注意到，随着 δ 从零开始增大，特征多项式 (25) 的根向右移动。特别是，当 δ 充分小时，每个特征值相对于其 $\delta = 0$ 值的扰动都具有相同的首阶项，即 $\delta/(4s)$。也就是说，当 $\delta \to 0$ 时，我们有如下展开：

$$\lambda_1 \sim \frac{\delta}{4s} + \rho_1, \quad \lambda_- \sim \frac{\delta}{4s} + \rho_-, \quad \lambda_+ \sim \frac{\delta}{4s} + \rho_+, \quad \lambda_2 \sim \frac{\delta}{4s} + \rho_2 \ .$$

因此，对于 $\delta > 0$，定义为 $\sigma_\delta = \lambda_+ + \lambda_-$ 的鞍量满足渐近关系 $\sigma_\delta \sim \delta/2s > 0$，这表明其从退化情形 $\sigma_0 = 0$ （对于 $\delta = 0$）转变为 $\delta > 0$ 的非退化鞍点。最后，当 $\delta \to \infty$ 时，特征值在各自的区间内保持定性排序，其渐近行为为

$$\lambda_1 \sim -1 - \frac{1}{2\delta s}, \quad \lambda_- \sim \frac{1-s^2}{\delta s}, \quad \lambda_+ \sim 1 - \frac{1}{2\delta s}, \quad \lambda_2 \sim \frac{\delta}{s} \ .$$

值得注意的是，尽管处于耗散极限，鞍量仍为正，从而保持了该系统的鞍型性质。

为分析平衡态 U_0，的性质，我们考察线性化矩阵

$$\tilde{\mathbf{A}} = \tilde{\mathbf{A}}(\delta) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{s} \\ s-u_0 & -1 & \frac{\delta}{s} & 0 \\ -(1+\eta_0) & s-u_0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ . \tag{26}$$

其特征值满足特征方程

$$P_2(\lambda) = \lambda^4 - \frac{\delta}{s}\lambda^3 - 2\frac{s-u_0}{s}\lambda^2 + \frac{\delta}{s}\frac{s-u_0}{s}\lambda - \frac{1+\eta_0-(s-u_0)^2}{s^2} \ . \tag{27}$$

对于涉及 u_0 和 η_0 的 P_2 的系数，以及 $s > 1$，我们有

$$A \doteq \frac{s-u_0}{s} = \frac{-s+\sqrt{s^2+8}}{2s} > 0 \ ,$$

and

$$q \doteq \frac{1+\eta_0-(s-u_0)^2}{s^2} = \frac{-(s^2+8)+3s\sqrt{s^2+8}}{4s^2} = \frac{(3s-\sqrt{s^2+8})\sqrt{s^2+8}}{4s^2} > 0 \ . \tag{28}$$

当 $\delta = 0$ 时，多项式 $P_2(\lambda)$ 具有四个特征值 $\rho_i^{\pm} = \pm \mathrm{i}\rho_i$ 和 $\rho_r^{\pm} = \pm\rho_r$，其中

$$\rho_i = \sqrt{\frac{u_0 - s + \sqrt{1+\eta_0}}{s}}, \quad \rho_r = \sqrt{\frac{s-u_0+\sqrt{1+\eta_0}}{s}} \ . \tag{29}$$

注意到，对于所有 $s > 1$， $\frac{u_0-s+\sqrt{1+\eta_0}}{s} > 0$ 和 $\frac{s-u_0+\sqrt{1+\eta_0}}{s} > 0$ 。

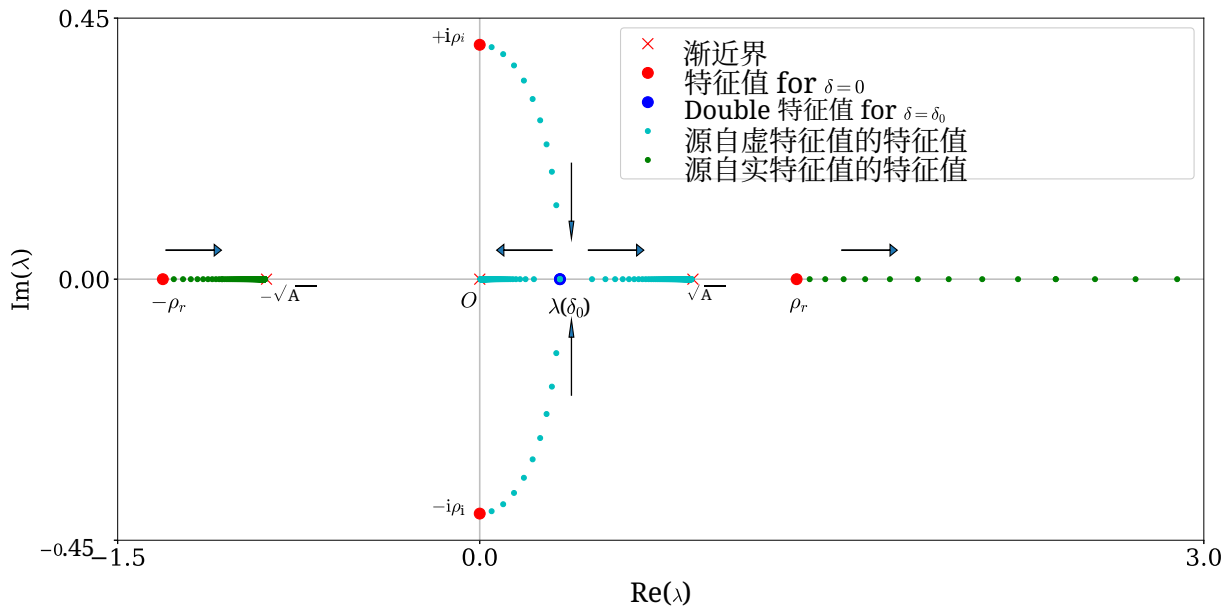


FIGURE 2. 当 $s = 1.2$以及 $\delta \geq 0$ 取不同值时，A(δ) 的特征值在复平面中的位置。箭头表示当 δ 从 0 增大时特征值的运动方向。

下文中，我们将 $P_2(\lambda)$ 的实根记为 $\lambda_r^+ > 0$、 $\lambda_r^- < 0$ 和 λ_i^+，并将对于 $\delta > 0$ 从 $P_2(\lambda)$ 的虚根中产生的 $P_2(\lambda)$ 的根记为 λ_i^-，其中 $\delta = 0$ 时 δ 递增。

以下命题概述了 A(δ) 的特征值随 δ 变化时的行为。其证明依赖于标准但冗长的计算，详见附录 A。

命题 3.1. 设 $s > 1$。存在唯一的临界值 $\delta_0 = \delta_0(s) > 0$，其显式表达式由（62）给出，并且满足以下条件：

(i) 对所有 $\delta > 0$，根 $\lambda_r^{\pm}$ 均为实的且为单根， λ_r^- 是 $P_2(\lambda)$ 的唯一负根，而 λ_r^+ 是其最大的实根。二者均为 δ 的增函数，并满足 $\lambda_r^- < -\sqrt{A}$、 $\lambda_r^+ > \sqrt{A}$ 和 $\lambda_r^+ + \lambda_r^- > 0$。(ii) 当 $0 < \delta < \delta_0$ 时，根 $\lambda_i^{\pm}$ 为非实的共轭复数，并且 $0 < Re(\lambda_i^{\pm}) < \delta/(2s)$，以及 $Re(\lambda_i^{\pm}) < \lambda_r^+$。此外， $Im(\lambda_i^+)$ 严格递减于 δ。(iii) 当 $\delta = \delta_0$ 时，根 $\lambda_i^{\pm}$ 合并为一个双正根 $\lambda_d \in (0, \sqrt{A})$。(iv) 当 $\delta > \delta_0$ 时，根 $\lambda_i^{\pm}$ 为实根，且 $0 < \lambda_i^- < \lambda_i^+ < \sqrt{A}$。此外，$\lambda_i^-$ 关于 δ 递减，而 λ_i^+ 关于 δ 递增。

根据命题 3.1，对于 $0 < \delta < \delta_0$，主导特征值由 $P_2(\lambda)$ 的一对实部为正的共轭复根以及一个负特征值组成。当 δ 增大至 δ_0 时，这对共轭复根合并为一个二重正实特征值；当 $\delta > \delta_0$ 时，该特征值分裂为两个不同的正实特征值。因此，根据 [28] 中给出的定义，对于$0 < \delta < \delta_0$，U_0 是一个鞍焦平衡点；对于 $\delta \geq \delta_0$，则是一个鞍平衡点。

图2展示了不同 δ 取值且 $s = 1.2$时的特征值位置。箭头表示随着 δ 增加，特征值在复平面中的轨迹。特征值通过 Python 数值计算得到，证实平衡态 U_0 从$0 < \delta < \delta_0$ 时的鞍焦点过渡为 $\delta \geq \delta_0$时的鞍点。这一过渡反映了四维相空间中异宿轨道形状的定性变化。

值得注意的是，若 $W_u(\mathrm{U})$和 $W_s(\mathrm{U})$分别表示平衡态 U 的不稳定流形和稳定流形，则我们系统中两个平衡态的 Morse指标分别为 $\mathrm{ind}(\mathrm{U}_0) = \dim(W_u(\mathrm{U}_0)) = 3$ 以及 $\mathrm{ind}(0) = \dim(W_u(0)) = 2$。因此，异宿轨道可以位于横截交集 $W_u(\mathrm{U}_0) \cap W_s(0)$ 内，其维数为 $\mathrm{ind}(\mathrm{U}_0) - \mathrm{ind}(0) = 1$，参见 [24] 及其中的参考文献。

3.2. 解的性质讨论。下文中，我们假设 $\delta > 0$。考虑泛函 $H : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ 使得

$$H(\mathbf{U}) = Q(\mathbf{u}') + f(\mathbf{u}) = -su'\eta' + f(\mathbf{u}) \ , \tag{30}$$

其中 $\mathbf{u} = (u, \eta)$ 且 $\mathbf{u}' = (u', \eta')$。

注意到

$$\frac{d}{d\xi} f(\mathbf{u}(\xi)) = \nabla f(\mathbf{u}) \cdot \begin{pmatrix} u' \\ \eta' \end{pmatrix} \ .$$

将 (18) 与向量 $(u', \eta')^T$ 取内积，得到

$$s(u'\eta')' = \frac{d}{d\xi} f(\mathbf{u}) + \delta u'\eta' \ , \tag{31}$$

这可以写成如下形式

$$\frac{d}{d\xi} H(\mathbf{U}) = -\delta u'\eta' \ . \tag{32}$$

利用 (32) 可以直接验证，对于 (23) 的任意解以及任意 $\xi \in \mathbb{R}$:

$$\frac{d}{d\xi} H(\mathbf{U}) - \frac{\delta}{s} H(\mathbf{U}) = -\frac{\delta}{s} f(\mathbf{u}) \ . \tag{33}$$

将 (33) 乘以 $e^{-\frac{\delta}{s}\xi}$，得到

$$\frac{d}{d\xi} \left(e^{-\frac{\delta}{s}\xi} H(\mathbf{U}) \right) = -\frac{\delta}{s} e^{-\frac{\delta}{s}\xi} f(\mathbf{u}) \ . \tag{34}$$

若记

$$V(\xi) = e^{-\frac{\delta}{s}\xi} H(\mathbf{U}(\xi)) \ , \tag{35}$$

则有

$$V'(\xi) = -\frac{\delta}{s} e^{-\frac{\delta}{s}\xi} f(\mathbf{u}) \ , \tag{36}$$

and

$$V''(\xi) = \frac{\delta}{s} e^{-\frac{\delta}{s}\xi} [\frac{\delta}{s} f(\mathbf{u}) - \frac{d}{d\xi} f(\mathbf{u})] \ . \tag{37}$$

本文着重研究连接 U_0 与原点的异宿轨道，其中区域 $\mathcal{D} = \mathcal{C} \cap \{u > 0, \eta > 0\}$ 似乎起着重要作用。

注记3.1. 如果 $\xi_0 \in \mathbb{R}$ 是轨道 $\mathbf{u}$ 从其内部穿过 $\mathcal{C}$ 的点，那么，$V'(\xi_0) = 0$；对于 $\xi < \xi_0$，$V'(\xi) < 0$，而对于 $\xi > \xi_0$，$V'(\xi) > 0$。因此，$V(\xi_0)$ 是局部极小值，这意味着 $V''(\xi_0) \geq 0$。由于 $f(\mathbf{u}(\xi_0)) = 0$，定义 (37) 意味着 $\frac{d}{d\xi} f(\mathbf{u})|_{\xi=\xi_0} = \nabla f(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u}'|_{\xi=\xi_0} \leq 0$，正如预期。类似地，如果 ξ_1 是轨道 $\mathbf{u}$ 从其外部穿过 $\mathcal{C}$ 的点，则有 $\frac{d}{d\xi} f(\mathbf{u})|_{\xi=\xi_1} = \nabla f(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u}'|_{\xi=\xi_1} \geq 0$。无法通过此论证排除与 $\mathcal{C}$ 相切的穿越。

系统 (18) 还具有第一积分：利用积分因子和边界条件 (14)，在 (ξ,∞) 中求解 (31) 关于 $u'\eta'$ 的方程，我们得到

$$H(\mathbf{U}) = \frac{\delta}{s} e^{\frac{\delta}{s}\xi} \int_{\xi}^{\infty} e^{-\frac{\delta}{s}\tau} f(\mathbf{u})\ d\tau\ , \tag{38}$$

对所有 $\xi \in \mathbb{R}$ 均成立。由此得到

$$V(\xi) = \frac{\delta}{s} \int_{\xi}^{\infty} e^{-\frac{\delta}{s}\tau} f(\mathbf{u})\ d\tau\ ,$$

对所有 $\xi \in \mathbb{R}$ 均成立。因此，只有当轨道离开区域 $\mathcal{D}$ 时，$V(\xi)$（以及 $H(\mathbf{U})$）才可能为零；也就是说，存在 ξ 的某些区间，使得函数 $f(\mathbf{u})$ 变为负值。

利用边界条件 (15) 对 (32) 积分，得到第一积分

$$H(\mathbf{U}) - f(\mathbf{u}_0) + \delta \int_{-\infty}^{\xi} u'\eta'\ d\tau = 0\ , \tag{39}$$

取极限 $\xi \to \infty$ 后可见

$$\delta \int_{-\infty}^{+\infty} u'\eta' = f(\mathbf{u}_0) > 0\ , \tag{40}$$

由 (39) 还可得到

$$H(\mathbf{U}) = \delta \int_{\xi}^{+\infty} u'\eta'\ d\tau\ . \tag{41}$$

注 3.2。在区域 $\mathcal{D}$ 内从原点出发的同宿轨道的存在性可以很容易地排除。若存在这样的轨道，则 $\lim_{\xi\to-\infty} H(\mathbf{U}) = 0$。此外，还会存在一个 $\rho > 0$，使得使得 $u' > 0$ 和 $\eta' > 0$ 对所有 $\xi \in (-\infty,\rho)$ 都成立，即随着轨道从原点向 $\mathcal{D}$ 内部演进。另一方面，(32) 得出 $\frac{d}{d\xi}H(\mathbf{U}) < 0$ 在 $(-\infty,\rho)$ 中成立，因此对于 $\xi \in (-\infty,\rho)$，有 $H(\mathbf{U}(\xi)) < 0$，这与 (38) 确保对所有 $\xi \in \mathbb{R}$，$H(\mathbf{U}) > 0$ 相矛盾。

先前分析的一个直接推论是，系统 (23) 的任意解 $\mathrm{U} = (u,\eta,v,h)$，若满足边界条件 (14)–(15) 且 $\mathbf{u} \in \mathcal{D} = \mathcal{C} \cap \{u > 0, \eta > 0\}$，则对所有 $\xi \in \mathbb{R}$，均有 $0 = H(0) < H(\mathbf{U}) \le H(\mathbf{U}_0) = f(\mathbf{u}_0)$，并且

$$\delta \int_{-\infty}^{+\infty} u'\eta'\ d\tau = f(\mathbf{u}_0) > 0 \quad \text{and} \quad \int_{-\infty}^{\xi} u'\eta'\ d\tau \ge 0, \quad \int_{\xi}^{+\infty} u'\eta'\ d\tau > 0 \quad \text{for all } \xi \in \mathbb{R}\ , \tag{42}$$

为说明这一点，注意若对所有 $\xi \in \mathbb{R}$ 均有 $\mathbf{u} \in \mathcal{D}$，则 (38) 意味着对所有 $\xi \in \mathbb{R}$，$H(\mathbf{U}) > 0$。此外，由于当 $\mathbf{u} \in \mathcal{D}$ 时 $f(\mathbf{u}) \le f(\mathbf{u}_0)$，我们得到 (38) 的右端为

$$\frac{\delta}{s} e^{\frac{\delta}{s}\xi} \int_{\xi}^{\infty} e^{-\frac{\delta}{s}\tau} f(\mathbf{u})\ d\tau \le f(\mathbf{u}_0)\ ,$$

由此得出 $0 < H(\mathbf{U}) \le f(\mathbf{u}_0)$。由（39）可知，（42）中的第二个不等式成立，因为 $H(\mathbf{U}) - f(\mathbf{u}_0) \le 0$。

另一方面，满足 $H(\mathbf{U}) > 0$ 的异宿轨道只能位于 $\mathcal{D}$ 内、沿着圆弧P_1P_2，以及由弧 P_1P_2、P_2P_3 和 P_1P_3 围成的区域内。事实上，若 $H(\mathbf{U}) > 0$，则$Q(\mathbf{u}') > -f(\mathbf{u})$。因此，若一条轨道离开 $\mathcal{D}$，则它必须满足 $Q(\mathbf{u}') > 0$；由于后者的凸性，这使该轨道无法返回 $\mathcal{C}$，除非它从圆弧 P_1P_2 离开 $\mathcal{C}$，而不是从 P_1P_3 或 P_2P_3 离开。

需要指出的是，我们无法推断方程 (18) 的解的临界点会同时出现。这一点出乎意料，因为对于其他系统，例如耗散型经典 Boussinesq–Peregrine 系统 [12], 、修正 Serre–Green–Naghdi 系统 [7], 和 KdV–Burgers 方程 [10], ，其

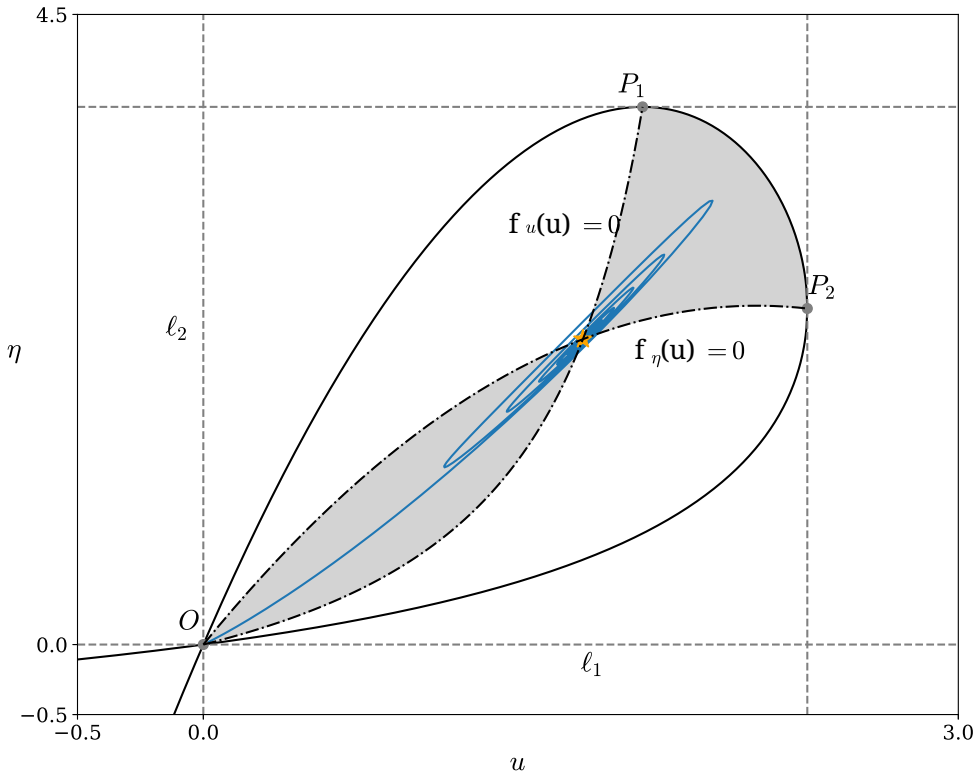


FIGURE 3. u 在物理空间中的极小值和极大值的预期位置。阴影区域表示集合 $\{u \in \mathcal{D} : f_u(u) f_\eta(u) > 0\}$。在 u_0, 上方的阴影部分中，二者都满足 $f_u(u) < 0$ 和 $f_\eta(u) < 0$；而在 u_0 下方的部分中，我们有 $f_u(u) > 0$ 以及 $f_\eta(u) > 0$。其中， $s = 2.2$ 和 $\delta = 0.5$。

解的临界点 u、 η 会同时出现。即使 u和 η 的最大值和最小值并非同时出现，与波状涌潮相对应的解也预计会具有彼此非常接近且类型相同的 u 和 η 极值点。换句话说，预计 u' 和 η' 的根之间满足 $u'\eta' < 0$ 的区间，相较于满足 $u'\eta' > 0$的区间而言较小。

考虑一个点 ξ_0，其中 $u(\xi_0)$ 是 u 的局部最大值，即 $u'(\xi_0) = 0$ 且 $u''(\xi_0) < 0$。于是，根据式（16）中关于 $\xi = \xi_0$ 的第二个方程，我们有 $f_\eta(u)|_{\xi=\xi_0} = su(\xi_0) - \eta(\xi_0) - \frac{1}{2}u^2(\xi_0) < 0$。如果 ξ_1 是解 u 取得极小值的点，那么 $f_\eta(u)|_{\xi=\xi_1} = su(\xi_1) - \eta(\xi_1) - \frac{1}{2}u^2(\xi_1) > 0$。类似地，如果在 $\xi = \zeta_0$ 处，解 $\eta(\zeta_0)$ 是 η 的局部最大值，那么 $f_u(u)|_{\xi=\zeta_0} = s\eta(\zeta_0) - u(\zeta_0) - \eta(\zeta_0)u(\zeta_0) < 0$；如果 $\xi = \zeta_1$ 是 $\eta(\zeta_1)$ 取得局部极小值的点，那么$f_u(u)|_{\xi=\zeta_1} = s\eta(\zeta_1) - u(\zeta_1) - \eta(\zeta_1)u(\zeta_1) > 0$。对于完全位于 $\mathcal{D}$ 内部的物理解，如前文所述，预计 η 和 u 取得极大值的点彼此非常接近。它们的极小值同样如此。因此，在 $\mathcal{D}$ 内部，u 和 η 的极值可能出现的区域预计对应于满足以下条件的点集： $f_u(u) \cdot f_\eta(u) > 0$。该区域如图 3 所示。我们对所测试的所有情形进行了数值验证，证实了这一结论。然而，由于有限精度算术，对于 δ 和 ξ 的极小值，不可能对其进行确认。

除此之外，方程（32）意味着，如果 $\xi_0 \in \mathbb{R}$ 是满足 $u'(\xi_0)\eta'(\xi_0) = 0$ 的点，那么 $\frac{d}{d\xi}H(u)$ 在 $\xi = \xi_0$ 处 $= 0$。因此， H 的临界点与 η 和 u 的临界点重合。此外，

根据 H 的定义（30），我们看到，在 u 和 η 的临界点处，有 $H(\mathsf{U}) = f(\mathsf{u})$。因此，只要 u 位于 $\mathcal{D}$ 内，或者甚至位于满足 $f(\mathsf{u}) < f(\mathsf{u}_0)$ 的更广区域内，H 的局部极值总是小于 $f(\mathsf{u}_0)$。因此，至少在初始阶段，$H(\mathsf{U})$ 将会减小，并且 $u'\eta' > 0$。类似地，如果 $\mathsf{u} \in \mathcal{D}$，那么 H 的局部极值将为正。

4. Dissipative Bona–Smith-type systems

这里我们考虑 Bona–Smith系统，

$$\begin{aligned} &\eta_t + u_x + (u\eta)_x - \eta_{xxt} = 0 \ , \\ &u_t + \eta_x + uu_x - \gamma\eta_{xxx} - u_{xxt} = \delta u_{xx} \ , \end{aligned} \tag{43}$$

其中 $\gamma \in (0, 1]$。类似于 BBM–BBM系统，我们以如下形式寻找行波解：$u(x,t) = u(x - st)$，$\eta(x,t) = \eta(x - st)$，$s > 1$。代入（43）得到系统

$$\begin{aligned} &-s\eta'' + s\eta - u - \eta u = 0 \\ &-su'' + \gamma\eta'' + su - \eta - \tfrac{1}{2}u^2 = -\delta u' \ , \end{aligned} \tag{44}$$

该系统具有如下形式（18），其中

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & -s \\ -s & \gamma \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad f(\mathbf{u}) = s\ u\eta - \tfrac{1}{2}\left(\eta^2 + u^2 + u^2\eta\right) \ .$$

系统（44）的平衡解 0 和 $\mathsf{u}_0 = (u_0, \eta_0)$ 对所有 $\gamma \in [0, 1]$ 均与 BBM–BBM系统保持相同。相应一阶系统在任意点（$u, \eta, 0, 0$）附近线性化后的雅可比矩阵为

$$\mathbf{J}(\delta; \mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{s} \\ s - u - \frac{\gamma}{s}(1+\eta) & -1 + \frac{\gamma}{s}(s-u) & \frac{\delta}{s} & 0 \\ -(1+\eta) & s - u & 0 & 0 \end{pmatrix} \ . \tag{45}$$

因此，原点 0 附近的线性化对应于矩阵 $\mathsf{A}(\delta) = \mathsf{J}(\delta; 0)$，其特征多项式为

$$P_1(\lambda) = \lambda^4 - \frac{\delta}{s}\lambda^3 - \left(2 - \frac{\gamma}{s^2}\right)\lambda^2 + \frac{\delta}{s}\lambda + \left(1 - \frac{1}{s^2}\right) \ . \tag{46}$$

再次利用笛卡尔符号法则，我们得出它有两个正根和两个负根。值得注意的是，在 $\gamma = 1$ 情形下，对于所有 $s > 1$，两个特征值均为 ± 1，因为$P_1(\pm 1) = (\gamma - 1)/s^2$。

$\delta = 0$ 的未扰动矩阵 $\mathsf{A}(0)$有四个实特征值（类似于 BBM–BBM情形），即：

$$\begin{aligned} &\rho_1 = -\sqrt{1 + \frac{\Gamma - \gamma}{2s^2}} \le -1, \quad \rho^- = -\sqrt{1 - \frac{\Gamma + \gamma}{2s^2}} > -1 \ , \\ &\rho^+ = \sqrt{1 - \frac{\Gamma + \gamma}{2s^2}} < 1, \quad \rho_2 = \sqrt{1 + \frac{\Gamma - \gamma}{2s^2}} \ge 1 \ , \end{aligned}$$

其中$\Gamma = \sqrt{\gamma^2 + 4s^2(1-\gamma)} \ge \gamma$，仅当 $\gamma = 1$时等号成立；在这种情况下，$\rho_1 = -1$ 和 $\rho_2 = 1$。容易验证，对于 $\gamma = 0$，这些特征值与 BBM–BBM系统的相应特征值一致。

受扰矩阵 $\mathsf{A}(\delta) = \mathsf{J}(\delta; 0)$ 的特征值在 $\delta \to 0$ 时表现为 e

$$\lambda_1 \sim \rho_1 + \frac{\delta}{4s}\frac{\Gamma - \gamma}{\Gamma}, \quad \lambda^- \sim \rho^- + \frac{\delta}{4s}\frac{\Gamma + \gamma}{\Gamma}, \quad \lambda^+ \sim \rho^+ + \frac{\delta}{4s}\frac{\Gamma + \gamma}{\Gamma}, \quad \lambda_2 \sim \rho_2 + \frac{\delta}{4s}\frac{\Gamma - \gamma}{\Gamma} \ ,$$

而在 $\delta \to \infty$ 时表现为

$$\lambda_1 \sim -1 + \frac{\gamma - 1}{2\delta s}, \quad \lambda^- \sim -\frac{s^2 - 1}{\delta s}, \quad \lambda^+ \sim 1 + \frac{\gamma - 1}{2\delta s}, \quad \lambda_2 \sim \frac{\delta}{s} \, .$$

~平衡态 u_0 附近的相应线性化矩阵 $\mathrm{A}(\delta) = \mathrm{J}(\delta;\mathrm{u}_0)$具有如下特征多项式

$$P_2(\lambda) = \lambda^4 - \frac{\delta}{s}\lambda^3 - 2\left(\frac{s - u_0}{s} - \frac{\gamma}{2}\frac{1 + \eta_0}{s^2}\right)\lambda^2 + \frac{\delta}{s}\frac{s - u_0}{s}\lambda - \frac{1 + \eta_0 - (s - u_0)^2}{s^2} \, . \tag{47}$$

~二次项的系数 A 为

$$\tilde{A} = A - B = \frac{s - u_0}{s} - \frac{\gamma}{2}\frac{1 + \eta_0}{s^2} = -\frac{\gamma(s + \sqrt{s^2 + 8}) + 4(s - \sqrt{s^2 + 8})}{8s} \, , \tag{48}$$

其中 A 由（59）给出，并且

$$B = \frac{\gamma}{2}\frac{1 + \eta_0}{s^2} \, .$$

注意到，当且仅当 $\tilde{A} > 0$ （$s + \sqrt{s^2 + 8}$）$+4$（$s - \sqrt{s^2 + 8}$）< 0时，即当且仅当 $1 < s < \frac{4-\gamma}{\sqrt{2\gamma}}$时， γ。

~ ~当 s 取较大值时，我们有 $A \le 0$。对于 $\gamma = 0$，对所有 $s > 1$，我们有 $A = A > 0$。

应用笛卡尔符号法则（BBM–BBM系统同理），我们推得P_2（λ）具有1个正特征值和1个负特征值；根据 δ的取值，还可能另外具有2个共轭复数（实部为正）或2个正实特征值。

当 $\delta = 0$ 时，未扰动系统有两个实 $\rho_r^{\pm} = \pm\rho_r$ 和两个虚特征值 $\rho_i^{\pm} = \pm\mathrm{i}\rho_i$，其中

$$\rho_i = \sqrt{\frac{u_0 - s}{s} + \gamma\frac{1 + \eta_0}{2s^2} + \sqrt{1 + \eta_0}\frac{\Theta}{2s^2}}, \quad \rho_r = \sqrt{\frac{s - u_0}{s} - \gamma\frac{1 + \eta_0}{2s^2} + \sqrt{1 + \eta_0}\frac{\Theta}{2s^2}} \, ,$$

其中 $\Theta = \sqrt{\gamma^2(1 + \eta_0) + 4s^2(1 - \gamma) + 4\gamma s u_0}$。

将从未扰动系统（$\delta = 0$）的实特征值 $\rho_r^{\pm} = \pm\rho_r$ 产生的实特征值记为 $\lambda_r^{\pm}$，将从未扰动系统的虚特征值 $\rho_i^{\pm}$产生的实特征值记为 $\lambda_i^{\pm}$，我们可以计算渐近极限为 $\delta \to 0$

$$\lambda_r^{\pm} \sim \frac{\delta}{4s}\frac{\Theta - \gamma\sqrt{1 + \eta_0}}{\Theta} \pm \rho_r + O(\delta^2), \quad \lambda_i^{\pm} \sim \frac{\delta}{4s}\frac{\gamma\sqrt{1 + \eta_0} + \Theta}{\Theta} \pm \mathrm{i}\rho_i + O(\delta^2) \, ,$$

以及当 $\delta \to \infty$

$$\lambda_i^- \sim \frac{1 + \eta_0 - (s - u_0)^2}{\delta(s - u_0)}, \quad \lambda_i^+ \sim \sqrt{\frac{s - u_0}{s}} - \frac{(1 + \eta_0)[(1 - \gamma)s + \gamma u_0]}{2\delta s(s - u_0)} \, ,$$

$$\lambda_r^- \sim -\sqrt{\frac{s - u_0}{s}} - \frac{(1 + \eta_0)[(1 - \gamma)s + \gamma u_0]}{2\delta s(s - u_0)}, \quad \lambda_r^+ \sim \frac{\delta}{s} \, .$$

值得一提的是，关于 $\gamma = 0$ 的前述关系与 BBM–BBM方程情形下推导出的关系一致。

注意，在 BBM–BBM系统情形下推导出的 (63)，对于 Bona–Smith系统情形同样成立，因为 $P_2(\lambda)$ 中 λ^3、λ 和 λ^0 的系数不受 γ 影响。此外，$P_2(\pm\sqrt{A}) = -\frac{(1+\eta_0)[(1-\gamma\ s+\gamma u_0]}{s^3} \neq 0$。然而，$\lambda^2$ 的系数现在是 $-2\tilde{A}$~，而不是 $-2A$，并且 A 可能为负。因此，附录 A 中依赖于 $P_2(\lambda)$ 的拐点以及 λ^2 系数具体形式的论证不能原封不动地沿用。公式 (68) 仍然成立，因此对于所有 $\delta > 0$，$Re(\lambda_i^{\pm}) > 0$。附录 A 分析的其余步骤（$m(\delta)$ 的单调性、复特征值在重正特征值处的碰撞及其虚部的单调性）已针对 $\gamma \in \{0.25, 0.5, 0.75, 1\}$ 和 $1 < s \le 60$ 进行了数值验证，具体细节从略。

为确定临界分岔值 δ_0，我们计算 $P_2(\lambda)$ 与 $P_2'(\lambda)$ 的最大公因式的欧几里得算法中的最后一个余式。该余式为

$$\frac{\left(16s^2(A-B)+3\delta^2\right)^2\tilde{S}(\delta)}{64\left(2\delta^2s^3\left(7A^2-18AB+2B^2+3q\right)+32s^5(A-B)\left((A-B)^2+q\right)+3A\delta^4s\right)^2},$$

其中 A 和 q 同前，且

$$\begin{aligned}\tilde{S}(\delta) =&4A^3\delta^6+\left(A^2\left(13A^2-44AB+4B^2\right)+6Aq(6B-5A)-27q^2\right)s^2\delta^4\\&+32\left(-q\left(2A^2-12AB+B^2\right)(A-B)+A^2(A-B)^3-3q^2(A-3B)\right)s^4\delta^2\\&-256q\left((A-B)^2+q\right)^2s^6\ .\end{aligned}$$

˜我们得出结论：当 $S(\delta)=0$时，共轭复特征值会合并为一个重正特征值。根据笛卡尔符号法则，关于变量 $x=\delta^2/s^2$ 的相应三次多项式至少有一个正实根。为验证该根的唯一性，我们使用 Mathematica®进行了符号计算，求得三次多项式 $\tilde{S}(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 的判别式：

$$\Delta=18abcd+b^2c^2-4ac^3-4b^3d-27a^2d^2\ ,$$

并确认对于所有 $s>1$ 和 $\gamma\in[0,1]$，均有 $\Delta<0$。然而，所得表达式并不特别简洁，因此此处不再列出。

除了这些符号计算外，我们还数值研究了在若干个 γ 和 $s>1$取值下，三次多项式˜ $S(x)$ 的根。在所有情况下，我们都发现恰有一个正实根和˜两个共轭复根。我们将 $S(\delta)=0$ 的正实根（临界分岔值）记为 $\delta_0(\gamma)$，以强调其对 γ的依赖。对于 $\gamma=0$， $\delta_0(0)$ 的值与第 3.1 节中得到的值一致。

最后，我们注意到，在这种情况下，能量泛函 H 的形式为

$$H(\mathbf{U})=-su'\eta'+\frac{\gamma}{2}(\eta')^2+f(\mathbf{u})\ . \tag{49}$$

由于 H 在 BBM–BBM 系统和 Bona–Smith 系统中的定义不同， u 和 η 的临界点行为也有所不同。在 Bona–Smith 情形下， η 的临界点与 H 的临界点重合，并且我们有 $H(\mathrm{U})<f(\mathrm{u}_0)$。相比之下，在 u 的临界点处可得 $H(\mathrm{U})=\frac{\gamma}{2}(\eta')^2+f(\mathrm{u})$，这与 BBM–BBM 情形不同。因此，在这两个系统中，解的最大值和最小值可能出现的区域并不相同；Bona–Smith 系统行波的最大值和最小值由曲线 $f_u(\mathrm{u})=0$ 和 $\frac{\gamma}{s}f_u(\mathrm{u})+f_\eta(\mathrm{u})=0$ 所界定。然而，我们通过实验验证，对于足够大的 ξ 值，最大值和最小值实际上被限制在相同的区域内。此外，我们通过实验确认，对于所有计算得到的 ξ， $H(\mathrm{U})<f(\mathrm{u}_0)$；尽管在第 6 节的实验中，某些情况下 $H(\mathrm{U})$ 接近 $f(\mathrm{u}_0)$，但距离 $|H(\mathrm{U})-f(\mathrm{u}_0)|$ 始终大于 10^{-3}。

最后，我们注意到，对于 Bona–Smith系统，直线 ℓ_2 由 $\eta=\frac{2s}{\gamma}u$给出。该直线与直线 ℓ_1（ u轴）一起界定了这样的区域：在该区域内， $Q(\mathrm{u})<0$，而曲线 $\mathcal{C}$ 位于其内部；见图 4。由于在这种情况下， $-su'\eta'=H(\mathrm{U})-f(\mathrm{u})-\frac{\gamma}{2}(\eta')^2,$，因此第3.2节中的关系式 (33)–(38) 在 Bona–Smith系统中仍然成立，只需将 $f(\mathrm{u})$ 替换为 $f(\mathrm{u})+\frac{\gamma}{2}(\eta')^2$。特别地，

$$H(\mathbf{U})=\frac{\delta}{s}e^{\frac{\delta}{s}\xi}\int_\xi^\infty e^{-\frac{\delta}{s}\tau}\left(f(\mathbf{u})+\frac{\gamma}{2}(\eta')^2\right)d\tau\ ,$$

因此，对于任何位于 $\mathcal{D}$ 中的异宿轨道，都有 $H(\mathrm{U})>0$。经过这一修改，第3.2节中提到的其余结论对于 Bona–Smith系统同样成立。

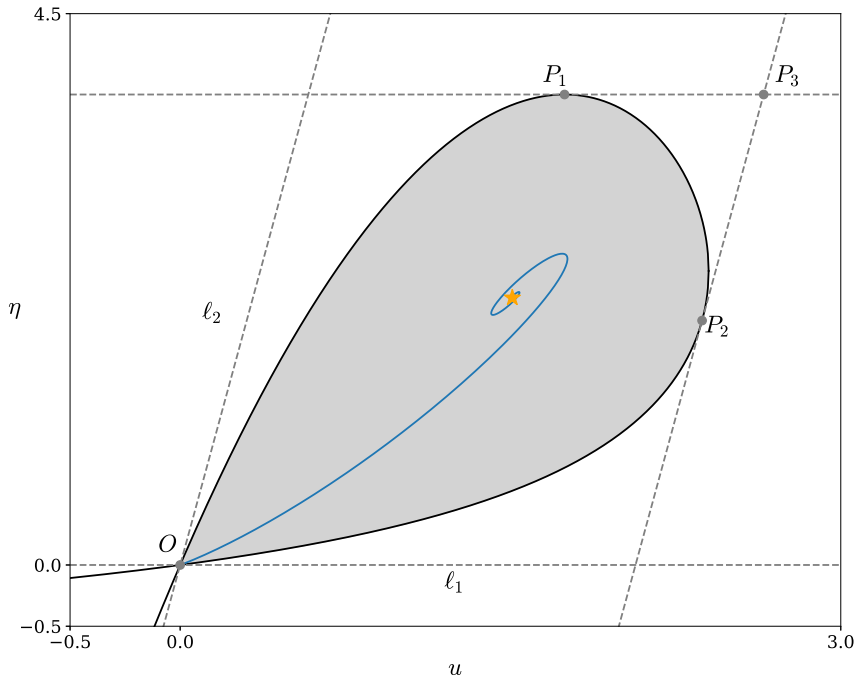


FIGURE 4. Bona–Smith系统的一个异宿轨道的投影，其中$\gamma = 2/3$ 连接物理空间中的临界点0和U_0 （以星号表示），当 $s = 2.2$ 且 $\delta = 1.8$时。投影轨道 $\mathcal{R}$ 完全位于阴影区域 $\mathcal{D}$的内部。

5. NUMERICAL COMPUTATION OF THE HETEROCLINIC ORBITS

本节介绍一种数值方法，用于计算类似于上述 Boussinesq型系统中的振荡激波和正则化激波的异宿轨道。为简便起见，我们仅针对 BBM–BBM系统介绍该方法；不过，类似的步骤也用于Bona–Smith系统以及经典Boussinesq–Peregrine系统。

根据（16），我们可以写成

$$\eta = -su'' + su - \frac{1}{2}u^2 + \delta u' \ ,$$

通过后续代入，我们得到

$$s^2 u^{(4)} - \delta s u^{(3)} - 2s(s-u)u'' + (\delta(s-u) + su')u' + (s^2 - 1 - \frac{3}{2}su + \frac{1}{2}u^2)u = 0 \ . \tag{50}$$

我们寻求满足以下条件的解： $u \to u_0$ 且 u'、u''、$u^{(3)} \to 0$，当 $\xi \to -\infty$ 和 u、u'、u''、$u^{(3)} \to 0$ 时$\xi \to +\infty$。我们考察两端的渐近解，这可能是一种将其与有限区间上的数值解进行匹配的有用机制。

备注 5.1. 对于更一般的 Bona–Smith系统 (44)，类似地，先将两个方程合并以消去 η''，再重新整理结果，得到一个用 u、u'、u'' 表示 η 的表达式，从而将其化为关于 u 的四阶问题。将所得表达式代入

原始的两个方程中的任意一个，再经过一些代数运算，即可得到关于 u 的（非线性）四阶常微分方程，具体如下：

$$\begin{aligned}0 =& -s\left(s^2u^{(4)}+(\gamma-s^2)u''+su'^2+suu''-\delta su^{(3)}\right)(\gamma(s-u)-s)^2\\&-s\gamma u''\left(s^2u''+(\gamma-s^2)u+\tfrac{1}{2}su^2-\delta su'\right)(\gamma(s-u)-s)\\&-2s\gamma u'\left(s^2u^{(3)}+(\gamma-s^2)u'+suu'-\delta su^{(2)}\right)(\gamma(s-u)-s)\\&-2s\gamma^2u'^2\left(s^2u''+(\gamma-s^2)u+\tfrac{1}{2}su^2-\delta su'\right)\\&+(s-u)\left(s^2u''+(\gamma-s^2)u+\tfrac{1}{2}su^2-\delta su'\right)(\gamma(s-u)-s)^2-u(\gamma(s-u)-s)^3\,.\end{aligned}$$

随后，以此处针对 BBM–BBM系统所述的类似方法求解。

首先考虑 $\xi\to+\infty$ 的情形。由于 u、u'、u'' 和 $u^{(3)}$ 均衰减至零，因此渐近行为的首阶分量满足线性化问题

$$s^2u^{(4)}-\delta su^{(3)}-2s^2u''+\delta su'+(s^2-1)u=0\,,\quad \text{as}\quad \xi\to+\infty\,.$$

该线性常系数微分方程的特征方程等价于 $s^2P_1(\lambda)$，见式（25）。因此，我们预计恰有两个特征值为负，恰有两个特征值为正。负特征值会使解在 $\xi\to\infty$ 时产生所需的衰减，因此将它们记为 λ_{+1}、λ_{+2}，渐近解必须具有如下形式

$$u\sim u_{+\infty}:=c_{+1}e^{\lambda_{+1}\xi}+c_{+2}e^{\lambda_{+2}\xi},\quad \xi\to\infty\,. \tag{51}$$

类似地，考虑 $\xi\to-\infty$ 的情形。在这里，引入 $u=u_0+\tilde{u}$ 很方便，使得当 $\xi\to-\infty$ 时有 $\tilde{u}$、$\tilde{u}'$、$\tilde{u}''$、$\tilde{u}^{(3)}\to0$，并且首阶渐近行为满足线性化问题

$$s^2\tilde{u}^{(4)}-\delta s\tilde{u}^{(3)}-2s(s-u_0)\tilde{u}''+\delta(s-u_0)\tilde{u}'+(u_0-\frac{3}{2}s)u_0\tilde{u}=0\,,\quad \text{as}\quad \xi\to-\infty\,.$$

该线性常系数微分方程的特征方程等价于$s^2P_2(\lambda)$，见（27）。因此，当 $\delta>0$ 时，我们预期恰有三个特征值的实部为正（其中两个在 $0<\delta<\delta_0$时为复数），而第四个特征值始终为负实数。这些实部为正的特征值对应着当 $\xi\to-\infty$时所需的衰减，因此将它们记为 λ_{-1}、λ_{-2}、λ_{-3}，当任意两个都不相等时，渐近解必具有如下形式

$$u\sim u_{-\infty}:=u_0+c_{-1}e^{\lambda_{-1}\xi}+c_{-2}e^{\lambda_{-2}\xi}+c_{-3}e^{\lambda_{-3}\xi},\quad \xi\to-\infty\,. \tag{52}$$

当 $\delta<\delta_0$ 时，两个特征值构成一对共轭复数；由于我们寻求实解，相应的系数也互为共轭复数。在 $\delta=\delta_0$的情形下， $P_2(\lambda)$ 有一个二重根，且不失一般性，令 $\lambda_{-2}=\lambda_{-3}$，渐近解具有如下形式

$$u\sim u_{-\infty}:=u_0+c_{-1}e^{\lambda_{-1}\xi}+(c_{-2}+c_{-3}\xi)e^{\lambda_{-2}\xi},\quad \xi\to-\infty\,.$$

注5.2. 对于经典Boussinesq–Peregrine系统，所需的异宿轨道可通过求解以下二阶问题来描述

$$-su(u-s)-u+\tfrac{1}{2}u^2(u-s)+s(u-s)u''-\bar{\delta}(u-s)u'=0\,.$$

我们再次利用 $\xi=\pm\infty$处的渐近解来解决这一问题。在 $\xi\to+\infty$ 的极限情况下，线性化问题的特征多项式所对应的特征值始终恰好有一个负的（实）特征值。在 $\xi\to-\infty$的极限情况下，与线性化问题相关的特征值再次取决于 δ 相对于特定 δ_0的取值，具体而言：当 $\delta>\delta_0$时，有两个不同的正实特征值；当 $\delta=\delta_0$时，有一个重复的（双重）正实特征值；当 $0<\delta<\delta_0$时，有两个实部为正的复特征值。

除此之外，渐近解的使用方式与此处针对BBM–BBM系统所述的方式类似。

求解（50）的一个困难在于，给定解的任何平移也必定是一个解。除此之外，这还会导致这样一个问题：系统的代数近似并不是闭合的。注意到我们预期 u' 具有全局最小值，即在 u下降最陡的拐点处，因此可以利用这一点使系统闭合，并将解“锚定”。例如，在某个特定的 ξ_0 （名义上为 $\xi_0 = 0$）处强制满足 $u''(\xi_0) = 0$ ，我们可以结合两个渐近解，为用于求解非线性问题（50）的任意迭代方法构造一个初始猜测。具体而言，两个渐近解总共恰好包含五个未知系数。我们可以通过强制满足以下五个条件，在原点处将它们匹配:

$$u_{-\infty}(0) = u_{+\infty}(0)\,, \quad u'_{-\infty}(0) = u'_{+\infty}(0)\,, \quad u''_{-\infty}(0) = 0\,, \quad u''_{+\infty}(0) = 0\,, \quad u^{(3)}_{-\infty}(0) = u^{(3)}_{+\infty}(0)\,.$$

求出五个未知系数后，我们得到（50）的一个近似解，该解在两端都具有预期的渐近行为。在随后的迭代过程中（例如通过牛顿法形成的迭代），我们可以继续强制满足 $u''(0) = 0$ ，以此使系统保持闭合，同时使解中有意义的部分继续“锚定”在原点附近。注意，在这样做时，我们并未假设 $\eta''(0)$是否也可能同时为零。

另一个挑战是，与渐近行为相关的特征值可能具有相差悬殊的大小，尤其是在 $\delta \ll \delta_0$ 或 $\delta \gg \delta_0$的情况下。这可能导致系统病态，因此需要谨慎处理。

我们的实现包括推导与 (50) 相关的牛顿迭代，然后在原点附近的一个有限区间上，使用中心二阶有限差分对所得迭代进行离散化（注意，由渐近近似构造的初始猜测有助于选择合适的有限区间）。随后扩充相应的代数系统，将两端渐近解所涉及的五个（未知）系数纳入其中。四阶微分方程需要 4 个边界条件，而为了闭合该系统，还需要另外五条信息（每个渐近解系数对应一条）。我们要求 u、u'、u''、$u^{(3)}$ 的单边有限差分近似在每个端点处与相应的渐近解匹配，从而提供 $4 \times 2 = 8$ 条信息。我们对参数进行了一些重缩放，以改善与两端匹配条件相关方程的条件数性质。对于最后一条信息，我们通过 u''的标准中心有限差分近似，要求$u''(0) = 0$ 。以渐近解得到的初始猜测为起点，我们能够较快地收敛：通常只需四次迭代，相对误差（按二范数计算）即可小于 10^{-6} （前提是 δ 既不过小也不过大）。

非线性迭代细节。假设 u_k 是 u 的某个近似解，我们希望找到修正量 Δu ，使得 $u_{k+1} = u_k + \Delta u$。代入（50）式后，得到

$$\begin{aligned}(53)\quad & s^2(\Delta u)^{(4)} - \delta s(\Delta u)^{(3)} - 2s(s-u_k)(\Delta u)'' \\ & + (\delta(s-u_k) + 2su'_k)(\Delta u)' + (s^2 - 1 - 3su_k + \frac{3}{2}u_k^2 - \delta u'_k + 2su''_k)(\Delta u) + O((\Delta u)^2) \\ & = -s^2 u_k^{(4)} + \delta s u_k^{(3)} + 2s(s-u_k)u''_k - (\delta(s-u_k) + su'_k)u'_k - (s^2 - 1 - \frac{3}{2}su_k + \frac{1}{2}u_k^2)u_k\,.\end{aligned}$$

忽略这些 O（（Δu）^{2}）项后，该方程的解给出了 Δu的一个近似，这构成了求解（50）式的牛顿法。为启动这一迭代，我们选择 u_1 作为基于上述在 $\xi = 0$处匹配的两个渐近解得到的近似解。

u_1 的性质有助于确定合适的区间 $[a, b]$，其中 $a < 0 < b$，在该区间内， u 的导数在端点处已充分衰减。随后，我们将此区间离散化

为等距点 $\xi_i = a + (b-a)i/n$，其中 $i = 0$、1、2、……、n，并使用有限差分估计各点处的 u_k、u_{k+1}、Δu及其导数。具体而言，我们以中心有限差分模板在 ξ_2、ξ_3、……、ξ_{n-3}、ξ_{n-2}处对式（53）进行离散化。对于典型的四阶边界问题，需要四个边界条件，例如可在点 ξ_0、ξ_1、ξ_{n-1}、ξ_n处施加边界条件。然而，对于这个问题，我们希望确保

$$u^{(j)}(a) = u^{(j)}_{-\infty}(a)\,, \tag{54}$$
$$u^{(j)}(b) = u^{(j)}_{+\infty}(b)\,,$$

对于每个 $j = 0$，1，2，3。回想一下，这些渐近解总共包含五个未知系数，需要在牛顿迭代中妥善处理。例如，在 $\xi = a$ 处，我们展开匹配条件，得到

$$\begin{aligned}
u_k(a) + (\Delta u)(a) &= u_0 + (c_{-3} + \Delta c_{-3})e^{\lambda_{-3}a} + (c_{-2} + \Delta c_{-2})e^{\lambda_{-2}a} + (c_{-1} + \Delta c_{-1})e^{\lambda_{-1}a}\,,\\
u_k'(a) + (\Delta u)'(a) &= (c_{-3} + \Delta c_{-3})\lambda_{-3}e^{\lambda_{-3}a} + (c_{-2} + \Delta c_{-2})\lambda_{-2}e^{\lambda_{-2}a} + (c_{-1} + \Delta c_{-1})\lambda_{-1}e^{\lambda_{-1}a}\,,\\
u_k''(a) + (\Delta u)''(a) &= (c_{-3} + \Delta c_{-3})\lambda_{-3}^2e^{\lambda_{-3}a} + (c_{-2} + \Delta c_{-2})\lambda_{-2}^2e^{\lambda_{-2}a} + (c_{-1} + \Delta c_{-1})\lambda_{-1}^2e^{\lambda_{-1}a}\,,\\
u_k^{(3)}(a) + (\Delta u)^{(3)}(a) &= (c_{-3} + \Delta c_{-3})\lambda_{-3}^3e^{\lambda_{-3}a} + (c_{-2} + \Delta c_{-2})\lambda_{-2}^3e^{\lambda_{-2}a} + (c_{-1} + \Delta c_{-1})\lambda_{-1}^3e^{\lambda_{-1}a}\,,
\end{aligned}$$

在 $\xi = b$ 处也类似（注意，此处的 u_0 是式（21）中的常数，而非迭代次数）。在 $\xi = a$、b 处，与 u_k 和 Δu 相关的导数均采用单边二阶有限差分模板进行离散化。此外，令 i_0 为使 $|\xi_i|$ 最小的指标（理想情况下为 $\xi_{i_0} = 0$，否则也应足够接近），则我们还希望确保

$$u_k''(\xi_{i_0}) + (\Delta u)''(\xi_{i_0}) = 0\,. \tag{55}$$

这里，导数 u_k''、$(\Delta u)''$ 采用标准中心有限差分模板进行近似。随后，我们构造并求解线性系统

$$\begin{bmatrix}
\mathrm{row}_1 & \cdots\\
\mathrm{row}_2 & \cdots\\
[M] & [0_{(n-3)\times 5}]\\
\mathrm{row}_n & \cdots\\
\mathrm{row}_{n+1} & \cdots\\
\mathrm{row}_{n+2} & \cdots\\
\mathrm{row}_{n+3} & \cdots\\
\mathrm{row}_{n+4} & \cdots\\
\mathrm{row}_{n+5} & \cdots\\
\mathrm{row}_{n+6} & \cdots
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
(\Delta u)(\xi_0)\\
(\Delta u)(\xi_1)\\
\vdots\\
(\Delta u)(\xi_{n-1})\\
(\Delta u)(\xi_n)\\
(\Delta c_{-3})e^{\lambda_{-3}a}\\
(\Delta c_{-2})e^{\lambda_{-2}a}\\
(\Delta c_{-1})e^{\lambda_{-1}a}\\
(\Delta c_{+1})e^{\lambda_{+1}b}\\
(\Delta c_{+2})e^{\lambda_{+2}b}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
b_1\\
b_2\\
r\\
b_n\\
b_{n+1}\\
b_{n+2}\\
b_{n+3}\\
b_{n+4}\\
b_{n+5}\\
b_{n+6}
\end{bmatrix}\,,$$

其中，M 和 r 表示在每个点 ξ_2、ξ_3、……、ξ_{n-2}处对（53）进行离散化后得到的相应矩阵和向量（M本质上是雅可比矩阵，而 r是最近一次残差的相反数）。该系统其余的九行用于施加八个匹配条件（54）和“锚定”条件（55）。这九行的具体排列并不重要，但将 $\xi = a$ 的零阶和一阶导数匹配条件分别施加在第1行和第2行，并将 $\xi = b$ 的零阶和一阶导数匹配条件分别施加在 n 行和 $n+1$行，是较为方便的做法，即类似于处理更典型的四阶边值问题。注意，为了改善矩阵的条件数性质，Δc_j 的某种缩放被纳入左侧的列向量中（当 δ 非常小或 δ 非常大时，这对计算尤其有用，因为此时渐近解的特征值的实部在数量级上可能有显著差异）。

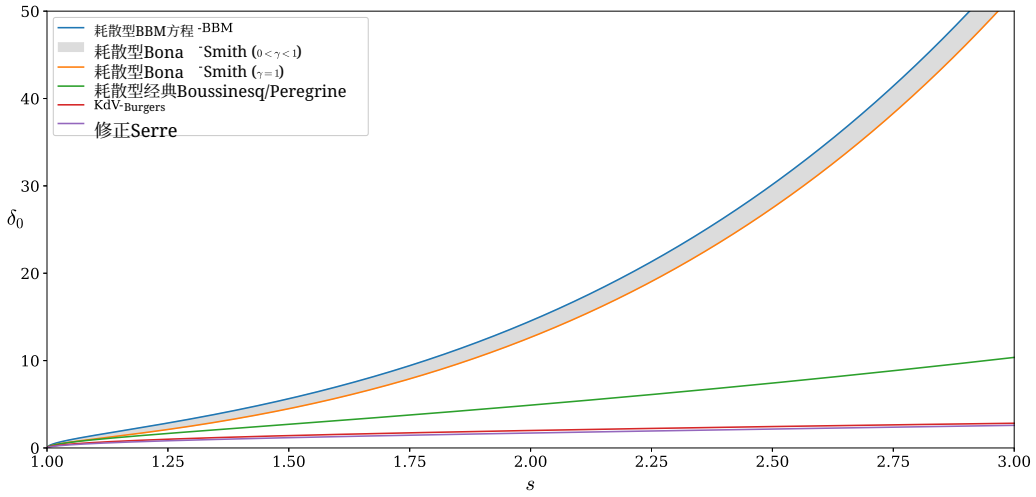


FIGURE 5.不同耗散型 Boussinesq型水波模型的分岔值比较 δ_0 。

可以通过以下方式轻松检查求解器的精度：（a）改变区间 $[a,b]$离散化时的空间分辨率；或（b）在步长固定的情况下，使用更大的区间计算解并比较其中心部分。对于这两项测试，我们都观察到解之间具有极好的一致性。尽管我们发现上述方法已足以达到二次收敛率，但如果将（53）的二阶有限差分估计替换为更高阶的有限差分模板或任何其他适当的配置法，则可以获得更高的精度。

6. COMPARISON OF VARIOUS BOUSSINESQ SYSTEMS

本节采用第 5 节所述的数值方法，计算上述系统的异宿轨道。我们重点考察这些轨道的形状如何随不同的 $\delta > 0$ 和 $s > 1$取值而变化。数值计算中，牛顿法的收敛容差设为 10^{-9}，并使用包含 $n+1$ 个节点的均匀网格对区域 $[a,b]$ 进行离散化，其中 $n = 2^4(b-a)$，假设 a、$b \in \mathbb{Z}$。

在以下所有比较中，缩放耗散参数˜的 δ 和 δ均取相同的数值。对于 $\gamma = 1$的Bona–Smith系统以及经典Boussinesq–Peregrine系统，这对应于相同的黏度 ν；而对于BBM–BBM系统，对应的黏度则小 $\sqrt{2}$倍。

首先，我们注意到，不同 Bona–Smith系统的临界分岔值 δ_0 各不相同，这取决于 γ的取值。此外，在其他Boussinesq类模型中，这些临界值也存在显著差异，例如耗散型经典 Boussinesq–Peregrine 系统 [12]、修正 Serre–Green–Naghdi 系统 [7], 以及 KdV–Burgers 方程 [10]。有趣的是，在这些模型中，相应临界值 δ_0 之间的差异往往会在 $s \approx 1$取较小值时减小，但随着 s 偏离 1 而增大。这一趋势如图˜图 5 所示，其中我们将 δ_0 和 δ_0 绘制为 s的函数。图中所示的 δ_0 是式（60）中的多项式以及 $S(\delta)$ 的正˜根；对于 s =1.0001、1.0002、.....、3，这些根使用 NumPy roots函数计算得到。

现在，我们考察上述系统的解在固定 $s = 2$ 的情况下，随一系列 δ值变化时的形状。尽管我们测试的所有 $s > 1$ 值都表现出类似的定性行为，

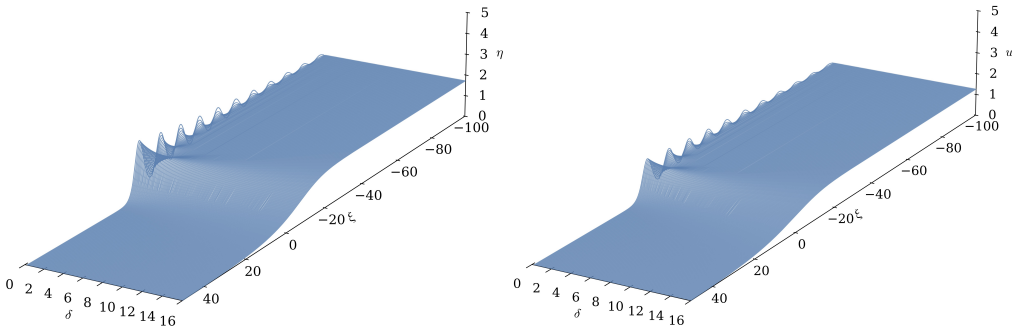


FIGURE 6. 耗散参数 δ 对 $s=2$ 和 $\delta\in[0.4,16]$时 BBM–BBM系统行波的影响。

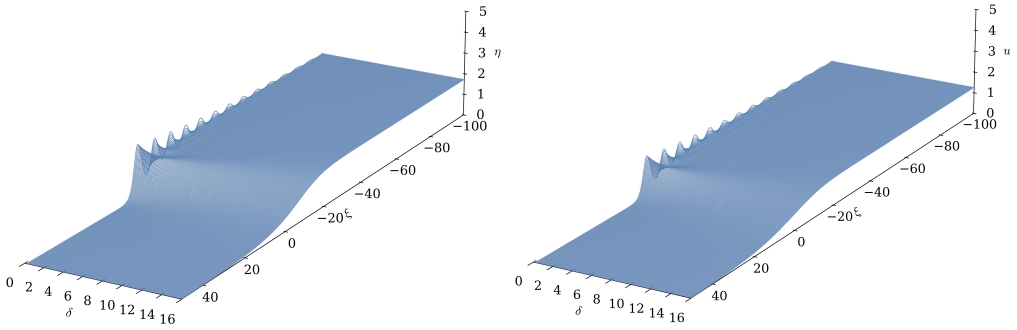


FIGURE 7. 耗散参数 δ 对 $\gamma=1$、 $s=2$ 和 $\delta\in[0.4,16]$时 Bona–Smith系统行波的影响。

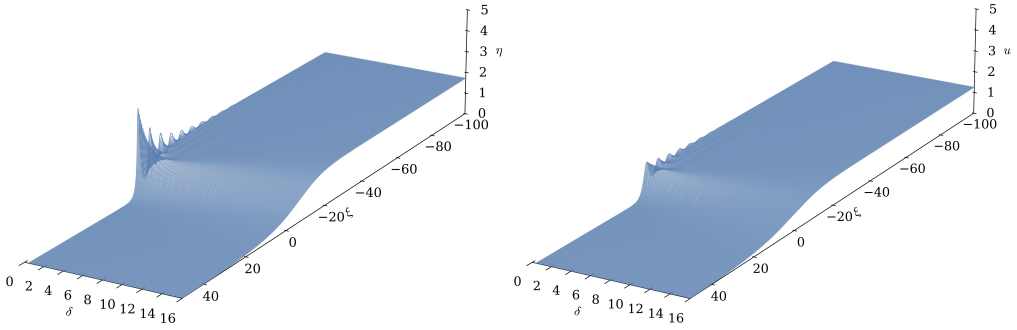


FIGURE 8. 耗散参数 δ 对 $s=2$ 和 $\delta\in[0.4,16]$时经典Boussinesq–Peregrine系统行波的影响

但这里我们聚焦于代表性情形 $s=2$。该值对应于中等振幅的波，在缩放变量中满足 $\eta_0=\sqrt{3}$，此时模型之间的差异清晰可见。当 s 接近 1 时，模型之间的差异变小，如图 5 所示的临界值 δ_0 所表明；而当 s 取较大值时，波的振幅增大，并偏离 Boussinesq 系统所适用的弱非线性区域。图 6、图 7 和图 8 分别展示了系统 (16)、(44) 和 (10) 在 $\gamma=1$ 和 $\delta\in[0.4,16]$下的行波解。

供参考， δ 对于 $s=2$ 的临界值如下：BBM–BBM系统的 $\delta_0(\gamma=0)\approx 14.538370386372641$，Bona–Smith系统（ $\gamma=1$）的 $\delta_0\approx 12.65598071295166$ ，以及经典Boussinesq系统的$\delta_0\approx 4.898979485566357$ 。

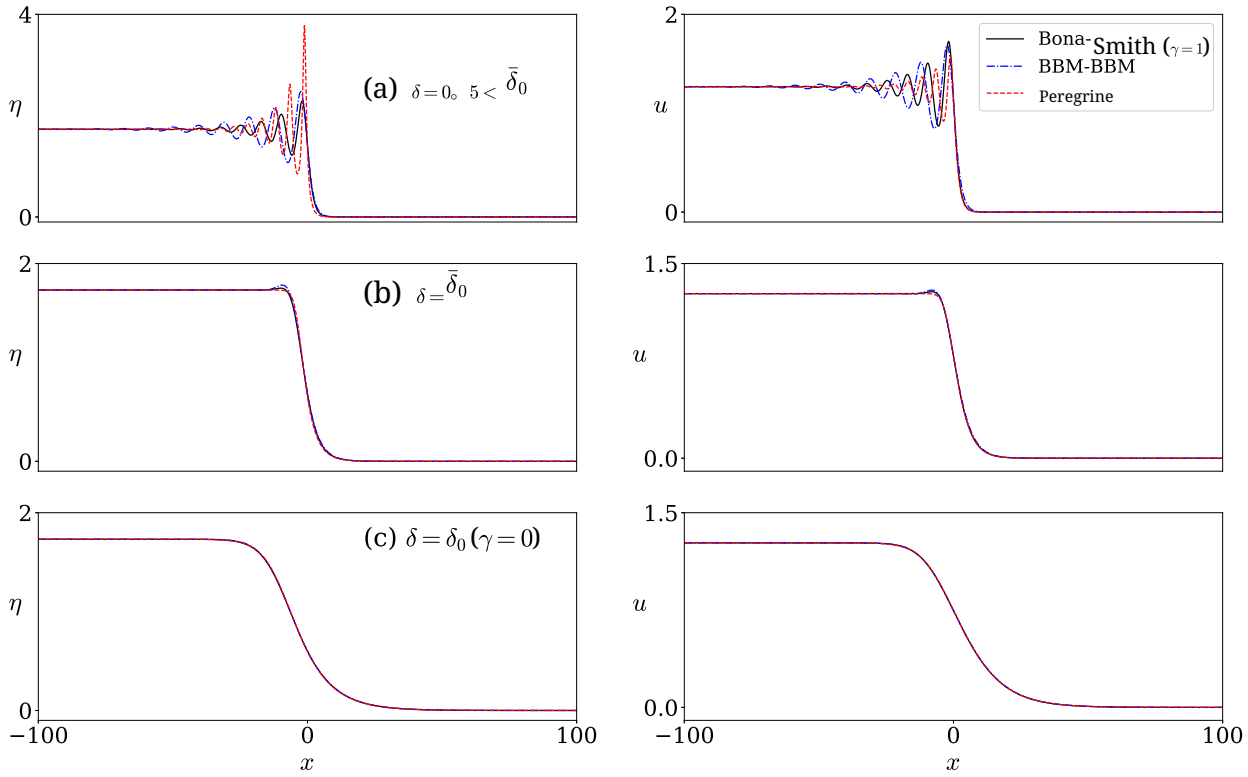


FIGURE 9. 小值和大值下解的比较，其中 δ 和 $s = 2$。

从这些图中可以看出，对于较小的 δ，Bona–Smith型系统和Peregrine系统的解存在显著差异。随着 δ 趋近于零，这两种模型中的振荡频率和幅度都会增大。然而，随着 δ 增大，这些振荡会迅速衰减；当 δ 略大于0.5时，两者的解便变得相当相似。这种趋同性与这些系统彼此渐近等价这一事实相符。

尽管如此，即使在 $\delta = 0$ 时，对于相同的 s 值，它们的孤立波解在振幅和空间变化方面仍有所不同。与前面一样，临界值 δ_0 在决定解的定性性质方面起着核心作用。对于我们考察的每个 γ 值，当 $\delta \geq \delta_0$ 时，解都严格递减；而对于所有 $\delta < \delta_0$，都会出现规则振荡。此外，数值计算证实，在所有情况下，解的最大值和最小值都保持在区域 $\mathcal{D}$ 内。

还值得强调的是，对于固定的 δ 值，我们考察的各种 Boussinesq 型系统的解非常相似，尤其是当 δ 变大时。事实上，在极限 $\delta \to \infty$ 下，这些解似乎趋于一个共同轮廓，对应于 f_u(u) $= 0$ 的情形。图 9 和图10 展示了这一行为，其中使用参数$s = 3$ 代替 $s = 2$。

我们得出结论，参数 δ 在决定系统解的形态方面起着关键作用。例如，对于经典 Boussinesq–Peregrine系统，已知当 $\delta \geq \delta_0$ 时，解严格单调，并称为正则化激波。相比之下，当 $0 < \delta < \delta_0$ 时，解呈现振荡行为，称为振荡激波。

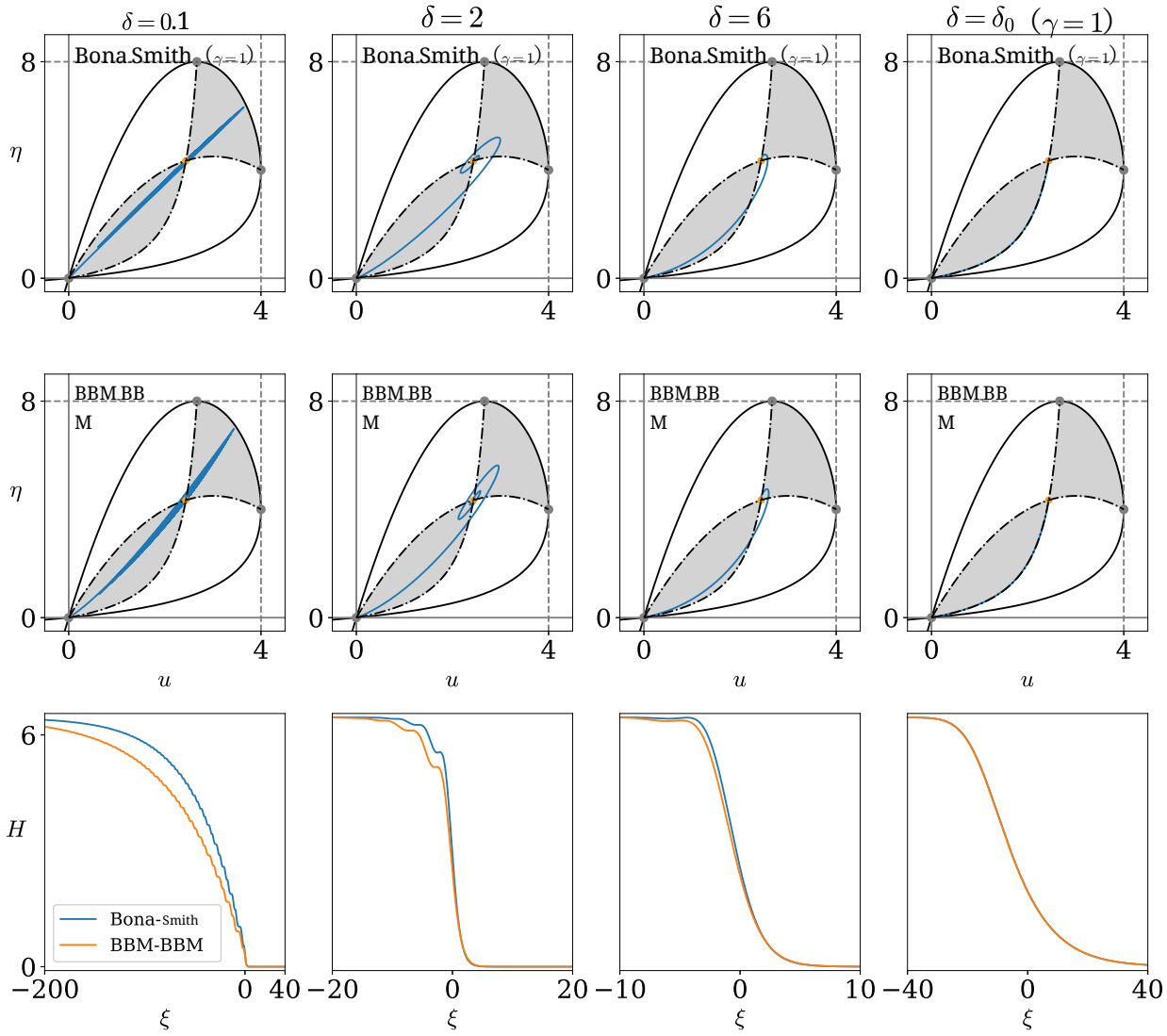


FIGURE 10. Bona–Smith（$\gamma = 1$）与 BBM–BBM 系统的异宿轨道在物理空间中的比较，以及相应的 H(U) 关于 ξ 的函数图像，其中 $s = 3$、 $\delta = 0.1$、2、6 和 δ_0（$\gamma = 1$）

图9(a)展示了当 $\delta = 0.5 < \delta_0$ 时，Bona–Smith系统（ $\gamma = 1$）、BBM–BBM系统（¯）以及经典Boussinesq–Peregrine系统的解；在这一参数取值下，所有解均呈振荡激波的形式。我们观察到，各系统解不仅在振荡幅度上存在显著差异，振荡频率也有明显不同。当 $\delta \to 0$ 时，振荡激波的前导脉冲预计将趋近于对应保守系统中具有相同速度 s 的孤立波。由于这些系统的孤立波并不相同，因此当 δ 取非零小值时，各解之间仍会存在显著差异。我们注意到，对于 $\delta = 0$，不存在这类异宿轨道，因此未对此情形进行计算。不过，这些差异仍处于其渐近等价所允许的范围内，因为所有系统在形式上都与同一底层渐近区域相一致。

在图9(b)中，我们绘制了相同系统的解，对应于 δ 在该值下，所有经典Boussinesq–Peregrine系统的解呈现为正则化激波，即严格递减剖面，而其他系统的解仍处于振荡激波状态。

尽管这些模型的临界分岔值 δ_0 存在显著差异，但所得波剖面却极为相似。这种高度一致性凸显了所有这些模型在捕捉相同底层波动力学方面的物理相关性和一致性。值得注意的是，对于Bona–Smith系统的计算解，$H(\mathrm{U}) - f(\mathrm{u}_0) < -10^{-3} < 0$ 对于我们计算的所有值 ξ 均成立。

最后，在图9(c)中，我们展示了这些系统在 $\delta = \delta_0(\gamma = 0)$ 下的解；对于这一取值，预计所有模型都支持正则化激波。所得波剖面几乎完全相同，不过仔细观察或进行详细的数值比较后，仍可发现细微差异。

图10展示了在 $\delta = 0.1$、2、6 以及 $\delta_0(\gamma = 1)$（其中 $s = 3$）时得到的轨道。第一行显示的是 $\gamma = 1$ 时 Bona–Smith 系统对应的轨道，第二行则显示 BBM–BBM 系统对应的轨道。随着 δ 减小，轨道趋于接近圆弧 P_1P_2。在我们的计算中，没有观察到任何轨道与该圆弧相交；然而，预计在极限情形 $\delta = 0$ 下会发生这种交点，此时轨道变为同宿轨道，并在圆弧 P_1P_2 [33] 上达到其最大值。在图10中，我们没有列出经典Boussinesq–Peregrine系统的解，因为其所有轨道都位于由 $f_u(\mathrm{u}) = 0$ 定义的曲线上。

尽管与 Bona–Smith 系统解的极值点相对应的点 (u, η) 不一定出现在与 BBM–BBM 系统解的极值点相同的区域中，但在图10中，我们给出了 BBM–BBM 系统解的极值点最可能出现的区域。至少当 ξ 的值足够大时，两个模型的表现似乎非常相似，两种情况下的极值点都出现在同一区域。对于非常负的 ξ 值，由于浮点运算，很难确定极值点的位置。

这些图还表明，$\mathbb{R}^4$ 中的轨道位于一个三维流形上；随着 $\delta \to 0$，该流形几乎与物理平面正交，从而形成一条对称同宿轨道。相反，随着 δ 增大，该流形似乎在物理空间上方变得平坦。此外，当 δ 的值较大时，解被限制在距离圆弧 P_1P_2 越来越远的区域内；在所有情况下，随着 δ 增大，轨道似乎都趋向于落在线 $f_u(\mathrm{u}) = 0$ 上的一个解。为验证这一点，考虑变量替换 $\xi \to \xi/\delta$。于是，(18) 的第一个方程变为

$$-\frac{s}{\delta^2}\eta'' + f_u(\mathbf{u}) = 0 \ ,$$

这意味着，对于所有 $s > 1$ 和 $\gamma \in [0, 1]$，解应满足 $f_u(\mathrm{u}) \sim 0$，当 $\delta \to \infty$ 时。正如计算得到的轨道所显示的，解会非常迅速地收敛到这种状态。

图10最后一行比较了 Bona–Smith系统（$\gamma = 1$）和 BBM–BBM系统（$\gamma = 0$）的 $H(\mathrm{U})$ 曲线。我们观察到，每当 u' 或 η' 消失时，导数 $\frac{d}{d\xi}H$ 也变为零，这与方程（32）一致。此外，在所有情况下，$H(\mathrm{U})$ 的值均满足$0 < H(\mathrm{U}) < f(\mathrm{u}_0)$。请注意，这些曲线的 ξ 轴刻度不同，以便更清楚地展示 H 的细节。随着 δ 减小，u 在 $\xi = 0$ 处拐点上的 H 值趋近于原点，这与以下预期一致：在极限 $\delta = 0$ 下，H 消失，此时系统变为哈密顿系统，且 $H(\mathrm{U}) = 0$。这些发现与第 3 节的理论讨论一致。

如第 5 节中简要讨论的那样，随着 δ 趋近于非常小的值，我们的数值方法越来越难以收敛，尤其是 s较大时。我们的方法是先在 δ 较大且 s 接近 1 的情况下计算一条初始轨道，然后通过小步长（通常为 $O(10^{-3})$）逐渐减小 δ 并增大 s，进行延拓，直至达到所需的值。在每一步中，先前计算得到的轨道都作为牛顿法的初始猜测，从而确保收敛。

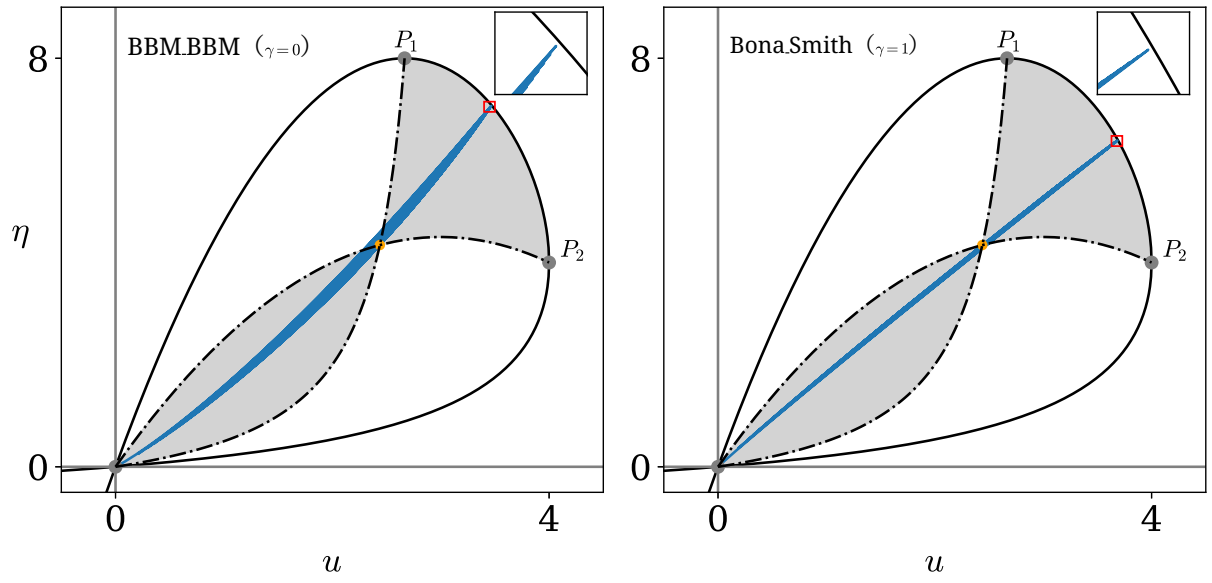


FIGURE 11. $s = 3$ 和 $\delta = 0.01$的振荡激波

对于 $s = 3$、 $\gamma = 0$ 和 $\gamma = 1$ ，我们成功测试的 δ 最小值为 $\delta = 0.01$。为了计算 δ 和 s 取这些值时的异宿轨道，我们首先求得了 $s = 1.01$和 $\delta = 0.1$处的轨道。接着，我们以 $d\delta = -0.01$ 为步长，对 δ 进行延拓，达到 $\delta = 0.01$。随后，以 $ds = 0.0001$ 为步长，关于 s 进行延拓，从而计算出 s 和 δ取所需值时的轨道。图11展示了在物理空间中计算得到的异宿轨道，并证实该轨道不与曲线 $\mathcal{C}$相交。图中还放大展示了轨道在曲线 $\mathcal{C}$附近的部分，更清楚地显示了轨道包含于 $\mathcal{D}$ 之中。不过，我们无法排除这样一种可能：当 δ更小时，该系统的轨道可能会离开区域 $\mathcal{D}$。在这种情况下，我们预计只有轨道中极小的一部分会离开开圆弧 P_1P_2。值得注意的是，若要使所关注的异宿轨道从 $\mathcal{C} \setminus \overline{P_1P_2}$离开，泛函 $H(\mathrm{U})$ 必须在 $\mathcal{D}$内部变为负值；否则，它就无法重新进入 $\mathcal{D}$ 并收敛到原点。

我们注意到，在本研究中，为了验证而计算（但未展示）的行波采用了足够大的区间（具体大小因情况而异），使得边界处的解值实际上与相应的平衡点重合。我们将这些计算所得的解作为系统 (4) 的初始条件，并进一步通过 [29], 的修正有限元方法进行了数值验证，结果表明这些波在传播过程中形状保持不变（在数值精度范围内）。

例如，图12展示了Bona–Smith系统中具有 $\gamma = 1$ 和 $\delta = 1$ 的振荡激波（ $s = 2.2$ ），以及具有相同 $\gamma = 1$但在区间（a， b） $=$ （-150，300）内取 $\delta = 18$ 的正则化激波的传播。 $\delta = 18$ 大于临界值 δ_0（$\gamma = 1$） ≈ 17.6253，因此平衡态U_0 是一个鞍点，且行波严格单调。作为初始条件，我们采用了通过前述方法数值生成的相应行波在有限元空间上的正交投影。在该实验中，有限元空间选取为由空间网格长度为 $\Delta x = 0.1$的分片线性元构成的标准拉格朗日空间。时间积分采用具有四个阶段的经典显式四阶龙格–库塔格式，且

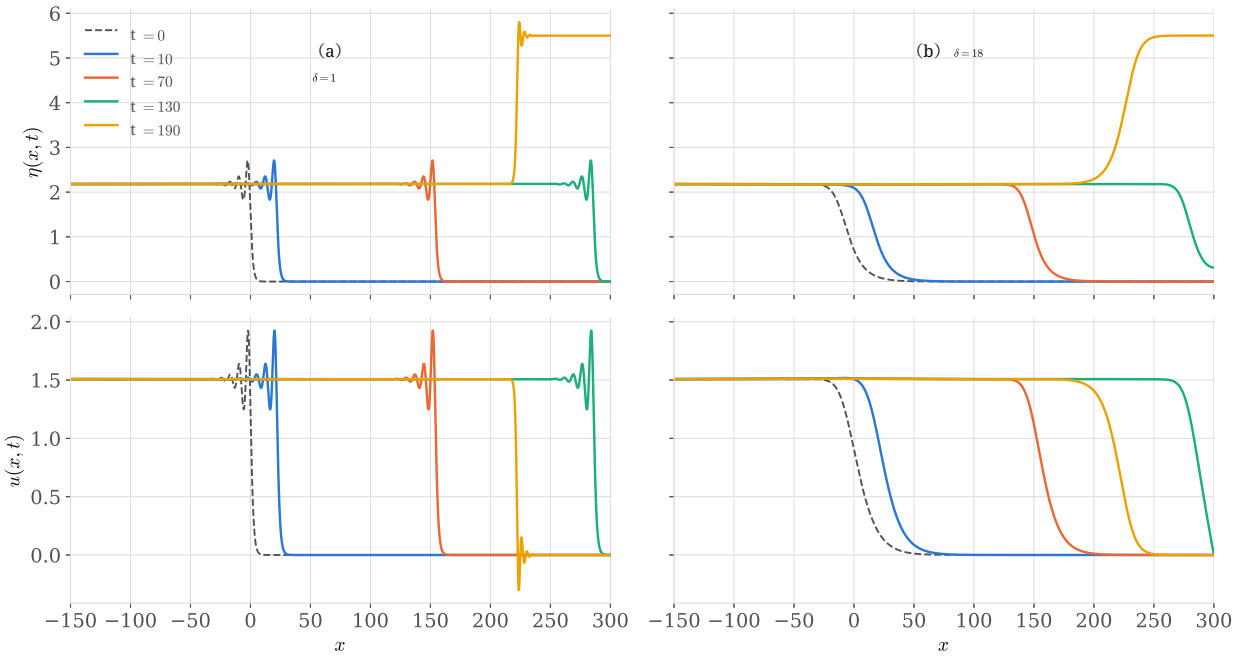


FIGURE 12. Bona–Smith系统中带有 $s = 2.2$ 的行波的传播与反射（$\gamma = 1$）以及耗散参数（a） $\delta = 1$ 和（b） $\delta = 18$

时间步长为 $\Delta t = 0.1$。图中显示的结果表明，这些行波是稳定的。

此外，由于我们在区间 (a, b) 的右端点施加了反射边界条件，即 $\eta_x\,(a) = \eta_x\,(b) = 0$, $u\,(a) = u_0$, $u\,(b) = 0$, [2]，行波在壁面处发生反射，随后向左传播。此类系统中的波反射等价于两个相同的反向传播波发生正面碰撞 [3], ，并表明即使在大扰动下，这些波仍然保持稳定。对于涉及其他Bona–Smith系统（包括BBM–BBM系统）的类似实验，也可以得出相应结论。对这类模型的解进行进一步的理论和数值分析将是未来工作的主题。

最后，我们考察这些行波是否由非行波初始条件生成。我们考虑具有 $\gamma = 1$ 的 Bona–Smith系统以及平滑阶跃

$$\eta(x,0) = \frac{\eta_0}{2}\left(1 - \tanh\frac{x}{w}\right), \qquad u(x,0) = \frac{u_0}{2}\left(1 - \tanh\frac{x}{w}\right), \tag{56}$$

其中 $w = 2$, $\mathbf{u}_0 = (u_0, \eta_0)$ 是与速度 $s = 2.2$ 对应的平衡态。我们使用相同的数值方法和相同的 Δx 和 Δt 值求解该系统，直至 $T = 200$ ；对于 $\delta = 0.1$ ，取值范围为区间 $(-150, 550)$，对于临界值 $\delta = \delta_0(\gamma = 1) \approx 17.6253$ ，取值范围为区间 $(-400, 600)$。结果见图13。在这两种情况下，阶跃都演化为向右传播的前沿。在 $\eta = \eta_0/2$ 处测得的前沿速度趋于 s，并且在 $t = 150$ 和 $t = 200$ 之间等于 2.2000。对于 $\delta = 0.1$ ，会生成振荡激波；而对于 $\delta = \delta_0$ ，前沿是单调的，并会生成正则化激波。图13底部的面板展示了前沿附近 $t = 200$ 时刻的解，以及经过平移、使两个前沿重合的 $t = 150$ 时刻的解。对于 $\delta = \delta_0$ ，在所示区域内两个剖面的差异小于 4×10^{-4} 。对于 $\delta = 0.1$ ，它们在前沿附近一致，在更靠后的区域则略有差异，因为振荡尾波仍在形成。由于初始条件不是

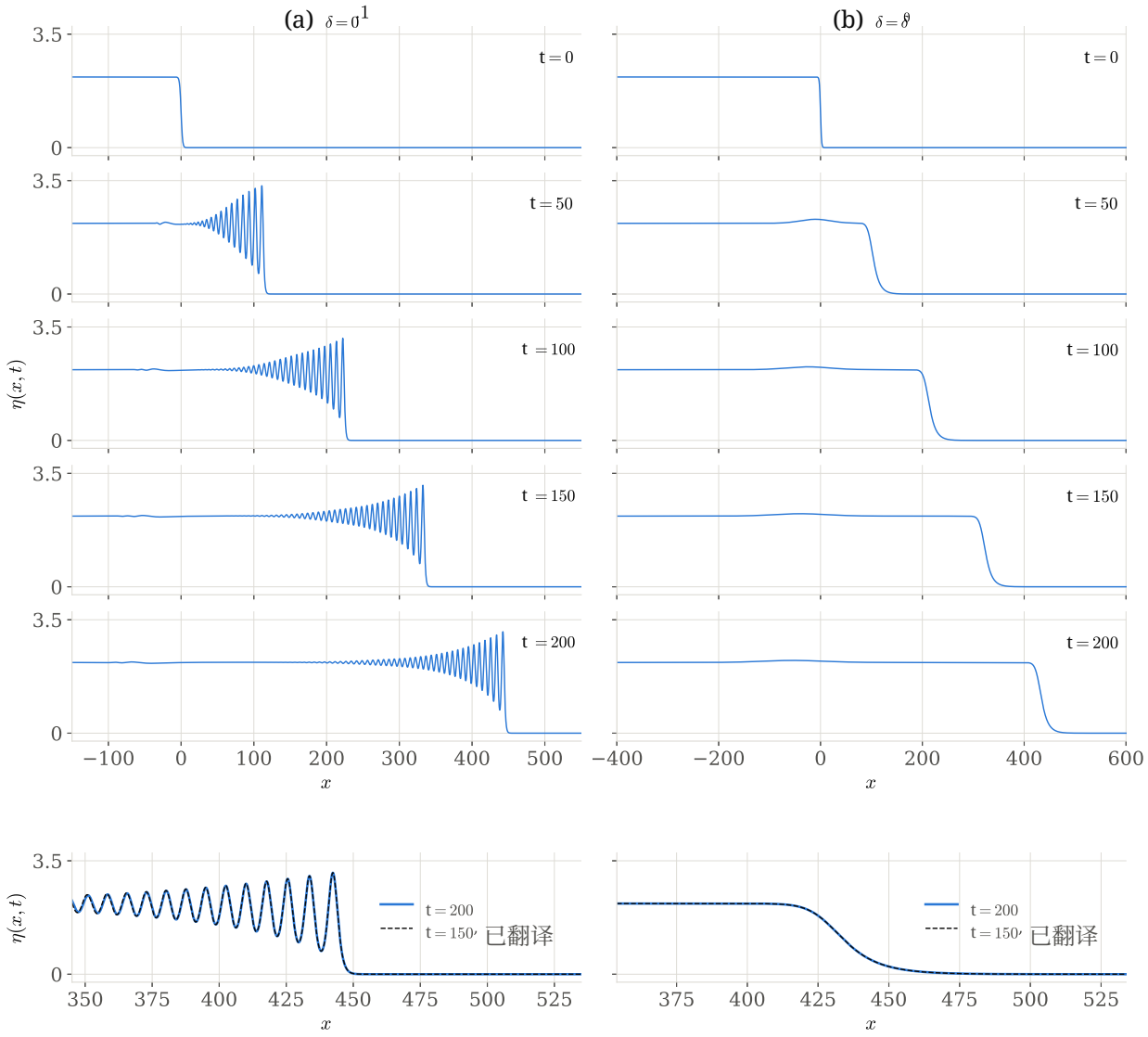


FIGURE 13. 由平滑阶跃（56）生成 Bona–Smith系统（$\gamma = 1$）的行波，其中 $s = 2.2$: （a）当 $\delta = 0.1$ 时的振荡激波；（b）当 $\delta = \delta_0$ 时的正则化激波。底部面板显示了前沿附近 $t = 200$ 处的解，以及经过平移、使两个前沿重合后 $t = 150$ 处的解。

行波，前沿后方远处仍会残留左状态的微小扰动，并且衰减缓慢。

7. CONCLUSIONS

本文研究了耗散对水波理论中出现的 Bona– Smith 型系统的行波解的影响。由于基础动力系统具有四维结构，分析过程尤为复杂。已知在没有耗散的情况下，此类系统存在对称同宿轨道以及其他多脉冲非物理同宿轨道。引入耗散后，对称同宿轨道似乎会

变形成连接两个不同平衡点的异宿连接。其中一个平衡点始终保持为鞍点，而另一个平衡点（由未受扰动的鞍中心演变而来）则经历一系列分岔：随着耗散参数增大，它先变为鞍焦点，最终变为鞍点。尽管发生了这些变化，所得异宿轨道似乎仍局限在物理空间的一个叶状区域内，其几何形状与耗散参数无关。

我们证明，异宿轨道的定性结构由耗散的大小决定。当耗散值低于临界阈值时，轨道呈现振荡激波剖面，其特征是具有陡峭的前沿，随后伴有衰减振荡。相反，当耗散达到或超过临界值时，解变为单调，类似于没有振荡尾波的正则化激波。与其他Boussinesq模型不同，振荡激波的局部极值并不同步出现，因此哈密顿量并非单调。

为数值计算这些异宿轨道，我们开发了一种高效的二阶精度有限差分法，通过在 y轴上固定一个拐点，避免了平移不变性带来的问题。该方法还结合了渐近估计，以提高收敛性。

最后，我们比较了若干Boussinesq型系统（包括经典Boussinesq/Peregrine系统）所产生的异宿轨道。结果表明，这类异宿轨道具有结构稳定性。然而，不同模型生成的波剖面存在显著差异；但当耗散参数较大时，各解趋于收敛到同一条极限轨道。

Appendix附录 A. Proof of Proposition 3.1

本附录详细分析式 (27) 中给出的特征多项式$P_2(\lambda)$的根，由此得到命题 3.1。我们使用第 3.1 节中的记号，尤其是其中定义的量 A 和 q 。

结合笛卡尔符号法则以及 $P_2(0) < 0$ 和 $\lim_{\lambda\to\pm\infty} P_2(\lambda) = +\infty$这两个事实，我们得出结论：多项式 P_2 总是恰有一个负实根，且有一个或三个正实根（按重数计）。因此，除负根 λ_r^- 和正根 λ_r^+ 之外，其余两个根要么是一对共轭复数，要么是两个正实根，具体取决于 $\delta > 0$ 的值。

假设特征值的形式为 $\lambda = \lambda_0 + \delta\lambda_1 + O(\delta^2)$，我们发现，当 $\delta \to 0$ 时， $P_2(\lambda)$的特征值为

$$\lambda_r^{\pm} \sim \frac{\delta}{4s} \pm \rho_r + O(\delta^2), \quad \lambda_i^{\pm} \sim \frac{\delta}{4s} \pm \mathrm{i}\rho_i + O(\delta^2) \ ,$$

这表明复特征值的实部随 δ 增大，但对于至少较小的 δ 值，其小于正特征值。

注意 t $P_2(\lambda)$ 对所有 $\delta > 0$ 和 $s > 1$ 都有两个拐点。它们位于

$$p_{\pm} = \frac{1}{24}\left(\frac{6\delta}{s} \pm \sqrt{36\frac{\delta^2}{s^2} + 192\frac{s-u_0}{s}}\right) = \frac{\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \frac{8}{3}s\left(s - \sqrt{s^2+8}\right)}}{4s} \ . \tag{57}$$

因此 $p_- < 0$ 和 $p_+ > 0$。此外，利用方程 $P_2''(p_+) = 0$ 消去 p_+的高于一次的幂，得到

$$P_2(p_+) = -\frac{\delta^3}{8s^3}\,p_+ - \frac{A\delta^2}{12s^2} - \frac{5A^2}{9} - q < 0 \ .$$

由于 $P_2(\lambda)$ 在 $(p_+,+\infty)$ 上是凸的，且 $P_2(+\infty)=+\infty$，因此它在此区间内恰有一个根，且该根是单根。对于 $\delta=0$，此根为 ρ_r。因此，对于所有 $\delta>0$，它都是根 λ_r^+，并且我们有$\lambda_r^+>p_+$；而 $P_2(\lambda)$ 的所有其他实根都小于 p_+。

将笛卡尔符号法则应用于导数

$$P_2'(\lambda)=4\lambda^3-3\frac{\delta}{s}\lambda^2-4\frac{s-u_0}{s}\lambda+\frac{\delta}{s}\frac{s-u_0}{s}\ ,$$

并将其应用于 $P_2'(-\lambda)$，再利用对于所有 $\delta>0$ 和 $s>1$，均有 $P_2'(+\infty)=+\infty$ 这一事实，以及

$$P_2'(p_+)=-\frac{9\delta^3+(3\delta^2+16s(s-u_0))\sqrt{9\delta^2+48s(s-u_0)}}{72s^3}<0\ ,$$

我们可以推知，对于所有 $\delta>0$ 和 $s>1$，$P_2'(\lambda)$ 有一个负实根和两个正实根。根据高斯–卢卡斯定理，这些根将位于 $(\lambda_r^-,\lambda_r^+)$ 之间。下文中，我们将 $P_2'(\lambda)$ 的根记为 $x_1<0$、$x_2>0$、$x_3>0$。

唯一二重特征值的存在表明，$P_2(\lambda)$ 的复特征值可以合并为一个二重实特征值。只有当 $P_2(\lambda)$ 与 $P_2'(\lambda)$ 之间的最大公因式为一次多项式时，这种情况才可能发生。然而，利用欧几里得算法，欧几里得算法的最后一个余式是常数

$$\frac{(3\delta^2+16As^2)^2(4A^3\delta^6+\delta^4(A^2-3q)(13A^2+9q)s^2+32A\delta^2(A^2-3q)(A^2+q)s^4-256q(A^2+q)^2s^6)}{64(3A\delta^4s+2\delta^2(7A^2+3q)s^3+32A(A^2+q)s^5)^2}\ , \tag{58}$$

其中

$$A=\frac{s-u_0}{s}>0\quad\text{and}\quad q=\frac{1+\eta_0-(s-u_0)^2}{s^2}>0\ . \tag{59}$$

只有当式 (58) 中的分子为零时，$P_2(\lambda)$ 与 $P_2'(\lambda)$ 的最大公因式才是一次多项式。具体而言，对于给定的 $s>1$，分子在以下条件下为零:

$$4A^3\delta^6+(A^2-3q)(13A^2+9q)s^2\delta^4+32A(A^2-3q)(A^2+q)s^4\delta^2-256q(A^2+q)^2s^6=0\ , \tag{60}$$

或者，等价地，令 $x=\frac{\delta^2}{s^2}$，有

$$4A^3x^3+(A^2-3q)(13A^2+9q)x^2+32A(A^2-3q)(A^2+q)x-256q(A^2+q)^2=0\ . \tag{61}$$

由于 A^2-3q 可能为正，也可能为负，对这两种情况分别应用笛卡尔符号法则，可推得方程 (60) 关于 δ^2 有唯一正解。我们将 (60) 的正根记为 δ_0。

根 δ_0^2 可通过数值方法近似求得，也可使用 Mathematica® 精确求得，其结果为

$$\delta_0^2=\frac{a_1}{12A^3}\ , \tag{62}$$

其中

$$\begin{aligned}
a_1&=(27q^2+30A^2q-13A^4)s^2+a_4+\frac{s^4\left(-215A^8-12A^6q+1350A^4q^2+1620A^2q^3+729q^4\right)}{a_4}\\
a_2&=(5291A^{12}+38250A^{10}q+85725A^8q^2+102060A^6q^3+91125A^4q^4+65610A^2q^5)s^6\\
a_3&=\left(7A^6+25A^4q+45A^2q^2+27q^3\right)^3\\
a_4&=\sqrt[3]{a_2+192\sqrt{3}\sqrt{A^6s^{12}a_3}+19683q^6s^6}\ .
\end{aligned}$$

由于 $P_2'(\lambda)$ 始终有一个负实根和两个正实根，因此对于 $0<\delta<\delta_0$，$P_2(\lambda)$ 有两个复根；而对于 $\delta\geq\delta_0$，则没有复根。

$\delta = \delta_0$ 时 $P_2(\lambda)$ 的二重根记为 $\lambda_d > 0$，它满足 $\lambda_d < p_+ < \lambda_r^+$，因为 λ_r^+ 是 $P_2(\lambda)$ 在 $(p_+, +\infty)$ 中的唯一根。因此，该二重根始终小于 λ_r^+。图 14 展示了当 $s = 1.2$ 时，$0 < \delta < \delta_0$、$\delta = \delta_0$ 和 $\delta > \delta_0$ 下多项式 $P_2(\lambda)$ 与 $P_2'(\lambda)$ 的图像。

将 $P_2(\lambda)$ 的实根 $\lambda = \lambda(\delta) = \lambda_r^{\pm}(\delta)$ 视为 δ 的函数。由于它们是单根，因此是 δ 的可微函数 [25, 定理 6.3.12]。因此，$\lambda(\delta)$ 满足 $P_2(\lambda(\delta)) = 0$，对所有 δ 均成立。这意味着 $\frac{d}{d\delta} P_2(\lambda(\delta)) = 0$，对所有 δ 均成立。注意，由于 P_2 的系数取决于 δ，因此 $\frac{d}{d\delta} P_2(\lambda(\delta)) \neq P_2'(\lambda(\delta))\lambda'(\delta)$。事实上，对多项式方程 $P_2(\lambda(\delta)) = 0$ 关于 δ 求导，得到

$$P_2'(\lambda(\delta)) \frac{d}{d\delta}\lambda(\delta) = \frac{1}{s} \cdot \lambda(\delta)(\lambda(\delta) - \sqrt{A})(\lambda(\delta) + \sqrt{A}) \,. \tag{63}$$

对于 $\lambda = \lambda_r^-$，我们有 $P_2'(\lambda_r^-) < 0$，因为 λ_r^- 小于 $P_2'(\lambda)$ 的负根（另见高斯–卢卡斯定理）。若 $\lambda_r^- < -\sqrt{A}$，而这对于足够小的 δ 至少成立，则 $\frac{d}{d\delta}\lambda_r^-(\delta) > 0$。$\pm\sqrt{A}$ 不可能是 $P_2(\lambda)$ 的零点，因为对所有 $\delta > 0$，$P_2(\pm\sqrt{A}) = -s^{-1}(s-u_0) \neq 0$。因此，根据特征值对 δ 的连续依赖性，我们得出 $\lambda_r^- < -\sqrt{A}$，并且对于所有 $\delta > 0$，$\frac{d}{d\delta}\lambda_r^-(\delta) > 0$。

对于 $\lambda = \lambda_r^+$，我们有 $P_2'(\lambda_r^+) > 0$，因为 λ_r^+ 大于 $P_2'(\lambda)$ 的正根；对于较小的 δ 值，$\lambda_r^+ > \sqrt{A}$ 成立，并且会一直如此，因为 $\sqrt{A}$ 不可能是 $P_2(\lambda)$ 的根。因此，$\frac{d}{d\delta}\lambda_r^+(\delta) > 0$，且对于所有 $\delta > 0$，$\lambda_r^+ > \sqrt{A}$。

注意，$\lambda_r^+(0) + \lambda_r^-(0) = 0$，并且由于 $\frac{d}{d\delta}(\lambda_r^+(\delta) + \lambda_r^-(\delta)) > 0$，我们有

$$\lambda_r^+(\delta) + \lambda_r^-(\delta) > 0 \,,$$

对于所有 $\delta > 0$。

对于 $\delta > \delta_0$，由 λ_d 这个二重根分出的 $P_2(\lambda)$ 的两个实根 λ_i^+ 和 λ_i^-，将分别位于局部最大值的左侧和右侧；该局部最大值位于 x_2 处（即 $P_2'(\lambda)$ 的第二个根）。因此，$P_2'(\lambda_i^-) > 0$，且 $P_2'(\lambda_i^+) < 0$。由于 $0 < \lambda_i^- < \lambda_i^+ < \sqrt{A}$，如下文所示，式 (63) 的右端对于这些根为负，因此我们有

$$\frac{d}{d\delta}\lambda_i^-(\delta) < 0 \quad \text{and} \quad \frac{d}{d\delta}\lambda_i^+(\delta) > 0 \quad \text{for} \quad \delta > \delta_0 \,,$$

这表明其中一个向左移动，另一个向右移动（见图2）。

此外，将关于 $\delta > \delta_0$ 的多项式 $P_2(\lambda)$ 写成

$$P_2(\lambda) = (\lambda - \lambda_r^-)(\lambda - \lambda_r^+)(\lambda - \lambda_i^-)(\lambda - \lambda_i^+) \,,$$

并利用公式（27）比较其系数，可得

$$\lambda_i^- = \frac{\delta}{s} - (\lambda_r^+ + \lambda_r^- + \lambda_i^+) < \frac{\delta}{s} \,, \tag{64}$$

因为 $\lambda_r^+ + \lambda_r^- + \lambda_i^+ > 0$。类似地，$\lambda_i^+ < \delta/s$。

对于 $0 < \delta < \delta_0$，从未扰动系统的虚特征值分离出的复特征值 $\lambda = \lambda_i^{\pm}(\delta)$ 在 $(0, \delta_0)$ 上可微，并在 $\delta > 0$ 上连续。当这些复特征值合并到重正特征值 λ_d 时，可微性不再成立。二重特征值 $\lambda_d = \lambda(\delta_0)$ 位于区间 $(0, \sqrt{A})$ 内，如下文所示。

假设对于 $0 < \delta < \delta_0$ 复特征值为 $\lambda_i^+(\delta) = z$ 和 $\lambda_i^-(\delta) = \bar{z}$。则

$$P_2(\lambda) = (\lambda - \lambda_r^+)(\lambda - \lambda_r^-)(\lambda - z)(\lambda - \bar{z}) \,.$$

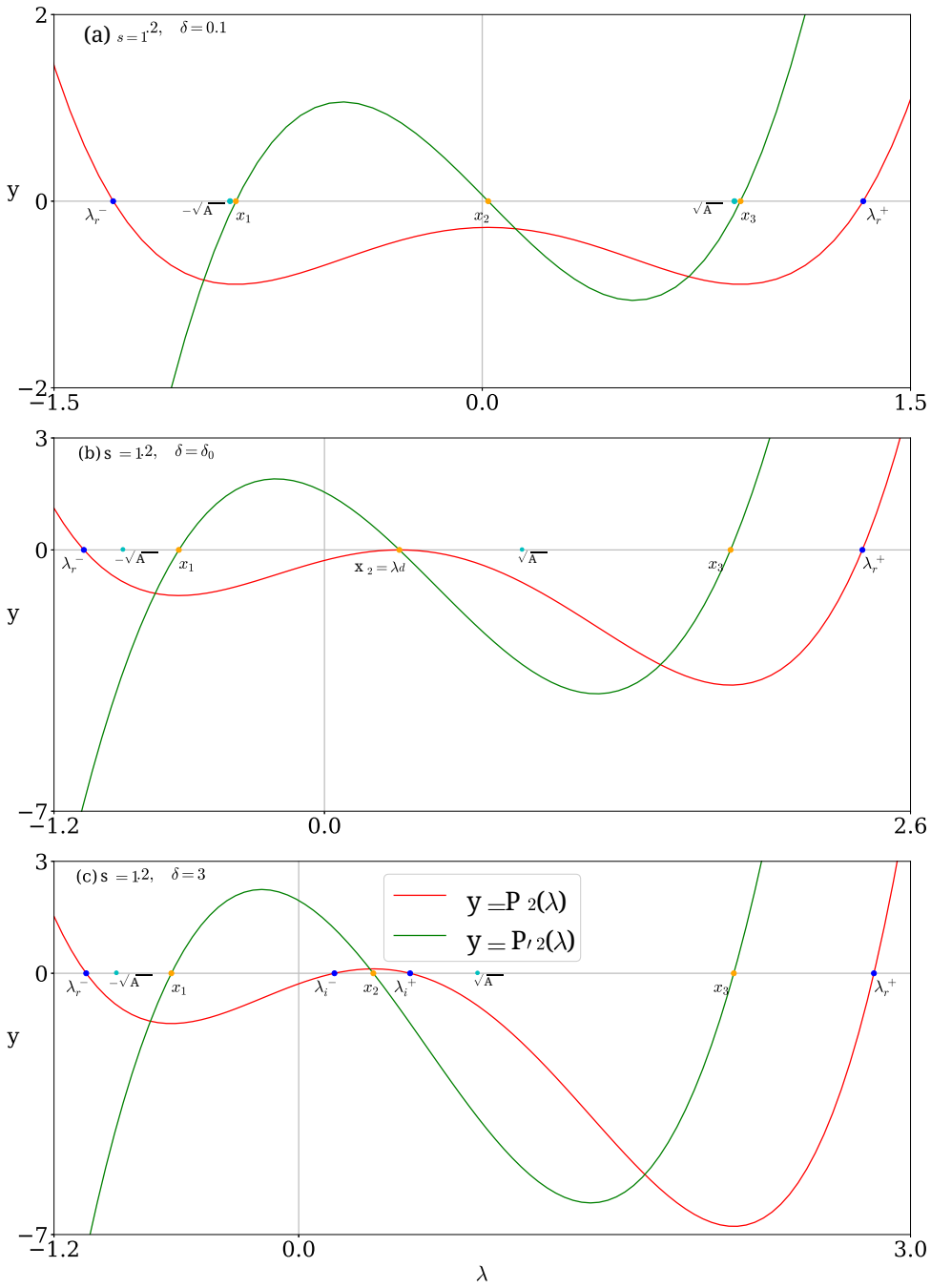


FIGURE 14. $P_2(\lambda)$ 和 $P_2'(\lambda)$ 的多项式分别对应 $s = 1.2$ 以及 (a) $\delta < \delta_0$、(b) $\delta = \delta_0$ 和 (c) $\delta > \delta_0$。$P_2(\lambda)$ 的实根记为 $\lambda_r^{\pm}$和 $\lambda_i^{\pm}$，而 λ_d 是在 $\delta = \delta_0$处的二重根。$P_2'(\lambda)$ 的根记为 $x_1 < 0 < x_2 < x_3$。请注意，不同图中的尺度并不相同。

执行最后一个表达式中的乘法，并将 λ^3 项和 λ^0项的系数分别与公式（27）中的对应项相等，我们得到

$$2Re(z) + (\lambda_r^+ + \lambda_r^-) = \frac{\delta}{s}\ , \tag{65}$$

and

$$\lambda_r^+\lambda_r^-|z|^2 = -q \ , \tag{66}$$

分别地。

为了处理 同时处理 $\delta < \delta_0$ 和 $\delta \geq \delta_0$ 的情形，我们考虑对称函数 s

$$X(\delta) = \frac{\lambda_i^+(\delta) + \lambda_i^-(\delta)}{2} \quad \text{and} \quad m(\delta) = \lambda_i^+(\delta)\,\lambda_i^-(\delta) \ , \qquad \delta \geq 0 \ .$$

对于 $0 < \delta < \delta_0$，我们有 $X = Re(z)$ 和 $m = |z|^2$，而 $X(0) = 0$ 以及 $m(0) = \rho_i^2$。由于 $\lambda_r^{\pm}$是 $P_2(\lambda)$ 的单根，二次多项式

$$\lambda^2 - 2X\lambda + m = \frac{P_2(\lambda)}{(\lambda - \lambda_r^+)(\lambda - \lambda_r^-)}$$

其系数关于 $\delta > 0$ 光滑变化，即使在 $\delta = \delta_0$ 处 $\lambda_i^{\pm}$不可微。记 $\sigma = \lambda_r^+ + \lambda_r^-$和 $p = \lambda_r^+\lambda_r^- < 0$。将 $P_2(\lambda) = (\lambda^2 - \sigma\lambda + p)(\lambda^2 - 2X\lambda + m)$ 的系数与式（27）的系数相比较，得到

$$2X + \sigma = \frac{\delta}{s} \ , \quad p + m + 2X\sigma = -2A \ , \quad 2Xp + \sigma m = -\frac{A\delta}{s} \ , \quad pm = -q \ , \tag{67}$$

这推广了（65）和（66）。最后一个方程意味着 $m = -q/p > 0$。将 $\sigma = \delta/s - 2X$和 $p = -q/m$ 代入（67）的第三个方程，我们得到

$$X = \frac{\delta}{2s}\,\frac{m(m+A)}{m^2+q} \ , \tag{68}$$

然后，(67) 的第二个方程给出

$$4X^2(q - Am) = (q - 2Am - m^2)(m + A) \ . \tag{69}$$

回忆一下，$A^2 + q = (1+\eta_0)/s^2$，因此 $\rho_i^2 = -A + \sqrt{A^2+q}$ 是 $q - 2Am - m^2$ 的正根。此外，由于 $A\rho_i^2 < q$ 等价于 $A\sqrt{A^2+q} < A^2 + q$，故 $\rho_i^2 < q/A$。

由于 $m > 0$, (68) 蕴含对于 $\delta > 0$ 有 $X > 0$。接着由 (69)，对于 $m > 0$，量 $q - Am$ 和 $q - 2Am - m^2$ 同号，因此对所有 $\delta > 0$, $m(\delta) \in (0, \rho_i^2) \cup (q/A, \infty)$。由于 $m(\delta)$ 是连续的，且 $m(0) = \rho_i^2 < q/A$，我们得出对所有 $\delta > 0$, $0 < m(\delta) < \rho_i^2$。由于 $m < q/A$，有 $m(m + A) < m^2 + q$，而 (68) 给出

$$0 < X(\delta) < \frac{\delta}{2s} \quad \text{for all} \quad \delta > 0, \ s > 1 \ . \tag{70}$$

特别地，对于 $0 < \delta < \delta_0$ 和 $\lambda_d > 0$, $0 < Re(\lambda_i^{\pm}) < \delta/2s$。此外，对于 $\delta > \delta_0$，根 $\lambda_i^{\pm}$ 均为实数，其和 $2X$ 为正，乘积 m 也为正，因此 $0 < \lambda_i^- < \lambda_i^+$。由 (57) 还可观察到，拐点 $p_+ > \delta/2s$。因此，我们有

$$0 < Re(\lambda_i^{\pm}) < p_+ < \lambda_r^+ \quad \text{for} \quad \delta > 0 \ .$$

结合 (68) 和 (69)，我们可以将 δ 表示为 m 的函数：

$$\frac{\delta^2}{s^2} = R(m) \doteq \frac{(q - 2Am - m^2)(m^2+q)^2}{(q - Am)\,m^2(m+A)} \ , \qquad 0 < m < \rho_i^2 \ . \tag{71}$$

直接计算可得

$$R'(m) = -\frac{(m^2+q)\,K(m)}{m^3(m+A)^2(q-Am)^2} \ ,$$

其中，记 $r = q - 2Am - m^2 > 0$ 为，

$$K(m) = (2A + 3m)\,r^3 + 7m(m+A)^2r^2 + 8m^2(m+A)^3r + 4m^3(m+A)^4 > 0 \ .$$

因此， R 在 $(0,\rho_i^2)$ 上严格递减，且 $R(\rho_i^2)=0$，并且 $\lim_{m\to 0^+}R(m)=+\infty$。 consequently， $\delta\mapsto m(\delta)$ 是从 $(0,\infty)$ 到 $(0,\rho_i^2)$ 的严格递减双射，并且 $m'(\delta)=2\delta/(s^2R'(m))<0$。

对于 $0<\delta<\delta_0$，我们有 $(Im(z))^2=m-X^2$，由 (69) 可得

$$m-X^2=\frac{C(m)}{4(q-Am)}\ ,\quad \text{where}\quad C(m)=m^3-Am^2+(2A^2+3q)m-Aq\ . \tag{72}$$

$C'(m)=3m^2-2Am+2A^2+3q$ 的判别式为 $-20A^2-36q<0$，因此 C 严格递增。此外， $C(0)=-Aq<0$，且 $C(\rho_i^2)=4\rho_i^2(q-A\rho_i^2)>0$。因此， C 在 $(0,\rho_i^2)$ 上有唯一的根$m_d\in$，并且 $\lambda_i^{\pm}$为非实数当且仅当 $m(\delta)>m_d$，也就是说，当且仅当 $0<\delta<s\sqrt{R(m_d)}$。因此，$\delta_0=s\sqrt{R(m_d)}$，且在 $\delta=\delta_0$ 处有 $X^2=m_d$，所以 $\lambda_d=\lambda(\delta_0)=\sqrt{m_d}$。由于$C(A)=2A(A^2+q)>0$，并且 C 严格递增，我们有 $m_d<A$，从而 $\lambda_d<\sqrt{A}$。由于对于任意 $\delta>0$，$\sqrt{A}$ 都不是 $P_2(\lambda)$ 的根，由连续性可知，对于所有 $\delta>\delta_0$，也有 $\lambda_i^+<\sqrt{A}$。利用 (68) 还可得到另一种表达式

$$\delta_0=\frac{2s(m_d^2+q)}{\sqrt{m_d}\,(m_d+A)}\ .$$

此外，对于 $m_d<m<\rho_i^2$，我们有

$$\frac{d}{dm}\left(m-X^2\right)=\frac{C'(m)(q-Am)+AC(m)}{4(q-Am)^2}>0\ ,$$

由于 $C'(m)>0, q-Am>0$ 且在此区间内 $C(m)>0$。由于 $m'(\delta)<0$，我们得出

$$\frac{d}{d\delta}(Im(z))^2=\frac{d}{dm}\left(m-X^2\right)m'(\delta)<0\quad\text{for}\quad 0<\delta<\delta_0\ .$$

设 $z=\lambda_i^+$ 为从 $+\mathrm{i}\rho_i$ >0 $\delta=0$ ρ_i $0<\delta<\delta_0$ $\lambda_i^{\pm}$ = 产生的特征值。则 $Im(\lambda_i^+)$ 在 δ 上连续，在 处满足 $Im(\lambda_i^+)$，且由于在 处它们为非实数，因此不可能为零。因此，$Im(\lambda_i^+)=\sqrt{m-X^2}>0$，并且

$$\frac{d}{d\delta}Im(\lambda_i^+)=\frac{1}{2\,Im(\lambda_i^+)}\,\frac{d}{d\delta}(Im(z))^2<0\quad\text{for}\quad 0<\delta<\delta_0\ .$$

由于 $\lambda_i^-=\overline{\lambda_i^+}$，我们有 $Im(\lambda_i^-)=-Im(\lambda_i^+)$，其在 $(0,\delta_0)$ 上严格递增。因此，对于所有 $s>1$，从 $+\mathrm{i}\rho_i$ 产生的复特征值的虚部严格递减，而从 $-\mathrm{i}\rho_i$ 产生的复特征值的虚部严格递增。此外，由于 $C(m_d)=0$，当 $\delta\to\delta_0$ 时，两个虚部都趋于 0，并且两个特征值在二重特征值λ_d处相交。

注意到，当 $\delta>0$ 足够小时，实部 $Re(\lambda_i^{\pm})$ 严格递增，这与渐近公式 $\lambda_i^{\pm}\sim\frac{\delta}{4s}\pm\mathrm{i}\rho_i$ 一致；但对于所有 $s>1$，它在 $(0,\delta_0)$ 上并非单调。例如，当 $s=2$ 时，它在 $\delta\approx 8.75<\delta_0\approx 14.54$ 处达到最大值。

此外，利用形如 $\lambda=\lambda_0+\delta\lambda_1+\cdots$ 的展开式，我们可以求得当 $\delta\to\infty$ 时特征值的渐近值：

$$\lambda_i^-\sim\frac{1+\eta_0-(s-u_0)^2}{\delta(s-u_0)}+O(1/\delta^2)\ ,\quad \lambda_i^+\sim\sqrt{\frac{s-u_0}{s}}-\frac{1+\eta_0}{2\delta(s-u_0)}+O(1/\delta^2)\ ,$$
$$\lambda_r^-\sim-\sqrt{\frac{s-u_0}{s}}-\frac{1+\eta_0}{2\delta(s-u_0)}+O(1/\delta^2)\ ,\quad \lambda_r^+\sim\frac{\delta}{s}+O(1)\ .$$

因此，我们有

$$\lim_{\delta\to\infty}\lambda_r^-=-\sqrt{A},\quad \lim_{\delta\to\infty}\lambda_r^+=\infty\ ,$$

且对于 $\delta > \delta_0$

$$-\rho_r < \lambda_r^- < -\sqrt{A} < 0 = \lim_{\delta\to\infty} \lambda_i^- < \lambda_i^- < \lambda_i^+ < \lim_{\delta\to+\infty} \lambda_i^+ = \sqrt{A} < \rho_r < \lambda_r^+ < \lim_{\delta\to\infty} \lambda_r^+ = +\infty \ .$$

对于 $0 < \delta < \delta_0$，只有当 s 取中等值时，将 $\lambda_i^{\pm}$ 替换为 $Re(\lambda_i^{\pm})$ 才仍保持相同的排序。数值结果表明，当 $s > 4.9796$ 时， $Re(\lambda_i^{\pm})$ 在 $(0,\ \delta_0)$ 的某个子区间内大于 $\sqrt{A}$。

References

[1] M. Abounouh、A. Atlas 和 O. Goubet。耗散型 Boussinesq 系统解的大时间行为。 *Differential and Integral Equations*，20:755–768，2007年。[2] D. Antonopoulos、V. Dougalis 和 D. Mitsotakis。Bona–Smith 系列 Boussinesq 系统的初边值问题。 *Adv. Differential Equations*，14:27–53，2009年。[3] D. Antonopoulos、V. Dougalis 和 D. Mitsotakis。Bona–Smith 系列 Boussinesq 系统的数值解。 *Appl. Numer. Math.*，30:314–336，2010年。[4] B. Benjamin。孤立波的稳定性。 *Proc. R. Soc. Lond. A*，328:153–183，1972年。[5] B. Benjamin、J. Bona 和 J. Mahony。非线性色散系统中长波的模型方程。

Philos. ，（）: – 。

Trans. R. Soc. Lond. A 272 1220 47 78, 1972

[6] D. Bolbot、D. Mitsotakis 和 A. Tzavaras。弹性力学与量子流体力学的扩散-色散近似中的色散激波。 *Quart. Appl. Math.*，81:455–481，2023年。[7] D. Bolbot、D. Mitsotakis 和 A. Tzavaras。修正 Serre–Green–Naghdi 系统的振荡激波与正则化激波。 *Stud. Appl. Math.*，153:e12694，2024年。[8] J. Bona、M. Chen 和 J.-C. Saut。非线性色散介质中小振幅长波的 Boussinesq 方程及其他系统。I：推导与线性理论。 *J. Nonlinear Sci.*，12:283–318，2002年。[9] J. Bona、M. Chen 和 J.-C. Saut。非线性色散介质中小振幅长波的 Boussinesq 方程及其他系统：II. 非线性理论。 *Nonlinearity*，17:925–952，2004年。[10] J. Bona 和 M. Schonbek。Korteweg–de Vries–Burgers 方程的行波解。

Proc. R. Soc. ， ，，: – 。

Edinb. Sect. A Math. 101 207 226, 1985

[11] J. Bona 和 R. Smith。水道中双向传播水波的模型。

Math. Proc. Camb. ， : – 。

Phil. Soc. 79 167 182, 1976

[12] L. Brudvik-Lindner、D. Mitsotakis 和 A. Tzavaras。耗散型 Peregrine–Boussinesq 系统的振荡激波与正则化激波。 *IMA J. Appl. Math.*，88:602–631，2023年。[13] H. Chanson。波状潮涌：基本理论与自由表面特征。 *J. Hydraul. Eng.*，136 944，2010 940: – 。[14] M. Chen。双向波动方程的精确行波解。 *Int. J. Theor. Phys.*，37 1567，1998 1547: – 。[15] M. Chen。Boussinesq 系统的孤立波与多脉冲行波解。 *Appl. Anal.*，75:213–240，2000年。[16] M. Chen 和 O. Goubet。耗散型 Boussinesq 系统的长时间渐近行为。 *Discrete & Continuous Dynamical Systems-S* 17 509 528, 2007

Discrete & Continuous Dynamical Systems-S ， : – 。

[17] T. Congy、G. El、M. Hoefer 和 M. Shearer。Benjamin–Bona–Mahony 方程的色散黎曼问题。 *Stud. Appl. Math.*，147(3):1089–1145，2021年。[18] F. Dias、A. Dyachenko 和 V. Zakharov。弱阻尼自由表面流理论：一种基于势流解的新表述。 *Physics Letters A*，372:1297–1–302，2008年。[19] V. Dougalis 和 D. Mitsotakis。Boussinesq 系统理论与数值分析：综述。载于 N. Kampanis、V. Dougalis 和 J. Ekaterinaris 编， *Effective Computational Methods in Wave Propagation*，第 63–110页。CRC 出版社，2008年。[20] D. Dutykh 和 F. Dias。耗散型 Boussinesq 方程。 *Comptes Rendus Mecanique*，335:559–583，2007年。[21] G. El 和 M. Hoefer。色散激波与调制理论。 *Physica D: Nonlinear Phenomena*，333:11–65，2016年。[22] G. El、M. Hoefer 和 M. Shearer。非凸守恒律的色散激波与扩散-色散激波。 *SIAM Review*，59:3–61，2017年。[23] A. Gurevich 和 L. Pitaevskii。Korteweg–de Vries–Burgers 方程中波的平均描述。

Sov. ， : – 。

Phys. JETP 66 490 495, 1987

[24] A. Homburg 和 B. Sandstede。向量场中的同宿与异宿分岔。载于 *Handbook of dynamical systems* 3, 379 524 2010 ，卷，

页码 – 。Elsevier，。[25] R. Horn 和 C. Johnson。 *Matrix Analysis*。剑桥大学出版社，2012年。[26] J. Hu。含黏度的 BCL 系统的整体适定性。 *Chin. Ann. Math. Ser. B*，30:153–172，2009 年。[27] M. Kalia 、 Y. Kuznetsov 和 H. Meijer。四维系统中从鞍点到鞍焦点的同宿转变。 *Nonlinearity*，32:2024，2019年。[28] Y. Kuznetsov。 *Elements of Applied Bifurcation Theory*。Springer Cham，2024年。[29] D. Mantzavinos 和 D. Mitsotakis。有限区间上的 Boussinesq 方程扩展水波系统：理论与数值分析。 *J. Math. Pures Appl.*，169:109–137，2023年。[30] R. Pego 和 M. Weinstein。孤立波的渐近稳定性。 *Commun. Math. Phys.*，164:305–349，1994年。[31] H. Peregrine。波状涌潮发展的计算。 *J. Fluid Mech.*，25:321–330，1966年。[32] H. Peregrine。海滩上的长波。 *J. Fluid Mech.*，27:815–827，1967年。[33] J. Toland。欧拉-拉格朗日方程组对称同宿轨道的存在性。载于 *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics* 45, 447 459 ，卷，

页码 – 。美国数学学会，罗得岛州普罗维登斯，1986年。[34] A. Treske。明渠中的波状涌潮（Favre波）——实验研究。 *J. Hydraul. Res.*，32 370，1994 355: – 。[35] G. Whitham。 *Linear and Nonlinear Waves*。Wiley，2011年。[36] S. Wiggins。 *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*。Springer，纽约州纽约，2003年。
R. Angana: Victoria University of Wellington, School of Mathematics and Statistics, PO Box600, Wellington 6140, New Zealand*Email address*: rezwana.angana@vuw.ac.nz B. Harding: Victoria University of Wellington, School of Mathematics and Statistics, PO Box600, Wellington 6140, New Zealand*Email address*: brendan.harding@vuw.ac.nz D. Mitsotakis: Victoria University of Wellington, School of Mathematics and Statistics, PO Box600, Wellington 6140, New Zealand*Email address*: dimitrios.mitsotakis@vuw.ac.nz