arXiv:2611.31936v1 [math.SP] 24 Nov 2026

一个具有多个边界分支的谱动物园：亏格为零的自由边界极小曲面

HAOYU CHEN 和 BRAXTON OSTING

ABSTRACT. 我们研究具有 b 个边界分支的亏格为零曲面上的长度归一化第一斯特克洛夫特征值 $\bar{\sigma}_1$ 的临界点。根据 Fraser 和 Schoen 的一个定理，它们的第一特征函数给出单位球中的自由边界极小曲面。一致化后，区域变为去掉 b 个圆帽的圆球面，并在边界圆上带有一个权函数。层势公式给出特征值、它们的导数以及每个临界点的证书，并给出关于圆帽的精确多极系统。我们计算出一个由 268 个经数值认证的临界点组成的谱动物园，其中边界分支数最多为 $b = 2252$ 个，包括 Schulz 列出的 27 个嵌入的例子。结合它们的对称群和 Morse 指标，这些临界点满足关于 $3 \le b \le 10$的带符号计数。大多数临界点属于由边界分支环构成的族。随着这些环逐渐填满，它们似乎收敛于 Karpukhin 和 Noutchegueme 的自由曲线极小曲面：由平圆盘和悬链面环带组成，并沿球面上的圆相交。我们构造了这些极限，其中包括临界鼓和蛋糕架，后者是一个带有悬链喇叭的平圆盘。当边界分支环由 j 个帽组成时，这些族以 j^{-1} 的方式趋近其极限，而赤道族则以亏损 $4\pi b^{-1}e^{-b}$趋近 4π 。对于较大的 b，多极系统的首项化为帽中心的对数能量，形式计算给出 $\bar{\sigma}_1^\star(b) = 8\pi - 16\pi\, b^{-1}\log b + O(b^{-1})$。

1. INTRODUCTION

设 (Σ, g) 是一个亏格为 γ、具有 $b \ge 1$ 个边界分支的光滑、紧致、连通、可定向黎曼曲面。Steklov 特征值问题是求满足下式的特征对 (σ, u)：

$$\Delta_g u = 0 \qquad \text{in } \Sigma, \tag{1a}$$

$$\partial_{\nu_g} u = \sigma u \qquad \text{on } \partial\Sigma. \tag{1b}$$

按重数计的特征值构成序列 $0 = \sigma_0 < \sigma_1 \le \sigma_2 \le \cdots \to \infty$。它们是狄利克雷到诺伊曼算子 [GP17] 的特征值。由于 σ_k 按逆长度缩放，我们用边界长度 $L_g(\partial\Sigma)$ 对其进行归一化，并考虑极值 Steklov 问题

$$\sigma^\star(\gamma, b) := \sup_g \bar{\sigma}_1(\Sigma, g), \qquad \bar{\sigma}_k(\Sigma, g) := \sigma_k(\Sigma, g)\, L_g(\partial\Sigma), \tag{2}$$

上确界取遍 Σ 上的所有光滑度量。该问题可追溯至 Weinstock [Wei54]，他证明了 $\bar{\sigma}_1 \le 2\pi$ 对于单连通平面域成立，且等号仅在圆盘的情形下成立。一般而言 $\bar{\sigma}_k \le 2\pi(\gamma + b + k - 1)$ [FS11；GP12；Kar17]，，因此 $\sigma^\star(\gamma,\ b) \le 2\pi(\gamma + b)$。对于亏格零情形，式（2）中的上确界由一个光滑度量 [取得 FS16]，以及在满足谱隙条件的高亏格情形下 [MP20]。

Steklov问题与其他极值特征值问题的不同之处，在于其极大化者与极小曲面之间存在联系；这一联系由 Fraser 和 Schoen 发现 [FS11；FS16]。一个自由边界极小曲面（FBMS）位于单位球内 $\mathbb{B}^m$，并且是在具有

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, UNIVERSITY OF UTAH, SALT LAKE CITY, UT*E-mail addresses*: Haoyu.Chen@utah.edu, osting@math.utah.edu。2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号：53A10、58J50、49Q05；次要分类号：35P15、65N25、65R20。Steklov 特征值、自由边界极小曲面、极值度量、特征值优化、自由曲线极小曲面、层势、多极展开。作者感谢美国国家科学基金会通过 DMS-2136198 和 DMS-2513175 提供的部分资助。

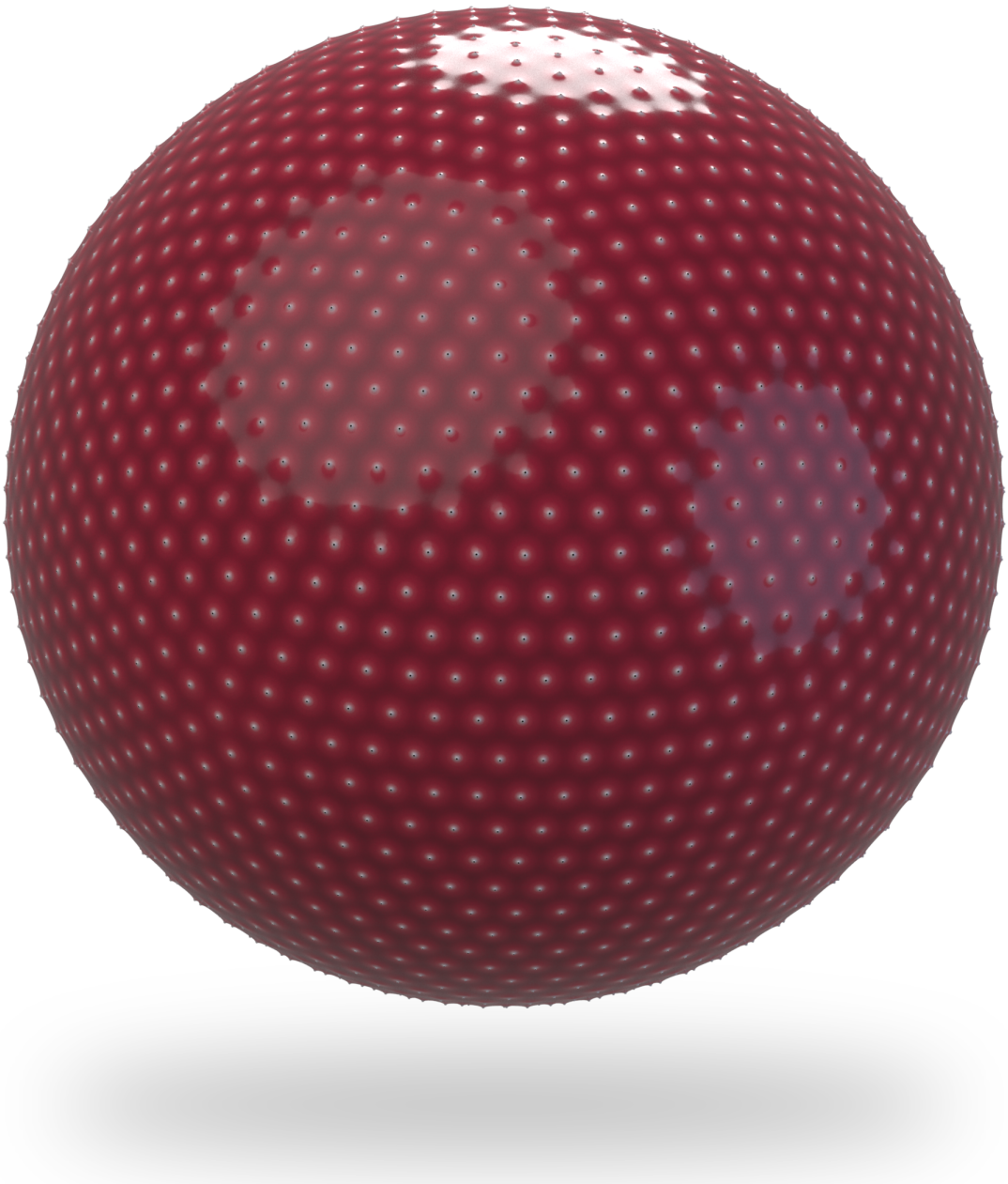

FIGURE 1. 单位球内的一个自由边界极小曲面 $\mathbb{B}^3$，有 2252 条边界曲线。它的亏格为零，是第一归一化 Steklov 特征值的一个临界点 $\bar{\sigma}_1$，由本文的方法计算并通过数值认证。该曲面是一片薄片，位于 $\partial\mathbb{B}^3$的内侧，并由 2252 个小颈与其相连。曲面的颜色表示其到原点的距离 $|X|$，薄片部分为红色，各颈部边缘为银色；其边界曲线（银色）位于测地二十面体的顶点处，该二十面体的 $\nu = 15$。这是 $b = 2252$ （表 3）中找到的最佳构型，也是目前计算出的最大构型。其边界曲线的总长度为$\bar{\sigma}_1^\star = 24.97$，曲面的面积为 $\frac{1}{2}\bar{\sigma}_1^\star = 12.49$。这个值接近极限$8\pi \approx 25.13$，当 $\bar{\sigma}_1^\star(b)$ 趋近于 $b \to \infty$ （第 5.4 节）时，该极限成立。

球面上的边界 $\partial\mathbb{B}^m$。等价地说，它是一个沿边界与球面正交相交的极小曲面。若 $X\colon\ \Sigma \to \mathbb{B}^m$ 是自由边界极小浸入，且 $g = X^* g_{\mathbb{R}^m}$，则坐标函数满足 $\Delta_g X = 0$，其中 Σ；并且在 $\partial\Sigma$上有 $\partial_{\nu_g} X = X$。换言之，它们满足(1a)–(1b)，其中 $\sigma = 1$。反过来，设 g 使 $\bar{\sigma}_1$达到最大值。经适当缩放的线性无关第一特征函数 u_1、……、u_m（其中 m 是 σ_1的重数）定义了一个分支共形自由边界极小浸入 $X = (u_1, \ldots, u_m)\colon\ \Sigma \to \mathbb{B}^m$ [FS16，定理1.1]。我们称 X 为谱映射。它将 $\partial\Sigma$ 映入单位球面，并与球面正交相交，因为 $|X| = 1$ 且 $\partial_{\nu_g} X = \sigma_1 X$。由于 X 是共形的，沿 $X(\partial\Sigma)$的弧长是 σ_1 倍的 g的弧长，$ds_X = \sigma_1\, ds_g$。因此，边界上的度量 g 除常数因子 σ_1外，正是由曲面诱导的度量，并

$$L\big(X(\partial\Sigma)\big) = \sigma_1 L_g(\partial\Sigma) = \bar{\sigma}_1.$$

由于坐标函数是调和的，且 X 是共形的，面积是边界长度的一半：

$$\operatorname{Area}\big(X(\Sigma)\big) = \tfrac{1}{2}\int_\Sigma |\nabla_g X|^2\, dA_g = \tfrac{1}{2}\int_{\partial\Sigma} X \cdot \partial_{\nu_g} X\, ds_g = \tfrac{1}{2}\sigma_1 L_g(\partial\Sigma) = \tfrac{1}{2}\bar{\sigma}_1. \tag{3}$$

在亏格为 γ 的可定向曲面上，σ_k 的重数 m_k 至多为 $4\gamma + 2k + 1$，因此 $m_1 \le 3$对于亏格为零的曲面 [FS16，定理 2.3]。在这种情况下，(2) 的极大化者给出一个位于 $\mathbb{B}^3$中的自由边界极小曲面（FBMS）；对于 $b \ge 2$，它不是平面的，并且是嵌入的 [FS16]。更一般地，位于 $\mathbb{B}^3$ 中的亏格零自由边界极小曲面（FBMS），若其 $b \ge 2$ 的坐标函数是第一 Steklov特征函数，则它是嵌入的、关于原点星形的，并且没有分支点 [FS16，命题 8.1]。因此，亏格零情形下 $\bar{\sigma}_1$ 的每个临界点都给出一个嵌入曲面。反过来，Chodosh 和 Gianocca 证明，位于 $\mathbb{B}^3$ 中的每个亏格零嵌入自由边界极小曲面（FBMS）都具有 $\sigma_1 = 1$ [CG26]。于是，其坐标函数是第一特征函数，因此每个这样的曲面都来自 $\bar{\sigma}_1$的一个临界度量。特别地，根据 [FS16，定理 1.2]，，临界悬链面是 $\mathbb{B}^3$中唯一的嵌入自由边界极小环带。我们利用这一对应关系，计算 $\mathbb{B}^3$中的一个亏格零自由边界极小曲面（FBMS）谱动物园：其坐标函数是第一 Steklov特征函数的曲面。通过谱映射，我们计算出的 $\bar{\sigma}_1$ 的每个临界点都给出 $\mathbb{B}^3$ 中面积为 $\frac{1}{2}\bar{\sigma}_1$ 的一个亏格零自由边界极小曲面（FBMS）（定理 3.7 和 (3)），根据 [FS16，命题 8.1]，它是嵌入的。

当 b 较小时以及在极限情形 $b \to \infty$下，已知 $\sigma^*(0, b)$的值。对于 $b = 1$，赤道圆盘实现了上确界，且 $\sigma^*(0, 1) = 2\pi$；对于 $b = 2$，临界悬链面实现了上确界，且$\sigma^*(0, 2) \approx 10.47$ [FS16]。对于 $b \ge 3$，目前尚无已知的闭式解极大化者。这些值随 b [FS16 严格递增，命题 4.3], [MP18]。极大化曲面收敛到球面，而这些值收敛到 8π，即球面上拉普拉斯算子的 Hersch 界。Girouard 和 Lagac´e 通过均匀化证明了这一极限 [GL21]，，Karpukhin 和 Stern 也独立证明了这一点[KS24]。Karpukhin 和 Stern 还证明，亏损 $8\pi - \sigma^*(0, b)$介于 $b^{-1}\log b$ [KS24 的两个倍数之间，定理 1.8]，，并提出了$^b\log{}_b\big(8\pi - \sigma^\star(0, b)\big)$ 是否存在极限的问题 [KS24，开放问题 2]。

对于有限的 $b \ge 3$，已有两条研究路线。在计算方面，Oudet、Kao和Osting [OKO21] 计算了单位圆盘上带有$b-1$ 圆形孔洞的 $b = 2$、……、9、12、15和20的最大化者。他们观察到，边界圆位于对称多面体的顶点上，这些多面体与汤姆孙问题的极小化构型相似。Girouard和Lagac´e [GL21] 计算了具有柏拉图对称性的构型的值。在存在性方面，Folha、Pacard和Zolotareva [FPZ17] 以及Ketover [Ket16] 通过粘合和极小极大法，构造了具有 b个边界分支的亏格零自由边界极小曲面。他们构造的曲面由两个圆盘通过 b 条赤道桥连接而成。Karpukhin、Kusner、McGrath和Stern [Kar+24]证明，在有限群不变的度量中，$\bar{\sigma}_1$ 存在最大化者，从而得到具有指定对称性的自由边界极小曲面。Carlotto、Schulz和Wiygul [CSW25]以及Franz和Schulz [FS26] 通过具有拓扑控制的等变极小极大法构造了更多曲面，其中包括拓扑和对称群相同的曲面对。Schulz的在线图库 [Sch]列出了已知的、至多有八个边界分支的嵌入的亏格零自由边界极小曲面的数值计算面积。这些构造实现了存在性和对称性，而

通过 [CG26] 这些曲面都来自 $\bar{\sigma}_1$的临界点。对于每个 b，哪种构型是最大化者尚未得到确定。

结果。我们的大多数临界点都属于这样的族：在少数几个纬度环上各有 j 个帽，包括棱锥、双棱锥、棱柱、反棱柱和堆叠环，以及在大圆上有 b 个帽的赤道族。我们先讨论它们的极限；第2节将这些极限视为 $\mathbb{B}^3$中的自由边界曲线旋转极小曲面。随着环上帽的数量 j 增加，每一圈颈部都会收缩成 $\partial\mathbb{B}^3$上的一个圆。于是，这些曲面似乎收敛到若干同轴悬链环带和平圆盘的并集，它们沿这些圆粘合在一起（图 2）。按 [KN25]的定义，这些并集是自由边界曲线极小曲面。引理 2.2 将其定义归结为对轮廓曲线的条件，而命题 2.3–2.7构造了其中五个。它们面积的两倍是这些族的极限值（第2节和第5.2节）。赤道曲面趋近双覆盖圆盘，其亏损为 $\frac{4\pi}{b}e^{-b}$。棱柱和反棱柱趋近 [KN25], 的临界鼓，其值为$\bar{\sigma}_1 = \frac{8\pi}{1+W(1/e)} = 19.658536$，其中 W 为朗伯函数（命题 2.6）。因此,–反棱柱从 $j = 1$ 处的临界悬链面一路延伸至临界鼓。一个极帽会增添一个新的部分，即与 $\partial\mathbb{B}^3$ 正交相交的悬链喇叭。据我们所知，棱锥趋近蛋糕架 —— 一个带有喇叭的平圆盘，这是一个新发现（命题2.4）。双棱锥趋近车轮，即 [CSW25] 的两个悬链环带的并集（命题 2.5）。Kapouleas 和 Zou 将两个平圆盘与许多悬链环带组成的并集消奇异化，构造出自由边界极小曲面 [KZ26],；Carlotto、Schulz和Wiygul则将车轮消奇异化 [CSW25，定理 6.1]。据我们所知，鼓和蛋糕架尚未经过消奇异化。

我们的第二个结果涉及去掉 b 圆帽后的球面。命题3.2将其上的 Steklov问题写成关于各帽的电荷与多极子的精确方程组（第3.4节）。当权函数在每个边界圆上为常数时，帽的通量正比于特征函数在其圆上的平均值，而每个多极矩正比于其他帽所产生的场的一个泰勒系数（推论3.4）。当 b很大时，只保留各帽的电荷，或保留电荷与偶极子，就得到单极子和偶极子近似（第5.4节）。在单极近似中，边界曲线的中心仅通过其对数能量起作用，能量越小，对应的值越大。偶极近似表明 $\bar{\sigma}_1^\star(b) = 8\pi - 16\pi\, b^{-1}\log b + O(b^{-1})$，因此，Karpukhin 和 Stern 所提出问题中的极限为 16π。

我们的计算得到 268 个 $\bar{\sigma}_1$ 临界点，其中 b 从 2 到 2252（第5节，表6）。我们搜索了多面体类、这些族、具有费克特构型对称性的类别、球面上对数能量的极小值点，以及一个无约束优化器。每个临界点都通过完整参数空间中的驻点乘子得到认证，并验证相应曲面是自由边界极小曲面（定理 3.7，第3.8节）。这些证书是数值性的。其残差列于表3，离散化误差通过细化估计，而非严格界定（第 4.4 节）。表1按环的数量和极帽的数量排列环族，并标明每个环族收敛到的曲面。图6–12展示各类型的曲面，图13–16展示每个 b 的最佳曲面，图3绘出了各值与 b 的关系。这些构型、证书和曲面均存放于在线存储库 [CO26b]„ 其链接可在表格和图中的名称处找到。这些计算再现了 [GL21]和 [OKO21] 的数值，并包含 [Sch] 中列出的全部27个曲面，且 $b \geq 2$ （见第5.1节和表2）。除此之外，对称类还达到了大得多的 b。使用对称性约化求解器，我们计算了每个 b 不超过 $b = 2252$ 时找到的最佳构型，其中 $\bar{\sigma}_1^\star = 24.97$ （表 3 ）。这些曲面是带有 b 小颈的球面，颈部通向 $\partial\mathbb{B}^3$ （图1）。

我们还计算每个临界点 Σ的莫尔斯指标 ind(Σ)，即 $\bar{\sigma}_1$ 增加的方向数。假设 $\bar{\sigma}_1$在权重上取最大值后，是 b 个帽的构型空间（模去 M¨obius 变换）上的 Morse函数，并且它会随着构型退化而减小。

于是，Poincar´e–Hopf 定理给出

$$\sum_{\Sigma} \frac{(-1)^{\mathrm{ind}(\Sigma)}}{|G_\Sigma|} = \frac{(-1)^{b-1}}{2\,b(b-1)(b-2)}, \tag{4}$$

其中求和遍历所有曲面 Σ 具有 b 个边界分支，并且 G_Σ 是Σ 的对称群（第5.5节）。表6 中的曲面满足（4），当 $3 \le b \le 10$时；其中二十二个具有 $b = 9$ 和10的曲面之所以被发现，是因为没有它们时该条件不成立。这引出了以下猜想。

猜想1.1。对于每个 $b \ge 3$，$\bar{\sigma}_1$ 的临界点中具有 b 个边界分支的曲面满足（4）。每个曲面的莫尔斯指标至多为 $b-3$，且仅当其为赤道 b边形时取等号。

这个计数尚未得到证明。当构型退化时，尚不知道函数 $\bar{\sigma}_1$ 是否单调递减；而且它在其临界点处并不光滑，在这些点上第一特征值的重数至少为3。即便如此，指标界也不能由该计数推出。

我们的一些论述是观察或形式计算，而非定理。环族收敛到第2 节中的曲面这一事实是观察到的，而非得到证明的；它们的速率 j^{-1}（第5.2节）也是如此。赤道族的亏损 $\frac{4\pi}{b}e^{-b}$ 来自将[FPZ17]的桥与半悬链面匹配（第5.2节）。单极子和偶极子近似的精度是通过测量得到的，而非证明的；对 $\bar{\sigma}_1^\star(b)$ 的展开则是将它们代入Fekete 配置后的形式计算（第5.4节）。

方法。计算遵循为亏格一问题发展出的方案 [CO26a]，并将其调整用于球面。根据科比统一化定理 [HS93]，Σ与去掉 b 个互不相交的圆帽后的圆球面共形。由于 $\bar{\sigma}_1$ 仅通过边界权重 ρ依赖于度量，该问题便转化为对帽的中心、半径，以及每个圆上 $\log\rho$ 的傅里叶系数进行最大化。标准形固定了 M¨obius 自由度（问题 (14)，第 3.1 节）。特征值是球面格林函数 $-\frac{1}{2\pi}\log|x-y|$ 的单层势与双层势矩阵铅笔的特征值 [GNS08; KN14]（第 3.3 节和第 4.1 节）。定理 3.6 给出了 $\bar{\sigma}_1$ 关于中心、半径和权重的导数（第 3.6 节）。每个最优解都由一个驻点乘子认证，该乘子在完整参数空间中计算，并包含对称性破缺方向。该证书给出谱映射，进而确定曲面（第 3.7 节）；随后我们验证它是自由边界极小曲面（第3.8节）。与亏格一不同，在亏格一情形中，[CO26a] 的最大化者位于 $\mathbb{B}^5$ 和 $\mathbb{B}^6$；在亏格零情形中，第一特征空间的维数至多为三，因此每个秩三的经认证临界点都是 $\mathbb{B}^3$ 中的自由边界极小曲面。

最接近的早期工作是 [OKO21]，，该工作计算了带有 $b-1$孔洞的单位圆盘上的最大化者。在那里，将外圆与孔洞互换的对称性是 M¨obius 变换，而不是等距变换，因此可以在输出中识别对称构型，但无法将其施加为约束。在球面上，每个对称性都是等距变换，而一个对称类由少数几个参数描述。我们不用特解法，而是使用显式核和 Kress 求积 [Kre14]，将所有特征值计算到舍入误差范围内。利用对一个类别的参数的精确导数，我们的大多数最优解在舍入误差范围内是驻定的，而不是 10^{-6}，证书给出了该曲面。

概要。 第 2 节构造环族所趋近的自由曲线极小曲面。第 3 节将问题统一化到带孔球面上，引入对称类和层势公式，并证明多极形式、导数公式和驻定性证书。第 4 节介绍离散化、对称性约化求解器、优化器、认证规则和莫尔斯指标，并对其进行验证。第 5 节逐族报告计算结果、每个 b 的最佳构型、大 b时的速率以及动物园图。第 6节以讨论作结。

	没有极帽	一个极帽	两个极帽
一个环	赤道的 b边形（图 7） 双圆盘 , 4π	棱锥（图8） 蛋糕架 , 15.782	双锥（图9） 轮 , 17.543
两个环	棱柱、反棱柱（图10、11） 临界鼓 , 19.659	棱柱、反棱柱 + 1极帽（图10、11） 带一个角的鼓 , 20.486	棱柱、反棱柱 + 2极帽（图10、11） 带两个喇叭口的鼓 , 21.070
三个环	堆叠环（图 12） 鼓形堆叠 , 22.229	堆叠环 + 1极帽（图 12） 带一个喇叭的鼓堆叠 , 22.506	堆叠环 + 2极帽（图 12） 带两个喇叭口的鼓堆叠 , 22.731

TABLE 1. 动物园图（第5.2 和5.5节）：按环的数量划分的环族环和极帽（PC），以及极限网络 $j \to \infty$ 及其值 $\bar{\sigma}_\infty$ （第2节）。图2 展示了极限网络的子午截面。临界悬链面（10.475）是具有 $j = 0$ 的双锥，以及具有 $j = 1$的反棱柱。类别定义于表5中，值见表6 和图3。

记号。 我们记作 $[n] := \{1, \dots, n\}$。 $\mathbb{S}^2$ 中的一个点与北极的极角为 $\beta \in [0, \pi]$，与 e_1的方位角为 ϕ e_3 。点群采用 Schoenflies 记号（C_{jv}、 D_{jh}、 D_{jd}、T_d、 O_h、 I_h、 I）表示。上标 * 表示在计算得到的临界构型处的量，例如 $\bar{\sigma}_1^\star$。

2. 自由曲线极小曲面

表 1 的环族中，每个环包含 j 个帽。随着 j 增大，这些族中的曲面似乎收敛于由平圆盘和悬链面环带组成的并集，并且它们沿着 $\partial\mathbb{B}^3$ （第 5.2 节）上的圆相交。如果除这些圆之外的区域都光滑收敛，那么极限的每个部分都必须是平圆盘或悬链面环带，因为极限具有旋转对称性且是驻定的。这些并集按照 [KN25]，（在第 2.1 节中扩展）的意义属于自由曲线极小曲面，其中允许存在边界圆，且曲面沿这些边界圆与 $\partial\mathbb{B}^3$ 正交相交。当族中存在极帽时，就会出现边界圆。本节明确构造其中五个曲面：以闭式解给出的双覆盖圆盘和临界鼓（命题 2.3 和 2.6）、由一个单变量方程的根确定的车轮和鼓形堆叠 $\mathcal{C}$（3）（命题 2.5 和 2.7），以及由方程组（10）的解确定的蛋糕架（命题 2.4）。图 2 展示了这五个曲面，以及我们计算出的其他环族的极限；表 4列出了它们的数据。

2.1. 定义与传输问题。 设 M 是一个紧曲面，可以带边界；设 Γ 是 M 内部有限个互不相交的闭曲线的并集。 $\mathbb{B}^3$ 中的一个**自由曲线极小曲面**是一个连续映射 $X\colon M \to \mathbb{B}^3$，满足 $X(\Gamma \cup \partial M) \subset \partial\mathbb{B}^3$，其在 $M \setminus \Gamma$ 上是共形且调和的，并满足

$$\partial_{\nu^+} X + \partial_{\nu^-} X \parallel X \quad \text{在 } \Gamma\text{上,} \tag{5a}$$

$$\partial_\nu X \parallel X \quad \text{在 } \partial M\text{上} \tag{5b}$$

这里的 $\nu^\pm$ 是 Γ 两侧的外单位法向量，而 ν 是∂M的外单位法向量，对于 M的共形类中的任意度量 M，对于闭 [，这就是5]的定义，见 KN25，定义 1.1 和 1。其像是极小曲面的并集。沿着 $X(\Gamma)$ 两个曲面片在 $\partial\mathbb{B}^3$ 相交，且它们的余法向量之和垂直于 $\partial\mathbb{B}^3$。我们称之为平衡条件。沿着 $X(\partial M)$，曲面与 $\partial\mathbb{B}^3$ 正交相交，就像自由边界极小曲面一样。

这些曲面伴有一个特征值问题。设 g 是 M 上的度量， $\lambda > 0$ 是 $\Gamma \cup \partial M$ 上的密度。对连续函数 u，传输–Steklov问题为

$$\Delta_g u = 0 \quad \text{位于 } M \setminus \Gamma, \tag{6a}$$

$$\partial_{\nu^+} u + \partial_{\nu^-} u = \sigma\lambda u \quad \text{位于 } \Gamma, \tag{6b}$$

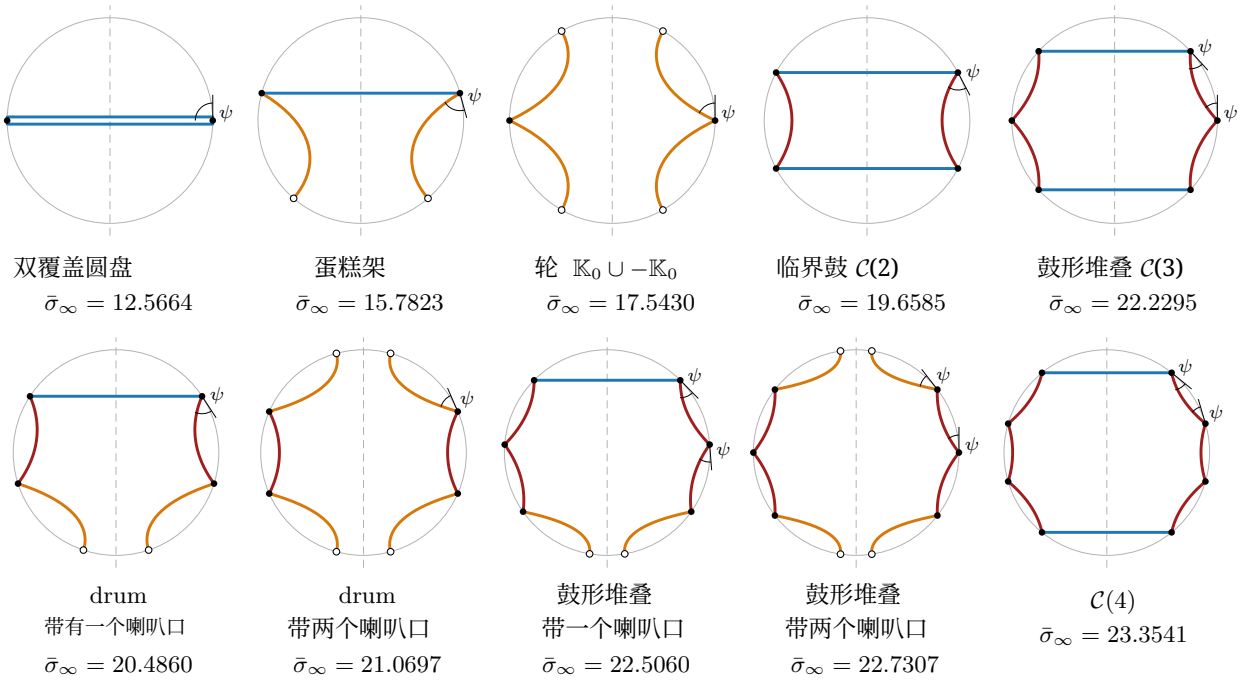

FIGURE 2. 第2节自由曲线极小曲面的子午截面及其值 $\bar\sigma_\infty$。它们是表 1 中环族的极限网络，而表4 列出了它们的数据。平圆盘为蓝色，悬链面带为红色，喇叭为橙色，位于 $\partial\mathbb{B}^3$ （灰色）内部，旋转轴以虚线表示。实心点是 Γ 的圆，在此两张曲面片相交并形成相同的角度 ψ，与 $\partial\mathbb{B}^3$。空心点是边界圆，喇叭在此处与 $\partial\mathbb{B}^3$ 正交相接。双覆盖圆盘的两张曲面片分开绘制。带一个喇叭口的网络将喇叭绘于底部。上排：命题 2.3–2.7 中的曲面。下排：根据引理2.2 计算得到的网络，详见命题 2.7 之后。

$$\partial_\nu u = \sigma \lambda u \qquad \text{on } \partial M. \tag{6c}$$

其特征值为 $0 = \sigma_0 < \sigma_1 \le \sigma_2 \le \cdots$，我们用总权重对其归一化：$\bar\sigma_k = \sigma_k \int_{\Gamma\cup\partial M} \lambda\, ds$，其中 ds 是 g的弧长。对于闭合的 M和 $\lambda \equiv 1$，这些是 [KN25], 的Steklov传输特征值；而对于 $\Gamma = \emptyset$，该问题就是第 3.1 节中的加权Steklov问题。由于只涉及狄利克雷能量和测度 $\lambda\, ds$，该问题是共形不变的。

引理 2.1. 设 X 是一个自由曲线极小曲面，且 g 是它在 $M \setminus \Gamma$上诱导的度量。令$\lambda = X \cdot (\partial_{\nu^+} X + \partial_{\nu^-} X)$ 在 Γ 上，且 $\lambda = 1$ 在 ∂M 上。那么，X 的坐标函数满足 (6)，其中 $\sigma = 1$，并且 $\int_{\Gamma\cup\partial M} \lambda\, ds = 2$ 面积 (X)，面积按重数计。

证明。 共形调和映射的坐标函数关于诱导度量是调和函数，而该度量为 (6a)。在 Γ 上有 $|X| = 1$，因此由 (5a) 得 $\partial_{\nu^+} X + \partial_{\nu^-} X = \lambda X$，即当 6b时的 ($\sigma = 1$。在 ∂M上，余法向是一个平行于 X 且指向 $\mathbb{B}^3$外部的单位向量，故它等于 X，即 (6c)。在像的每个部分 Σ上，散度$_\Sigma X = 2$，且由散度定理得 2 面积$(\Sigma) = \int_{\partial\Sigma} X \cdot \partial_\nu X\, ds$。对各部分求和即得结论。 □

因此，坐标函数的归一化特征值是面积的两倍。在下面的例子中 $\lambda > 0$。

2.2. **旋转曲面**。令 $t = \log\cot\frac{\beta}{2}$， $\mathbb{S}^2$ 的圆度量为 $\operatorname{sech}^2 t\,(dt^2 + d\phi^2)$。因此，$(t,\ \phi)$ 是 $\mathbb{S}^2$ 去掉极点后的一个共形坐标，纬线是 t为常数的直线，而北极为 $t = +\infty$。令 Γ 由圆 $t = t_i$、 $i = 1$、.....、n组成，其中

$t_1 < \cdots < t_n$，并令 M为 $t_- \le t \le t_+$的部分 $\mathbb{S}^2$。有限端 $t_\pm$是 M的一个边界圆，即极帽的边缘；无限端意味着 M 包含极点。将测度$\lambda\, ds$ 在圆 $a_i\, d\phi$ 上写作 $t = t_i$，在边界圆上写作 $a_\pm\, d\phi$。于是（6）表示为

$$u_{tt} + u_{\phi\phi} = 0 \qquad \text{for } t_- < t < t_+,\ t \neq t_i, \tag{7a}$$

$$u_t(t_i^+) - u_t(t_i^-) = -\sigma a_i\, u(t_i) \qquad \text{在圆上 } t = t_i, \tag{7b}$$

$$\pm u_t(t_\pm) = \sigma a_\pm\, u(t_\pm) \qquad \text{在有限端 } t_\pm, \tag{7c}$$

在无穷端有界 u，且 $\bar\sigma = 2\pi\sigma\big(\sum_i a_i + \sum_\pm a_\pm\big)$。我们寻找旋转对称映射

$$X(t,\phi) = \big(R(t)\cos\phi,\ R(t)\sin\phi,\ Z(t)\big), \qquad R > 0, \tag{8}$$

并将 $P = (R,\ Z)$记作轮廓，将 $P' = (R',\ Z')$记作其切向量。

引理 *2.2*。映射 *(8)* 是自由曲线极小曲面，当且仅当满足以下条件。*(i)*（共形性与调和性）在每对相邻圆及端点之间的每个区间上，$R'' = R$、 $Z'' = 0$ 和 $|P'| = R$。*(ii)*（平衡条件）在每个圆处，P连续， $|P(t_i)| = 1$且 $P'(t_i^+) - P'(t_i^-) = -a_i P(t_i)$，其中 $a_i > 0$为常数。*(iii)*（自由边界）在有限端， $|P(t_\pm)| = 1$且 $\pm P'(t_\pm) = a_\pm P(t_\pm)$，其中 $a_\pm > 0$为常数。*(iv)*（极点）在无穷端， $R \to 0$ 且 Z 为常数。

若 *(i)–(iv)* 成立，则曲面位于 $\mathbb{B}^3$中，一个无界片段是一个平圆盘，而其他每个片段都是悬链面的一部分 $R = \varrho\cosh\frac{Z - Z_*}{\varrho}$，关于该轴，其腰部半径为 ϱ，位于高度 Z_*。在圆t_i（半径为 $R_i = R(t_i)$处，两个曲面片形成相同的角度 ψ_i 与 $\partial\mathbb{B}^3$，且 $a_i = 2R_i \sin\psi_i$。一个边界圆的半径为 $a_\pm$。 X 的坐标函数满足 (7)，其中 $\sigma = 1$，并且

$$\bar\sigma = 2\pi\Big(\sum_i a_i + \sum_\pm a_\pm\Big) = 2\,\mathrm{Area}(X). \tag{9}$$

证明。除去极点外，(t,ϕ) 是 M 上的共形坐标，因此我们用平坦度量 $dt^2 + d\phi^2$ 检查共形性、调和性以及 (5)。向量 $X_t = (R'\cos\phi, R'\sin\phi, Z')$ 和$X_\phi = (-R\sin\phi, R\cos\phi, 0)$ 正交，且具有 $|X_t| = |P'|$ 和 $|X_\phi| = R$，而 $X_{tt} + X_{\phi\phi} = \big((R'' - R)\cos\phi,\ (R'' - R)\sin\phi, Z''\big)$，所以共形性和调和性即为 (i)。在圆 t_i 处，两侧的外单位法向量为 $\pm\partial_t$，因此 (5a) 写作 $X_t(t_i^-) - X_t(t_i^+) = a_i X$，其中$a_i$ 是 ϕ 的函数。其前两个分量给出 $R'(t_i^-) - R'(t_i^+) = a_i R(t_i)$，所以 a_i 是常数，因为 $R > 0$，而结合第三个分量，这就是 (ii) 的跳跃条件。在有限端，外单位法向量为 $\pm\partial_t$，而 (5b) 为 $\pm P'(t_\pm) = a_\pm P(t_\pm)$。由于 X 将 M 映射到$\mathbb{B}^3$，并且在圆和有限端处为 $|P| = 1$，因此 $|P|^2$ 在那里取得最大值，在端点处则为单侧最大值。在 t_i 处，这给出 $a_i = P\cdot P'(t_i^-) - P\cdot P'(t_i^+) \ge 0$。若 $a_i = 0$，则 $P\cdot P'(t_i) = 0$，而 $(|P|^2)'' = 2|P'|^2 + 2RR'' + 2ZZ'' = 4R^2 > 0$ 由 (i) 成立，因此 $|P| > 1$ 在 t_i附近成立，这是不可能的。在 $t_\pm$ 处，它给出 $a_\pm \ge 0$，且 $|a_\pm| = |P'(t_\pm)| = R(t_\pm) > 0$。 P 和 $|P| = 1$ 在圆及有限端处的连续性表明， X 是连续的，并将 $\Gamma \cup \partial M$ 映射到 $\partial\mathbb{B}^3$；根据 (iv)，在 M 中的一个极点处， X 趋于轴上的一个点。这就给出了等价性，只要我们证明 X 将 M 映射到 $\mathbb{B}^3$，并且无界片段是一个在极点处光滑的平圆盘。

根据 (i)，在每个片段上， Z 是仿射的， $R = pe^t + qe^{-t}$ 为常数 p 和 q，而 $|P'| = R$为 $Z'^2 = 4pq$。在一个无界片段上，设为 $t \ge t_n$，(iv) 给出 $p = 0$和 $Z = Z(t_n)$，因此$X = \big(R_n e^{-(t-t_n)}\cos\phi,\ R_n e^{-(t-t_n)}\sin\phi,\ Z(t_n)\big)$ 是半径为 R_n 、高度为 $Z(t_n)$ 的平圆盘。它关于极点的立体投影坐标 $e^{-t}e^{i\phi} = \tan\frac{\beta}{2}\, e^{i\phi}$ 是仿射的，因此在该处光滑， $t \le t_1$ 的情形也相同。在一个有界片段 $Z' \neq 0$ 上，因为否则 $pq = 0$ 和 R 会在 $\partial\mathbb{B}^3$中两个高度相同的点之间严格单调。因此 $p, q > 0$且 $R = \varrho\cosh(t - t_*)$，其中 $\varrho = |Z'|$；结合 $Z_* = Z(t_*)$，这就是悬链面 $R = \varrho\cosh\frac{Z - Z_*}{\varrho}$。在一个有界片段上

$|P|^2$ 严格凸，且在两端都等于 1；在无界片段上，$|P|^2 = R^2 + Z(t_n)^2$从 1 开始递减，因此 X 将 M 映入 $\mathbb{B}^3$。在 t_i 处，两个切向量的长度均为 R_i，且相差 $-a_i P$，其中 $|P| = 1$，因此 $P'(t_i^-) \cdot P = -P'(t_i^+) \cdot P = \frac{a_i}{2}$，这给出了正弦值为 $\psi_i \equiv \frac{a_i}{2R_i}$ 的公共角度。对于诱导度量 $R^2(dt^2 + d\phi^2)$，引理 2.1 中的测度在圆 t_i 上为 $a_i\, d\phi$，在边界圆上为 $a_\pm\, d\phi$，由此得到最后两个结论。□

我们将两个 Γ 圆之间的悬链面片称为带，将一个 Γ 圆与一个边界圆之间的悬链面片称为喇叭。每个这样的曲面片在共形意义下都是平坦圆柱，其长度是 t中两个圆之间的距离。t 中的平移是¨的莫比乌斯变换 $\mathbb{S}^2$，因此我们将一个圆固定在 $t = 0$。(ii)–(iv) 条件也是当 $\bar{\sigma}_1$ 在（7）中取临界值时的一阶条件，此时$\sigma = 1$ 是其第一个非零特征值；参见 [KN25，定理 1.4 和 1.7]，针对闭 M。权重的驻定性使这些圆位于 $\partial\mathbb{B}^3$上，而位置的驻定性则给出相等角。

方程数与未知数数目相同。对于具有 n 个圆和 $n_c \in \{0, 1, 2\}$ 个边界圆的曲面，未知数包括有界片段的 $n - 1 + n_c$ 个长度、$n + n_c$ 个权重 a_i 和 $a_\pm$，以及 R 和 Z 的缩放因子，共计 $2n + 2n_c + 1$ 个。除 $|P'| = R$ 和 $|P| = 1$ 外，条件 (i)–(iv) 都是线性的，且不会将 R 与 Z 混在一起。它们是模态$e^{\pm i\phi}$ 下 R 的（7），以及旋转对称模态下 Z 的（7），其中 $\sigma = 1$。从一端用射击法求解后，另一端对每种情况各剩下一个条件，总计 2 个方程。条件 $|P| = 1$ 给出 $n + n_c$ 个方程。由于$|P'|^2 - R^2 = Z'^2 - 4pq$ 在每个片段上都是常数，并且在无界片段上为零，$|P'| = R$ 为 $n - 1 + n_c$ 个有界片段各给出一个方程。因此共有 $2n + 2n_c + 1$ 个方程。

下面的每个命题都给出一个轮廓，其证明会检验条件 (i)–(iv)。图 2 顶行展示了它们的子午截面，表 4 列出了各圆的高度及其角度ψ_i，这些由 $\sin\psi_i = \frac{a_i}{2R_i}$得到。在这些命题中，我们从赤道面向外为圆编号，与表 4 中的编号一致，其中 $t_0 = 0$ 当 $t = 0$ 为一个圆时。大多数部分的形式为$R = A(\cosh t - s\sinh t)$，其中 $A > 0$和 $|s| < 1$，且 Z为仿射函数。于是 $R'' = R$、$Z'' = 0$和 $R > 0$，并且 $|P'|^2 - R^2 = A^2(s^2 - 1) + Z'^2$，因此 (i) 成立当且仅当 $Z'^2 = A^2(1 - s^2)$。如果圆 t_i的一侧是一个平圆盘，那么 $P'(t_i^-) = (R_i, 0)$ 或 $P'(t_i^+) = (-R_i, 0)$，因此引理 2.2 的证明给出$\frac{a_i}{2} = R_i^2$和 $\sin\psi_i = R_i$。于是 ψ_i 是该圆到较近的极点的角距离。

命题 2.3 (双覆盖圆盘)。设 $M = \mathbb{S}^2$ 与圆 $t_0 = 0$。则 $P = (e^{-|t|}0)$ 是一个自由曲线极小曲面，即被覆盖两次的赤道圆盘。赤道的权函数为$a_0 = 2$，且 $\bar{\sigma} = 4\pi$。

证明。引理 2.2 的条件（i）和（iv）M 显然成立，而（iii）因 P（0）=（1，0）和 P'（0^+）$-P'$（0^-）=（-2，0）$= -2P$（0）而无须考虑。对于（ii），□

这是 $\mathcal{C}$的（1），见 [KN25，定理 1。10]。它的两片曲面重合，并且位于一个平面内 .

Pr命题 2.4（蛋糕架）。设 $(a_0,\ L)$ 其中 $0 < a_0 < 2$ 且 $a_0 L > 1$ 求解 e

$$(a_0 L - 1)\big(\sinh L + (1 - a_0)\cosh L\big) = a_0\big(\cosh L + (1 - a_0)\sinh L\big), \tag{10a}$$

$$\tfrac{a_0}{2}\big(\cosh L + (1 - a_0)\sinh L\big)^2 + \big(1 - \tfrac{a_0}{2}\big)(1 - a_0 L)^2 = 1. \tag{10b}$$

令 $R_0 = \sqrt{\frac{a_0}{2}}$和 $Z_0 = \sqrt{1 - \frac{a_0}{2}}$。设 M 为 $\mathbb{S}^2$ 中包含圆 $t_0 = 0$的部分 $t \le L$。那么

$P = \big(R_0 e^t,\ Z_0\big)\ (t \le 0),$ $P = \big(R_0$(双曲余弦 $t + (1 - a_0)$ 双曲正弦 $t),\ Z_0(1 - a_0 t)\big)\ (0 \le t \le L)$

是一个自由曲线极小曲面。它由半径为 R_0 的平圆盘，以及从圆盘边缘延伸至半径为$a_+ = \frac{a_0}{a_0 L - 1}$的边界圆的一个喇叭组成，并且 $\bar{\sigma} = 2\pi(a_0 + a_+)$。方程组 (10)的解为 $a_0 = 1.858284$，$L = 2.068251$，其中 $\bar{\sigma} = 15.782277$。

证明。我们验证引理 2.2 的条件。圆盘满足 (i) 和 (iv)。喇叭具有 $A = R_0$，$s = a_0 - 1$ 以及 $Z'^2 = a_0^2 Z_0^2 = A^2(1 - s^2)$，因此满足 (i)。在圆处，$|P(0)|^2 = R_0^2 + Z_0^2 = 1$以及 $P'(0^+) - P'(0^-) = \big(R_0(1 - a_0) - R_0,\ -a_0 Z_0\big) = -a_0 P(0)$。最后，$Z' = a_+ Z$成立

对于 $a_+ = \frac{a_0}{a_0 L - 1} > 0$，则 $R' = a_+ R$ 为 (10a)，而 $|P(L)| = 1$ 为 (10b)。关于存在性，(10a) 是关于 a_0 的二次方程。沿着其较大的根 $a_0(L)$，该根在$2.06 \le L \le 2.07$ 上为实数且连续，并且 $1.85 < a_0(L) < 1.86$，(10b) 两边之差在$L = 2.06$ 处为正，在 $L = 2.07$ 处为负。因此，(10) 在此区间内有解，且满足 $0 < a_0 < 2$ 和 $a_0 L > 1$。□

在命题 2.3–2.7中，只有蛋糕架不具有关于水平面的反射对称性。平衡条件使盘子升至赤道面上方，位于边界圆的另一侧。该曲面结合了一个圆盘端，如 [KZ26], 中的情形，以及一个与 $\partial\mathbb{B}^3$ 正交相交的喇叭，如 [CSW25]中的情形。我们没有找到方程（10）的其他解。

命题 2.5 （车轮）。方程

$$L^2 = L\cosh L - \sinh L \tag{11}$$

恰有一个正根，$L = 2.0301901$。令 $s = \frac{L}{\sinh L - L^2}$ ~~$L\cosh$。设 M 为~~$\mathbb{S}^2$ 中由圆 $t_0 = 0$围成的部分 $|t| \le L$。则

$$P = \Big(\cosh t - s\sinh|t|,\ \tfrac{\sqrt{L^2-1}}{L^2}\,t\Big), \qquad |t| \le L,$$

是一个自由曲线极小曲面。它由两个沿赤道粘合的喇叭组成，每个喇叭都以半径为 $a_\pm = \frac{1}{L}$ 的边界圆为终点。赤道的权函数为 $\bar{a}_0 = 2s$，并且

$$\bar{\sigma} = 2\pi\Big(2s + \frac{2}{L}\Big) = \frac{4\pi}{L^2}\big(L + L\sinh L - \cosh L\big) \approx 17.542995.$$

证明。函数 $h(L) = L\cosh L - \sinh L - L^2$ 在 $h(0) = 0$ 处取值，并且 $h'(L) = L(\sinh L - 2)$。因此，h在 $[0, \operatorname{arsinh} 2]$ 上递减，随后递增至无穷大。由于 $h(0) = 0$，它恰有一个正根，且该根大于 $\operatorname{arsinh} 2 > 1$。我们验证引理 2.2 的条件。由于两端均有限，条件 (iv) 自动满足。由于 $(L\cosh L - \sinh L)^2 - (L\sinh L - \cosh L)^2 = L^2 - 1$ 且 $L\cosh L - \sinh L = L^2$，可得 $1 - s^2 = \frac{L^2-1}{L^4}$，并且 $|s| < 1$，因为 $L > 1$。因此，每个喇叭在满足 $A = 1$ 和 $\overline{Z'^2} = \frac{L^2-1}{L^4} = 1 - s^2$ 的情况下，均满足 (i)。在赤道处，$P(0) = (1, 0)$，并且$P'(0^+) - P'(0^-) = (-2s, 0) = -2sP(0)$。在 $t = L$ 处，利用 $L^2\cosh L = L\cosh^2 L - \sinh L\cosh L$ 以及$L^2\sinh L = L\sinh L\cosh L - \sinh^2 L$,

$$R(L) = \cosh L - s\sinh L = \frac{1}{L}, \qquad R'(L) = \sinh L - s\cosh L = \frac{1}{L^2}.$$

因此 $|P(L)|^2 = \frac{1}{L^2} + \frac{L^2-1}{L^2} = 1$ 和 $P'(L) = -\frac{1}{L}P(L)$。最后的 $t = -L$ 由对称性可得。 □

每个喇叭都是 $\mathbb{K}_0$ 的 [CSW25，引理 33], ，它沿赤道与 $\partial\mathbb{B}^3$ 相交，并沿上半球中的一个圆正交相交。其在 [CSW25] 中的缩放参数与高度参数之积为 L，且 $\mathrm{Area}(\mathbb{K}_0) = \frac{1}{4}\bar{\sigma}$ 与 [CSW25，注 39]一致。Carlotto、Schulz和Wiygul将车轮去奇异化为亏格为零的自由边界极小曲面 [CSW25，定理 61], ，并将车轮与赤道圆盘（其中三张曲面沿赤道相交）去奇异化为具有三个边界分支的高亏格曲面 [CSW25，定理 51]。

命题 2.6 (临界鼓)。令 $t_1 = \frac{1}{2}\big(1 + W(\frac{1}{e})\big) = 0.6392323$，其中 W为朗伯函数，且 $\alpha = (\cosh^2 t_1 + t_1^2)^{-1/2}$。令 $M = \mathbb{S}^2$，其圆为 $t = \pm t_1$。则

$$P = \alpha\big(\cosh t,\ t\big)\ \ (|t| \le t_1), \qquad P = \alpha\big(e^{t_1 - |t|}\cosh t_1,\ \pm t_1\big)\ \ (\pm t \ge t_1)$$

是一个自由曲线极小曲面。它由一条两端以平圆盘封闭的悬链带组成。两个圆的权函数均为 $a_1 = \frac{1}{t_1}$，并且

$$\bar{\sigma} = \frac{4\pi}{t_1} = \frac{8\pi}{1 + W(\frac{1}{e})} \approx 19.658536.$$

证明。该带具有 $A=\alpha$、$s=0$ 和 $Z'=\alpha$，因此满足引理 2.2 的 (i)。圆盘满足 (i) 和 (iv)；由于 M 没有边界，(iii) 不适用。两个公式都给出 $P(\pm t_1)=\alpha(\cosh t_1, \pm t_1)$，因此 P 连续，而 α 的选取给出 $|P(\pm t_1)|=1$。由于 R 是偶函数且 Z 是奇函数，只需检查 t_1 处的跳跃。该处，Z' 的跳跃为 $-\alpha$，而 R' 的跳跃为 $-\alpha(\cosh t_1+\sinh t_1)$。当且仅当 $a_1=\frac{1}{t_1}$ 且 $a_1=1+\tanh t_1$ 时，它们分别等于 $-a_1 Z(t_1)$ 和 $-a_1 R(t_1)$。由于 $1+\tanh t=\frac{2e^{2t}}{e^{2t}+1}$，方程 $\frac{1}{t_1}=1+\tanh t_1$ 为 $2t_1-1=e^{-2t_1}$，即 $(2t_1-1)e^{2t_1-1}=e^{-1}$。由于 $ue^u<0$ 在 $u<0$ 时，且 ue^u 随 $u\ge 0$ 增大，其唯一解为 $2t_1-1=W(\frac{1}{e})$。□

这是临界鼓 $\mathcal{C}(2)$ 的 [KN25]。其值 $\frac{4\pi}{t_1}$ 为 [KN25</style}，定理 A。其中 是 cosh 的正根。由于 cosh tanh t，这就是证明中的方程 $\frac{1}{t_1}=1+\tanh t_1$，而 Lambert 形式使 t_1 显式化。证明中 a_1 的两个表达式分别来自坐标 z 和坐标函数 x、y。它们相等即为鼓的平衡条件，这使 σ_1 成为三重的。

命题 2.7（鼓形堆叠 $\mathcal{C}(3)$）。令 $t_1=0.9160481$ 为 $(\frac{1}{2},\infty)$ 中的根

$$t_1 e^{t_1}-\sinh t_1=\sqrt{2}\,t_1^{3/2}, \tag{12}$$

并令 $D=t_1e^{t_1}-\sinh t_1$ 和 $s_0=\frac{t_1e^{t_1}-\cosh t_1}{D}$。令 $M=\mathbb{S}^2$ 与圆 $t_0=0$ 和 $t=\pm t_1$ 相交。于是

$$P=\Big(\cosh t-s_0\sinh|t|,\ \tfrac{\sqrt{2t_1-1}}{D}\,t\Big)\quad(|t|\le t_1),$$

由 $|t|\ge t_1$ 的平圆盘延拓而成，是一个自由曲线极小曲面。它由沿赤道粘合、并由两个平圆盘封闭的两个悬链面带组成。在赤道处的权重为 $a_0=2s_0=2-\sqrt{2}\,e^{-t_1}t_1^{-3/2}$，在外圆处的权重为 $a_1=\frac{1}{t_1}$，并且

$$\bar\sigma=2\pi(a_0+2a_1)=2\pi\Big(2+\frac{2}{t_1}-\sqrt{2}\,e^{-t_1}t_1^{-3/2}\Big)\approx 22.229471.$$

证明。令 $h(T)=Te^T-\sinh T-\sqrt{2}\,T^{3/2}$。于是 $h(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}e^{1/2}-\sinh\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\approx -0.197<0$，$h(T)\to\infty$，并且 h 在 $[\frac{1}{2},\infty)$ 上是凸的，因为 $h'''(T)=(3+T)e^T-\cosh T+\frac{3\sqrt{2}}{8}T^{-3/2}>0$，且 $h''(\frac{1}{2})=\frac{5}{2}e^{1/2}-\sinh\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\approx 2.10>0$。因此 h 在 $(\frac{1}{2},\infty)$ 中恰有一个根 t_1。我们检验引理 2.2 的条件。圆盘满足 (i) 和 (iv)，而 (iii) 是空 vacuous 的，因为 M 没有边界。带具有 $A=1$、$s=\pm s_0$ 和 $Z'^2=\frac{2t_1-1}{D^2}$，并且 $D^2(1-s_0^2)=(t_1e^{t_1}-\sinh t_1)^2-(t_1e^{t_1}-\cosh t_1)^2=2t_1e^{t_1}(\cosh t_1-\sinh t_1)-1=2t_1-1>0$。所以 $|s_0|<1$ 和 $Z'^2=1-s_0^2$，带满足 (i)。在赤道处，$P(0)=(1,0)$，且 P' 的跳跃为 $-2s_0P(0)$。在 $t=t_1$ 处，由于 $\cosh t_1-\sinh t_1=e^{-t_1}$，$D$ 和 s_0 的定义给出 $DR(t_1)=D\cosh t_1-(t_1e^{t_1}-\cosh t_1)\sinh t_1=t_1e^{t_1}(\cosh t_1-\sinh t_1)=t_1$，以及 $DR'(t_1^-)=D\sinh t_1-(t_1e^{t_1}-\cosh t_1)\cosh t_1=1-t_1$。圆盘具有 $R'(t_1^+)=-R(t_1)$ 和 $Z'=0$，因此 P' 的跳跃为 $-\frac{1}{D}(1,\sqrt{2t_1-1})=-\frac{1}{t_1}P(t_1)$。此外，根据 t_1 的方程，$|P(t_1)|^2=\frac{t_1^2+(2t_1-1)t_1^2}{D^2}=\frac{2t_1^3}{D^2}=1$。圆 $t=-t_1$ 由对称性得到，因为 R 是偶函数，而 Z 是奇函数。最后 $2-a_0=2-2s_0=\frac{2}{D}(\cosh t_1-\sinh t_1)=\frac{2e^{-t_1}}{D}=\sqrt{2}\,e^{-t_1}t_1^{-3/2}$。□

这是鼓形堆叠 $\mathcal{C}(3)$ [KN25]。其外圆位于极角 47.63° on $\partial\mathbb{B}^3$，处于区间 $(\frac{\pi}{4},\frac{2\pi}{7})$ 内，Kapouleas 和 Zou 将它们定位于该区间内（见 [KZ26，推论 2。24]）。

表 4 中剩余的网络是鼓和鼓形堆叠，其中一个或两个圆盘被喇叭替代，以及堆叠体 $\mathcal{C}(4)$。对于这些网络，我们使用牛顿法求解引理 2.2 中的条件，残差低于 10^{-14}；图 2 的底行展示了它们的子午截面。对于每一种带喇叭的网络类型，我们都找到了一个具有正权重的解。对于每个圆的数量 [KN25，由定理 1 可知，10]，[KZ26，推论 2。24]以圆盘封闭的堆叠体是唯一的。对它们而言，$\sigma=1$ 是 (6) 的第一非零特征值，并且 $\mathcal{C}(N)$ 在 $\bar\sigma_1$ 上的旋转对称度量中使 $\mathbb{S}^2$ 具有 N 个纬圈时 [KN25，定理 1。10]。带有

喇叭的网络不是封闭的，因此 [KN25] 不适用于它们；网络的 $\bar{\sigma}$ 值只有在 $\sigma = 1$ 是第一非零特征值时才等于其 $\bar{\sigma}_1$。我们通过逐模态求解（7），检查了表 4 中的十个网络。在模态 $e^{im\phi}$中，瑞利商为 $\int (f'^2 + m^2 f^2)\, dt$除以 $\sum_i a_i f(t_i)^2 + \sum_\pm a_\pm f(t_\pm)^2,$，因此该模态的第一特征值随 $m \geq 1$增大而增大。在每种情况下，对于 $m = 2$，它至少为 2，因此只有 $m \leq 1$ 的模态才 relevant。除了双覆盖圆盘之外，对每个网络而言，$\sigma = 1$ 都是第一非零特征值，重数为三：z 在旋转对称模态中给出该特征值，而 x 和 y 则在模态 $e^{\pm i\phi}$中给出。下一个特征值至少为 1.545，即车轮对应的值。双覆盖圆盘位于平面 $z = 0$中，其非零特征值在模态 $e^{\pm im\phi}$中为 $\sigma = m$，因此在那里 $\sigma = 1$ 的重数为二。

3. Layer potential formulation

我们在去掉 b 圆帽的球面上提出极值问题，并描述其对称类（第3.1–3.2节）。随后，我们将 Steklov问题写成边界积分方程和多极形式，并给出其单极子和偶极子近似（第3.3–3.5节），还给出导数及证书，用以将计算得到的临界点转化为自由边界极小曲面（第3.6–3.8节）。这些结果大多是将 [CO26a; GNS08; KO26]推广到球面上的版本，证明请参见这些文献。第3.4 节中的多极形式是新的，本文将给出证明。我们沿用 [CO26a], 中的记号，以球面中心 $c_\ell \in \mathbb{S}^2$ 和角半径 r_ℓ 取代平面上的对应概念。

3.1. 一致化与加权问题。根据Koebe一致化 [HS93，定理0.2], Σ 在共形意义下为 $\Omega := \mathbb{S}^2 \setminus \bigcup_{\ell\in[b]} C_\ell$，其中 $C_\ell = \{x \in \mathbb{S}^2 : \ x \cdot c_\ell > $个互不相交的圆帽，角半径为 cos $r_\ell\}$，且在M¨obius变换下唯一。给定标架 $(e_{1,\ \ell},\ e_{2,\ \ell},\ c_\ell)$，边界圆 Γ_ℓ 是

$$\xi_\ell(\theta) = \cos r_\ell\, c_\ell + \sin r_\ell \big(\cos\theta\, e_{1,\ell} + \sin\theta\, e_{2,\ell}\big), \qquad ds = \sin r_\ell\, d\theta, \qquad \nu = -\partial_{r_\ell}\xi_\ell, \tag{13}$$

其中 ν Ω 的外余法向量和余切 r_ℓ 的测地曲率 Γ_ℓ。由于 Steklov 谱对共形因子的依赖仅通过其边界迹 $\rho = e^\omega$ [CO26a，§2.1],极值问题是

$$\max_{\mathbf{p}}\ \bar{\sigma}_1(\mathbf{p}) \quad \text{subject to} \quad \begin{cases} \Delta_{\mathbb{S}^2} u = 0 & \text{in } \Omega, \\ \partial_\nu u = \sigma\rho\, u & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{14a}$$

$$c_1 = e_3, \qquad c_2 = -e_3, \qquad r_1 = r_2; \qquad c_3 \cdot e_2 = 0, \qquad c_3 \cdot e_1 > 0 \tag{14b}$$

在$\mathbf{p} = (\mathbf{c},\ \mathbf{r}\ \boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta})$ 上。我们将特征函数归一化为 $\int_{\partial\Omega} \rho\, u_k u_{k'}\, ds = \delta_{kk'}$。在每个圆 Γ_ℓ 上，对数权函数 $\omega_\ell = \omega \circ \xi_\ell$ 是截断傅里叶级数

$$\omega_\ell(\theta) = \alpha_{\ell,0} + \sum_{n=1}^{n_{\max}} \big(\alpha_{\ell,n} \cos n\theta + \beta_{\ell,n} \sin n\theta\big)$$

在式（13）的角度 θ 中，其系数为 $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_{\ell,n})$ 和 $\boldsymbol{\beta} = (\beta_{\ell,n})$。这里 $\bar{\sigma}_k = L_\rho \sigma_k$，其中 $L_\rho = \int_{\partial\Omega} \rho\, ds$，且各帽互不相交，$\arccos(c_\ell \cdot c_{\ell'}) > r_\ell + r_{\ell'}$。模空间的维数为 $3b - 6 (b \geq 3)$。$\bar{\sigma}_k$ 在作用于（Ω ρ）上的 M¨obius 群作用下保持不变，该作用为（$\mathcal{T}\Omega$，$(\frac{\rho}{|d\mathcal{T}|}) \circ \mathcal{T}^{-1}$）。标准形式(14b）通过固定前两个中心和第三个中心的方向，消除了这种不变性。这始终是可能的：两个不相交的圆在 M¨obius 变换下等价于同心圆；在以其不动点为中心的立体投影坐标图中进行伸缩变换（$z \mapsto \lambda z$）可使半径相等；绕 e_3 旋转可固定 c_3。

例。对于（14b），情形 $b = 2$ 是对称环域 $\{|x \cdot e_3| <$ 余弦 $r\}$，带有两个半径相等的帽 r 位于极点处。临界悬链面是这一单参数族中 $r^\star \approx 0.59$ 的成员，其具有常权重 $\rho \equiv 1$。其半径满足余弦 $r^\star$ 对数余切 $\frac{r^\star}{2} = 1$，这就是临界悬链面的方程 t双曲正切 $t = 1$ 对于 $t =$对数余切 $\frac{r^\star}{2}$。在此半径处，第 4.4 节的分离分支 $\bar{\sigma}_1^\star = 4\pi$ 余弦 $r^\star \approx 10.47$合并为三重。

3.2. **对称类**。 我们的许多计算都施加了对称性，这减少了参数数量，并使我们能够达到完整问题的鞍点。在球面上进行研究不会损失任何对称性。 $\mathbb{S}^2$ 的保角映射和反保角映射组成的有限群可通过一个 M¨obius 变换共轭到 O(3) 中，其保方向部分则共轭到 SO(3) 中。因此，曲面的每个有限对称群 $\mathcal{G}$ 都通过旋转和反射作用于 Ω 上。

在这样的群作用下，帽分成 $\mathcal{G}$-轨道。同一轨道中的帽半径相同，并且 ω在每个轨道上有一个常数水平。给 ω 加上一个常数会使 $\rho = e^{\omega}$ 乘以一个常数，而$\bar{\sigma}_1$ 保持不变，因此我们以第一个轨道的水平为基准来测量各水平。圆上的权函数也必须遵循其中心的稳定子，即 $\mathcal{G}$ 中固定 c_ℓ的元素。这些元素是绕着穿过 c_ℓ的轴旋转的变换，也可能包括关于包含该轴的平面的反射。我们把这类平面称为镜面，其反射属于 $\mathcal{G}$。如果稳定子是由绕 $\frac{2\pi}{q}$ 旋转以及 q 个镜面生成的 C_{qv}，我们就选择 (13) 中的标架，使 e_1、ℓ 位于经过 c_ℓ的镜面内，此时$\omega_\ell(\theta) = \sum_n \alpha_{\ell,n} \cos(qn\theta)$。如果稳定子是没有镜面的循环群 C_q，那么 $\sin(qn\theta)$ 项也会出现，而 $q = 1$ 给出第 3.1 节的完整级数。一个类别由群、轨道以及每个中心在其轨道内的自由度确定。其几何参数包括每个轨道一个半径、中心的自由位置，以及除第一个轨道外每个轨道一个水平。

表 5 列出了我们计算的类别。从最刚性到最灵活，它们依次是多面体构型、位于同一大圆上的帽的赤道族，以及环族：棱锥、双棱锥、棱柱、反棱柱和堆叠环。一个由 j 个帽组成的环将中心置于共同的极角 β处，方位角为 $\phi_0 + \frac{2\pi k}{j}$、$k \in [j]$。当 β 是该类别的参数时，其纬度是自由的。位于 β和 $\pi - \beta$处的两个环，在对齐时构成棱柱对，旋转 $\frac{\pi}{j}$ 后则构成反棱柱对。堆叠体由若干具有交替偏移的环组成。其中任一种构型都可以在一个或两个极点处另外设置一个帽。多面体类以柏拉图立体、阿基米德立体以及频率为 ν的测地二十面体的顶点为起点，其中 $b = 10\nu^2 + 2$。测地二十面体，即用于网格生成的二十面体球，是通过将二十面体的每条边等分为 ν 份、将每个面划分为 ν^2 个三角形，并投影到 $\mathbb{S}^2$上构成的。其轨道要么位于 I_h 的镜面与 $\mathbb{S}^2$相交的弧上，并可沿这些弧自由滑动，要么是一般轨道。在 $b = 72$ 处，旋转群 I 的一个一般轨道具有两个自由位置参数。第5.3节介绍了 Fekete 类和无约束问题，它们不预设任何族。

3.3. **球面上的层势**。 由于 $\mathbb{S}^2$ 是闭合的，拉普拉斯–贝尔特拉米算子没有基本解，因此这里改用修正格林函数

$$G(x,y) := -\frac{1}{2\pi}\log|x-y|, \qquad -\Delta_{\mathbb{S}^2,x}G(x,y) = \delta_y(x) - \frac{1}{4\pi}, \tag{15}$$

其中 $|x-y|$ 是 $\mathbb{R}^3$中的弦距离，如 Gemmrich、Nigam 和 Steinbach 在球面上的边界积分方法 [GNS08] 以及 Kropinski 和 Nigam 的方法 [KN14] 所用。减去常数 $\frac{1}{4\pi}$，使右端项的平均值为零。令 ds 圆弧长为参量，单层、伴随双层和修正单层分别为

$$\mathcal{S}[\varphi](x) = \int_{\partial\Omega} G(x,y)\varphi(y)\,ds(y), \quad \mathcal{D}^*[\varphi](x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\Omega}\frac{\nu(x)\cdot y}{|x-y|^2}\varphi(y)\,ds(y), \quad \mathcal{S}_0 := \mathcal{S}(I-M)+M, \tag{16}$$

其中 $M\varphi$ 是 $\frac{1}{|\partial\Omega|}\int_{\partial\Omega}\varphi\,ds$ 是 φ 关于 ds的平均值，是一个常数函数，并且 $|\partial\Omega| = \sum_\ell 2\pi$ 正弦 r_ℓ。由（15），$\mathcal{S}_0[\varphi]$ 对每个 φ在 Ω 中都是调和函数。对于圆，由（13），

$$G(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\log\sin r_\ell - \frac{1}{4\pi}\log\Big(4\sin^2\frac{\theta-\theta'}{2}\Big), \qquad \partial_{\nu(x)}G(x,y) = \frac{\cot r_\ell}{4\pi}, \qquad x,y\in\Gamma_\ell. \tag{17}$$

首先是半径为 $\sin r_\ell$ 的平面圆的自相互作用，并且伴随双层核在 Γ_ℓ 上为常数。

定理 3.1（带孔球面上的边界积分公式）。（σ_k，u_k）是（14a）的特征对，当且仅当非零密度 φ_k满足 $\mathsf{A}\varphi_k = \sigma_k \mathsf{B}\varphi_k$，其中 $\mathsf{A} := (\mathcal{D}^* + \frac{1}{2}I)(I - M)$，$\mathsf{B} := \rho\mathcal{S}_0$ 由算子（16）构成，然后 $u_k = \mathcal{S}_0[\varphi_k]$。

这是 [KO26 的球面版本，即定理 3], ，其中的证明同样适用。跳跃关系是局部的。由于（15）中除平面上的对数函数之外的各项在零均值密度上均为常数，从帽内一点作立体投影，可将调和函数的表示通过立体投影化归为平面情形。

3.4. **多极分析**。对于圆帽，定理 3.1 中的层势在每个圆上的傅里叶模态中具有显式形式，我们将其写成多极展开。从外部看，一个帽的作用类似于其中心处的一个点电荷，其强度等于穿过其圆的通量，同时在同一点还有高阶多极项：偶极子、四极子等。从一个帽看，所有其他帽产生的场在其附近是调和的，并且在其中心处具有泰勒展开。命题 3.2 说明了圆上的 Steklov 条件如何将这两个展开逐模态耦合起来。

对于每个 ℓ，令 ζ_ℓ 为 $\mathbb{S}^2$ 上以 c_ℓ为中心、在该处等距，并与（13）的标架对齐的立体投影坐标。在此坐标中，$C_\ell = \{|\zeta_\ell| < R_\ell\}$ 满足 $R_\ell = 2\tan\frac{r_\ell}{2}$，该圆为 $\zeta_\ell = R_\ell e^{i\theta}$，其角度为 θ（13）的角度，而 c_ℓ 的对跖点为 $\zeta_\ell = \infty$。令 $w_\ell = \frac{1}{L_\rho}\int_{\Gamma_\ell}\rho\,ds$为 Γ_ℓ上的总权重的一部分，使得 $\sum_\ell w_\ell = 1$，并将 Γ_ℓ 上的权函数按角度展开，

$$\rho\,ds = \frac{L_\rho}{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} w_{\ell,k}\,e^{ik\theta}\,d\theta, \qquad w_{\ell,0} = w_\ell, \qquad w_{\ell,-k} = \overline{w_{\ell,k}}. \tag{18}$$

根据定理 3.1，（14a）的每个特征函数都是 $u = \mathcal{S}_0[\varphi]$，其中密度 φ定义在 $\partial\Omega$上，因此只需展开这些势。

命题 3.2（多极形式）。令 φ 为 $\partial\Omega$ 上的光滑密度，且为 $u = \mathcal{S}_0[\varphi]$。展开$\varphi|_{\Gamma_\ell} = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\varphi_{\ell,n}e^{in\theta}$。

(a)（电荷与多极子）函数 u 具有如下形式的展开式

$$u = u_\infty + \sum_{\ell\in[b]}\Big(q_\ell\,G(\cdot,c_\ell) + \operatorname{Re}\sum_{n\ge1}a_{\ell,n}\,\zeta_\ell^{-n}\Big), \tag{19}$$

其中 $u_\infty\in\mathbb{R}$、$q_\ell = \int_{\Gamma_\ell}(\varphi - M\varphi)\,ds$ 以及 $a_{\ell,n} = \sin_n r_\ell R_\ell^n\,\varphi_{\ell,n}$。电荷满足 $\sum_\ell q_\ell = 0$，而 $q_\ell = \int_{\Gamma_\ell}\partial_\nu u\,ds$ 是 u 进入 C_ℓ的通量。

(b)（一个帽处的场）设 $d_m > R_m$ 为从0 到像 ζ_m（C_ℓ）$\ell\neq m$的距离，则

$$u = -\frac{q_m}{2\pi}\log|\zeta_m| + \operatorname{Re}\sum_{n\ge1}a_{m,n}\,\zeta_m^{-n} + \operatorname{Re}\sum_{n\ge0}h_{m,n}\,\zeta_m^{n}, \qquad R_m\le|\zeta_m|<d_m, \tag{20}$$

其中最后一个和在 $|\zeta_m| < d_m$上收敛。其在 c_m 处的值为

$$h_{m,0} = u_\infty + \sum_{\ell\neq m}\Big(q_\ell\,G(c_m,c_\ell) + \operatorname{Re}\sum_{n\ge1}a_{\ell,n}\,\zeta_\ell(c_m)^{-n}\Big). \tag{21}$$

(c)（Steklov 条件）展开 $u|_{\Gamma_m} = \sum_{n\in\mathbb{Z}}U_{m,n}e^{in\theta}$，其中 $\zeta_m = R_m e^{i\theta}$ 在 Γ_m上。于是$U_{m,-n} = U_{m,n}$ 并且

$$U_{m,0} = \frac{q_m}{2\pi}\log\frac{1}{R_m} + h_{m,0}, \tag{22a}$$

$$U_{m,n} = \tfrac{1}{2}\big(h_{m,n}R_m^n + \overline{a_{m,n}}R_m^{-n}\big) \qquad (n\ge1). \tag{22b}$$

对 $(\sigma,\ u)$ 满足 (14a) 当且仅当，对于 $\bar\sigma = L_\rho\sigma$，对所有 $m \in [b]$,

$$q_m = \bar\sigma \sum_{k\in\mathbb{Z}} w_{m,-k}\, U_{m,k}, \qquad \tfrac{n}{2}\big(\overline{a_{m,n}} R_m^{-n} - h_{m,n} R_m^{n}\big) = \frac{\bar\sigma}{2\pi} \sum_{k\in\mathbb{Z}} w_{m,n-k}\, U_{m,k} \quad (n \ge 1). \tag{23}$$

(a) 部分指出，圆上的密度所对应的单层势，等于位于各帽中心的点源产生的场。帽 ℓ 的电荷 q_ℓ 和阶数为 n 的多极矩 $a_{\ell,n}$，是密度在 Γ_ℓ上的傅里叶系数经过重缩放后的结果。(b) 部分中，式 (20) 是环域内u 的洛朗展开，该环域围绕一个帽；其形式由对数共轭定理 [Axl86]给出。对数项和负幂项是帽 m 本身的电荷和多极矩，见式 (19)。非负幂项是其他帽产生的入射场，它在 c_m处是正则的。系数$h_{m,0}$是该场在 c_m处的值，由式 (21) 给出；$h_{m,1}$则编码了该处的梯度。(c) 部分中，Γ_m 上的 u 的模态 $n \ge 1$ 包含入射部分 $h_{m,n}R_m^n$ 和出射部分 $a_{m,n}R_m^{-n}$。迹 (22b) 是二者之和的一半，而通量是 $\frac{n}{2}$ 乘以二者之差。在模态 0 中，迹 (22a) 是 Γ_m上 u 的平均值，通量则为 $\frac{q_m}{2\pi}$。因此，式 (23) 是按模态写出的$\partial_\nu u = \sigma\rho\, u$。由式 (19)–(22) 可知，$q$, a, h 和 U 都关于 φ线性依赖，因此式 (23) 就是定理 3.1 中的广义特征值问题 $\mathrm{A}\varphi = \sigma \mathrm{B}\varphi$，按模态 $\varphi_{\ell,n}$写出，其中左边是通量，右边是加权迹。

命题 3.2的证明。(a) 在坐标 ζ_ℓ 中，弦距离为 [Ahl79，第 1 章第 2 节。4]

$$|x-y| = \frac{|\zeta_\ell(x) - \zeta_\ell(y)|}{\big(1+\tfrac14|\zeta_\ell(x)|^2\big)^{1/2}\big(1+\tfrac14|\zeta_\ell(y)|^2\big)^{1/2}}. \tag{24}$$

在 Γ_ℓ、$\zeta_\ell = R_\ell e^{i\theta}$和 $ds = \sin r_\ell\, d\theta$ 上。对于 $|\zeta_\ell(x)| > R_\ell$，$\log|\zeta_\ell(x) - R_\ell e^{i\theta}| = \log|\zeta_\ell(x)| - \mathrm{Re}\sum_{n\ge1}\frac1n R_\ell^n e^{in\theta}\zeta_\ell(x)^{-n}$，并且在 (24) 中，$x$ 的因子不依赖于 θ，而 y的因子在 Γ_ℓ 上为常数。因此，Γ_ℓ 上满足 $n \ge 1$ 的密度 $e^{in\theta}$ 在 C_ℓ 外部具有单层势 $\sin_{2n}^{r_\ell} R_\ell^n\, \zeta_\ell(x)^{-n}$，而 Γ_ℓ 上的密度 1 具有势 $2\pi \sin r_\ell\, G(x, c_\ell)$ 加上一个常数，因为 $\log|x-y|$ 在 $y \in \Gamma_\ell$ 上的平均值等于 $\log|x-c_\ell|$ 加上一个常数。由于 $\mathcal{S}_0[\varphi] = \mathcal{S}[\varphi - M\varphi] + M\varphi$，对模态求和，并取 $\varphi_{\ell,-n} = \varphi_{\ell,n}$，得到 (19)。帽 ℓ 的级数对于$|\zeta_\ell| \ge R_\ell$ 收敛，因为 φ 是光滑的，并且 $\sum_\ell q_\ell = \int_{\partial\Omega}(\varphi - M\varphi)\, ds = 0$。根据 (15)，$G(\cdot, c_\ell)$ 流入 C_m 的通量为 $\delta_{\ell m} - \frac{|C_m|}{4\pi}$，而多极矩没有通量，因此 u 流入 C_m 的通量为 $q_m - \frac{|C_m|}{4\pi}\sum_\ell q_\ell = q_m$。

(b) 将 $u = -\frac{q_m}{2\pi}\log|\zeta_m| + \mathrm{Re}\sum_{n\ge1} a_{m,n}\zeta_m^{-n} + v_m$ 写成，使得 v_m 是其他帽的场。由 (19) 可知，v_m 是 u_∞、帽 $\ell \ne m$ 的多极展开以及 $\sum_\ell q_\ell G(\cdot, c_\ell) + \frac{q_m}{2\pi}\log|\zeta_m|$之和。帽 $\ell \ne m$ 的多极展开在 C_ℓ 外是调和的。由坐标 ζ_m 中的 (24) 可知，每个 $G(\cdot, c_\ell)$ 都是 $-\frac{1}{2\pi}\log|\zeta_m - \zeta_m(c_\ell)|$，加上一个常数，再加上 $\frac{1}{4\pi}\log\big(1+\frac14|\zeta_m|^2\big)$。对于 $c_\ell = -c_m$，第一项不存在。最后一项对每个 ℓ 都相同，且其总系数 $\sum_\ell q_\ell$ 消失。因此，v_m 的对数部分在远离中心 c_ℓ、$\ell \ne m$ 的地方是调和的，并且在 c_m 处趋于 $\sum_{\ell\ne m} q_\ell G(c_m, c_\ell)$。于是，$v_m$ 在圆盘 $|\zeta_m| < d_m$ 上是调和的，且其在 c_m 处的值为 (21)。二维中的调和性具有共形不变性，因此 v_m 在平面意义下的 ζ_m 中是调和的。因此，在圆盘上，它是某个全纯函数的实部；该函数在 0 处的泰勒级数给出 $v_m = \mathrm{Re}\sum_{n\ge0} h_{m,n}\zeta_m^n$。这就是 (20)。

(c) 将 Γ_m 代入 (20) 中。由于 $\mathrm{Re}(h\zeta^n) = \frac12(h\zeta^n + \bar h\bar\zeta^n)$，$e^{in\theta}$、$n \ge 1$ 的系数为来自其他帽的场的 $\frac12 h_{m,n}$、R_m^n，以及来自多极矩的 $\frac12 a_{m,n}$、R_m^{-n}。这就得到 (22)。余法向 ν指向 C_m，即指向较小的 $|\zeta_m|$，而通量形式 $\partial_\nu u\, ds$ 是共形不变的。因此 $\partial_\nu u\, \frac{ds}{d\theta} = -|\zeta_m|\,\partial_{|\zeta_m|}u$ 在 $|\zeta_m| = R_m$处。其模态 0 为 $\frac{q_m}{2\pi}$，其模态 $n \ge 1$ 为$\frac{n}{2}\big(a_{m,n}R_m^{-n} - h_{m,n}R_m^n\big)$。根据 (18)，$\Gamma_m$上的条件 $\partial_\nu u\, ds = \sigma\rho\, u\, ds$ 因而在模态 $n \ge 0$下为 (23)，而其模态 $n < 0$ 为复共轭。□

备注 3.3（特解）。 [OKO21] 的特解法适用于带圆形孔洞的平面圆盘。它用 1、 z^n、$\log|z-z_i|$ 和 $(z-z_i)^{-n}$ 的实部和虚部来近似特征函数，其中 z_i 为 i号孔洞中的一个点，并在配点处通过最小二乘法施加 Steklov 条件。以 $-c_1$ 为中心的立体投影坐标 z 将 Ω 映射到这样的区域，其中 Γ_1 为外圆。在该坐标下，帽 1 的多极矩是 z^n 的倍数，而帽 $\ell\neq 1$ 的多极矩是 $(z-z_\ell)^{-1}$ 的多项式，其中 z_ℓ 为 c_ℓ 的像。根据 (24) 和 $\sum_\ell q_\ell=0$，电荷给出 $\sum_{\ell\neq1}-\frac{q_\ell}{2\pi}\log|z-z_\ell|$ 加上一个常数。因此 (19) 张成相同的函数。不过在这里，系数是密度的傅里叶模态，而命题 3.2(c) 逐模态地精确施加 Steklov 条件。

推论 3.4 (常权重)。 设 ρ 在每个圆上均为常数，即 $\rho|_{\Gamma_\ell}=\frac{L_\rho w_\ell}{2\pi}$正弦$r_\ell$，并设 u 如~~命题~~*3.2*所述。那么 $(\sigma,\ u)$ 满足 (14a) 当且仅当，令 $\bar\sigma=L_\rho\sigma$ 且 $\varepsilon_m=\frac{\bar\sigma\, w_m}{2\pi}$，

(25) $$q_m=\bar\sigma\, w_m\, U_{m,0},\qquad (n-\varepsilon_m)\,\overline{a_{m,n}}=(n+\varepsilon_m)\,R_m^{2n}\,h_{m,n}\qquad \textit{for all } m\in[b] \textit{ and } n\geq 1.$$

特别地，若 $\varepsilon_m\neq n$，则 $a_{m,\,n}=\kappa_{m,\,n}\,R_m^{2n}\,h_{m,\,n}$ 其中 $\kappa_{m,\,n}=\frac{n+\varepsilon_m}{n-\varepsilon_m}$。

证明。 现在 $w_{m,\,k}=0$ 对于 $k\neq 0$，因此 (23) 可写为 $q_m=\bar\sigma w_m U_{m,\,0}$ 以及 $\frac{n}{2}\big(a_{m,\,n}R_m^{-n}-h_{m,\,n}R_m^{n}\big)=\varepsilon_m U_{m,\,n}$。代入 (22b)。 □

因此，帽的通量与其圆上 u 的平均值成正比，而帽的每个多极矩都与其他帽产生的场中相同阶数的泰勒系数成正比。只有中心 c_ℓ、半径 R_ℓ 和分数 w_ℓ 参与其中。当 w_m 较小时（例如帽的数量很多时）， ε_m 较小且 $\kappa_{m,\,n}$ 接近 1，即绝缘孔的响应。

3.5. **单极子和偶极子近似**。 如推论 3.4 所示，设每个圆上的权函数为常数；当权函数近似为常数时，这样做几乎不会增加代价。设 $\tilde\rho$ 为 ρ 在每个圆上的平均值。若 $(1-\delta)\,\tilde\rho\leq\rho\leq(1+\delta)\,\tilde\rho$，则根据极小极大原理，对每个 $\frac{1}{1+\delta}\bar\sigma_k(\tilde\rho)\leq\bar\sigma_k(\rho)\leq\frac{1}{1-\delta}\bar\sigma_k(\tilde\rho)$ 都成立，因为这两个权函数的总量相同。由于 k 阶多极矩带有因子 $n\ R_m^{2n}$，小帽上的高阶项影响很小，因此我们只保留其中的第一项。

在单极近似中，每个帽都有一个电荷，且没有多极矩：$a_{\ell,\,n}=0$ 对所有 $n\geq 1$。设 $\bar u=(U_{m,\,0})_m$ 为 u 在各圆上的平均值向量，且 $q=(q_\ell)_\ell$ 为电荷向量。由（22a）和（21）， $\bar u=\mathsf{G}q+u_\infty\mathbf{1}$，其中 $\mathbf{1}$ 为全 1 向量，且

(26) $$\mathsf{G}_{m\ell}=G(c_m,c_\ell)\quad(m\neq\ell),\qquad \mathsf{G}_{\ell\ell}=\frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{R_\ell}.$$

条目 $\mathsf{G}_{m\ell}$ 是位于 c_m 的单位电荷在 c_ℓ处产生的势，而 $\mathsf{G}_{\ell\ell}$ 是 $-\frac{1}{2\pi}\log|\zeta_\ell|$在 Γ_ℓ上的平均值。势的这些平均值中，项$-\frac{1}{4\pi}\log(1+\frac{1}{4}R_m^2)$ 会消去，正如命题 3.2(b) 的证明中所示。由（25）可知，电荷与平均值成正比， $q=\bar\sigma\mathrm{diag}(w)\,\bar u$，而常数 u_∞ 由电荷之和为零这一条件确定。综合以上结果，得到特征值问题

(27) $$\mathsf{P}\,\mathsf{G}\,\mathrm{diag}(w)\,\bar u=\frac{1}{\bar\sigma}\,\bar u,\qquad \mathsf{P}=I-\mathbf{1}w^{\mathsf{T}},$$

对于 $b\times b$ 矩阵，其中 P 去除按 w 加权的平均值。

在偶极近似下，对于所有 $n\geq 2$，每个帽都有一个电荷和一个偶极子：$a_{\ell,\,n}=0$ 。令$a=(a_\ell,1)_\ell$ 表示偶极子的向量，令 $h=(h_\ell,1)_\ell$ 表示中心处入射场梯度的向量。则对于仅依赖于（13）中的中心和标架的实线性映射，有 $\bar u=\mathsf{G}q+u_\infty\mathbf{1}+\mathsf{V}a$ 和 $h=\mathsf{D}_1q+\mathsf{D}_2a$。这里，$\mathsf{V}$ 给出偶极子场在中心处的值，而 D_1 和 D_2 给出电荷场和偶极子场在中心处的梯度。根据推论 3.4，取 $n=1$、 $a=\mathsf{K}h$，其中 K 记录每个帽的响应，$a_{\ell,\,1}=\kappa_{\ell,\,1}R_\ell^2\,h_{\ell,\,1}$。消去 a 和 h，得到（27），其中 G 替换为

(28) $$\mathsf{G}_{\mathrm{eff}}=\mathsf{G}+\mathsf{V}\,(I-\mathsf{K}\mathsf{D}_2)^{-1}\mathsf{K}\,\mathsf{D}_1.$$

矩阵 $\mathsf{G}_{\mathrm{eff}}$ 将电荷映射到圆上的 u 的平均值，同时计入电荷诱导的偶极子。它通过因子$\kappa_{\ell,\,1}$依赖于 $\bar\sigma$ ，我们通过迭代求解特征值问题。

两个问题的最大特征值的倒数为

$$\bar\sigma_1^{(0)} = \frac{1}{\lambda_{\max}\big(\mathsf{P}\,\mathsf{G}\,\mathrm{diag}(w)\big)}, \qquad \bar\sigma_1^{(1)} = \frac{1}{\lambda_{\max}\big(\mathsf{P}\,\mathsf{G}_{\mathrm{eff}}\,\mathrm{diag}(w)\big)}. \tag{29}$$

这里 $\mathsf{G}_{\mathrm{eff}}$ 在 $\bar\sigma = \bar\sigma_1^{(1)}$ 处取值。第 5.4 节利用它们近似 $\bar\sigma_1$ 在较大 b 下的情形。将同样的消元过程推广到任意阶多极矩，可得到进一步的近似。纳入所有多极矩后，只要 (14a) 中的逆存在，就能恢复问题 (28) 本身。

与定理 *3.1* 的关系。根据 (19)，每个圆上均为常数的密度对应于不含多极矩的函数 (19)；而傅里叶模态阶数至多为 1 的密度，则对应于包含电荷和偶极子的函数。因此，单极子和偶极子近似分别是矩阵铅笔 (A,B) 在这两个密度空间上的 Galerkin 投影。若圆上的权函数不是常数，则投影后的矩阵铅笔形式不变，但同一圆上的模态会像 (23) 中那样，通过权函数的傅里叶系数相互耦合。

注 3.5（相关展开式）。 Huang 和 Venkatraman 将带有许多小孔洞的闭流形的 Steklov 特征值在其极限附近展开 [HV26，定理 1。3]。他们的孔洞是位于相距最远点处的无权测地球。每个半径都使孔洞的边界面积与其 Voronoi 单元的带权体积相平衡。在常权重的球面上，这给出 $r = 2b^{-1}$。首项修正的阶数为 $b^{-1}\log b$，是一个库仑型能量，正如我们的单极近似。下一项包含极限特征函数的梯度平方在孔洞上的积分，其系数为 $-\frac{d}{d-1}$ 在维数 d中，因此在 -2 曲面上[HV26，（1.12）和（1.14）]。它对应于我们的偶极子。第 5.4 节计算了该系数 16π以及阶数为 b^{-1}的项的常数，并对半径进行优化。Huang 和 Venkatraman 将此类优化问题列为一个开放方向。偶极子使该值在阶数b^{-1} 处改变，改变因子为 $1+2f$，与他们的系数 -2一致。最优半径为 $r^\star = 2b^{-1}$，即他们的平衡半径。

3.6. 导数。帽 ℓ 的参数包括其中心 c_ℓ、通过圆及其标架的旋转生成元 $g = c_\ell \times \dot c_\ell$ 由 $\dot c_\ell \in T_{c_\ell}\mathbb{S}^2$ 移动得到的中心、其半径 r_ℓ，以及 ω_ℓ 的系数（$\alpha_{\ell,\,n}$、$\beta_{\ell,\,n}$）。按照 [CO26a 第 2 节的记号，3], $\mathsf{op}(k)$ 是一个核为 $k(x,\nu(x)\,y)$、测度为 sin $r_{\ell'}d\theta'$ 的算子； $\mathcal{S} = \mathsf{op}(k_{\mathcal{S}})$、 $\mathcal{D}^* = \mathsf{op}(k_{\mathcal{D}^*})$ 满足

$$k_{\mathcal{S}}(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\log|x-y|, \qquad k_{\mathcal{D}^*}(x,\nu,y) = \frac{1}{2\pi}\frac{\nu\cdot y}{|x-y|^2}, \tag{30}$$

$\mathbf{1}_\ell$ 是 Γ_ℓ 的示性函数，并且 $[\mathbf{1}_\ell,\mathcal{K}] = \mathbf{1}_\ell\mathcal{K} - \mathcal{K}\mathbf{1}_\ell$。对于旋转生成元 g，旋转后的核为k_g（x，ν，y）：$= \nabla_x k\cdot$（$g\times x$） $+\nabla_\nu k\cdot$（$g\times\nu$）。对于 $\mathcal{K}\in\{\mathcal{S},\mathcal{D}^*\}$ 核为 k 由（30）给出时，关于半径的导数为

$$\begin{aligned}\partial_{r_\ell}\mathcal{K} &= \mathbf{1}_\ell\,\mathsf{op}\big(-\nabla_x k\cdot\nu(x) + \nabla_\nu k\cdot x\big) - \mathsf{op}\big(\nabla_y k\cdot\nu(y)\big)\mathbf{1}_\ell + \mathcal{K}\,\mathbf{1}_\ell\cot r_\ell,\\ \partial_{r_\ell}M &= M\Big(\mathbf{1}_\ell\cot r_\ell - \frac{2\pi\cos r_\ell}{|\partial\Omega|}\Big).\end{aligned} \tag{31}$$

定理 3.6 (关于边界算子的导数)。 设 σ_k， u_k) 是方程(14a)的一个简单特征对，其中 $\int_{\partial\Omega}\rho\,u_k^2\,ds = 1$，且 φ_k 是定理 *3.1*中的密度。对于每个参数 p，

$$\partial_p\sigma_k = \int_{\partial\Omega} u_k\big[(\partial_p\mathsf{A} - \sigma_k\partial_p\mathsf{B})\varphi_k\big]ds, \qquad \partial_p\bar\sigma_k = L_\rho\,\partial_p\sigma_k + \sigma_k\,\partial_p L_\rho, \tag{32}$$

其中， $g = c_\ell\times\dot c_\ell$,

p	$\partial_p \mathsf{A}$	$\partial_p \mathsf{B}$	$\partial_p L_\rho$
$\alpha_{\ell,n}$	0	$\rho_\ell(\theta)\cos(n\theta)\ \mathbf{1}_\ell\,\mathcal{S}_0$	$\sin r_\ell \int_0^{2\pi} \rho_\ell \cos(n\theta)\ d\theta$
$\beta_{\ell,n}$	0	$\rho_\ell(\theta)\sin(n\theta)\ \mathbf{1}_\ell\,\mathcal{S}_0$	$\sin r_\ell \int_0^{2\pi} \rho_\ell \sin(n\theta)\ d\theta$
$\dot{c}_\ell \in T_{c_\ell}\mathbb{S}^2$	$\big[\mathbf{1}_\ell, \mathrm{op}(k_{\mathcal{D}^*,\ g})\big](I-M)$	$\rho\,\big[\mathbf{1}_\ell, \mathrm{op}(k_{\mathcal{S},g})\big](I-M)$	0
r_ℓ	$(\partial_{r_\ell}\mathcal{D}^*)(I-M)\ -(\mathcal{D}^*+\frac{1}{2}I)\ \partial_{r_\ell} M$	$\rho\,\big[(\partial_{r_\ell}\mathcal{S})(I-M)\ +(I-\mathcal{S})\,\partial_{r_\ell} M\big]$	$\cos r_\ell \int_0^{2\pi} \rho_\ell\, d\theta$

在 m 重特征值 σ 处，令 Φ 的各列为该簇的密度 φ_k 及其边界值 $\Psi = \mathcal{S}_0\Phi$，其中 $\Psi^{\mathsf{T}} B \Phi = I$。则 $S = L_\rho \Psi^{\mathsf{T}} A \Phi$ （*[CO26a, (21)–(22)]*）的簇矩阵具有导数 $\partial_p S = L_\rho \Psi^{\mathsf{T}}(\partial_p A - \sigma\,\partial_p B)\Phi + \sigma\,(\partial_p L_\rho)\,I$。

公式（32）以及权重行是 CO26a，命题 1]。其中的证明仅使用了以下事实：在 ds 中，$\mathcal{S}_0$关于双线性配对是对称的，并且 $u_k = \mathcal{S}_0\varphi_k$ 是矩阵铅笔的左特征向量；在球面配备圆度量时，这两个事实同样成立。在一个对称类中，相对于类参数的导数等于沿轨道对（32）求和。在（31）中，Γ_ℓ的自相互作用块（包括测度）为 $\partial_{r_\ell}(\mathcal{S})_{\ell\ell} = \cot r_\ell\,(\mathcal{S})_{\ell\ell} - \frac{\cos r_\ell}{2\pi}\,d\theta'$ 以及 $\partial_{r_\ell}(\mathcal{D}^*)_{\ell\ell} = -\frac{\sin r_\ell}{4\pi}\,d\theta'$。在旋转行中，自相互作用块相互抵消。

3.7. **证书。** 根据第 1 节的重数界，极大化者的第一特征空间维数至多为三；由于具有 $b \geq 2$ 的自由边界极小曲面不是平面的，因此维数恰好为三。于是，我们最大化在最优解处合并的三个特征值中的最小值；与 [CO26a] 中的亏格一问题（其中簇的大小最多可达六）相比，这里的非光滑性局限于大小为三的簇。在一个对称类（第 3.2 节）内，该簇更为简单。在群具有三维不可约表示的类别中，例如多面体类，σ_1 对该类别的每个成员都是三重的，而 $\bar{\sigma}_1$ 是待极大化的光滑函数。在二面体类和棱锥类中，这个三重特征值分裂为二维表示和一维表示。于是，我们最大化两个光滑分支中较小的一个，并根据旋转 $\frac{2\pi}{j}$ 绕 e_3-轴在特征空间上的作用将二者区分开来。第4.2 节说明了如何计算临界点。 —

由于 $\bar{\sigma}_1$ 在三重特征值处不可微，极大化者并非梯度消失的点。恰当的概念是克拉克驻定性，而其证书恰好就是曲面本身。令 $\mathsf{S}(\mathbf{p})$ 为前三个特征值的 3×3 簇矩阵，即将矩阵铅笔压缩到它们的特征空间上所得的矩阵。其特征值为 $\bar{\sigma}_1$、$\bar{\sigma}_2$、$\bar{\sigma}_3$，其导数 $\partial_p \mathsf{S}$ 由第 3.6 节给出。

定理 3.7 (证书与谱映射)。 设 $\mathbf{p}^\star$ 是一个构型，满足 $\bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}_2 = \bar{\sigma}_3$，其特征函数为 u_1、u_2、u_3，且满足 $\int_\partial \Omega\ \rho\, u_k u_{k'}\, ds = \delta_{kk'}$；再设 Λ 是一个对称的 3×3 矩阵，满足 $\Lambda \succeq 0$，$\operatorname{tr}\Lambda = 1$ 且 $\langle \Lambda,\ \partial_p \mathsf{S}(\mathbf{p}^\star)\rangle_F = 0$ 对每个参数均成立（每个帽的中心、半径及权重模态）。那么，$\mathbf{p}^\star$ 是 $\bar{\sigma}_1$的一个 *Clarke* 平稳点；若 $\operatorname{rank}\Lambda = 3$ 谱映射

$$X := (L_\rho \Lambda)^{1/2}(u_1, u_2, u_3)\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^3 \tag{33}$$

是一个共形的、可能分支的、浸入 $\mathbb{B}^3$ 的自由边界极小浸入。它在 $\partial\Omega$ 上满足 $|X| = 1$，与 $\mathbb{S}^2$ 正交相交，并且 $\int_{\partial\Omega} \rho X X^{\mathsf{T}} ds = L_\rho \Lambda$。其边界长度和面积为

$$L\big(X(\partial\Omega)\big) = \bar{\sigma}_1^\star, \qquad \operatorname{Area}\big(X(\Omega)\big) = \tfrac{1}{2}\bar{\sigma}_1^\star.$$

这是将 [CO26a，定理 2]，推广到带孔球面后的结果；该定理本身又是 Fraser–Schoen 对应 [FS11；FS16] 中 $\bar{\sigma}_1$ 的极大化者与自由边界极小曲面之间的对应关系，不过这里是在乘子为 Λ 的 Clarke 平稳点处陈述，而非要求极大性。那里的证明可以原样套用。该证明唯一依赖于曲面本身的信息是，方向（$\mathbf{c}$，$\mathbf{r}$）张成圆域模空间 [HS93]的切空间。我们通过 Λ 最小二乘法计算

遍历整个参数空间，即每个帽的所有中心、半径以及余弦和正弦模态，而不仅仅是该类别的参数。我们报告残差

$$\mathcal{K} := \max_{p} \big|\langle \Lambda, \partial_p \bar{\mathsf{S}} \rangle_F\big|, \tag{34}$$

所有参数中的最大值 p。类别最优解是完整问题的临界点，当且仅当 $\mathcal{K}$ 为零；我们据此检验对称性破缺方向。根据定理3.7， Λ是曲面边界曲线的惯性张量（33）。 Λ 的特征值较小，表明曲面在该方向上近乎平坦（第5.2节）；而秩 $\Lambda = 3$ 使得 X 成为 $\mathbb{B}^3$中的曲面，而非平面中的曲面。由于 X 的坐标函数是第一特征函数， X 因此是一个嵌入，关于原点星形且没有分支点的 [FS16，命题 8。1]。（35）的面积密度可用于检验是否存在分支点。

3.8. **曲面验证**。在精确算术中，定理3.7 使得 X 成为一个自由边界极小曲面。为了衡量计算所得曲面与此性质的偏离程度，我们按照 [CO26a，§26]，在迹上检验其定义性质。边界必须位于单位球面上。曲面必须与单位球面正交相交且共形，这意味着沿每个边界圆， X 的切向导数和法向导数长度相等。第一特征空间还必须是一个分离良好的三重特征空间。我们通过以下量度量这些性质：

$$\mathcal{R}_{\mathrm{sph}} := \max_{\partial\Omega} \big||X| - 1\big|, \qquad \mathcal{C}_X := \max_{\partial\Omega} \frac{\big|\frac{|\partial_\theta X|^2}{\sin^2 r_\ell} - |\partial_\nu X|^2\big|}{\frac{|\partial_\theta X|^2}{\sin^2 r_\ell} + |\partial_\nu X|^2}, \tag{35a}$$

$$\delta_3 := \frac{\bar{\sigma}_3 - \bar{\sigma}_1}{\bar{\sigma}_1}, \qquad \lambda_{\min}(\Lambda), \qquad \frac{\bar{\sigma}_4}{\bar{\sigma}_1}, \qquad \min_{\Omega} J, \tag{35b}$$

其中， $\mathcal{C}_X$ 是相对保角缺陷， δ_3 是簇展宽， $\lambda_{\min}(\Lambda)$是证书的最小特征值（仅当秩 $\Lambda = 3$时，曲面才是浸入到 $\mathbb{B}^3$ 中的）， $\frac{\bar{\sigma}_4}{\bar{\sigma}_1}$ 是与下一个特征值之间的间隔，而 $J := \frac{1}{2}|\nabla X|^2$ 是相对于圆度量的 X 面积密度，该密度在分支点处为零。由第一特征函数构造的自由边界极小曲面的边界长度等于 $\bar{\sigma}_1$，因此， $X(\partial\Omega)$的长度减去 $\bar{\sigma}_1^\star$ 可检验缩放。第5.3节和表3报告了几何量（35a）、谱量（35b）以及（34）的残差 $\mathcal{K}$ 。

4. Numerical methods

本节介绍第3 节（第4.1节）边界积分公式的离散化、临界点（第4.2节）及其 Morse 指标（第4.3节）的计算与认证，以及求解器的测试（第4.4节）。该方法遵循 [CO26a、§§2–3], 并针对球面进行了调整。

4.1. **离散化**。 每个圆上有 N_ℓ 个等距节点， $N = \sum_\ell N_\ell$ 共计。我们使用 Nyström 方法对矩阵铅笔进行离散化，参见 [CO26a，§3], ；对（ [Kre14，§12）中的对数使用 Kress 乘积求积，3]其余部分均使用梯形法则。特征值以指数速度收敛于 N_ℓ （第 4.4 节）。对称特征值求解器可得到稠密矩阵铅笔的完整谱，而每个最优解都会用 $2N_\ell$ 个节点重新计算。（35）的面积密度在 Ω 的三角剖分上求值， X 其值由层势在各顶点处计算得到。

对称性约化。 对于较大的 b，我们将稠密矩阵铅笔替换为一个更小的矩阵铅笔。每个轨道的节点由群置换，因此该群会置换这些节点，而矩阵铅笔与此置换相容。三元组 $\bar{\sigma}_1$ 属于 I_h 的向量表示 T_{1u}，在 T_{1u} 同型分量上，矩阵铅笔分解为 $I_3 \otimes (A_{\mathrm{red}} - \sigma B_{\mathrm{red}})$。我们求解三个相同的块中的一个。其维数约为 $\frac{3N}{|I_h|}$，因为每个包含 $|I_h|$ 个节点的自由轨道都承载正则表示，而正则表示包含 T_{1u} 三次。因此，该三元组成为一个简单特征值

约化矩阵铅笔的特征值。为确认 $\bar{\sigma}_1$ 属于 T_{1u}，我们还计算了其他每个同型分量的最低特征值。在约化矩阵铅笔上以伴随形式计算梯度。对于$b = 12$、42、92 和 162，约化值与稠密求解器的结果一致，精确到 10^{-12}，梯度则精确到10^{-11}。在 $b = 162$ 上进行一次特征值求解需要 0。9 秒，而不是 8。9 秒，并且随着 b的增大，收益也会增加。对于这些类别 $\Lambda = \frac{1}{3} I$，对称性破缺方向上的残差（34）为零，因为它是在对称构型处对不变函数求导得到的。类别梯度随后就是完整的证书。

4.2. 优化。我们采用 [CO26a 第 2.4] 节中的两阶段过程：梯度上升，随后¯对第 3.7 节簇矩阵 S 进行极大极小和序列二次规划步骤，其中梯度取自定理 3.6，并将球冠的不相交性作为约束。对于一个对称类以及无约束问题，该过程是相同的；在无约束问题中，每个帽都是自己的轨道，并且通过（14b）固定 M¨obius 自由度。按照 [CO26a 第 3.2], 节，对驻定系统_ _⟨Λ、 ∂_pS⟩$_F$ = 0、S = $\bar{\sigma}_1 I$ in (p Λ) 进行牛顿细化，随后在一到两步内将残差（34）降至舍入误差水平。在无约束问题中，标准形将伸缩变换的共形因子转移到权函数中，因此每个帽需要十二个权重模态才能达到舍入误差水平。每个最优解都会使用两倍的每个圆上的节点重新评估；如果前三个 $\bar{\sigma}_k$的变化超过 10^{-9}，则从该处重新开始。随后还会使用每个帽两倍的权重模态重新优化，并不断将模态数量加倍，直到 $\bar{\sigma}_1^\star$ 的变化小于 10^{-9}。当满足以下三个条件时，构型即得到认证：其簇展宽 $\frac{\bar{\sigma}_3 - \bar{\sigma}_1}{\bar{\sigma}_1}$低于 10^{-11}；节点数量加倍时，前三个 $\overline{\bar{\sigma}_k}$的变化小于 10^{-9}；以及在完整参数空间上、对每个帽使用余弦和正弦模态时，式（34）的残差 $\mathcal{K}$ 低于 10^{-7}。表格报告 $\bar{\sigma}_1^\star$ 至小数点后八位、加倍测试的精度，而正文则对其进行舍入。表格还报告 $\mathcal{K}$ 在低于阈值时的情况。那些根本不是完整问题临界点的类别最优值，即使其 $\mathcal{K}$为一阶量，也会被省略。每个结果的对称群是在事后确定的，因为类别最优值可能比其所属类别具有更高的对称性。

4.3. 莫尔斯指标。在经认证的临界点处，乘子 $\Lambda^\star$ 是正定的，因此，任何将三元组 $\bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}_2 = \bar{\sigma}_3$ 拆分的方向都会使 $\bar{\sigma}_1$ 在一阶上减小。二阶行为¯由拉格朗日函数 ℓ(p) = ⟨$\Lambda^\star$、S(p)⟩$_F$ 在三元组持续存在的流形切空间上的表现决定 [LO96; OW93]。我们在该切空间的一组标准正交基上，通过对定理 3.6 的梯度作差来构造 ℓ 的海森矩阵，其中固定 $\Lambda^\star$，步长为 10^{-4}，并将其对称化。通过正交普罗克鲁斯旋转，将每个偏移构型的簇基与参考构型对齐。三个旋转和三个伸缩变换不会改变 $\bar{\sigma}_1$，因此将它们投影出去，方法见 [CO26a, §4.5]。莫尔斯指标是剩余矩阵中绝对值大于其最大特征值的 10^{-8} 倍的特征值个数。它表示$\bar{\sigma}_1$ 增加的方向数，因此局部极大值点的指标为 0。海森矩阵对每个帽使用六个权重模态。对于 $b \geq 362$ 的测地二十面体，我们在 I_h 的不可约表示中逐块计算该矩阵，每块有三个模态。

4.4. **验证**。对于位于 $\pm e_3$、具有相同半径 r 和 $\rho \equiv 1$的帽，[OKO21，§3.1] 的分离解给出了 $\bar{\sigma} = 4\pi \cos r$（双曲）和 $^{4\pi}$ logcot$(r/2)$（径向）分支，即第 3.1节中的例子。在 $N_\ell = 16$处，求解器通过舍入误差复现了这两个分支；对 r 和一个自由权函数进行最大化，则返回具有常权重的临界悬链面。

对于三个具有随机权重的帽，关于半径、每个帽的三个旋转生成元以及权重系数的导数（32）与离散 $\bar{\sigma}_1$ 到 10^{-9}–10^{-10} 的中心差分一致。对于共同的旋转生成元，对各帽求和后结果为10^{-15}。按照第 $z \mapsto 1.7z$3.1节所述方式运输帽和权重，对构型施加伸缩变换 $\bar{\sigma}_k$ 后，前四个 ¨ 保持不变，精确到所有打印出的位数，这正是莫比乌斯不变性所要求的。

从 $b = 4$、6、12 和正方形反棱柱的类最大化构型出发，将中心和半径扰动 10^{-2} 后，无约束优化器经过两个阶段及细化过程，并返回类值 10^{-12} ，误差为 $\mathcal{K} \leq 3 \times 10^{-13}$。从扰动后的立方体出发时，优化器会离开立方体；立方体是其所属类别的临界点，却是无约束问题的鞍点，最终优化器到达正方形反棱柱。

表 6 中的构型中，$|\bar{\sigma}_1(N_\ell) - \bar{\sigma}_1(128)|$ 会随着每个圆上的节点数增加而呈指数衰减，这与 [KO26，§5]中的情况相同。它从 $N_\ell = 32$ 开始达到舍入误差量级，$b = 3$ 而从 $N_\ell = 24$ 开始达到舍入误差量级，$b \geq 4$。

5. Computational experiments and surface zoo

现在我们将第 3 节和第 4 节的方法应用于许多对称类。这些类别属于第 3.2 节和表 5。第 5.1 节将结果与先前的工作进行比较。第 5.2 节考察随着 b 增长的族，并将它们与第 2节的极限曲面联系起来。第 5.3 节描述族之外的搜索，并报告每个 b找到的最佳构型；第 5.4节讨论较大 b时的行为。第 5.5 节汇总动物园目录中的每个临界点。

5.1. **与先前工作的比较。** 表 2 列出了 [GL21]，[OKO21] 或 [Sch]，报告的每个构型，以及本文中复现该构型的临界点。根据（3），[Sch] 的面积可与我们的值直接比较。较早的值与我们的结果一致，差异在其所用方法的精度范围内。在 $b = 6$ 处，[OKO21] 的值比我们的八面体值 4.3×10^{-3} 高。其 $b = 6$定义域是在正方形上由四个相等孔洞围绕一个小孔洞，这正是圆盘图中的八面体图像，因此该条目似乎不准确；而 [Sch] 的值与我们的结果一致。他们在 $b = 20$ 处的“非规则”构型大概就是我们的费克特最优构型。

[Sch] 列出了通过 [CSW25；FS26；Kar+24]的等变极小-最大法和拼接构造得到的、具有 $b \leq 8$的27个嵌入的亏格零自由边界极小曲面。其中大多数来自这些族（表2）。$b = 8$ 曲面 C2 和 C2-陀螺双尖塔分别来自四个堆叠的帽对，以及在两个极点处带有帽的三个帽对。后者的边界曲线具有陀螺双尖塔的 D_{2d}对称性，尽管其类别仅施加了 C_2。另外三个曲面，即$b = 7$ 的 C2 和 Y2，以及 $b = 8$的 Y2，来自具有 C_{2v}群的类别：四个处于一般轨道中的帽，以及镜面上的一对帽，并带有一个或两个极帽（表 5）。$b = 7$的曲面 Y2 是一个指标为 2 的鞍点，而最大化无法到达该点。因此，具有 $b \leq 8$ 的 [Sch] 的每个曲面都属于我们的临界点。C_{2v} 类别还为 $b = 8$ 给出了两个不在[Sch], 中的临界点，其中一个不同于三棱柱，但仅 1.5×10^{-6} 低于带有两个极点的三棱柱。

5.2. **这些族。** 我们按照第 3.2 节的顺序考察这些族。当某个类别包含一个对称性更高的类别中的构型时，优化器会落在该构型上，因此这些对称构型在其所属的较大类别中是稳定的。

注 5.1（存在性）。 Karpukhin、Kusner、McGrath 和 Stern 证明，$\bar{\sigma}_1$ 在由反射生成的有限群作用下不变的度量中可取得上确界，前提是边界分支形成足够多的轨道 [Kar+24，定理 9。15]。在我们的类别中，这涵盖了除 $b = 72$ 处的手性类别之外的多面体类别、赤道多边形、双棱锥、带两个极帽的棱柱、环数为奇数的堆叠体，以及带一个极帽的棱柱、反棱柱和三个堆叠圆环（即他们的情形 (3)、(4)、(5) 和 (7)）。它不涵盖棱锥，也不涵盖不带极帽的棱柱和反棱柱，因为它们的帽形成的轨道太少。带两个极帽的反棱柱以及环数为偶数的堆叠体，其对称群并非由反射生成，因此该定理只能为子群给出一个极大化者。

多面体构型。 具有多面体群的类别包括柏拉图立体、二十面体十二面体、带有十二面体的二十面体（$b = 32$）、位于二十面体顶点对顶点弧上的自由60-轨道（$b = 60$）、具有 $b = 72$的手性构型，以及测地线

b	标签	此处找到的构型	$\bar{\sigma}_1^\star$	2 面积 [Sch]	[OKO21]	[GL21]
2	–	对跖点对， $D_{\infty h}$	10.47478066	10.4748	10.4748	
3	P3	赤道三边形， D_{3h}	12.01198922	12.0119	12.0120	
4	Y3	四面体， T_d	13.66761484	13.6672	13.6676	13.6675
4	P4	赤道四边形， D_{4h}	12.42990413	12.4300		
5	P3	三角双锥， D_{3h}	14.46866597	14.4683	14.4687	
5	Y4	四棱锥， C_{4v}	14.43163401	14.4312		
5	P5	赤道五边形， D_{5h}	12.53139727	12.5312		
6	P4	八面体， O_h	15.42492045	15.4249	15.4292	15.4249
6	P3	三棱柱， D_{3h}	15.12598742	15.1261		
6	Y5	五棱锥， C_{5v}	14.81894243	14.8194		
6	P6	赤道六边形， D_{6h}	12.55681968	12.5576		
7	C5	五角双锥， D_{5h}	15.95213199	15.9524	15.9520	
7	C2	四元组 +对 + 1极帽， C_{2v}	15.91819689	15.9182		
7	C3a	三角反棱柱 + 1极帽， C_{3v}	15.91577614	15.9153		
7	Y2	四元组 + 对 + 1极帽，靠近极点， C_{2v}	15.46032046	15.4598		
7	C3	三棱柱 + 1极帽， C_{3v}	15.45115152	15.4510		
7	C6	六棱锥， C_{6v}	15.04160665	15.0419		
7	C7	赤道七边形， D_{7h}	12.56361680	12.5657		
8	C4a	正方形反棱柱， D_{4d}	16.49540952	16.4956	16.4954	
8	C2	四个堆叠对， D_{2d}	16.49051351	16.4905		
8	C4	立方体， O_h	16.42485423	16.4249		16.4249
8	C2	三个对 + 2极帽， D_{2d}	16.29009761	16.2901		
8	Y2	四元组 + 对 + 2极帽， C_{2v}	16.28575637	16.2857		
8	C6	六角双锥， D_{6h}	16.27617583	16.2765		
8	C3	三棱柱 + 2极帽， D_{3h}	15.68321560	15.6831		
8	C7	七棱锥， C_{7v}	15.18338502	15.1833		
8	C8	赤道八边形， D_{8h}	12.56554312	12.5657		
9		三个堆叠三角形， D_{3h}	16.97069066		16.9707	
12		二十面体， I_h	18.06871939		18.0687	18.0686
15		五个堆叠三角形， D_{3h}	18.79339513		18.7934	
20		Fekete 类， D_{3h}	19.70770682		19.7076	
20		十二面体， I_h	19.57267499			19.5718
32		二十面体 +十二面体， I_h	21.01400764			21.0135

TABLE 2. 与前人工作的比较（第5.2 节和5.1节）。 [Sch], 中报告的每种构型 [OKO21] 或 [GL21] 所列的构型，均标明了表6 中重现该构型的临界点及其对称群。来自 [Sch] 的数值是所列面积的两倍，并在 3×10^{-3}范围内匹配。 [Sch] 标签中的数字表示主旋转轴的阶数。在每个 b 中，各行按 $\bar{\sigma}_1^\star$降序排列。

带有 $\nu = 2$、.....、15（$b = 42$ 至2252）的二十面体。它们的曲面如图6 所示；对于较大的 b，则见图15–16。证书为 $\Lambda = \frac{1}{3}I$ 至 10^{-10}，因为对于三维不可约表示而言必然如此。特别是，柏拉图构型在其更大的类别中是稳定的。即便如此，立方体仍是一个被正方形反棱柱击败的鞍点，而十二面体和二十面体十二面体则被堆叠环击败。截角二十面体中，60-轨道沿每条边位于三分之一处，它不是临界点：释放后，该轨道从较近的顶点移向 19.6°，其值上升了 6×10^{-3}。在 $b = 72$ 处，从汤姆孙位置开始的手性类别击败了镜像弧上的一个轨道，并具有对称性 I。

赤道族。当所有帽都位于赤道上时，类别最优值逐渐趋近于 4π（即双覆盖圆盘的值），并与 [Sch] 的所有位数完全一致。亏损 $4\pi - \bar{\sigma}_1^\star$ 不断减小

b	找到的最佳构型	对称性	$\bar{\sigma}_1^\star$	$\mathcal{K}$ (34)	$\lambda_{\min}(\Lambda^\star)$ (35)
2	对跖点对	$D_{\infty h}$	10.47478066	1×10^{-14}	0.3052
3	赤道三边形	D_{3h}	12.01198922	3×10^{-10}	0.1514
4	四面体	T_d	13.66761484	7×10^{-14}	0.3333
5	三角双锥	D_{3h}	14.46866597	2×10^{-13}	0.3079
6	八面体	O_h	15.42492045	4×10^{-10}	0.3333
7	五角双锥	D_{5h}	15.95213199	2×10^{-13}	0.3078
8	正方形反棱柱	D_{4d}	16.49540952	2×10^{-13}	0.3168
9	三个堆叠三角形	D_{3h}	16.97069066	8×10^{-14}	0.3296
10	正方形反棱柱 + 2极帽	D_{4d}	17.37203030	2×10^{-13}	0.3298
11	C_{2v}: $4+3\times2+1$	C_{2v}	17.69115333	4×10^{-13}	0.3257
12	二十面体	I_h	18.06871939	3×10^{-13}	0.3333
13	C_{2v}: $4+4\times2+1$	C_{2v}	18.30638945	9×10^{-13}	0.3295
14	六边形反棱柱 + 2极帽	D_{6d}	18.56544315	2×10^{-13}	0.3252
15	五个堆叠三角形	D_{3h}	18.79339513	2×10^{-13}	0.3303
16	T_d: $12+4$	T_d	19.00885253	1×10^{-12}	0.3333
17	C_{2v}: $2\times4+4\times2+1$	C_{2v}	19.20121924	9×10^{-13}	0.3310
18	四个堆叠的正方形 + 2极帽	D_{4d}	19.38539453	1×10^{-10}	0.3326
19	Fekete 类	C_{2v}	19.54459459	7×10^{-12}	0.3300
20	Fekete 类	D_{3h}	19.70770682	5×10^{-13}	0.3327
21	Fekete 类	C_{2v}	19.85473178	5×10^{-13}	0.3331
22	Fekete 类	T_d	19.99354385	5×10^{-13}	0.3333
23	Fekete 类	D_3	20.11635049	4×10^{-13}	0.3311
24	Fekete 类	O	20.24322425	8×10^{-13}	0.3333
25	C_1(20.3531)	C_1	20.35311176	1×10^{-12}	0.3329
26	Fekete 类	C_2	20.46172826	9×10^{-13}	0.3329
27	Fekete 类	D_{5h}	20.56911733	7×10^{-13}	0.3326
28	Fekete 类	T	20.66487632	6×10^{-13}	0.3333
29	Fekete 类	D_3	20.75364318	4×10^{-12}	0.3328
30	Fekete 类	D_2	20.84340804	9×10^{-13}	0.3324
31	Fekete 类	C_{3v}	20.92777889	1×10^{-12}	0.3328
32	二十面体 +十二面体	I_h	21.01400764	5×10^{-13}	0.3333
33	C_1(21.0835)	C_1	21.08353796	8×10^{-12}	0.3328
34	Fekete 类	D_2	21.15725596	8×10^{-13}	0.3318
35	Fekete 类	C_2	21.22645244	2×10^{-12}	0.3329
36	Fekete 类	D_2	21.29451111	8×10^{-13}	0.3327
37	Fekete 类	D_{5h}	21.35998448	8×10^{-13}	0.3325
38	六个堆叠的六边形 + 2极帽	D_{6d}	21.42213538	3×10^{-12}	0.3323
39	Fekete 类	D_{3h}	21.48308018	2×10^{-12}	0.3327
40	Fekete 类	T_d	21.54113373	1×10^{-12}	0.3333
42	测地二十面体 $\nu=2$	I_h	21.64565725	2×10^{-12}	0.3333
60	顶点间弧上的 60-轨道	I_h	22.28356339	8×10^{-13}	0.3333
72	二十面体 +一般60轨道	I	22.69609123	3×10^{-12}	0.3333
92	测地二十面体 $\nu=3$	I_h	23.07686419	4×10^{-11}	0.3333
162	测地二十面体 $\nu=4$	I_h	23.77221789	4×10^{-10}	0.3333
252	测地二十面体 $\nu=5$	I_h	24.16173249	2×10^{-9}	0.3333
362	测地二十面体 $\nu=6$	I_h	24.40228582	1×10^{-10}	0.3333
492	测地二十面体 $\nu=7$	I_h	24.56163111	6×10^{-9}	0.3333
642	测地二十面体 $\nu=8$	I_h	24.67287741	4×10^{-9}	0.3333
812	测地二十面体 $\nu=9$	I_h	24.75377466	1×10^{-10}	0.3333
1002	测地二十面体 $\nu=10$	I_h	24.81454590	5×10^{-10}	0.3333
1212	测地二十面体 $\nu=11$	I_h	24.86142450	4×10^{-10}	0.3333
1442	测地二十面体 $\nu=12$	I_h	24.89839157	5×10^{-10}	0.3333
1692	测地二十面体 $\nu=13$	I_h	24.92808940	3×10^{-10}	0.3333
1962	测地二十面体 $\nu=14$	I_h	24.95232944	7×10^{-10}	0.3333
2252	测地二十面体 $\nu=15$	I_h	24.97238832	4×10^{-9}	0.3333

TABLE 3. 每个 b（第 5.3节和5.5节）找到的最佳构型及其曲面的对称群，该对称群可能大于其所属类别的对称群（表 5）。值 $\bar{\sigma}_1^\star$ 使用 $2N_\ell$个节点/圆，且 $\lambda_{\min}$（$\Lambda^\star$）是证书的最小特征值。先前的值见表 2，曲面见图 13–16。它们构成图3的上包络。

呈指数级变化，而匹配渐近展开无需拟合参数便能预测这一点。将两片曲面写成图形 $\pm u$ ，定义在赤道圆盘上。一阶近似下，自由边界条件为 $\partial_r u = u$ 在$r=1$上，而常数高度 $h>0$ 无法满足该条件。位于单位根处的 b 桥充当边界源，其强度为 A： $\partial_r u - u = -A\sum_j \delta_{\theta_j}$ 其中 $\theta_j = \frac{2\pi j}{b}$ 。根据傅里叶级数，$r=1$ 上的解是 [FPZ17 的格林函数，(4.7)]，

$$u(\theta) = \frac{A}{\pi}\Big(\frac{b}{2} - \sum_{n\geq 1}\frac{\cos nb\theta}{n-1/b}\Big).$$

因此，曲面片位于高度 $h = \frac{Ab}{2\pi}$ 处，而在 θ_j 处的桥附近

$$u = \frac{A}{\pi}\Big(\frac{b}{2} + \log\big(b|\theta-\theta_j|\big) + \eta_b\Big), \qquad \eta_b = -\sum_{k\geq 2}\frac{\zeta(k)}{b^{k-1}} = \psi\big(1-\tfrac{1}{b}\big) + \gamma,$$

其中 ζ 是黎曼ζ函数， ψ 是双伽马函数， γ 是欧拉常数。这必须与腰部为 τ 的半悬链面相匹配；该半悬链面被 $\partial\mathbb{B}^3$ 沿着穿过 $e^{i\theta_j}$ 的竖直轴线切成两半。其在高度 z 处的半径为 $\tau\cosh\frac{z}{\tau}$，因此，距轴线 s 处的高度为 $\tau\operatorname{arcosh}\frac{s}{\tau} = \tau\log\frac{2s}{\tau} + O\big(\frac{\tau^3}{s^2}\big)$。在重叠区域 $\tau \ll |\theta-\theta_j| \ll \frac{1}{b}$ 内，当 $A = \pi\tau$ 时，对数项相匹配；当 $\log\frac{2}{\tau} = \frac{b}{2} + \log b + \eta_b$ 时，常数项相匹配。因此， $\tau = \frac{2}{b}e^{-b/2-\eta_b}$ 且 $h = e^{-b/2-\eta_b}$，这就是 FPZ17 第 7] 节中构造的颈部尺度。根据 (3)，亏损是相对于双覆盖圆盘所损失面积的两倍。为计算该亏损，在桥周围移去半径为 ε 的半圆盘，$\tau \ll \varepsilon \ll \frac{1}{b}$ 。在二阶近似下，每片曲面在圆盘剩余部分上方的面积与该剩余部分的面积之差为 $\frac{1}{2}\int|\nabla u|^2 - \frac{1}{2}\int_{r=1} u^2\,d\theta$。分部积分后，只有半圆产生贡献；每片曲面的总贡献为$-\frac{\pi}{2}b\tau^2\big(\frac{b}{2} + \log(b\varepsilon) + \eta_b\big)$。在距各自轴线 ε 的范围内，每个半悬链面比其所替代的两个半圆盘多出 $\pi\tau^2\big(\log\frac{2\varepsilon}{\tau} - \frac{1}{2}\big)$。在求和时， ε 相消；根据匹配关系， $\frac{b}{2}$ 也相消。该曲面损失了 $\frac{\pi}{2}b\tau^2$，即 b 个半径为 τ 的半圆盘的面积：

$$4\pi - \bar\sigma_1^\star(b) \approx \pi b\tau^2 = \frac{4\pi}{b}\,e^{-b-2\eta_b} = \frac{4\pi}{b}\,e^{-b}\Big(1 + \frac{\pi^2}{3b} + O(b^{-2})\Big). \tag{36}$$

这是图3中的虚线曲线。它与计算得到的亏损一致，相对误差为6×10^{-3}在 $b=7$ 以及 2×10^{-3}在 $b=8$，其量级为 τ，即 1.1×10^{-2} 以及 5.7×10^{-3} 在此处。相对误差至多为 10^{-3} 对于 $9\leq b\leq 16$ 以及 5×10^{-3} 在 $b=18$，其中亏损仅为1.3×10^{-8}。

这些曲面（图7）是由 b个边界桥连接起来的两个近乎平坦的圆盘，属于[FPZ17；Ket16]这一族。Franz 和 Schulz 为每个具有 $b\geq 2$ 的 b边形旋转对称性的情形构造了这样的曲面；据猜想，这与 [FS26、定理 5.1 及注 5.2], [CSW25、猜想 7.8]中的同一族相同。对于 $b=3$ ，三角形是极大化者；而对于 $b\geq 4$ ，赤道曲面是所发现的最低临界点，正如 [Kar+24、猜想 1.21] 对赤道 b面体所预测的那样。它们是基本的反射曲面 [Kar+24、定义 5.4]，；Karpukhin、McGrath 和 Stern 将 $\bar\sigma_1$ 在其对称类中的上确界界定在$4\pi - e^{-\mu_2 b}$与 $4\pi - e^{-\mu_1 b}$ [之间，见 KMS26、定理 1.12]。渐近式（36）表明，指数中的常数为 1，前因子为$\frac{4\pi}{b}e^{-2\eta_b}$。这种指数衰减与（37）中环族的 j^{-1} 形成对比。

环及其极限问题。其余各族由以下环构成： j 帽。当 $j\to\infty$时，一个环在传输–Steklov问题（6）中变为 Γ 上的一个圆 $\mathbb{S}^2$，其中 λ 是圆的单位长度权重，而极帽则保持为一个边界圆。我们称之为极限问题，其关于圆的位置和权重的最优解为 $\bar\sigma_\infty$。在第t节的坐标（ϕ，2.2）下，它写作（7）。某个族收敛到的曲面称为它的极限网络，是第2节中自由曲线极小曲面之一。

棱锥。 一圈 j 帽，其中一个帽位于极点，得到图8所示的曲面。这些棱锥与 [Sch]在所有数字上都吻合，并且是每个 b处发现的第二低临界点。由于 $j\to\infty$它们似乎收敛于命题2.4中的蛋糕架——一个带圆盘的喇叭（图2，

表4）。盘子位于赤道面之外，在极帽的另一侧。对于 $j \geq 4$，我们不知道如何构造 $\mathbb{B}^3$中的棱锥。对于 $j = 3$ $(b = 4)$，该类别包含四面体。

双棱锥。在赤道上排列一环 j 个帽，并在两个极点处各放置一个帽，得到图 9所示的曲面；临界悬链面对应于 $j = 0$的情形。这里，第3.2节的相对权重层级十分重要，因为除旋转之外，没有其他保持该类别的 M¨obius 变换。没有这一点时，各值均低于 10^{-2}，但 $j = 4$除外；其最优解是所有帽属于同一轨道的八面体。有了这一点，三角双锥和五角双锥是 $b = 5$ 和 7的最大化者。随着$j \to \infty$ 增大，双棱锥似乎趋近于命题 2.5的轮 $\mathbb{K}_0 \cup -\mathbb{K}_0$。Carlotto、Schulz和Wiygul为每个充分大的 j构造了一个亏格零、具有 $j + 2$ 个边界分支并拥有双棱锥对称性的嵌入自由边界极小曲面；该曲面收敛于这个轮 [CSW25，定理 6.1]。这些曲面似乎是该类别的最大化者，而根据注5.1，这些最大化者确实存在。我们的双棱锥符合 [CSW25猜想 7.9和 7.10]：该族对每个计算得到的 $j \geq 3$都存在，在 $j = 4$时为八面体，其值始终低于 4 Area($\mathbb{K}_0$)，并且其成员是针对 $b = 5$ 和 7所找到的最佳构型（同时也是针对 $b = 6$的最佳构型，因为此时为八面体）。该轮给出 $\bar{\sigma}_\infty = 4$ Area($\mathbb{K}_0$) ≈ 17.5430 （图 2），可由方程（11）的正根 $L = 2.0301901$ 显式表示。每个喇叭的共形长度为 L，对应于 $14.96°$ 、位于 $\mathbb{S}^2$上的角半径为 $14.96°$ 的极帽。

棱柱。两个对齐的环，各含 j 个帽，分别位于极角 β 和 $\pi - \beta$处，再加上零个、一个或两个极帽，构成图 10中的曲面。加上一个极帽时，两个环变为独立轨道，各自具有极角、半径和权重。此时，最优解会将其中一个环移至赤道上；沿轴进行的 M¨obius 伸缩变换不影响对称性。对于 $b = 7$，带帽三棱柱和反棱柱是具有三重轴的两种 Sch] <style id='14>曲面。凡是能够分辨出差异的情形，下一段所述的反棱柱都优于带有相同帽的棱柱，但优势幅度会随着 j (0.30（当 $j = 3$时， 2×10^{-4} 当 $j = 8$时）而缩小。加上一个极帽时，两者从 2×10^{-6} 起就一致到 $j = 13$。不加极帽时，极限为命题 2.6中的临界鼓（图 2），其中 $\bar{\sigma}_\infty = \frac{8\pi}{1+W\left(\frac{1}{e}\right)} \approx 19.6585$，这里 W为朗伯函数。

反棱柱。将棱柱的一个环旋转 $\frac{\pi}{j}$ 即可得到图 11中的反棱柱。正方形反棱柱的环位于 $55.05°$，与立方体的 $54.74°$相对，是 $b = 8$的极大化者。对于带有两个极帽的情形，正方形反棱柱和六边形反棱柱是 $b = 10$ 和 14 的极大化者。对于 $j = 3$，该类别包含八面体。无极帽且 $j \geq 4$时， [Kar+24] （注 5.1）和 [KZ26] 均不适用：反棱柱不具有关于赤道面的反射，而 [KZ26] 仅为简化表述而作此假设。

堆叠环。由三个至六个环组成的堆叠体，带有 j 个帽（表 5），给出了图 12中的曲面。连续环之间旋转 $\frac{\pi}{j}$，在满足对称性的条件下，每个纬度均可自由变化，并且可以带有极帽。最优纬度使各环近乎均匀分布；最优解的对称性可能高于其所属类别：带有两个极点的六个三角形两两合并为三个六边形。这些堆叠体在 $b = 9$、15、18 和 38 处给出了已发现的最佳值。在 $b = 9$ 处，极大化者是三个堆叠三角形，即在赤道上再加一个三角形的三棱柱。这些堆叠体在 $b = 20$ 处优于十二面体，在 $b = 30$ 处优于二十面十二面体，优势约为 0.1；而在这些位置，Fekete 类又优于这些堆叠体（第 5.3 节）。在 $b = 32$ 处，带有两个极点的六个堆叠五边形再次与二十面体和十二面体相合。由两个帽构成的环也是堆叠体：四个堆叠对给出了$b = 8$ 曲面 C2，它属于 [Sch]。带有一个极帽时，三个环成为独立轨道。这些都不是其 b下的最佳构型。无极帽时，三个环收敛为鼓形堆叠 $\mathcal{C}$(3)（表 4）。这是命题2.7 中的自由曲线极小曲面（图 2），其中$\bar{\sigma}_\infty \approx 22.2295$在式（12）中（$_{12}$， ∞）的根中显式给出。

环族的极限。根据（9），极限值 $\bar{\sigma}_\infty$ 等于第 2节中网络面积的两倍。作为独立验证，我们直接最大化了极限问题的第一特征值。在坐标（t， ϕ）中，问题（7）可分离为傅里叶模态，我们通过

族	极限网络	$\bar{\sigma}_\infty$	圆的高度	ψ	A	B	适合 j
赤道的	双覆盖圆盘	12.566	0	90°	–	–	–
棱锥	蛋糕架	15.782	0.266；喇叭至 −0.757	74.56°	2.8	10.1	5–20
双棱锥	轮 $\mathbb{K}_0 \cup -\mathbb{K}_0$	17.543	0；喇叭至 ±0.870	64.62°	5.9	10.3	5–30
棱柱、反棱柱	临界鼓 $\mathcal{C}(2)$	19.659	±0.467	62.18°	10.6	9.5	5–20
棱柱、反棱柱 + 1极帽	带一个角的鼓	20.486	0.548, −0.302; 喇叭口到 −0.948	56.80°, 54.03°	13.0	5.6	5–19
棱柱、反棱柱 + 2极帽	带两个喇叭口的鼓	21.070	±0.399；喇叭至 ±0.965	50.40°	14.6	2.5	5–20
三个堆叠圆环	鼓形堆叠 $\mathcal{C}(3)$	22.229	0, ±0.674	42.63°, 47.63°	18.3	−2.2	7–13
三个堆叠圆环 + 1极帽	带有一个的鼓形堆叠 horn	22.506	0.703, 0.078, −0.575; 喇叭至 −0.985	45.31°, 40.07°, 43.02°	18.8	−2.7	9–20
三个堆叠环 + 2PC鼓堆叠，带两个喇叭		22.731	0, ±0.613；喇叭至 ±0.988	37.91°, 41.24°	–	–	–
四个堆叠环	$\mathcal{C}(4)$	23.354	±0.281, ±0.776	33.65°, 39.08°	–	–	–
多面体	$\partial\mathbb{B}^3$	25.133	–	$\to 0°$	–	–	–

TABLE 4. 极限网络（第2节，图 2）：值 $\bar{\sigma}_\infty$，即按重数计算的面积的两倍； $\partial\mathbb{B}^3$ 上的圆的高度（对于喇叭，也包括其边界圆）；以及每个曲面片与 $\partial\mathbb{B}^3$ 所成的角度 ψ （这些曲面片在 $180° - 2\psi$处相交）。对称堆叠体按从赤道向外的顺序列出；带一个喇叭口的网络则按从圆盘到喇叭口的顺序列出，喇叭口位于底部，如图 2 所示。 $\mathcal{C}(k)$ 是由两个平圆盘 [KN25], 封闭的 $k-1$ 悬链面带堆叠体，最后一行是其在 $k \to \infty$时的极限。通过极限问题中的射击法得到的值与平衡网络的结果一致，精确到 10^{-6}。 A 和 B是根据最后一列（第5.2节）中 j 范围内的数据拟合得到的式（37）的系数，来自具有两个环的行中的反棱柱。

采用射击法，并优化圆的位置和权重。这两种计算结果一致至10^{-6}，且在每个最优解处，第一特征值都是三重的；双覆盖圆盘除外，其第一特征值为二重。因此， $\sigma = 1$ 是第2节所有网络的第一非零特征值，包括带有喇叭的网络；每个网络都在其圆的位置和权重范围内最大化 $\bar{\sigma}_1$ 。各类别的最优值趋近于表4 中的极限值，当

$$\bar{\sigma}_1^\star \approx \bar{\sigma}_\infty - A\, j^{-1} - B\, j^{-2}, \tag{37}$$

使用表 4 中拟合得到的系数 A 和 B。对于由一个环和两个环组成的族，残差低于 1.2×10^{-2}；对于三个堆叠圆环，低于 2×10^{-3}；对于带一个极帽的三个堆叠圆环，低于 8×10^{-4}。若同时拟合 $\bar{\sigma}_\infty$ ，则由一个环和两个环组成的族（在 $j \geq 9$上）的值与极限相差不超过 9×10^{-3} ；带一个和两个极帽的堆叠体的值则分别为 22.514 和 22.80。最后一次拟合仅使用了 j 的四个值。亏损的量级为 j^{-1}，没有式（40）中的对数项，因为环的帽按其间距的比例收缩，其中 $j\,r \approx 1.2$。计算得到的构型在形状上也趋近于极限网络（表 4，图 2）。速率 j^{-1} 与拼接构造给出的启发式结果一致。每个圆附近的颈部都以单周期 Scherk 曲面的一半为模型 [KZ26，定义 3.1]，；每个 j _ 核心按间距（量级为 $\frac{1}{j}$ ）缩放后，都会使面积改变 $O(j^{-2})$。Scherk 模型还预测，当 $j \to \infty$ 时，环的每条边界曲线所张成的方位周期比例为 $\frac{2\psi}{\pi}$ ，其中 ψ 为每个薄片与 $\partial\mathbb{B}^3$之间的夹角（表 4）：棱锥为 0.83，双锥为 0.72，棱柱和反棱柱为 0.69。

5.3. **为每个 b找到的最佳构型**。 这些族不一定包含极大化者，因此我们还进行不预设极大化者的搜索。对于 $5 \leq b \leq 18$ 我们求解无约束问题，使每个帽各自构成一个轨道；初始构型采用 Thomson 配置，即库仑能的极小化者（第5.5节）。在每个 $b \leq 12$处，我们还从十个随机构型开始搜索，并从沿不稳定方向移动的鞍点开始搜索。对于 $19 \leq b \leq 40$ 我们则在 Fekete 配置的类别中进行优化（第5.4节）。其对称群将中心划分为若干轨道，每个轨道具有一个半径、一个权重层级、由其稳定子决定的自由位置以及稳定子不变权重模态。我们从 Fekete 配置以及该*Fekete* 类中的三个随机构型开始

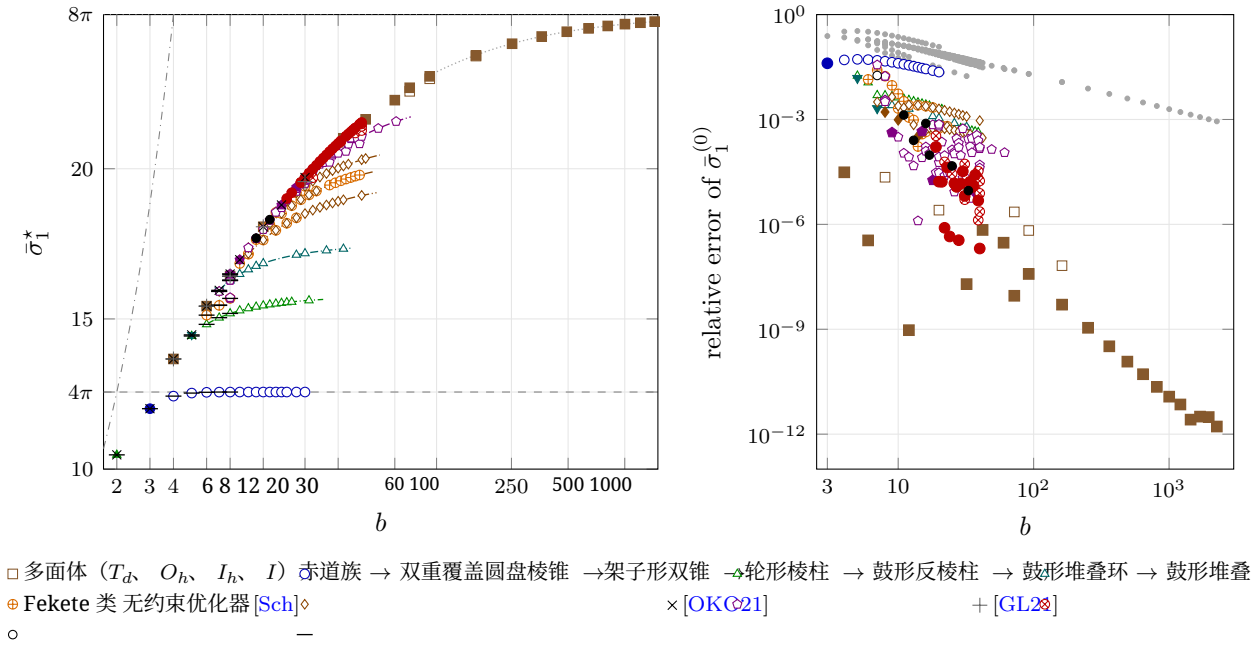

FIGURE 3. 左图：$\bar{\sigma}_1^\star$ 按族比较 b（第 5.2 节和第 5.4 节），并列出先前的值 [GL21; OKO21; Sch] 以及界 $2\pi b$ [FS16] 和 8π [KS24]。曲线分别为渐近公式 (36)（蓝色虚线）、速率公式 (39)（点线）和拟合曲线 (37)（点划线，第 5.2 节）。图例给出了每个环族的极限网络，记为 $j \to \infty$（图 2，表 4）。棱柱和反棱柱标记包含零个、一个和两个极帽。在较大的 b处，反棱柱行没有极帽（极限 19.659）或有两个极帽（21.070），而棱柱行有一个极帽（20.486）。右图：第 3.5 节中多极近似 (29) 的相对误差，在具有 $b \geq 3$ 的每个构型的中心、半径和圆权重上进行评估（第 5.5 节）。灰点表示单极近似 $\bar{\sigma}_1^{(0)}$，而各族标记表示偶极近似 $\bar{\sigma}_1^{(1)}$。这些点对应表 6 的各行，其中每个 b 中最优者以填充标记表示。左图的上包络来自表 3。

构型。在 $b = 32$ 和 38 处，Fekete 配置已经属于这些族中的一个类别：二十面体与十二面体，以及六个堆叠的六边形和两个极帽。从 $b = 42$ 起，我们只运行二十面体类。

表3列出了每个已计算的 b中找到的最大 $\bar{\sigma}_1$ 对应的构型，以及其对称群和式（34）、（35）的验证量 $\mathcal{K}$ 和 $\lambda_{\min}(\Lambda^\star)$。图13–16展示了这些曲面。对于 $b = 11$，13、16和17，最佳构型来自以 Thomson 配置为初始值的非限制优化器。据我们所知，这些值此前尚未见报道。对于从19到40的每个 b，除25、32、33和38外，最佳构型都来自 Fekete 类别，其结果比各族中最好的构型高出 3×10^{-4} 至0.57。在 $b = 32$ 处，最佳构型是二十面体与十二面体；在 $b = 38$ 处，则是六个堆叠的六边形和两个极帽。在 $b = 25$ 和33处，Fekete 类别的最优解是指标为1的鞍点。从该点沿不稳定特征向量出发，非限制优化器到达一个没有对称性的临界点，其指标为0，且仅比该鞍点高出 5.2×10^{-7}和 1.2×10^{-6}。这两个构型是表3中仅有的对称群平凡的构型。Schulz 在 Sch 中猜想，存在一个亏格零、对称群平凡且具有61个边界分支的自由边界极小曲面。表6中每个具有 $b \leq 18$ 的曲面都有一个镜面。对于 $b = 15$ 和16，找到的最佳曲面具有群D_{3h} 和 T_d，其群比 Fekete 构型的手性群 D_3 和 T 更大。第一个手性

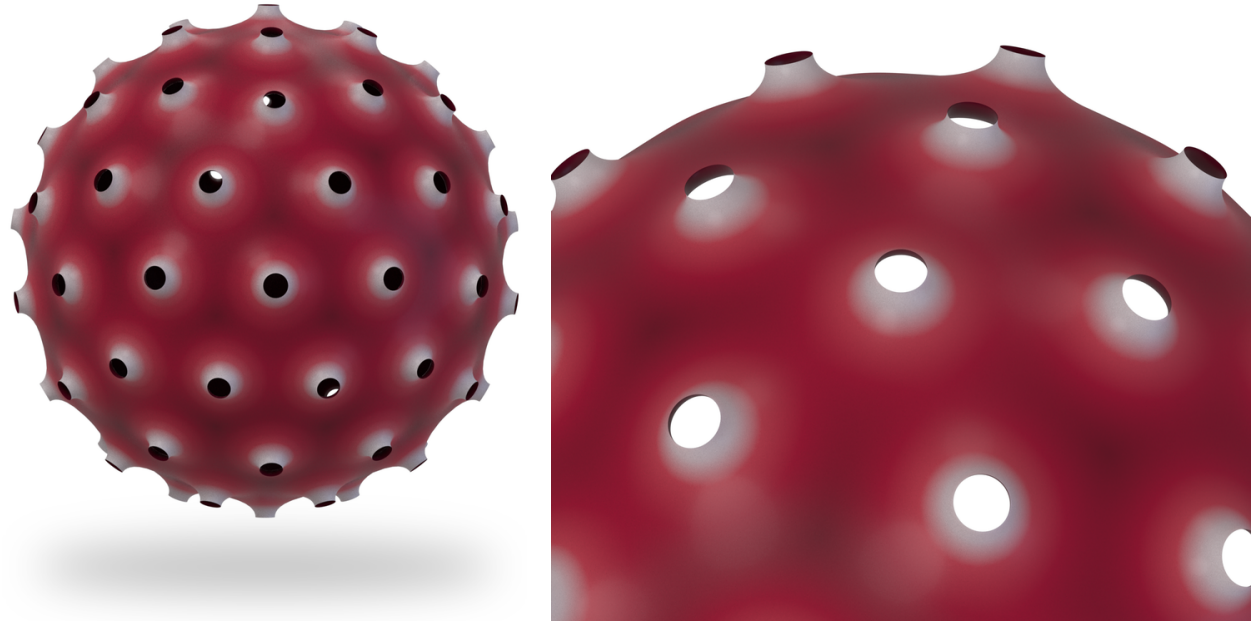

FIGURE 4. 具有 $b = 92$的曲面，具有 $\nu = 3$ 的测地二十面体（第5.4节，表3）。左：整个曲面。右：局部特写。薄片紧贴在 $\partial\mathbb{B}^3$内侧，每个边界圆都是通向 $\partial\mathbb{B}^3$的短颈部的边缘。几何形状未作夸张处理，颜色如图1所示，表示 $|X|$ 。

表中的曲面6 具有 $b = 19$ ，且其群为 C_2。在 $b = 23$、24和28处找到的最佳构型具有旋转群 D_3、 O 和 T。在 $b = 24$ 处，帽中心构成一个扭棱立方体，具有32个三角形面和6个正方形面，费克特点也如此。

残差 $\mathcal{K}$ 在 $b \le 92$ 时至多为 4×10^{-10}，对于测地二十面体则至多为 6×10^{-9} （表3）。式（35）的其他量均一致有界，边界长度除外。除具有 $14 \le b \le 20$的赤道 b边形外，每行的边界长度都与 $\bar{\sigma}_1^\star$ 相差不超过 4×10^{-8}；对于这些边形，差异最大可达 7×10^{-5} （$b = 18$）。这些情况下，帽几乎相接，缺陷随 $\mathcal{K}$增大。簇展宽 δ_3 低于 3×10^{-12} （对于 $b \ge 362$ ，按构造其为零；而三元组则与其他同型分量进行核对，见第4.1节）。临界悬链面的间隙 $\frac{\bar{\sigma}_4}{\bar{\sigma}_1}$ 最小，其值为 $t^2 = 1.4392$，其中 t为 $\tanh\, t = 1$；总体而言，间隙随 b增大。对于 $b \le 42$， $\mathcal{R}_{\mathrm{sph}}$和$\mathcal{C}_X$ 低于 4×10^{-10} 和 2×10^{-8}，而对于 $b = 60$–252，则达到 6×10^{-6} 和 4×10^{-4}。对于满足 $362 \le b \le 2252$ 的测地二十面体，它们低于 6×10^{-9} 和 3×10^{-6}。每一行中，只要 $b \le 252$，面积密度均满足 $\min_\Omega J > 0$ ，这与 FS16 的命题 8.1]一致。其值取决于 Ω 的 M¨obius 规范；对于 $b \ge 362$，未对其进行计算。所有数值均见代码仓库 [CO26b]。每一行都给出下界 $\sigma^\star(0, b) \ge \bar{\sigma}_1^\star$，其误差不超过第 4.4 节所述的离散化误差，无论其是否为临界曲面。由于 $\sigma^\star(0, b)$ 是具有 b个边界分支的嵌入的亏格零自由边界极小曲面最大面积的两倍 [CG26；FS16]（第 1 节），表3也为这些面积提供了下界，而其中的曲面正是我们认为可能实现 CSW25 猜想 7.10]所猜想的面积最大化者的候选曲面。

5.4. 大规模 b。在二十面体对称性下，计算成本随轨道数增长，而非随 b 增长。因此，第4.1节的约化求解器可处理具有 $\nu = 15$ 的测地二十面体，其中$b = 2252$ 和 $\bar{\sigma}_1^\star = 24.97$ （图15–16）。这些曲面是一层位于 $\partial\mathbb{B}^3$ 内侧的薄片，并通过 b 个短颈与其相连（图1）；图 4 展示了具有 $b = 92$ 的曲面及其颈部的特写。这正是 [GL21] 均匀化以及 [KS24]收敛定理背后的图景。帽半径按 b^{-1} 的尺度变化，从 $b = 12$ 到 $b = 2252$，其间的 br 介于 1.7 和 2.0 之间。

Karpukhin 和 Stern 证明了 $8\pi - \sigma^\star(0,b)$ 介于两个 $b^{-1}\log b$ [KS24（定理 1）8]。下面我们采用第3.5节中的单极子和偶极子近似，对费克特构型中的等帽进行形式计算，并与计算所得的值进行比较。

近似方法。在其间距的尺度上，小边界圆表现为点源。第3.5 节的单极近似 $q_\ell = \bar\sigma_1 w_\ell\,\bar u_\ell$保留每个帽上的一个数值，即通量 $\bar u_\ell$ ，其中 Γ_ℓ是 $\bar\sigma_1^{(0)}$ 上特征函数的平均值，并给出式（29）的值。偶极近似还加入了每个帽对其他帽所产生场的梯度的响应，乘以推论κ_ℓ中的因子$1 = \frac{1+\varepsilon_\ell}{1-\varepsilon_\ell}$ ，并给出式 3.4（ $\bar\sigma_1^{(1)}$ 29）的值。对于 $\varepsilon_\ell = 0$ ，其响应与绝缘孔相同。就帽的面积分数$f = \frac{1}{4}\sum_\ell r_\ell^2$ 而言，在首阶近似下，偶极子会将单极近似的值除以 $1+2f$。两种近似都作了两项简化：_舍弃精确系统（23）中的高阶多极项，并以每个圆上的权函数平均值取代权函数本身。第一项简化在此没有误差界，第二项简化的误差界则仅为第3.5节给出的界，远非最优。第5.5 节测量了表6中每种构型所产生的误差。

Fekete 配置处的等帽。设这些帽具有相同的权重 $w_\ell = \frac{1}{b}$ 和相同的半径 $r = \frac{\tilde r}{b}$，因此 $R_\ell \approx r$和$\frac{1}{\bar\sigma_1^{(0)}} = \frac{1}{b}\lambda_{\max}$(PG)。由于第一特征函数接近坐标函数，我们计算 G 在三个向量 $(c_\ell \cdot e_i)_\ell$ 上的瑞利商，并取其平均值。利用 $c_m \cdot c_\ell = 1 - \frac{1}{2}|c_m - c_\ell|^2$ 和 $\sum_i \sum_\ell (c_\ell \cdot e_i)^2 = b$，得到

$$\frac{1}{\bar\sigma_1^{(0)}} \approx \frac{1}{b^2}\Big(\frac{b}{2\pi}\log\frac{1}{r} + \frac{1}{\pi}L(\mathbf{c}) + \frac{1}{4\pi}\sum_{m\neq\ell}|c_m - c_\ell|^2\log|c_m - c_\ell|\Big), \qquad L(\mathbf{c}) := -\sum_{\ell<\ell'}\log|c_\ell - c_{\ell'}|. \tag{38}$$

因此，中心 $\mathbf{c} = (c_1,\dots,c_b)$通过其对数能量 L 以及一个光滑核的和参与其中。对于 Fekete 配置，即 L的极小化构型，有 $L(\mathbf{c}) = \big(\frac{1}{4} - 1\,2\log 2\big)b^2 - \frac{1}{4}b\log b + \frac{1}{2}C_{\log}b + o(b)$，其中 $C_{\log}$是对有序对 [求和得到的最小对数能量展开式中的常数（BS18，定理 1.5]）。B´etermin 和 Sandier 证明了$C_{\log} \le C_{\mathrm{BHS}} = 2\log 2 + \frac{1}{2}\log\frac{2}{3} + 3\log\Gamma^{\sqrt{\pi}}(1/3) \approx -0.0556$，而 Brauchart、Hardin 和 Saff 猜想等号成立 [BHS12]。对于等分布中心，(38) 中最后一项和的主项为 $b^2\big(2\log 2 - \frac{1}{2}\big)$，即核在 $\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^2$上的平均值。于是， b^2 阶的项相加得到 $\frac{b^2}{8\pi}$，从而给出极限 8π。计入偶极子的因子 $1+2f = 1 + \frac{\tilde r^2}{2b}$后， b阶的项 $\log b$ 和 b给出

$$\bar\sigma_1^\star \approx \frac{8\pi}{1 + b^{-1}\big(2\log b - \frac{d(\tilde r)}{8\pi}\big)}, \qquad d(\tilde r) = 32\pi\big(\log\tilde r - \tfrac{1}{8}\tilde r^2 - C_{\log}\big), \tag{39}$$

以及一阶项

$$8\pi - \bar\sigma_1^\star(b) \approx \frac{16\pi\log b - d}{b}. \tag{40}$$

系数 $16\pi \approx 50.3$ 与 $\tilde r$无关。它结合了自项 $\log\frac{1}{r}$ 与能量中的项$-\frac{1}{4}b\log b$。常数则与 $\tilde r$有关。最大化 $d(\tilde r)$得到 $\tilde r = 2$，即$r^\star = 2b^{-1}$，并且

$$d = 32\pi\big(\log 2 - \tfrac{1}{2}\big) - 32\pi\, C_{\log} \ge 25.0, \tag{41}$$

当猜想成立时取等号。 [KS24，第 4] 节的下界是用半径为 $b^{-3/2}$的帽证明的，并指出 b^{-1} 可能是最优解。

与计算所得值的比较。测地二十面体的帽半径趋近于偶极近似的最优半径 $r^\star = 2b^{-1}$ ，在 $b = 252$ 为 1002 和 2252 时分别为 $br = 1.98$、 1.99 和 2.00。沿着测地二十面体， $b(8\pi - \bar\sigma_1^\star)$ 关于 $\log b$ 的斜率在相邻的 b 之间持续下降，趋向于 16π：从 $b = 92$ 与 162 之间的 55.3 降至两者之间的 51.8

$b = 1962$ 与 2252 之间。固定系数后，在 $162 \le b \le 2252$ 上对 d 进行拟合，得到 $d \approx 30$；其在 $8\pi - \bar{\sigma}_1^\star$ 中的相对残差至多为 2.6%，而在每个 b 上分别拟合时，结果从 $b = 162$ 处的 35 漂移至 $b = 2252$ 处的 27。这个拟合值不同于计算所得的值 (41)，因为 (40) 只是 (39) 的一阶展开，在这些 b 下，其下一阶项仍然很大。采用 (41) 中的 d 后，形式 (39) 不含拟合参数。它在 $b = 162$ 处将 $\bar{\sigma}_1^\star$ 重现至 1.3×10^{-2}，在 $b = 2252$ 处重现至 2×10^{-4}；它拟合出的 d 值则从 $b = 162$ 处的 22.7 上升至 $b = 2252$ 处的 24.6。它是图3中的点线。幂律无法拟合：局部指数 $-\Delta \log(8\pi - \bar{\sigma}_1^\star) \,/\, \Delta \log b$ 沿着测地二十面体持续增加，从 0.73 增至 0.85。根据 (40)，只有在超过 $b \approx 4 \times 10^3$ 后，亏损才会低于 0.1。由于 $\sigma^\star(0, b) \ge \bar{\sigma}_1^\star(b)$，计算所得的亏损为真实亏损提供了上界。结合多极近似，这些结果表明，KS24 中提出的极限问题（开放问题 2）的答案是 16π。

5.5. **动物园图**。 表 6 汇集了计算得到的所有临界点。代码仓库 [CO26b]为表 6中的每个构型都设有一个文件夹，其名称在该表以及表 2和 3中均带有链接，文件夹内包含相应的构型参数、谱、最优性证书，以及曲面网格和图。表 1 按顺序列出了环族及其极限；图 6–12 展示了各类曲面，图 3 则按族绘出了各项数值与 b 的关系。

中心的对数能量。 Oudet、Kao 和 Osting [OKO21] 观察到， $b \le 20$ 的极大化者与 Thomson 构型 [Wal+]相似；后者是库仑能的极小化者。第 3.5 节中的单极近似（29）解释了这种关系，并表明相关能量是对数能量。在该近似中，各帽通过矩阵 G 相互作用；矩阵 26）的非对角元素是 $\mathbb{S}^2$的格林函数，它关于各中心间的弦距离取对数。对于相同的帽，瑞利商（38）将中心的影响归结为它们的对数能量；能量越小， $\bar{\sigma}_1$越大。边界曲线的中心是 $X^\star(\Gamma_\ell$的质心。这解释了为何最佳构型接近但并不重合于 Fekete 配置，也解释了为何在大多数情况下，Fekete 配置所属类别在 19 至 40 个 b中给出的值最佳（第5.3节）。

多极近似的准确性。图3 的右图测试了表6中的每个构型上的两种近似（29），每个圆都有各自的中心、半径和平均权函数。单极近似将 $\bar{\sigma}_1^\star$ 高估了5%至20%，在固定 b时几乎均匀，因此除近似相等的情形外，它仍能对每个 b 的临界点进行排序。加入偶极子后，式（29）中 $\bar{\sigma}_1^{(1)}$ 的中位相对误差降至 6×10^{-4} （对应 $13 \le b \le 20$），而对于 10^{-12} 为 $b = 2252$的测地二十面体，则降至 10^{-12} 。由于两种近似都用每个圆上的平均权函数替代其权函数，因此在权函数变化最大处准确性最低；对于赤道多边形，误差最高可达5%。

莫尔斯指标。在第 $\bar{\sigma}_1$ （第4.3节）的莫尔斯指标是表6中的指标列。它不是该曲面作为面积的临界点时的指标。在已计算的情形中，随着数值降低，它通常会增大：从极大化者处的0增至赤道 $b - 3$ 边形处的 b。对于棱锥以及带有一环 $j \ge 6$ 帽的双棱锥，其值为 $j - 3$。对于 $b \le 12$ ，极大化者是表6中唯一的局部极大值。在 $b = 16$ 和22处还存在另一个局部极大值，分别低于最佳值0.006和0.0015。对于 $16 \le b \le 40$ ，所有已找到且计算出指标的极大化者都是局部极大值，但在$b = 36$处找到的最佳构型指标为1。在 $b = 92$ 和162处，测地类还包含鞍点，其指标分别为50和52。

表 6中的指标和对称群满足小 b时的计数（4）。带标签的 b 个帽的构型，在模¨莫比乌斯变换后，构成一个欧拉示性数为 $(-1)^{b-3}(b-3)!$ 的空间。在这个空间上，对权重取最大值后的 $\bar{\sigma}_1$ 是一个函数，其临界点对应于自由边界极小曲面。一个曲面 Σ 给出 $2b!\,/\,|G_\Sigma|$ 临界点，它们之间的区别在于帽的标签。假设 $\bar{\sigma}_1$ 是光滑的，且临界点非退化；并且当构型退化时，也就是说，当帽的半径或两个帽之间的距离趋于零时，该函数递减。那么，根据庞加莱´–霍普夫定理，临界点按符号 $(-1)^{\mathrm{ind}(\Sigma)}$计数后，其总和等于欧拉示性数，即（4）。这些关于 $\bar{\sigma}_1$ 的假设尚未

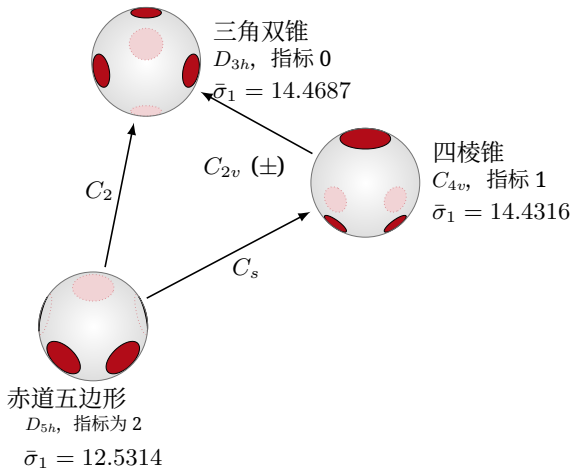

FIGURE 5. 临界点之间的连接，见 $b = 5$ （第5.5节）。每个球面展示了表6中一个临界构型的帽，远侧的帽以浅色显示。箭头表示 $\bar{\sigma}_1$的一条上升路径，并标注了其保持不变的对称群。四棱锥的不稳定方向的两种符号都通向三角双锥（±）。

得到证明，因此（4）只是一个预测。对于表 6中的指标和群，这一预测对 $3 \le b \le 10$成立。对于$b = 4$，四面体和赤道四边形给出 $\frac{1}{24} - \frac{1}{16} = -\frac{1}{48}$。在 $b = 9$ 和 10的情形中，十五个曲面中的七个以及二十六个曲面中的十五个，都是因为不计入它们时计数不成立而被发现的。它们的初始点是球面上 b 个点的对数能量的临界点。对于每个 $b \ge 11$ ，计数都不成立，因此那里缺少临界点。表 6 对 $b = 3$、.....、10列出了 1、2、3、4、7、13、15 和 26 个临界点。

猜想1.1 的指标界在表6 中所有具有计算所得指标的行中均成立。这里，$b - 3$ 是球面上 b 点的空间模M¨obius变换的复维数，其上同调在高于该维数的次数上消失。在具有 $4 \le b \le 12$的赤道 b边形处， $b - 3$个递增方向在关于赤道面的反射下为奇。对于 $b = 3$ ，该猜想将意味着赤道三边形是唯一的临界点。式（4）中的每一项都为正，且至少为$1_{\ 12}$，即右侧。

—

连接。 对于 $b = 4$、5 和 6，我们沿着 $\bar{\sigma}_1$ 的上升路径，这些路径从每个鞍点沿其不稳定方向离开，并保持其对称性。图 5 展示了 $b = 5$。赤道五边形连接到四棱锥和三角双锥。四棱锥沿其不稳定方向的两侧均连接到三角双锥。两端的区别在于，哪一对相对的底部圆帽成为极点。

6. DISCUSSION

我们使用层势方法，在去除圆帽的球面上计算了 $\bar{\sigma}_1$ 在亏格零情形下的临界点，其特征值、导数和证书（定理 3.1、3.6 和 3.7）将每个计算得到的临界点转化为一个自由边界极小曲面。由此得到一个包含 268 个经过认证的曲面的动物园，其中边界分支最多达 2252 个（表 6）。这些结果引出了以下问题。

极限曲面。计算得到的族表明，除车轮和以下堆叠体外的极限 [KZ26] 也可以进行消奇异化：鼓、蛋糕架，以及带喇叭的鼓和堆叠体（第2节）。证明这一点也能得到这些族的收敛性，而我们目前只是观察到了这一点。对于类最大化构型，无需粘合或许也能证明这些值的收敛性。填充帽以及测度特征值的上半连续性 [GKL21] 将极限从上方限制为第5.2节的极限问题。下界则需要对 [GKL21的齐次化测试度量作对称化处理；21]。带喇叭的网络也引出了一个谱问题。对于以圆盘封闭的堆叠体， [KN25，定理 1.10] 表明 $\sigma = 1$ 是传输问题的第一特征值

并且堆叠体在旋转对称度量中使 $\bar{\sigma}_1$ 达到最大。对于蛋糕架、车轮以及其他带喇叭的网络，我们仅通过数值计算检验了这一点（第5.2节），并且每种类型都找到了一种网络。

大型 b。主要的分析问题是使第 5.4 节的分析严谨化。这包括两个部分。第一部分是对具有 b 个小圆帽的球面上的 $\bar{\sigma}_1$ 进行展开，并给出余项的界。根据命题 3.2，特征值问题是关于这些帽的电荷与多极矩的一个精确方程组，而多极近似只保留电荷和偶极子。因此，余项来自二阶及更高阶的多极矩，以及每个圆周上权函数的变化。对于不带权函数且具有平衡半径的孔洞，这样的展开已在 [HV26]（注 3.5）中得到证明。偶极近似（第 5.5 节）的精度表明，电荷和偶极子承载着主导项。这样的展开将给出 $\sigma^\star(0,b) \geq 8\pi - b^{-1}(16\pi \log b - d)$，其误差仅为低阶项。第二部分是匹配的上界，该上界必须对每个度量都成立。 [KS24，定理 1.8] 的上界源于一个稳定性不等式：该不等式以亏损 $8\pi - \bar{\sigma}_1$为界，控制 $(W^1,2)^*$ 中边界测度与面积测度之间的距离。常数 16π 需要采用该不等式的尖锐常数。两部分结合起来，将回答 [KS24 的开放问题 2]。

这个动物园。 从 $b \geq 19$处的 Fekete 配置以及动物园的每一个临界点出发进行非限制运行，可以检验所找到的最佳构型是否为最大化者。对于没有极帽的棱锥、棱柱和反棱柱，以及 $b = 72$（注 5.1）处的手性类，类最大化构型的存在性尚未解决。动物园中仅有两个曲面在 $b = 25$ 和 33 处具有平凡对称群（第 5.3节）。是否存在边界分支更少的此类曲面，尚未解决。Schulz 猜想存在一个具有 61 [Sch]的曲面。第4.1节的对称性约化适用于每个类别，而不仅仅是二十面体类别；对于高阶特征值 $\bar{\sigma}_k$也是如此，正如 [OKO21，§52]中所述。最后，除了圆盘和临界悬链面之外，尚无已知的闭式解。本文计算的曲面精确到约十二位数字，可用于检验候选魏尔斯特拉斯数据。

数据可用性。所有构型、证书和曲面均存放在代码仓库 [CO26b]。

致谢。作者使用 Claude（Anthropic）协助编辑文本、核实参考文献、检查推导、开发部分数值代码，以及探索对称构型。所有人工智能辅助文本和代码均由作者检查，作者对论文内容承担全部责任。

References

[Ahl79] L. V. Ahlfors.《复分析》。第3版。纽约：McGraw-Hill，1979年。[Axl86] S. Axler.《从复分析视角看调和函数》。《美国数学月刊》93.4（1986年），第246–258页。 DOI: 10.2307/2323672。[BS18] L. B´etermin 和 E. Sandier.《球面上最优对数能量的重整化能量与渐近展开》。《构造性逼近》47.1（2018年），第39–74页。 DOI: 10. 1007/s00365-016-9357-z。[BHS12] J. S. Brauchart、D. P. Hardin 和 E. B. Saff.《球面上最优 Riesz 能量与对数能量渐近的下一阶项》。载于：《正交多项式、特殊函数及其应用的最新进展》。第578卷。《当代数学》。美国数学会，2012年，第31–61页。 DOI: 10.1090/conm/578/11483。[CSW25] A. Carlotto、M. B. Schulz 和 D. Wiygul.《拓扑和对称群相同的自由边界极小曲面有无穷多对》。《美国数学会回忆录》313.1591（2025年）。DOI: 10.1090/memo/1591。[CO26a] H. Chen 和 B. Osting.《通过极值 Steklov 特征值计算自由边界极小环面》。2026年。arXiv: 2610.25787 [math.NA]。

[CO26b] H. Chen 和 B. Osting.《“多边界分支零属自由边界极小曲面的谱系”的数据》。https://github.com/braxtonosting/genus0- fbms- zoo。2026年。[CG26] O. Chodosh 和 M. Gianocca.《亏格零的自由边界极小曲面》。2026年。arXiv: 2609.13054 [math.DG]。[FPZ17] A. Folha、F. Pacard 和 T. Zolotareva.《单位三维球中的自由边界极小曲面》。《数学手稿》154.3–4（2017年），第359–409页。 DOI: 10.1007/s00229-017-0924-9。[FS26] G. Franz 和 M. B. Schulz.《极小极大自由边界极小曲面的拓扑控制》。《欧洲数学会杂志》（2026年）。 DOI: 10.4171/jems/1800。[FS11] A. Fraser 和 R. Schoen.《第一斯特克洛夫特征值、共形几何与极小曲面》。《数学进展》226.5（2011年），第4011–4030页。 DOI: 10.1016/j.aim.2010.11. 007。[FS16] A. Fraser 和 R. Schoen.《球内极小曲面的尖锐特征值界》。《数学发明》203.3（2016年），第823–890页。 DOI: 10.1007/s00222-015-0604-x。[GNS08] S. Gemmrich、N. Nigam 和 O. Steinbach.《Laplace–Beltrami 算子的边界积分方程》。载于：《数学与计算：当代视角》。第3卷。《阿贝尔丛书》。Springer，2008年，第21–37页。 DOI: 10.1007/978-3-540-68850-1_2。[GKL21] A. Girouard、M. Karpukhin 和 J. Lagac´e.《Laplace 问题与 Steklov 问题中特征值的连续性及形状优化》。《几何与泛函分析》31.3（2021年），第513–561页。DOI: 10.1007/s00039-021-00573-5。[GL21] A. Girouard 和 J. Lagac´e.《通过流形上的均匀化研究较大的 Steklov 特征值》。《数学发明》226（2021年），第1011–1056页。 DOI: 10.1007/s00222-021-01058-w。[GP12] A. Girouard 和 I. Polterovich.《曲面上 Steklov 特征值的上界》。《数学科学电子研究通报》19（2012年），第77–85页。 DOI: 10.3934/era. 2012.19.77。[GP17] A. Girouard 和 I. Polterovich.《Steklov 问题的谱几何（综述文章）》。《谱理论杂志》7.2（2017年），第321–359页。 DOI: 10.4171/JST/164。[HS93] Z.-X. He 和 O. Schramm.《不动点、Koebe一致化与圆堆积》。《数学年刊》137.2（1993年），第369–406页。 DOI: 10.2307/2946541。[HV26] Z. Huang 和 R. Venkatraman.《穿孔流形 Steklov 谱所产生的不定库仑相互作用》。2026年。arXiv: 2607.25211v2 [math.AP]。[KZ26] N. Kapouleas 和 J. Zou.《靠近边界的欧氏三维球中的自由边界极小曲面》。《美国数学杂志》（2026年）。即将出版。arXiv: 2111.11308。[Kar17] M. Karpukhin.《非负曲率流形上 Laplace 特征值与 Steklov 特征值之间的界》。《数学科学电子研究通报》24（2017年），第100–109页。DOI: 10.3934/era.2017.24.011。[Kar+24] M. Karpukhin、R. Kusner、P. McGrath 和 D. Stern.《通过等变特征值优化研究 $\mathbb{S}^3$ 和 $\mathbb{B}^3$中的嵌入极小曲面》。2024年。arXiv: 2402.13121 [math.DG]。[KMS26] M. Karpukhin、P. McGrath 和 D. Stern.《 $\mathbb{B}^3$ 和 $\mathbb{S}^3$中谱极值极小曲面的大拓扑渐近》。《变分法与偏微分方程》65（2026年），第119页。 DOI: 10.1007/s00526-026-03288-3。[KN25] M. Karpukhin 和 A. D. Noutchegueme.《Steklov 传输特征值与极小曲面的优化》。2025年。arXiv: 2509.24055 [math.DG]。[KS24] M. Karpukhin 和 D. Stern.《从 Steklov 到 Laplace：具有多个边界分支的自由边界极小曲面》。《杜克数学杂志》173.8（2024年），第1557–1629页。 DOI: 10.1215/00127094-2023-0041。[Ket16] D. Ketover.《无界亏格的自由边界极小曲面》。2016年。arXiv: 1612 . 08691[math.DG]。[KO26] B. Kim 和 B. Osting.《双周期调和函数的层势方法》。《SIAM 数值分析杂志》64.5（2026年），第1861–1890页。 DOI: 10.1137/25M1772836。[Kre14] R. Kress.《线性积分方程》。第3版。第82卷。《应用数学科学》。纽约：Springer，2014年。 DOI: 10.1007/978-1-4614-9593-2。

[KN14] M. C. A. Kropinski 和 N. Nigam。“球面上拉普拉斯–贝尔特拉米方程的快速积分方程方法”。《计算数学进展》40（2014），第 577–596 页。 DOI: 10.1007/s10444-013-9319-y。[LO96] A. S. Lewis 和 M. L. Overton。“特征值优化”。《数值学报》5（1996），第 149–190 页。DOI: 10.1017/S0962492900002646。[MP18] H. Matthiesen 和 R. Petrides。紧曲面上第一斯特克洛夫特征值的单调性结果。2018年。arXiv: 1801.08518。[MP20] H. Matthiesen 和 R. Petrides。通过形状优化构造欧几里得球中的任意拓扑类型自由边界极小曲面。2020年。arXiv: 2004.06051 [math.DG]。[OKO21] ´E. Oudet、C.-Y. Kao 和 B. Osting。“通过极值 Steklov 特征值问题计算自由边界极小曲面”。《ESAIM：控制、优化与变分法》27（2021），论文编号 34。 DOI: 10.1051/cocv/2021033。[OW93] M. L. Overton 和 R. S. Womersley。“对称矩阵最大特征值之和最小化的最优性条件与对偶理论”。《数学规划》62.2（1993），第 321–357 页。 DOI: 10.1007/BF01585173。[Sch] M. B. Schulz。《几何分析展示集：亏格零自由边界极小曲面》。https: //mbschulz.github.io/fbms/genus_zero.html。访问于2026年10月。[Wal+] D. J. Wales 等。《剑桥簇数据库：汤姆孙问题极小值》。http://www- wales.ch.cam.ac.uk/CCD.html。访问于2026年10月。[Wei54] R. Weinstock。“经典特征值问题的不等式”。《有理力学与分析杂志》3.6（1954），第 745–753 页。 DOI: 10.1512/iumj.1954.3.53036。

类别	群	b	几何的参数	每个轨道的权重模态
多面体构型				
四面体	T_d	4	1	$\cos\ 3n\theta$
八面体，立方体	O_h	6, 8	1	$\cos\ 4n\theta$，$\cos 3n\theta$
二十面体，十二面体，二十面十二面体	I_h	12, 20, 30	1	$\cos\ 5n\theta$, $\cos 3n\theta$, $\cos\ 2n\theta$
三十面体 + 十二面体	I_h	32	3	$\cos 5n\theta$, $\cos\ 3n\theta$
顶点到顶点上的60-轨道	I_h	60	2	$\cos\ n\theta$
二十面体的弧，free 沿着圆弧				
二十面体 + 一般60轨道	I	72	5	$\cos\ 5n\theta$；$\cos n\theta$, $\sin n\theta$
频率为 ν：每个面的顶点对应一个轨道	I_h	$10\nu^2+2$, $\nu=2,\ \ldots\ldots,\ 15$	$2o-1+p$	$\cos qn\theta$，q 旋转的数量固定轨道中心的旋转轨道的
赤道族				
赤道的 b 边形	D_{bh}	3，。。，16、18、20	1	$\cos\ 2n\theta$
棱锥和双棱锥				
棱锥：环绕 j +一个极点	C_{jv}	$j+1$，$j=3,\ldots,16$, 20	4	环余弦 $n\theta$，极点余弦 $jn\theta$
双锥：赤道的 j边形 + 两个极点	D_{jh}	$j+2$，$j=3,\ \ldots,\ 10$, 16、18、24、30	3	环余弦 $2n\theta$，极点 $\cos\ jn\theta$
棱柱和反棱柱				
棱柱 / 反棱柱：由 j 组成的两个环，对齐 / 旋转了 $\frac{\pi}{j}$	D_{jh} / D_{jd}	$2j$，$j=3,\ \ldots\ldots,\ 9$ / $j=3,\ldots,16,20$	2	余弦 $n\theta$
棱柱 / 反棱柱 + 两个极点	D_{jh} / D_{jd}	$2j+2$，$j=3,\ \ldots\ldots,\ 9$ / $j=3,\ \ldots,\ 16,\ 19$	4	环 $\cos n\theta$，极点 $\cos\ jn\theta$
加帽棱柱 / 反棱柱：环作为独立轨道 + 一个极点	C_{jv}	$2j+1$, $j=3,\ldots,19$ 7		环 $\cos n\theta$，极点 $\cos\ jn\theta$
堆叠环				
m两个帽组成的环，交替排列或彼此独立，可带或不带极帽	D_{2d}, D_{2h}, C_{2v}	$2m$, $2m+1$, $2m+2$; $m=2,\ 3,\ 4$	$3m-1$ (+2 含有极点)	$\cos\ n\theta$
m 绕半转的自由对，+ 一个或两个极点（$m=3$）或无（$m=4$）	C_2	7, 8, 8	11, 13, 13	$\cos n\theta$, $\sin n\theta$；极点 $\cos 2n\theta$, $\sin 2n\theta$
m个 j的环，连续环旋转了 $\frac{\pi}{j}$，有或没有两个极点	D_{jh}（m 奇数），D_{jd}（m 偶数）	mj，$mj+2$; $m=3,\ \ldots\ldots,\ 6$, $j=3,\ \ldots\ldots,\ 6$; $m=3$, $j=7,\ 9,\ 11$、13; $m=5,\ \ j=7$	$2\lceil\frac{m}{2}\rceil+\lfloor\frac{m}{2}\rfloor-1$（+2，其中极点）	$\cos n\theta$，赤道环 $\cos 2n\theta$，极点 $\cos\ jn\theta$
三个环 of j 彼此独立轨道，中间一个旋转了 $\frac{\pi}{j}$, + 一个极点	C_{jv}	$3j+1$，$j=3,\ \ldots,\ 9$, 11、13、16、20	9	环 $\cos n\theta$，极点 $\cos\ jn\theta$
C_{2v} 的一般轨道中的四个帽 + 镜面上的一对，+ 一个极点、两个极点或第二对	C_{2v}	7，8，8	7, 9, 8	四个帽 $\cos\ n\theta$、$\sin n\theta$; 对 $\cos n\theta$；极点 $\cos\ 2n\theta$
费克特构型的类别				
Fekete 类：费克特的轨道其对称性下的构型	G	$19,\ldots,31$, 33，……，37、39、40	如同第3.2节	稳定子不变模态
群 G 非限制曲面的类别，从其中心	T_d, C_{2v}	16, 17	如上	如上
非限制 每个帽各自的轨道，法向形式（14b）	C_1	any	$4b-7$	余弦 $n\theta$，正弦 $n\theta$

TABLE 5. 各族的对称类及其几何参数和权重模态（见第 3.2 节；这些族在第 5.2 节讨论）。对于测地二十面体，o 表示轨道数，p 表示自由位置数：每个 60-轨道对应一个，每个一般的 120-轨道对应两个（$\nu \geq 6$）。指标 n 取值至 $n_{\max}$（见第 4.2 节）。

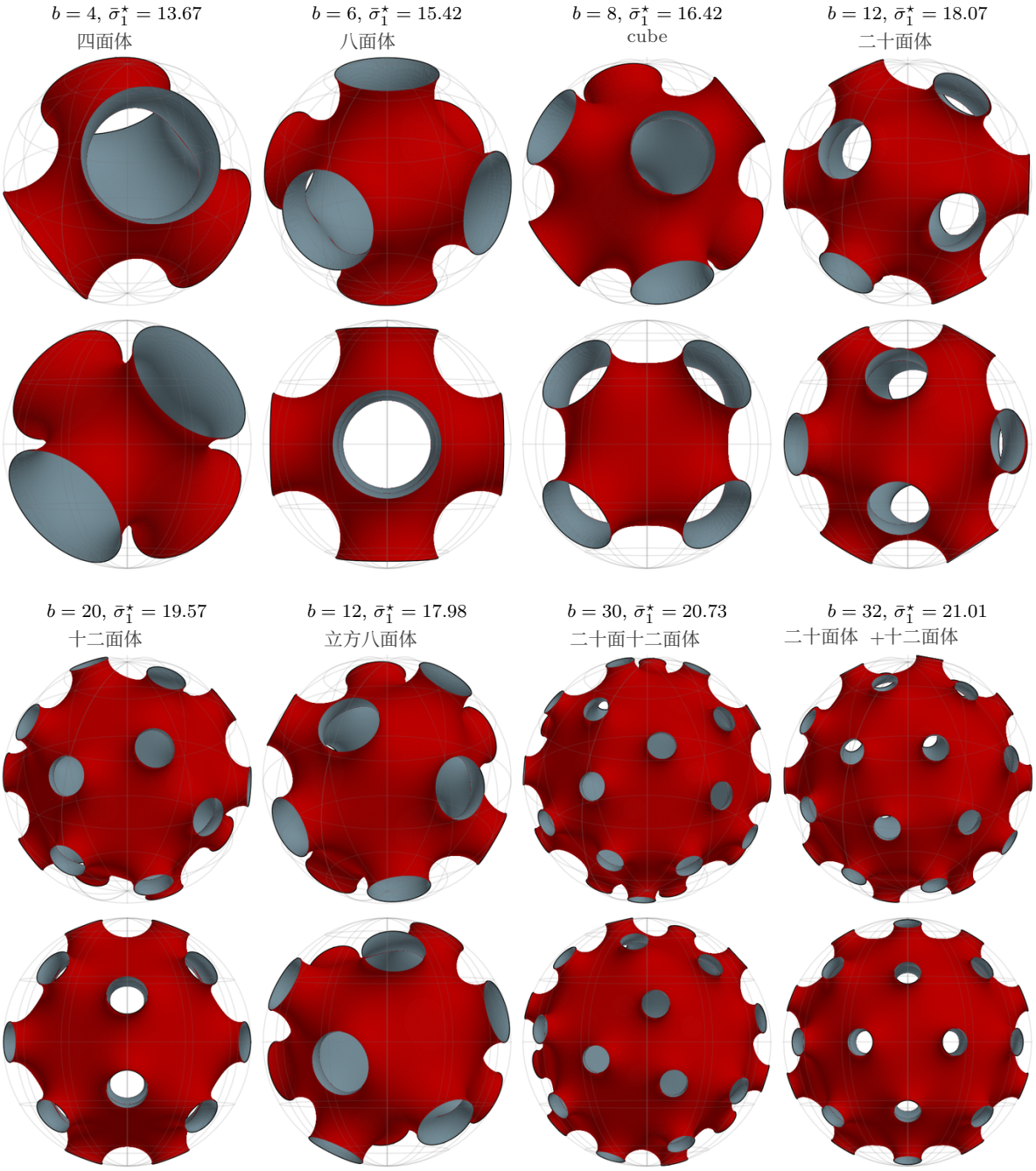

FIGURE 6. 多面体构型（第 5.2节）：由证书构建的曲面 $X^\star(\Omega) \subset \mathbb{B}^3$，斜视图和侧视图，边界圆以黑色表示。值见表 6。

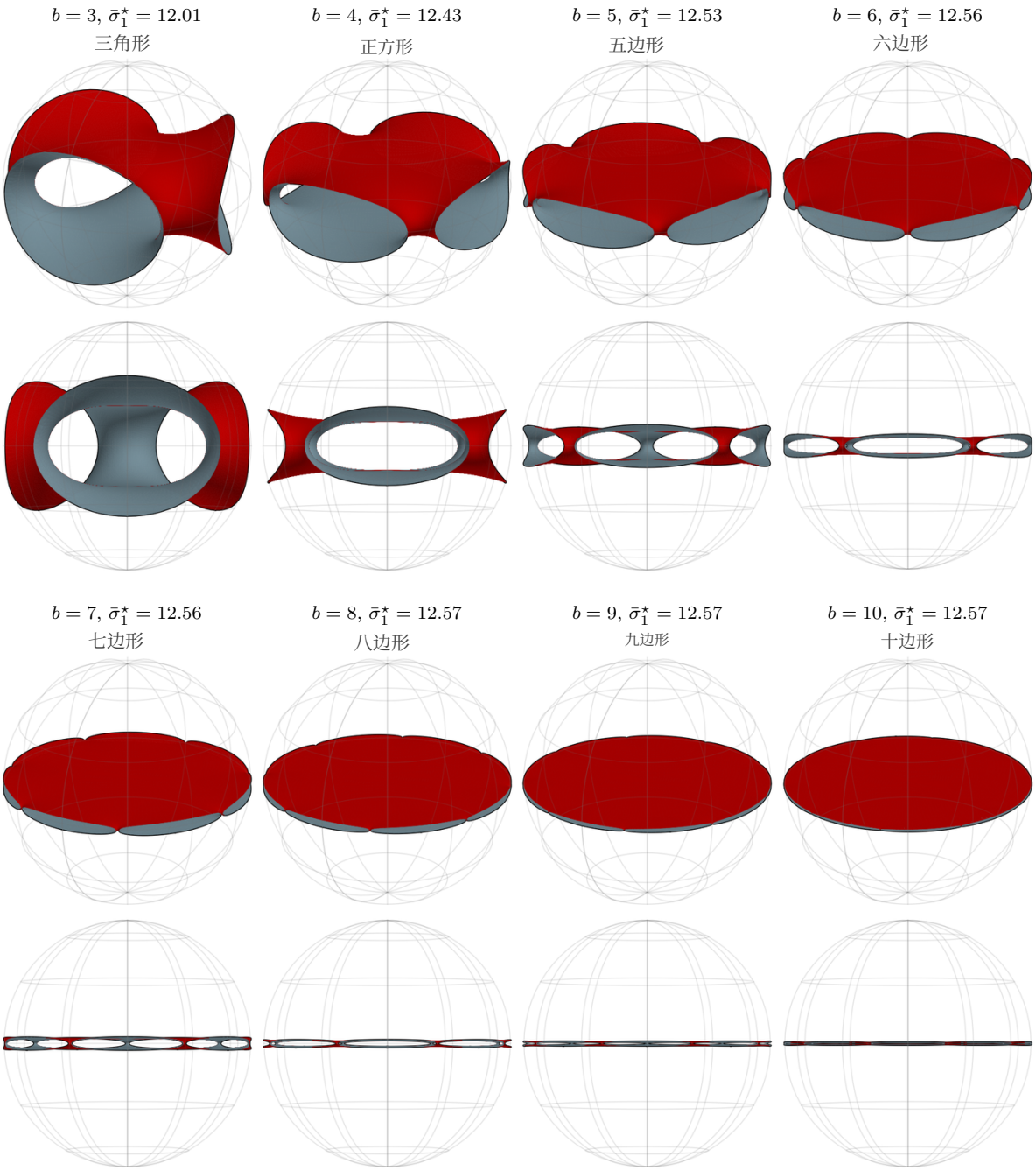

FIGURE 7. 赤道族（第5.2节）：由 b 赤道颈连接的两片曲面，随 $b \to \infty$趋近于双覆盖圆盘。表6中的值。

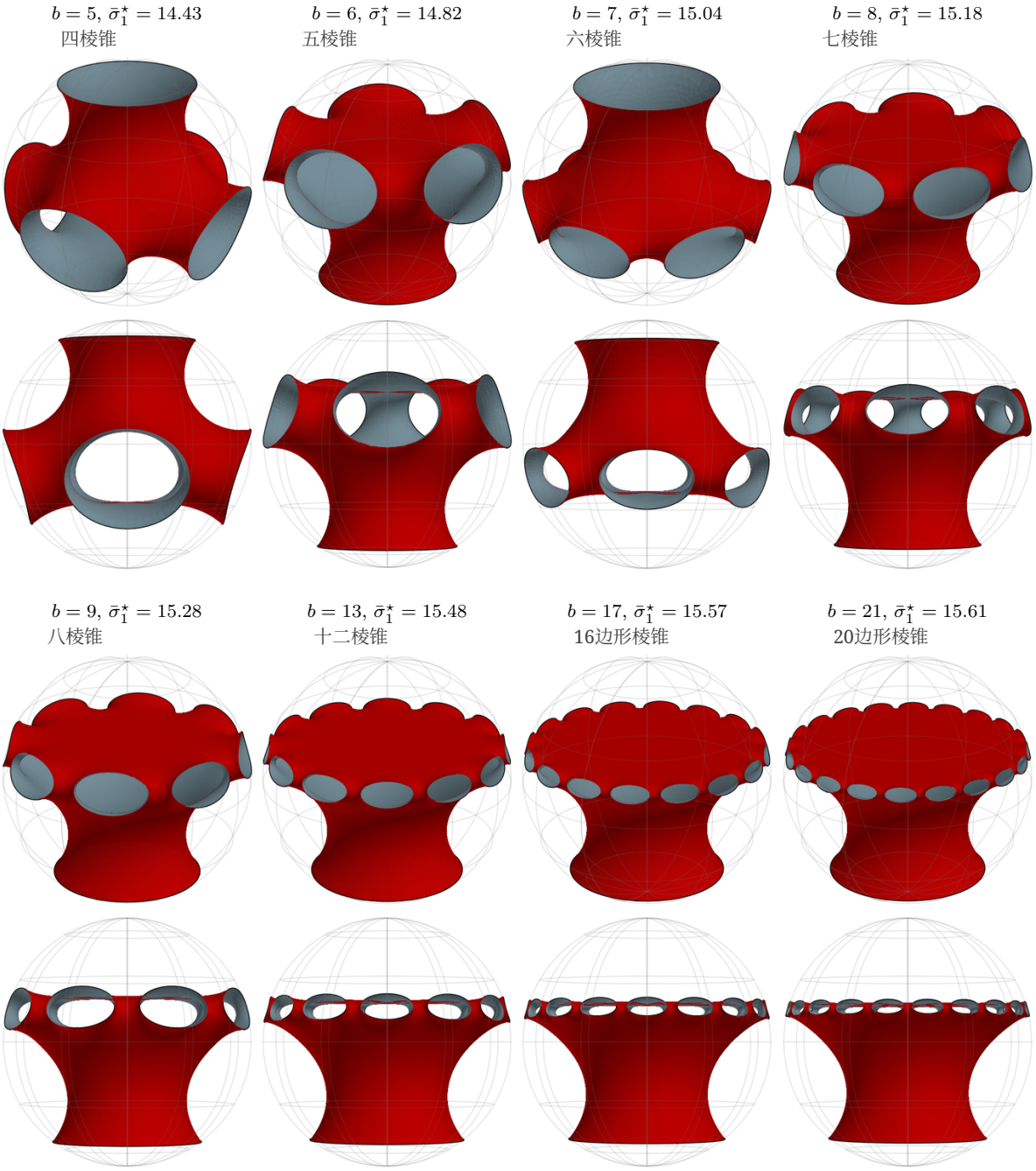

FIGURE 8. 棱锥、一环 j帽和一个极帽，分别对应 $j = 4$、.....、8、12、16、20（第5.2节）。如 $j \to \infty$ 图所示，它们似乎趋于一个蛋糕架、一个带圆盘的喇叭（第2节）。表6中的值。

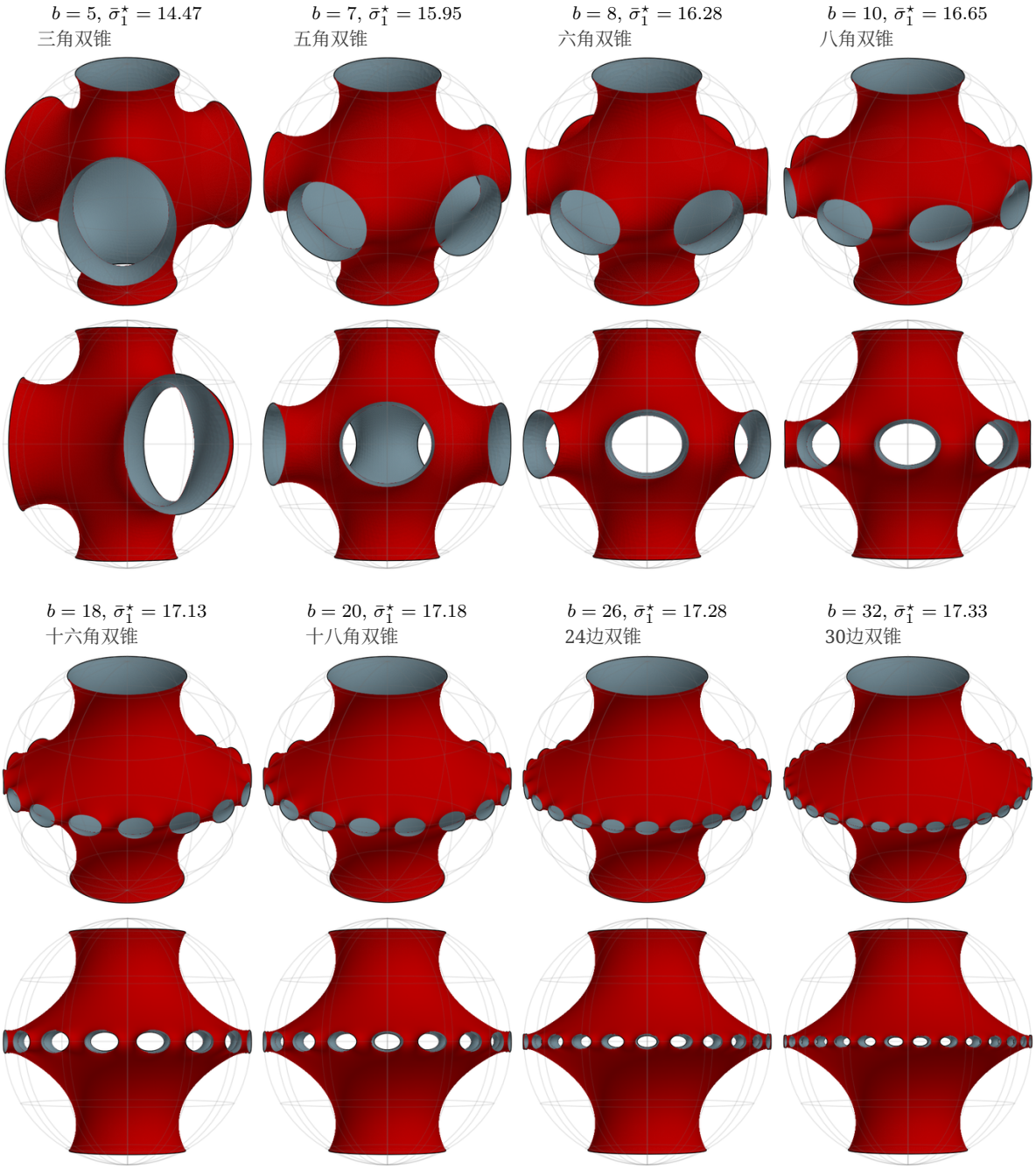

FIGURE 9. 双棱锥，一个由 j 个帽和两个极帽组成的赤道环，对应于 $j = 3$、5、6、8、16、18、24、30（第 5.2节）。随着 $j \to \infty$ 它们似乎收敛到一个轮，即沿赤道粘合的两个喇叭口（第2节）。表 6 中的值。

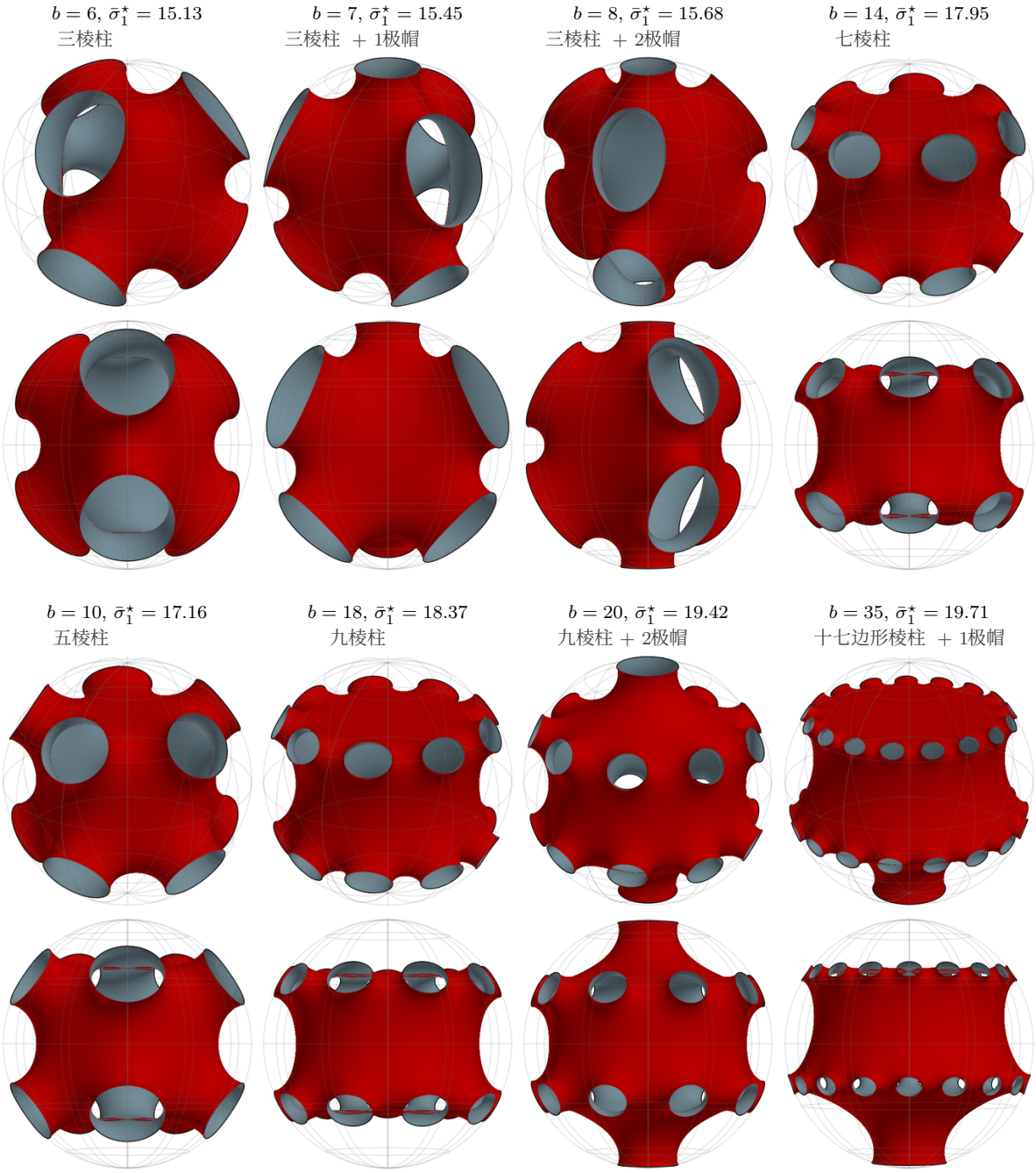

FIGURE 10. 带有零个、一个或两个极帽（PC）的棱柱（第 5.2 节）。如 $j \to \infty$ 图所示，它们似乎收敛于临界鼓；带有一个或两个极帽的棱柱则收敛于一个或两个圆盘被喇叭取代的鼓（第 2 节）。表 6 中的值。

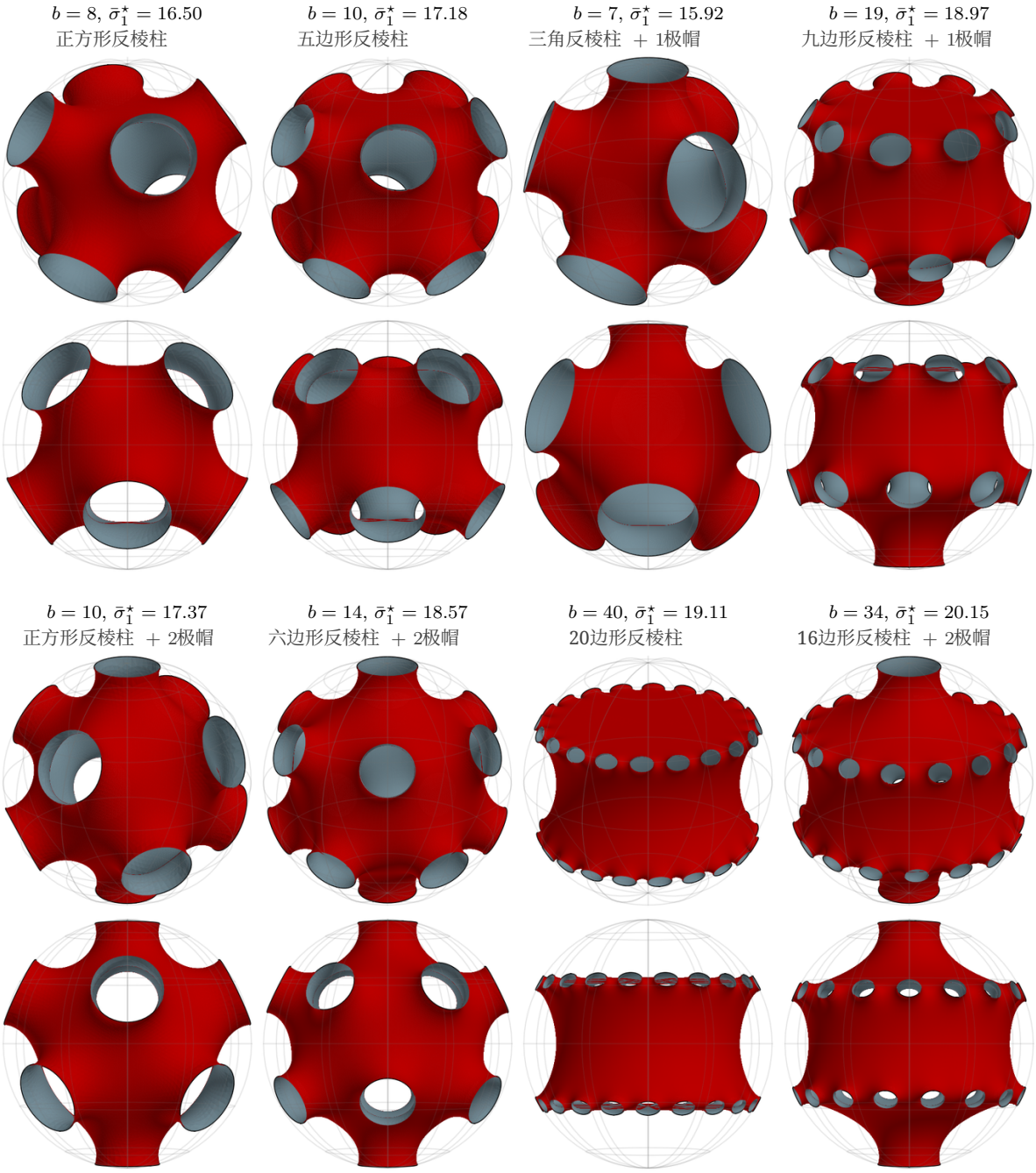

FIGURE 11. 带有零个、一个或两个极帽（PC）的反棱柱（第 5.2 节）。从 $j \to \infty$图中看来，它们似乎收敛于临界鼓；带有一个或两个极帽时，则收敛于一个或两个圆盘分别被喇叭取代的鼓（第 2 节）。表6中的值。

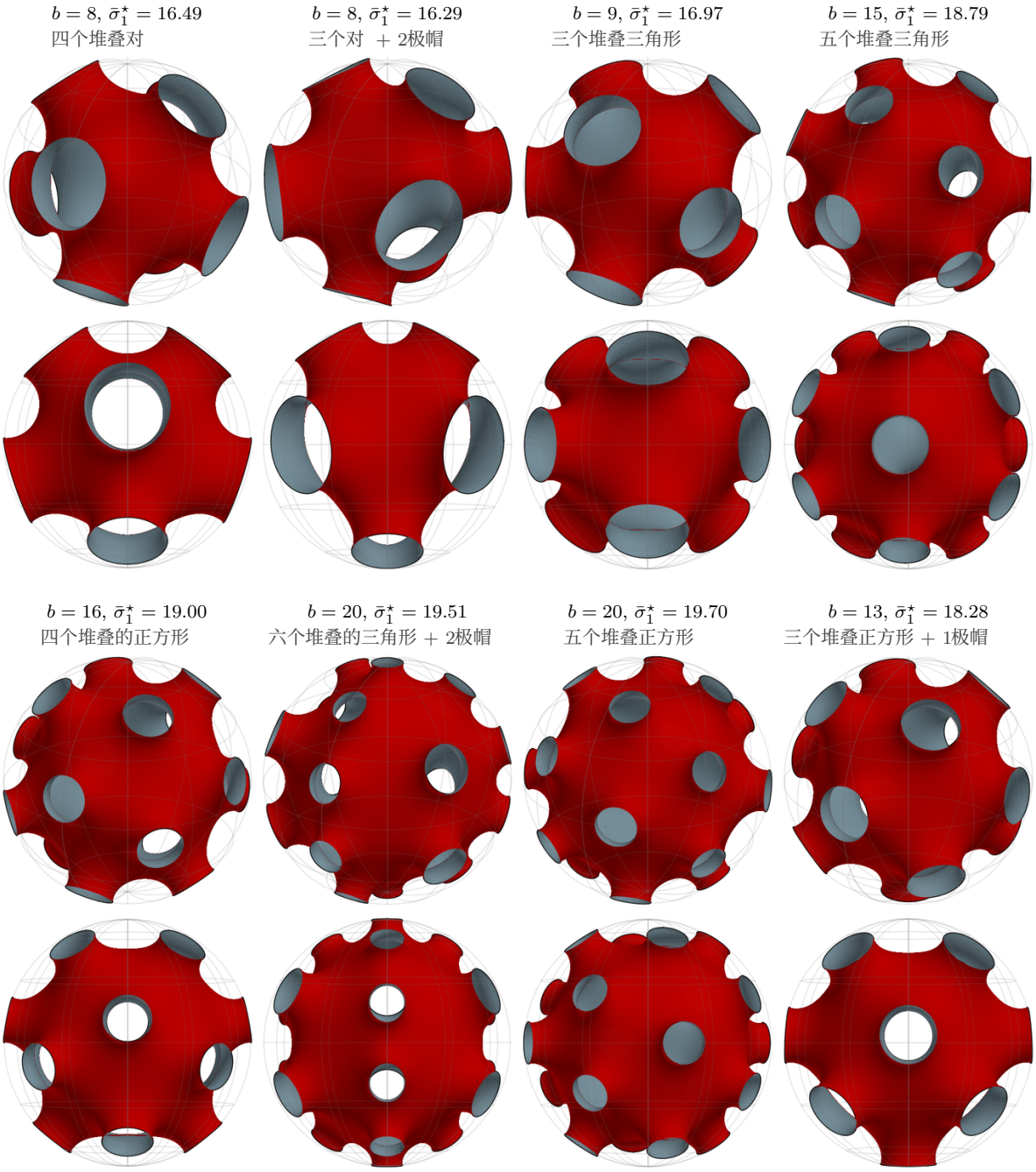

FIGURE 12. 堆叠纬向环，可带或不带极帽（极帽）（第 5.2节）。如$j \to \infty$， m 环似乎会收敛为鼓形堆叠、 $m-1$ 两端各由圆盘封闭的悬链面环带，或者在存在极帽时由喇叭封闭的悬链面环带（第2节）。表 6 中的值。

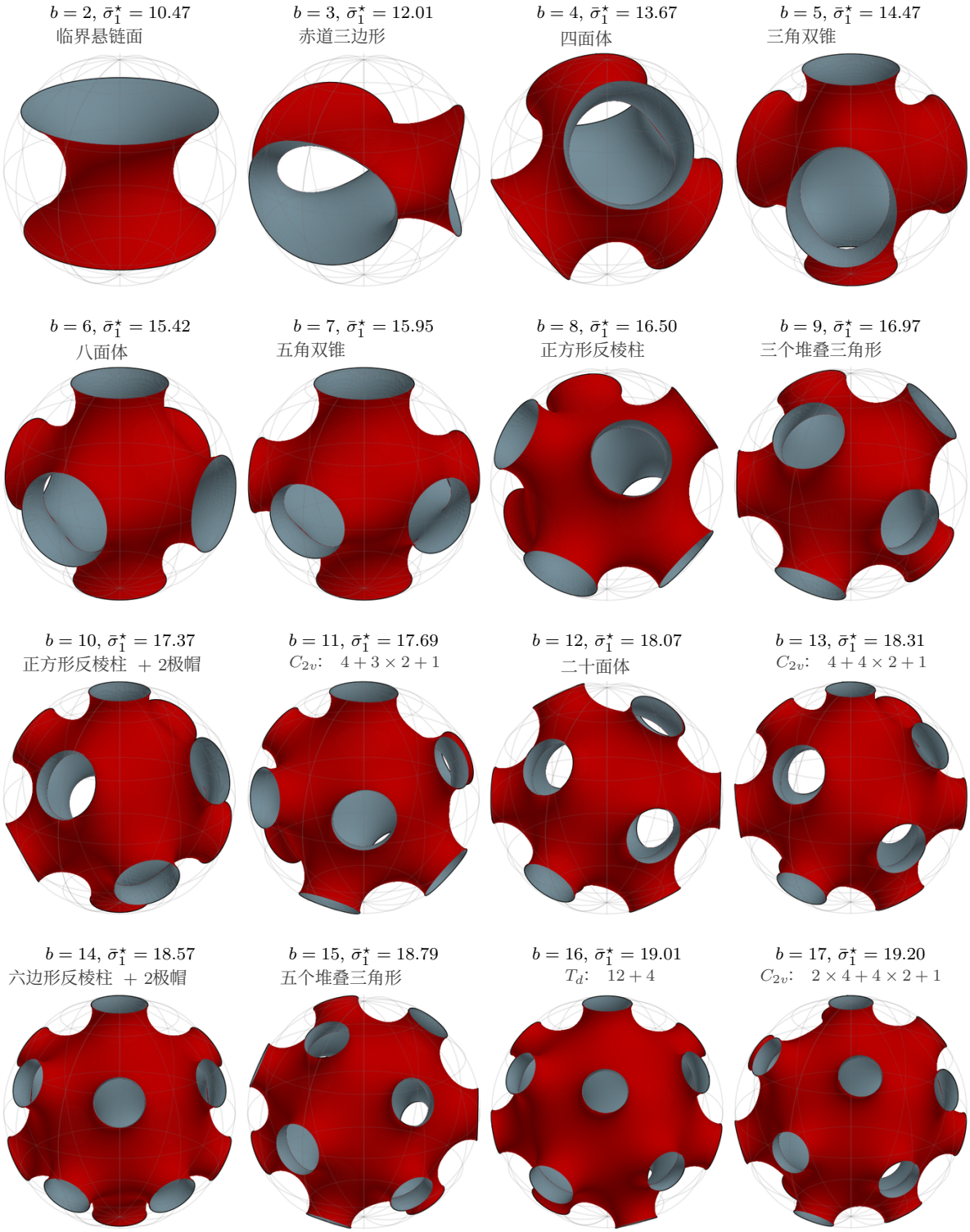

FIGURE 13. 每个 $b = 2$、.....、17（第 5.3节，表 3）：曲面的斜视图 $X^\star(\Omega) \subset \mathbb{B}^3$，黑色为边界圆。每个名称都链接到动物园中的曲面。

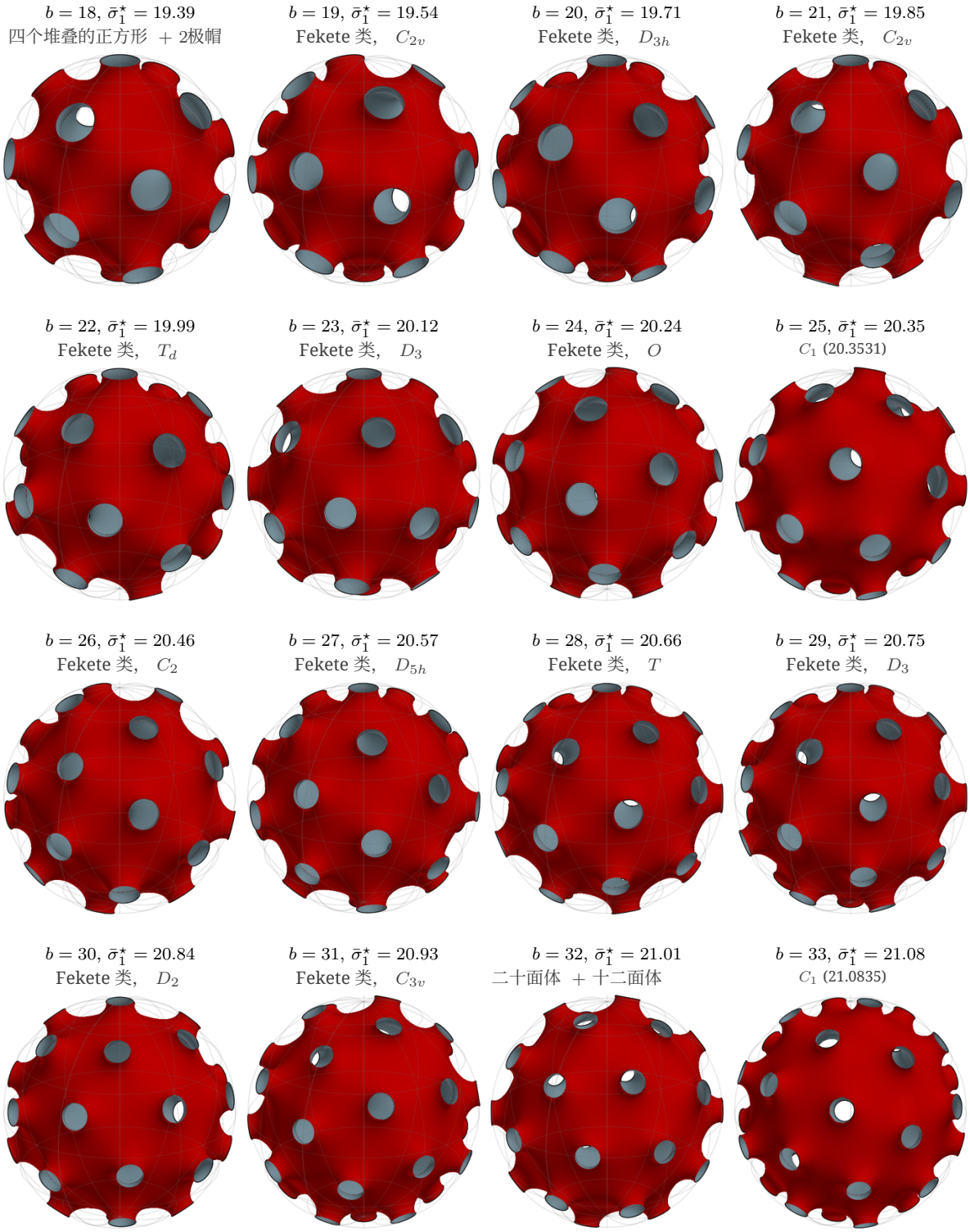

FIGURE 14. 每个 $b = 18, \ldots, 33$（第 5.3 节，表 3）：曲面的斜视图 $X^\star(\Omega) \subset \mathbb{B}^3$，黑色表示边界圆。每个名称都链接到动物园中的曲面。

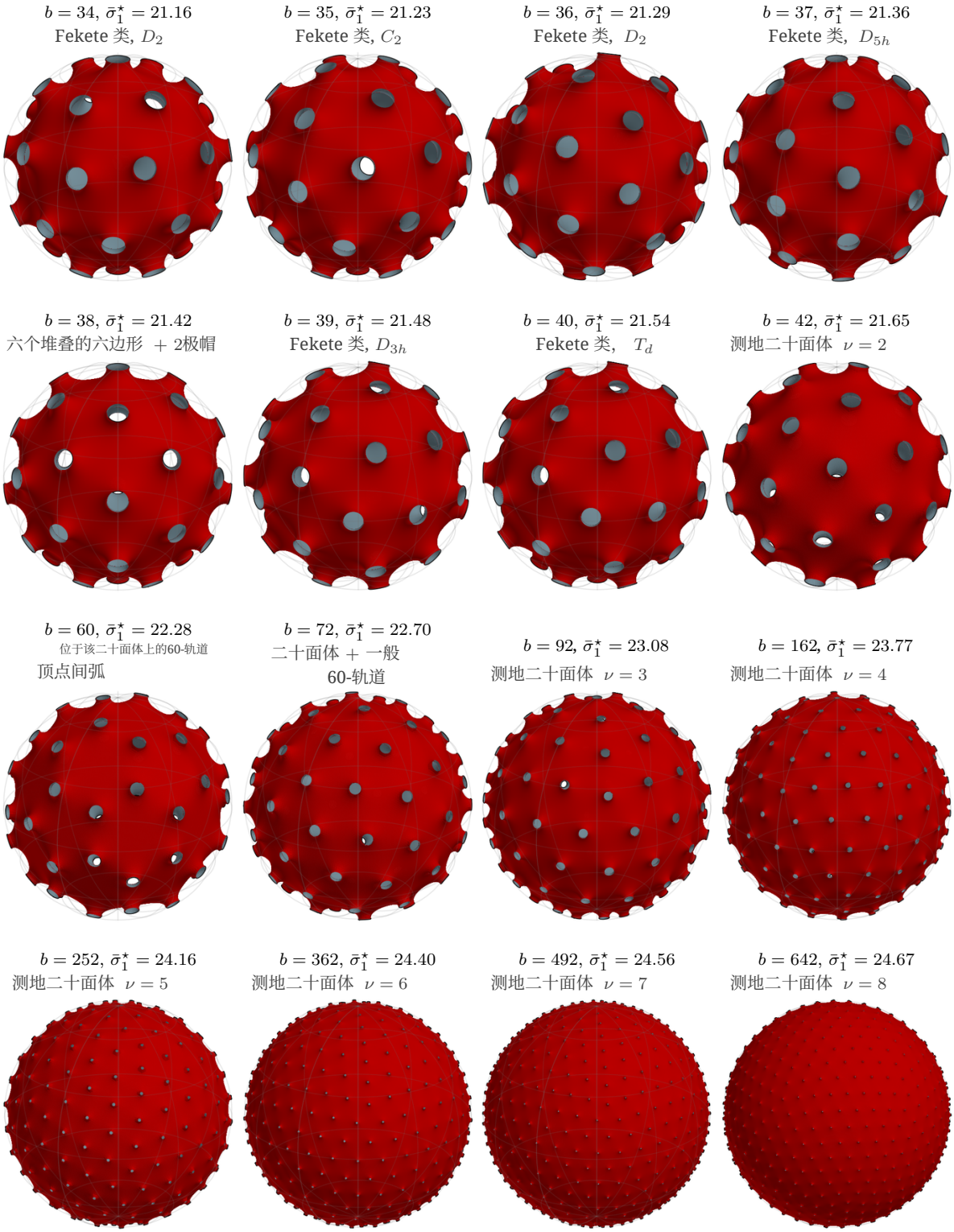

FIGURE 15. 每个 b 使用 $34 \le b \le 642$ （第 5.3节，表 3）找到的最佳构型：曲面的 $X^\star(\Omega) \subset \mathbb{B}^3$斜视图，边界圆以黑色显示。每个名称都链接至动物园中的该曲面。

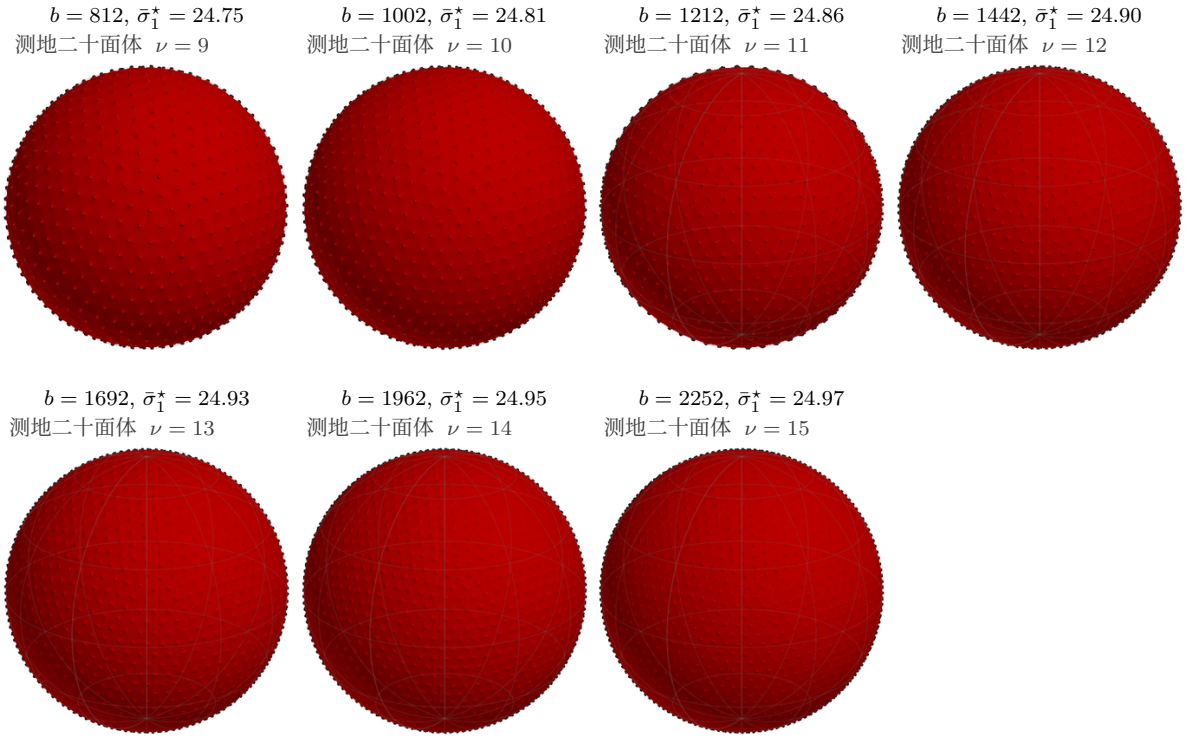

FIGURE 16. 每个 b 使用 $812 \le b \le 2252$ （第 5.3节，表 3）计算得到的最佳构型：曲面 $X^\star(\Omega) \subset \mathbb{B}^3$的斜视图，边界圆以黑色显示。每个名称都链接到动物园中的相应曲面。图 $b = 2252$ 1 展示了带有

TABLE 6. 动物园目录：按族（第5.2–5.5节）列出的经认证临界点；每个族内按 b和数值递减排列。各列分别给出结果的对称群、 $\bar{\sigma}_1^\star$ （斜体表示该 b的最佳值）、莫尔斯指标（第5.5节；未计算处以短横线标示）、残差 $\mathcal{K}$ （34式）的数量级，按 $-\log_{10}\mathcal{K}$ 向下取整，因此条目 n 表示 $\mathcal{K}\le 10^{-n}$，以及曲面的图。每个曲面只列出一次，归在能够得到它的最受限类别之下。在类别名称中， ν 表示测地二十面体的频率，“3个三角形”表示三个堆叠三角形。每个类别名称都链接到代码仓库 [CO26b]中的相应数据文件夹。

b	类别	sym	$\bar{\sigma}_1^\star$	指标	$-\log_{10}\mathcal{K}$	图
多面体构型						
4	四面体	T_d	*13.66761484*	0	13	13
6	八面体	O_h	*15.42492045*	0	9	13
8	立方体	O_h	16.42485423	2	12	6
12	二十面体	I_h	*18.06871939*	0	12	13
20	十二面体	I_h	19.57267499	8	12	6
30	二十面十二面体	I_h	20.73171822	11	12	6
32	二十面体 + 十二面体	I_h	*21.01400764*	0	12	14
60	60-轨道 on edge arcs	I_h	*22.28356339*	28	12	15
72	二十面体 + 一般60轨道	I	*22.69609123*	0	11	15
72	二十面体 + 镜面上的60-轨道 arcs	I_h	22.57754557	–	9	–
测地二十面体						
42	$\nu=2$	I_h	*21.64565725*	0	11	15
92	$\nu=3$	I_h	*23.07686419*	0	10	15
92	$\nu=3$，鞍点	I_h	22.99638099	50	11	–
162	$\nu=4$	I_h	*23.77221789*	0	9	15
162	$\nu=4$，鞍点	I_h	23.75163737	52	10	–
252	$\nu=5$	I_h	*24.16173249*	0	8	15
362	$\nu=6$	I_h	*24.40228582*	0	9	15
492	$\nu=7$	I_h	*24.56163111*	0	8	15
642	$\nu=8$	I_h	*24.67287741*	0	8	15
812	$\nu=9$	I_h	*24.75377466*	–	9	16
1002	$\nu=10$	I_h	*24.81454590*	–	9	16
1212	$\nu=11$	I_h	*24.86142450*	–	9	16
1442	$\nu=12$	I_h	*24.89839157*	–	9	16
1692	$\nu=13$	I_h	*24.92808940*	–	9	16
1962	$\nu=14$	I_h	*24.95232944*	–	9	16
2252	$\nu=15$	I_h	*24.97238832*	–	8	16
赤道族						
3	赤道三边形	D_{3h}	*12.01198922*	0	9	13
4	赤道四边形	D_{4h}	12.42990413	1	13	7
5	赤道五边形	D_{5h}	12.53139727	2	12	7
6	赤道六边形	D_{6h}	12.55681968	3	12	7
7	赤道七边形	D_{7h}	12.56361680	4	12	7
8	赤道八边形	D_{8h}	12.56554312	5	11	7
9	赤道九边形	D_{9h}	12.56611415	6	12	7
10	赤道十边形	D_{10h}	12.56628924	7	10	7
11	赤道十一边形	D_{11h}	12.56634432	8	10	–
12	赤道十二边形	D_{12h}	12.56636200	9	11	–
13	赤道十三边形	D_{13h}	12.56636776	–	10	–
14	赤道十四边形	D_{14h}	12.56636966	–	9	–
15	赤道十五边形	D_{15h}	12.56637029	–	10	–
16	赤道十六边形	D_{16h}	12.56637050	–	9	–
18	赤道十八边形	D_{18h}	12.56637060	–	9	–
20	赤道二十边形	D_{20h}	12.56637061	–	9	–
棱锥						
2	对跖点对	$D_{\infty h}$	*10.47478066*	0	13	13
5	四棱锥	C_{4v}	14.43163401	1	13	8
6	五边形棱锥	C_{5v}	14.81894243	2	12	8
7	六边形棱锥	C_{6v}	15.04160665	3	13	8
8	七边形棱锥	C_{7v}	15.18338502	4	12	8
9	八棱锥	C_{8v}	15.28070739	5	12	8
10	九边形底棱锥	C_{9v}	15.35132872	6	12	–
11	十边形底棱锥	C_{10v}	15.40477635	7	12	–
12	十一边形底棱锥	C_{11v}	15.44657189	8	12	–
13	十二棱锥	C_{12v}	15.48011866	9	10	8
14	十三边形底棱锥	C_{13v}	15.50762152	10	11	–
15	十四边形底棱锥	C_{14v}	15.53056857	11	11	–
16	十五棱锥	C_{15v}	15.54999901	12	12	–
17	16边形棱锥	C_{16v}	15.56665978	13	11	8
21	20边形棱锥	C_{20v}	15.61479310	17	10	8
双棱锥						
5	三角形的双锥	D_{3h}	*14.46866597*	0	12	13
7	五边形的双锥	D_{5h}	*15.95213199*	0	12	13
8	六边形双锥	D_{6h}	16.27617583	3	12	9
9	七边形双锥	D_{7h}	16.49293784	4	10	–
10	八边形双锥	D_{8h}	16.64732271	5	12	9
11	九角双锥	D_{9h}	16.76257176	6	9	–
12	十角双锥	D_{10h}	16.85176711	7	12	–
18	16边形双锥	D_{16h}	17.13368319	13	12	9
20	18边形双锥	D_{18h}	17.18276531	15	11	9
26	24边形双锥	D_{24h}	17.27812713	21	12	9
32	30边形双锥	D_{30h}	17.33359467	–	11	9

b	类别	sym	$\bar{\sigma}_1^\star$	指标	$-\log_{10}\mathcal{K}$	图
棱柱						
6	三棱柱 D_{3h}		15.12598742	1	13	10
7	三棱柱 + 1PC	C_{3v}	15.45115152	3	12	10
8	三棱柱 + 2PC	D_{3h}	15.68321560	3	12	10
9	四棱柱 + 1PC	C_{4v}	16.84599277	1	11	–
10	四棱柱 + 2PC	D_{4h}	17.16125175	3	12	–
10	五棱柱	D_{5h}	17.15927759	3	13	10
11	五棱柱 + 1极帽	C_{5v}	17.64159745	3	13	–
12	五棱柱 + 2极帽	D_{5h}	18.00475200	1	12	–
12	六棱柱	D_{6h}	17.62680627	5	12	–
13	六棱柱 + 1极帽	C_{6v}	18.15187720	4	12	–
14	六棱柱 + 2极帽	D_{6h}	18.54537110	2	12	–
14	七棱柱	D_{7h}	17.94983940	9	12	10
15	七棱柱 + 1极帽	C_{7v}	18.50736333	7	12	–
16	七棱柱 + 2极帽	D_{7h}	18.92222890	5	12	–
16	八棱柱	D_{8h}	18.18597888	11	12	–
17	八棱柱 + 1PC	C_{8v}	18.76949374	9	12	–
18	八棱柱 + 2PC	D_{8h}	19.20077284	7	12	–
18	九棱柱	D_{9h}	18.36581718	13	12	10
19	九棱柱 + 1PC	C_{9v}	18.97080398	11	12	–
20	九棱柱 + 2PC	D_{9h}	19.41539505	11	12	10
21	十角棱柱 + 1PC	C_{10v}	19.13021129	13	12	–
23	十一棱柱 + 1PC	C_{11v}	19.25951094	15	12	–
反棱柱						
7	三角形的反棱柱 + 1极帽	C_{3v}	15.91577614	2	12	11
8	正方形反棱柱	D_{4d}	*16.49540952*	0	12	13
9	正方形反棱柱 + 1极帽	C_{4v}	16.96874135	1	12	–
10	正方形反棱柱 + 2极帽	D_{4d}	*17.37203030*	0	12	13
10	五边形反棱柱	D_{5d}	17.17571147	2	13	11
11	五边形反棱柱 + 1极帽	C_{5v}	17.67481751	2	12	–
12	六边形反棱柱	D_{6d}	17.63066847	6	12	–
13	六边形反棱柱 + 1极帽	C_{6v}	18.16106926	3	12	–
14	六边形反棱柱 + 2极帽	D_{6d}	*18.56544315*	0	12	13
14	七边形反棱柱	D_{7d}	17.95076062	8	12	–
15	七边形反棱柱 + 1极帽	C_{7v}	18.50995876	6	12	–
16	七边形反棱柱 + 2极帽	D_{7d}	18.92868081	4	12	–
16	八边形反棱柱	D_{8d}	18.18620192	10	12	–
17	八边形反棱柱 + 1极帽	C_{8v}	18.77023943	8	12	–
18	八边形反棱柱 + 2极帽	D_{8d}	19.20288658	8	12	–
18	九边形反棱柱	D_{9d}	18.36587192	12	12	–
19	九边形反棱柱 + 1极帽	C_{9v}	18.97102138	10	11	11
20	九边形反棱柱 + 2极帽	D_{9d}	19.41609831	10	12	–
20	十边形反棱柱	D_{10d}	18.50715415	14	12	–
21	十边形反棱柱 + 1极帽	C_{10v}	19.13027544	12	12	–
22	十边形反棱柱 + 2极帽	D_{10d}	19.58618325	12	12	–
22	11边形反棱柱	D_{11d}	18.62100292	16	12	–
23	11边形反棱柱 + 1极帽	C_{11v}	19.25953007	14	12	–
24	11边形反棱柱 + 2极帽	D_{11d}	19.72483665	14	11	–
24	12边形反棱柱	D_{12d}	18.71461596	18	11	–
26	12边形反棱柱 + 2极帽	D_{12d}	19.83995001	16	11	–
26	十三边反棱柱	D_{13d}	18.79289896	20	11	–
27	十三边反棱柱 + 1极帽	C_{13v}	19.45635380	18	12	–
28	十三边反棱柱 + 2极帽	D_{13d}	19.93700822	18	11	–
28	十四边形反棱柱	D_{14d}	18.85930278	–	12	–
29	十四边形反棱柱 + 1极帽	C_{14v}	19.53295856	20	12	–
30	十四边形反棱柱 + 2极帽	D_{14d}	20.01992869	20	11	–
30	15边形反棱柱	D_{15d}	18.91632175	–	11	–
31	15边形反棱柱 + 1极帽	C_{15v}	19.59900546	22	12	–
32	15边形反棱柱 + 2极帽	D_{15d}	20.09157846	–	11	–
32	16边形反棱柱	D_{16d}	18.96580166	–	12	–
33	16边形反棱柱 + 1极帽	C_{16v}	19.65652786	–	11	–
34	16边形反棱柱 + 2极帽	D_{16d}	20.15410172	–	11	11
35	十七边形反棱柱 + 1极帽	C_{17v}	19.70707031	–	11	10
37	十八边形反棱柱 + 1极帽	C_{18v}	19.75182665	–	11	–
39	十九边形反棱柱 + 1极帽	C_{19v}	19.79173390	–	11	–
40	十九边形反棱柱 + 2极帽	D_{19d}	20.30151860	–	11	–

b	类别	sym	$\bar{\sigma}_1^\star$	指标	$-$对数$_{10}\mathcal{K}$	图。
40	20边形反棱柱	D_{20d}	19.11187927	–	11	11
42	20边形反棱柱 + 2极帽	D_{20d}	20.34066584	32	11	–
堆叠纬向环						
7	四元组 + 对 + 1极帽	C_{2v}	15.91819689	1	10	–
7	四元组 + 极向对 + 1极帽	C_{2v}	15.46032046	2	13	–
8	4 对	D_{2d}	16.49051351	1	12	12
8	三个对 + 2极帽	D_{2d}	16.29009761	1	12	12
8	四元组 + 对 + 2极帽	C_{2v}	16.28575637	2	9	–
8	四元组 + 两个对，交错排列	C_{2v}	15.71150575	3	12	–
8	四元组 + 两个对	C_{2v}	15.68321410	4	9	–
9	3个三角形	D_{3h}	*16.97069066*	0	13	13
10	3个三角形 + 1极帽	C_{3v}	17.36763805	2	13	–
11	3个三角形 + 2极帽	D_{3h}	17.67498004	2	12	–
12	3个正方形	O_h	17.97506201	4	12	6
13	3个正方形 + 1极帽	C_{4v}	18.28105516	3	12	12
14	3个正方形 + 2极帽	O_h	18.55117279	3	12	–
15	5 个三角形	D_{3h}	*18.79339513*	0	12	13
15	3 个五边形	D_{5h}	18.70485004	4	12	–
16	4 个正方形	D_{4d}	19.00297008	0	9	12
16	3 个五边形 + 1PC	C_{5v}	18.96676603	2	12	–
17	3 个五边形 + 2PC	D_{5h}	19.20095197	2	12	–
18	4个正方形 + 2极帽	D_{4d}	*19.38539453*	0	9	14
18	6个三角形	D_{3d}	19.33709715	1	12	–
18	3个六边形	D_{6h}	19.24666524	6	12	–
19	3个六边形 + 1极帽	C_{6v}	19.49029702	3	11	–
20	3个六边形 + 2极帽	D_{6h}	19.70418876	1	12	–
20	5个正方形	D_{4h}	19.70374025	2	10	12
20	4 个五边形	D_{5d}	19.65221836	6	12	–
20	6 个三角形 + 2极帽，alt.	D_{6h}	19.60976866	4	12	–
20	6 个三角形 + 2极帽	D_{3h}	19.50838431	9	11	12
21	3 个七边形	D_{7h}	19.65480708	8	12	–
22	4个五边形 + 2PC	D_{5d}	19.99205479	0	12	–
22	3个七边形 + 1极帽	C_{7v}	19.89228042	4	12	–
23	3个七边形 + 2PC	D_{7h}	20.09724473	2	11	–
24	6个正方形	D_{4d}	20.24291718	1	9	–
24	4个六边形	D_{6d}	20.15142930	8	12	–
25	5个五边形	D_{5h}	20.32141112	6	12	–
25	3 八边形 + 1极帽	C_{8v}	20.20538352	8	12	–
26	4 六边形 + 2极帽	D_{6d}	20.45390415	6	12	–
26	6 正方形 + 2极帽	D_{4d}	20.45211659	3	11	–
26	6 正方形 + 2极帽	D_{4h}	20.41219517	6	12	–
27	3 九边形	D_{9h}	20.21668512	12	12	–
28	4 个七边形	D_{7d}	20.54757463	8	12	–
28	4 个七边形	D_{7h}	20.49466892	11	11	–
28	3 个九边形 + 1极帽	C_{9v}	20.45393289	10	12	–
29	3 个九边形 + 2极帽	D_{9h}	20.65478913	10	11	–
30	6 个五边形	D_{5d}	20.82752606	4	11	–
30	5 个六边形	D_{6h}	20.51696912	15	12	–
32	6个五边形 + 2PC	D_{5h}	20.98446690	3	10	–
33	3个十一边形	D_{11h}	20.58014530	20	10	–
34	4个八边形 + 2极帽	D_{8d}	21.12308897	–	11	–
34	3个十一边形 + 1极帽	C_{11v}	20.82083077	–	11	–
35	3 十一边形 + 2极帽	D_{11h}	21.02271261	–	11	–
35	5 七边形	D_{7h}	20.99936713	–	12	–
36	6 六边形	D_{6d}	21.25608219	–	10	–
38	6 六边形 + 2极帽	D_{6d}	*21.42213538*	0	11	15
38	6 六边形 + 2极帽	D_{6h}	20.99346879	–	11	–
39	3个13边形	D_{13h}	20.83311527	–	10	–
40	5个八边形	D_{8h}	21.36190951	–	11	–
40	4个十边形	D_{10d}	21.33356007	–	11	–
40	4个十边形	D_{10h}	21.32737717	–	11	–
40	3个13边形 + 1极帽	C_{13v}	21.07732753	–	11	–
49	3个16边形 + 1极帽	C_{16v}	21.34327300	–	11	–
61	3 20边形 + 1极帽	C_{20v}	21.57466863	–	11	–
费克特构型的类别						
19	Fekete 类	C_{2v}	*19.54459459*	0	11	14
19	Fekete 类	C_{2v}	19.53616762	2	11	–
20	Fekete 类	D_{3h}	*19.70770682*	0	12	14
21	Fekete 类	C_{2v}	*19.85473178*	0	12	14
22	Fekete 类	T_d	*19.99354385*	0	12	14
22	Fekete 类	T_d	19.70178848	10	12	–
23	Fekete 类	D_3	*20.11635049*	0	12	14
24	Fekete 类	O	*20.24322425*	0	12	14
25	Fekete 类	C_s	20.35311125	1	11	–
26	Fekete 类	C_2	*20.46172826*	0	12	14
27	Fekete 类	D_{5h}	*20.56911733*	0	12	14
28	Fekete 类	T	*20.66487632*	0	12	14
29	Fekete 类	D_3	*20.75364318*	0	11	14
30	Fekete 类	D_2	*20.84340804*	0	12	14
31	Fekete 类	C_{3v}	*20.92777889*	0	11	14
31	Fekete 类	C_{3v}	20.91628299	4	11	–
31	Fekete 类	C_{3v}	20.90244106	8	11	–
33	Fekete 类	C_s	21.08353676	1	11	–
34	Fekete 类	D_2	*21.15725596*	0	12	15
35	Fekete 类	C_2	*21.22645244*	0	11	15
36	Fekete 类	D_2	*21.29451111*	1	12	15
37	Fekete 类	D_{5h}	*21.35998448*	0	12	15
37	Fekete 类	D_{5h}	21.19166865	–	11	–
39	Fekete 类	D_{3h}	*21.48308018*	0	11	15
39	Fekete 类	D_{3h}	21.47271751	–	12	–
39	Fekete 类	D_{3h}	21.42573429	–	11	–
39	Fekete 类	D_{3h}	21.33182995	–	11	–
40	Fekete 类	T_d	*21.54113373*	0	11	15
40	Fekete 类	T_d	21.49406074	–	12	–
40	Fekete 类	T_d	21.41215845	–	11	–
40	Fekete 类	T_d	21.27170505	–	11	–
其他构型						
8	C_s: $3\times2+2\times1$	C_s	16.28141689	2	12	–

b	类别	sym	$\bar{\sigma}_1^\star$	指标	$-$日志$_{10}\mathcal{K}$	图
8	C_s: $3\times2+2\times1$	C_s	16.28123654	3	12	–
9	C_{2v}: $4+2\times2+1$	C_{2v}	16.84081989	2	12	–
9	C_s: $3\times2+3\times1$	C_s	16.82240540	2	12	–
9	C_s: $4\times2+1$	C_s	16.82238669	3	12	–
9	C_{3v}: 3×3	C_{3v}	16.61110182	3	13	–
9	C_{3v}: $6+3$	C_{3v}	16.53610663	3	12	–
9	C_{3v}: 3×3	C_{3v}	16.52295783	4	12	–
9	D_{3h}: $6+3$	D_{3h}	15.95465009	4	12	–
9	C_s: $4\times2+1$	C_s	15.86332538	4	12	–
9	C_s: $3\times2+3\times1$	C_s	15.86294017	5	12	–
10	C_{2v}: $4+3\times2$	C_{2v}	17.36797545	1	11	–
10	C_{3v}: $6+3+1$	C_{3v}	17.27786230	1	11	–
10	C_{2v}: $4+3\times2$	C_{2v}	17.27686572	2	12	–
10	C_s: $4\times2+2\times1$	C_s	17.23495171	2	12	–
10	C_s: $3\times2+4\times1$	C_s	17.23495080	3	11	–
10	D_{2h}: $2\times4+2$	D_{2h}	17.16802835	3	12	–
10	C_{2v}: $4+3\times2$	C_{2v}	17.05834704	3	12	–
10	C_{2v}: $2\times4+2$	C_{2v}	17.05777516	4	12	–
10	C_{3v}: $6+3+1$	C_{3v}	16.85130687	3	12	–
10	C_s: $4\times2+2\times1$	C_s	16.85123562	4	12	–
10	C_{3v}: $3\times3+1$	C_{3v}	16.80405847	5	12	–
10	T_d: $6+4$	T_d	16.80346515	6	12	–
10	C_s: $4\times2+2\times1$	C_s	16.69741899	4	12	–
10	C_s: $4\times2+2\times1$	C_s	16.69741644	5	11	–
10	C_{2v}: $4+3\times2$	C_{2v}	16.08800759	5	12	–
10	C_{3v}: $3\times3+1$	C_{3v}	16.07906572	6	10	–
10	C_{2v}: $2\times4+2$	C_{2v}	15.97690925	5	12	–
10	C_{2v}: $4+3\times2$	C_{2v}	15.97416080	6	12	–
11	C_{2v}: $4+3\times2+1$	C_{2v}	*17.69115333*	0	12	13
11	C_s: $4\times2+3\times1$	C_s	17.68970529	1	11	–
12	D_{3h}: 2×6	D_{3h}	17.99436595	1	11	–
12	C_{2v}: $2\times4+2+2\times1$	C_{2v}	17.97511342	2	12	–
12	C_s: $5\times2+2\times1$	C_s	17.95180696	2	10	–
12	C_s: $4\times2+4\times1$	C_s	17.92628595	3	10	–
13	C_{2v}: $4+4\times2+1$	C_{2v}	*18.30638945*	0	12	13
16	T_d: $12+4$	T_d	*19.00885253*	0	12	13
17	C_{2v}: $2\times4+4\times2+1$	C_{2v}	*19.20121924*	0	12	13
19	C_2: $9\times2+1$	C_2	19.54328806	1	11	–
19	C_{2v}: $2\times4+5\times2+1$	C_{2v}	19.54218732	1	11	–
25	C_1(20.3531)	C_1	*20.35311176*	0	11	14
33	C_1(21.0835)	C_1	*21.08353796*	0	11	14