arXiv:2611.31946v1 [math.RT] 24 Nov 2026

实加权箭图的 g-扇的有限性与完备性

RYOTA AKAGI 和 TOSHIYA YURIKUSA

Abstract. 我们研究带正实权箭图的 g-扇的有限性与完备性。我们通过以下条件刻画有限 Coxeter 型：变异类中的每个权都具有 $2\cos(\pi/m)$ 的形式，其中 $m \geq 3$ 为某个整数。在总符号相容性的假设下，我们进一步证明，若一个箭图只有有限多个 g-簇，则它是 2-有限的，也就是说，其变异类中的每个权都小于 2。这也为“ g-有限性蕴含有限 Coxeter 型”提供了一种新的证明。进一步假设，对于变异类中的每个初始箭图，坐标轴上的每个c-向量都是带符号标准基向量，我们证明， g-扇完备当且仅当存在有限多个 g-簇。主要几何结果表明，每个 g-锥的坐标投影都包含于相应满子箭图的一个 g-锥中。因此，完备性和稠密性可传递到满子箭图。

1. Introduction

簇代数由 Fomin 和 Zelevinsky 引入 [FZ02] ，旨在为研究量子群中的 Lusztig 典范基和全正性提供一个组合框架。自诞生以来，簇结构已在众多数学领域中被发现，包括表示论、代数几何和可积系统。

簇代数理论的核心是簇模式，这是一种归纳系统，用于产生称为簇变量的特殊生成元。簇模式由种子组成，这些种子通过一种称为突变的基本操作进行变换。虽然簇变量最初是研究的主要对象，但 Fomin 和 Zelevinsky [FZ07] 引入了 c-向量和g-向量，以捕捉种子突变所蕴含的离散信息和组合信息。后续发展揭示了，这些向量支配着簇模式的结构行为，并且与根系具有深刻的类比关系。

例如，每个 c-向量都具有符号相容性；也就是说，其所有非零条目具有相同的符号 [GHKK18]。此外，每个种子中的 g-向量张成一个单纯锥，而这些锥及其面共同构成 g-扇，从而为簇复形提供了一个几何实现 [GHKK18，Rea14]。在斜对称情形下， c-向量自然地表现为穿过极大锥各个面的、指向内侧的法向量 [NZ12]。

特别是， g扇本身展现出丰富的组合结构和几何结构。在普通的（整数）簇代数中，它们被视为 Weyl 室结构的类似物。例如，对于某些类别， g扇可通过取相应 Weyl 室结构中的若干室的并得到 [RS16，RS18]。此外， g扇还给出了有限型的如下刻画：簇代数是有限型，当且仅当g扇是完备的，即覆盖整个空间 $\mathbb{R}^n$ [Nak26，Yur25]。

尽管突变公式传统上是为整数矩阵定义的，但交换矩阵、 c-向量和 g-向量的突变公式对于含有实数条目的矩阵仍然是定义良好的。近年来

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号 13F60；次要分类号 20F55。*Key words and phrases.* 实加权箭图、突变、 g-向量扇、符号相容性、Coxeter 箭图。

，一些作者已将簇代数框架扩展到这一实值设定。Lampe [Lam18]在非结晶根系的背景下研究了这一推广。随后，Duffield 和 Tumarkin [DT24、DT25] 通过加权折叠技术实现了非结晶类型的 c-向量和 g-向量。从箭图突变的几何实现角度来看，Felikson 和 Tumarkin [FT19] 构造了带有实权的秩 3 箭图突变的几何模型。利用这些实现，Felikson 和 Lampe [FL23]研究了任意秩有限型非整数箭图的交换图。此外，Felikson 和 Tumarkin [FT23] 给出了带有实权的突变有限箭图的完整分类，其中包括许多不属于经典理论的例子。

Akagi 和 Chen 在 [AC25] 中进一步发展了这一框架， c通过研究满足符号相容性假设的 g- 向量。与经典簇代数情形的一个根本区别在于，对于实值矩阵，符号相容性并非普遍成立。然而，在限制于符号相容的情形后，他们证明有限型可由任意有限 Coxeter 图分类。这自然推广了 Fomin 和 Zelevinsky [FZ03]在整数上的经典分类。

本文将有限型簇代数的关键结构定理推广到实值情形。具体而言，我们的主要目标是在这一推广框架内建立有限型的组合刻画，并证明相应 g-扇的完备性。

我们的结果分为两部分。第一部分只涉及权。若一个加权箭图的变异类中每个权都小于 2，我们称其为 2-有限。有限 Coxeter 箭图具有这一性质，但对于任意实权，连通的 2-有限箭图未必与有限 Coxeter 箭图变异等价。因此，我们考虑*DB2*-性质：每个小于 2 的权都具有如下形式

$$2\cos\left(\frac{\pi}{m}\right) \qquad \text{for some } m \in \mathbb{Z}_{\geq 3}.$$

这一性质的动机来自秩 2 分类。在 [AC25], 中，他们证明了，对于秩为 2 的初始交换箭图c, 与之关联的每个向量 Q 当且仅当Q 具有 DB2-性质时，才是符号相容的。因此，对于任意秩，DB2-性质都是符号相容的必要条件。然而，正如例3.9所示，这一条件并不充分。

所谓全 *DB2* 性质，是指这一条件在整个变异类中均成立。在此条件下，我们得到 [FZ03]中有限型判据的如下推广。

定理 A （定理2.4）。设 Q 是一个具有全 *DB2* 性质的连通加权箭图。那么， Q是2-有限，当且仅当它与某个有限 *Coxeter* 箭图变异等价。

若一个箭图只有有限多个 g簇，我们就称它为 g-有限。这里，完全 SC 性质是指：对于变异类中的每个初始箭图，所有 c向量都符号相容，并且每个种子中的 g向量都位于同一个闭正交象限。于是，在完全 SC 性质下，我们得到如下关于 g有限性的刻画。

定理 B (定理3.13)。 设 Q 是具有完全 *SC* 性质的加权箭图。那么，以下条件等价。

(1) Q是 g-有限的；(2) Q是2-有限的；(3) Q 的每个连通分支都与某个有限 *Coxeter* 箭图变异等价。

蕴含关系 (3) $\Rightarrow$(1) 由 [AC25中的定理 8 得出。2], 该定理表明，在完全 SC 性质下，(3) 成立，当且仅当 Q 的变异类中的每个箭图都是 g有限的。

证明这一有限性条件蕴含 (3) 所使用的是 [FT23]中对变异有限箭图的分类。本文仅通过证明 (1) ⇒(2)，在命题 3.12 中直接完成证明，然后应用定理 A ，从而由 (2) ⇒(3) 得出 g 有限性。

第二部分讨论 g向量和 g扇的几何性质。为构造 g扇并给出改变初始种子的公式，我们采用假设 1：完全 SC 性质，以及对于变异类中的每个初始箭图，每个坐标轴上的 c向量都是带符号标准基向量。

如果一个箭图的 g扇覆盖整个环境空间，我们就称该箭图为 g完备。对于整数斜对称可 symmetrizable 交换矩阵，已有结果表明，有限型等价于 g扇的完备性 [Nak26、Yur25]。我们在假设1下推广这一结论。

定理 C (定理4.17)。设 Q 是满足假设*1*的加权箭图。则以下条件等价：

(1) Q是 g有限的；
(2) Q是 g完备的。

根据定理 B，这些条件也等价于 Q的每个连通分支都变异等价于一个有限 Coxeter 箭图。

证明中的关键步骤是以下限制定理。对于非空子集$I \subseteq Q_0$，记 Q_I 为在 I 上的满子箭图，并记 $\pi_I : \mathbb{R}^{Q_0} \to \mathbb{R}^I$ 为坐标投影。

定理 D （命题4.13和定理4.14）。设 Q 满足假设 *1*。对于每个 g-锥 C，其中 Q，存在一个 g-锥 σ，其中 Q_I，使得 $\pi_I(C) \subseteq \sigma$。因此， g-扇的完备性和稠密性可由 Q 传递到 Q_I。

对于整数交换矩阵，定理 D 中的包含关系在 [CL20中证明；该证明将定理 8] 作为 [Mul16，定理 33]的推论。他们最初的证明依赖于 [GHKK18], 提出的簇散射图，而目前这一方法并不适用于我们的广义情形。相比之下，我们给出了一种替代证明，该证明依赖于 [NZ12], 提出的初始箭图变异公式，该公式在本文中作为引理 4.7 引用。为了证明定理 D，我们首先证明，投影后的 g-锥的内部不能与较小扇的一面墙相交。随后，我们沿着一条从初始锥出发的变异序列跟踪该投影锥，并证明它在每一步都保持在较小扇的同一个锥内，或移入一个相邻的锥。该论证不假设任一扇是完备的或局部有限的。结合 g-完备性的不变性以及秩 2 情形，将定理 D 应用于两个顶点可知， g- 完备箭图在突变下不可能产生权至少为 2 的箭。定理 A继而推出定理 C。

本文的结构如下。第2 节介绍 2-有限性和 DB2-性质。第3 节阐述它们与符号相容性及 g-有限性的关系。第4节证明限制 theorem 以及 g-有限性与 g-完备性之间的等价性。权分类将在第5节中证明。

2. Weighted quivers and 2-finiteness

2.1节。**带权箭图与突变**。在本文中，我们固定一个正整数$n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$，称其为秩。加权箭图是一个具有 n个顶点且不含环、二环或多重箭的箭图，其中每个箭头都赋予一个正实权。为简便起见，我们通常将加权箭图简称为箭图。设 Q 为一个加权箭图。我们将其顶点集记为 Q_0，并称 $|Q_0|$ 为其秩。当方向无关紧要时，我们将箭头称为

边。图中未标记的箭头和边的权均为 1。对于 $i,\ j \in Q_0$，置

$$b_{ij}^{Q} = \begin{cases} w & \text{if there is an arrow } j \to i \text{ of weight } w, \\ -w & \text{if there is an arrow } i \to j \text{ of weight } w, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

那么，矩阵 $(b_{ij}^{Q})_{i,j\in Q_0}$ 是斜对称的。

Q 在 $k \in Q_0$ 处的突变 是由下式定义的带权箭图 $\mu_k(Q)$：

$$b_{ij}^{\mu_k(Q)} = \begin{cases} -b_{ij}^{Q} & \text{if } i = k \text{ or } j = k, \\ b_{ij}^{Q} + [b_{ik}^{Q}]_+[b_{kj}^{Q}]_+ - [-b_{ik}^{Q}]_+[-b_{kj}^{Q}]_+ & \text{otherwise,} \end{cases} \tag{2.1}$$

其中 $[a]_+ := \max\{a, 0\}$，对于 $a \in \mathbb{R}$。突变是一个对合，即 $\mu_k(\mu_k(Q)) = Q$。如果两个带权箭图通过有限次突变序列相连（顶点重新标记除外），则称它们变异等价。Q 的变异类是与 Q变异等价的带权箭图集合。本文中，满子箭图均假定具有非空顶点集。对于非空子集 $I \subseteq Q_0$，记 Q_I 为 Q 在顶点集 I 上的满子箭图，其权继承自 Q。当 $I = Q_0 \setminus \{k\}$ 时，我们用 $Q \setminus \{k\}$ 表示 Q_I。突变公式给出

$$(\mu_k(Q))_I = \mu_k(Q_I) \qquad (k \in I). \tag{2.2}$$

2.2. **2-有限性与低于离散的2 性质**。我们引入变异类中权的两个条件，并证明它们共同刻画有限 Coxeter 型。

定义 2.1。如果一个加权箭图的变异类中每个箭图的每个权都小于 2，则称该加权箭图是 2-有限的；否则称其为 2-无限的。

下面我们引入一个关于低于 2 的权的条件。对于 $m \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$，令

$$[m] := 2\cos\left(\frac{\pi}{m}\right), \qquad \mathcal{W}_{<2} := \{[m] \mid m \in \mathbb{Z}_{\geq 2}\}.$$

例如，$[2] = 0$、$[3] = 1$、$[4] = \sqrt{2}$ 和 $[6] = \sqrt{3}$。特别地，对于 $m \in \mathbb{Z}_{\geq 3}$，有 $[m] \geq 1$。

定义 2.2。如果一个加权箭图的每个权都属于 $\mathcal{W}_{<2} \sqcup \mathbb{R}_{\geq 2}$，则称其具有低于离散的2 性质（*DB2*-性质）。如果其变异类中的每个箭图都具有 DB2-性质，则称其具有全 *DB2* 性质。

我们用 $\mathbf{D}$ 表示具有全 DB2-性质的加权箭图集合。若 $Q \in \mathbf{D}$ 是 2-有限的，则其变异类中的每个权都为 $[m]$ 某个整数 $m \geq 3$，因此至少为 1。下面记录关于 2-有限性和全 DB2-性质的三个基本事实。

（1）这两个性质在突变下均保持不变。（2）这两个性质均可传递到满子箭图，因为对 Q_I进行的每个变异序列都可以扩展为对 Q进行的相同序列，依据（2.2）。（3）性质 Q 成立，当且仅当它对 Q的每个连通分支都成立，因为不同连通分支上的突变彼此独立。

现在我们引入一类既 2-有限又具有全 DB2-性质的箭图。

一个有限 *Coxeter* 箭图是通过对不可约有限 Coxeter 群的 Coxeter 图进行定向，并将每个边标记 m 替换为权 $[m]$而得到的加权箭图；见图1。每种类型的下标表示顶点数。若一个加权箭图的每个连通分支都与某个有限 Coxeter 箭图变异等价，则称其为有限 *Coxeter* 型。注意，单顶点箭图也包括在内，类型为 A_1；而 $I_2(3)$,I_2(4)和 I_2(6)分别属于类型 A_2、B_2和 G_2。任意两个加权

树的定向都可通过源点与汇点变异相互转化，因此定向不会影响变异类；见引理5.1。

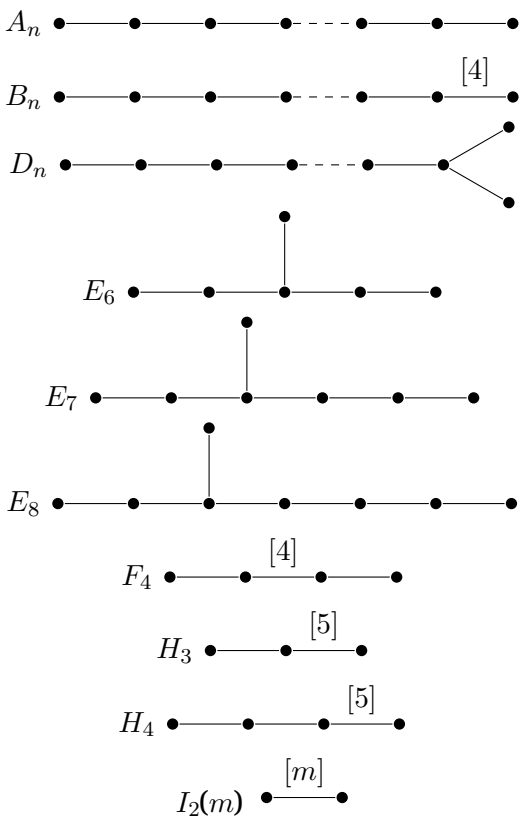


FIGURE 1. 有限 Coxeter 箭图的底层加权图

根据 [AC25，定理 8.2 和命题 8.5(b)] （另见定理 3.5），每个加权箭图 Q 都满足

$$Q \text{ is of finite Coxeter type} \implies Q \text{ is 2-finite and } Q \in \mathbf{D}. \tag{2.3}$$

不连通的情形可通过考察连通分支得到。下面的例子表明，仅有 2-有限性并不意味着有限 Coxeter 型。

例 2.3。 设 Q 为一个有向三角形，其三条边的权均为 $1/2$。在任意顶点处进行突变，都会得到一个权为 $1/2$、$1/2$、$1/4$ 的无环三角形。由于 Q 的 Markov 常数为 $3(1/2)^2 - (1/2)^3 = 5/8$，由 [CK26，命题 12] 可知，其变异类中的每个权都不超过 $\sqrt{5/8} < 2$。因此 Q 是 2- 有限的。由于 $1/2 \notin \mathcal{W}_{<2}$，它不具有 DB2- 性质，因此根据（2.3），它不属于有限 Coxeter 型。

我们的第一个主要结果表明，2-有限性与全 DB2 性质共同刻画了有限 Coxeter 型。

定理 2.4。 一个加权箭图是2-有限的，并且具有全 *DB2* 性质，当且仅当它属于有限 *Coxeter* 型。

“若”方向的推论见2.3。逆命题将在第5节证明。

3. Sign-coherence and finiteness

本节中，设 Q 为一个满足 $Q_0 = \{1, \dots, n\}$的加权箭图。

3.1. g-向量与 c-向量。 Q 的框架箭图 是由Q 添加顶点 $n+1, \dots, 2n$ 以及权重为 1 的箭头 $i \to n+i$ （$1 \le i \le n$）得到的加权箭图 Q 。仅允许在原始顶点 $1, \dots, n$处进行突变。我们将这些原始顶点上的满子箭图称为可变部分。

令$\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 为 $\mathbb{R}^n$的标准基，并且

$$\mathbf{b}_k^Q := (b_{1k}^Q, \dots, b_{nk}^Q)^{\mathsf{T}} \qquad (1 \le k \le n).$$

定义 3.1。 Q 的 g-向量种子 是一个二元组（R, （$\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_n$）），由初始种子

$$(\hat{Q}, (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n))$$

经过有限序列的突变得到。这里，在 k处对（R, （$\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_n$））进行突变，将 R替换为μ_k（R），并将（$\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_n$）替换为（$\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}'_k, \dots, \mathbf{g}_n$），其中

$$\mathbf{g}'_k = -\mathbf{g}_k + \sum_{i=1}^{n} [b_{ik}^R]_+ \mathbf{g}_i - \sum_{j=1}^{n} [b_{n+j,k}^R]_+ \mathbf{b}_j^Q. \tag{3.1}$$

无序集合 {$\mathbf{g}_1$、……、$\mathbf{g}_n$} 是 g-簇 Q。其元素是 g-向量 Q。 g-向量种子的c-向量 为以下向量

$$\mathbf{c}_j^R := (b_{n+1,j}^R, \dots, b_{2n,j}^R)^{\mathsf{T}} \qquad (1 \le j \le n).$$

矩阵 $G = (\mathbf{g}_1 \ \cdots \mathbf{g}_n)$ 和 $C = (\mathbf{c}_1^R \ \cdots \mathbf{c}_n^R)$ 分别称为该种子的 G-矩阵 和 C-矩阵 。两个初始矩阵都是单位矩阵 I_n。我们用 g-CL$_n$(Q) 表示 Q 的 g-簇的集合，并且对于 $0 \le k \le n$，令

$$\text{g-CL}_k(Q) := \{ g \subseteq \mathbb{R}^n \mid \#g = k, \quad g \subseteq g^* \text{ for some } g^* \in \text{g-CL}_n(Q) \}.$$

特别地，g-CL$_0$(Q) $= \{\varnothing\}$。

定义 3.2。 如果一个向量的所有坐标均为非负，或均为非正，则称该向量是符号相容 的。若对于每个 i，数值（$\mathbf{g}_1$)$_i$、……、($\mathbf{g}_n$)$_i$均为非负或均为非正，则称 g-簇 {$\mathbf{g}_1$、……、$\mathbf{g}_n$} 是符号相容 的。等价地，该种子中的向量位于同一个闭正交象限内。

定义 3.3。 若一个加权箭图的所有 c-向量和所有 g-簇均具有符号相容性，则称其具有符号相容性质 （简称*SC*性质）。若其变异类中的每个箭图都具有 SC 性质，则称其具有完全 *SC* 性质。

有人猜想，SC性质蕴含完全 SC 性质 [AC25，猜想 5。1]；另见 [Rea14，第 8]节。

定义 3.4。 若一个加权箭图 Q被称为 g-有限，则 g-CL$_n$(Q) 是有限的。

假设 Q 具有SC性质。考虑一个 g-向量种子（R, ($\mathbf{g}_1$, ……, $\mathbf{g}_n$)），以及相应的 c-向量（$\mathbf{c}_1$, ……, $\mathbf{c}_n$）。对于顶点 $k = 1$, ……, n, 令 $\varepsilon_k \in \{1, -1\}$ 为$\mathbf{c}_k$的符号。则对 k处的 g-向量（$\mathbf{g}_1$, ……, $\mathbf{g}_n$）进行突变后，得到 $\mapsto$（$\mathbf{g}_1$, ……, $\mathbf{g}'_k$, ……, $\mathbf{g}_n$），并且

相应的 c-向量（$\mathbf{c}_1$，……，$\mathbf{c}_n$） $\mapsto$ （$\mathbf{c}'_1$，……，$\mathbf{c}'_n$）由以下基变换给出：

$$\mathbf{g}'_k = -\mathbf{g}_k + \sum_{i=1}^{n} [-\varepsilon_k b^R_{ik}]_+ \mathbf{g}_i, \tag{3.2}$$

$$\mathbf{c}'_\ell = \begin{cases} -\mathbf{c}_k & \text{if } \ell = k, \\ \mathbf{c}_\ell + [\varepsilon_k b^R_{k\ell}]_+ \mathbf{c}_k & \text{if } \ell \neq k; \end{cases} \tag{3.3}$$

见 [AC25]。因此，每个 g-簇都是 $\mathbb{R}^n$的一个基。此外， [AC25，命题 4 中的第二对偶性8]给出

$$G^{\mathsf{T}} C = I_n, \tag{3.4}$$

因此， $C = (G^{-1})^{\mathsf{T}}$ 和 $G = (C^{-1})^{\mathsf{T}}$ 成立。由于一个无序的 g-簇至多有 $n!$ 种排列，以下条件等价：

$$\begin{aligned} &Q\text{是 } g\text{-有限的} \iff \text{存在有限多个 } G\text{-矩阵} \\ \iff &\text{存在有限多个 } C\text{-矩阵} \iff \text{存在有限多个 } c\text{-向量} \end{aligned} . \tag{3.5}$$

我们将不再特别说明地使用这些等价关系，并在 SC性质成立时，以 [AC25]中关于 g-有限性的术语陈述最后一个条件的结果。我们回顾以下结果。

定理 3.5 （[AC25，定理 8。2]）。 每个有限 *Coxeter* 型的加权箭图都具有完全 *SC* 性质，并且是 g-有限的。

3.2. **符号相容性与 DB2-性质**。 这里，我们汇总一些关于符号相容性和 DB2-性质的基本观察。

秩 2 情形下的符号相容性可完全分类如下：

定理 3.6 （[AC25，定理 7.1 和例 7。5]）。 设 Q 是一个秩为2的加权箭图。那么， Q 具有 *SC* 性质，当且仅当它具有 *DB2*-性质。在这些等价条件下， Q是 g-有限的，当且仅当它是2-有限的。

请注意，上述分类通过以下引理给出了任意秩情形下符号相容性的必要条件。

引理 3.7。 对于任意非空子集 $I \subseteq Q_0$，我们有以下结论。

(1) 若 Q 具有*SC*性质，则 Q_I 具有*SC*性质。(2) 若 Q 具有完全 *SC* 性质，则 Q_I 具有完全*SC*性质。(3) 若 Q 是 g-有限的，则 Q_I 是 g-有限的。

证明。 从 Q 和 Q_I的框架箭图出发，在 I的顶点处施加相同的变异序列。分别将所得的箭图记为 R 和 S。设 ι_I： $\mathbb{R}^I \to \mathbb{R}^{Q_0}$ 为坐标嵌入，设 π_I： $\mathbb{R}^{Q_0} \to \mathbb{R}^I$ 为坐标投影。由于只对I 中的顶点进行变异，因此有 $\mathbf{g}_k = \mathbf{e}_k$ 对于 $k \notin I$。此外， I 之外的坐标 $\mathbf{c}^R_j$对于 $j \in I$仍为零。利用这些事实以及突变公式（2.1）和（3.1），可得恒等式

$$(b^R_{ij})_{i,j\in I} = (b^S_{ij})_{i,j\in I}, \qquad \mathbf{c}^R_j = \iota_I(\mathbf{c}^S_j), \qquad \pi_I(\mathbf{g}^R_j) = \mathbf{g}^S_j \quad (j \in I)$$

通过对变异序列的长度进行归纳法即可得到。

根据第二和第三个恒等式，较小的 C-矩阵的列以及其 G-矩阵的行继承符号相容性，从而证明了(1)。第三个恒等式也证明了(3)。

对于 (2)，假设 Q 具有完全 SC 性质。令 μ 为在 I中顶点处进行的任意变异序列。根据 (2.2)，有 $\mu(Q_I) = (\mu(Q))_I$。由于 $\mu(Q)$ 根据

假设，(1) 意味着 $\mu(Q_I)$ 也具有 SC 性质。因此 Q_I 具有完全 SC 性质。□

推论 3.8. *SC*性质蕴含 *DB2*-性质。完全 *SC* 性质蕴含全 *DB2* 性质。

证明。第一个断言可通过将引理 3.7(1) 和定理 3.6 应用于每条箭的端点所构成的满子箭图而得出。对变异类中的每个箭图应用第一个断言，即可得到第二个断言。□

第一个断言的逆命题一般不成立。

例3.9. 考虑

$$Q = \quad \begin{array}{ccc} & 1 & \\ [4] \swarrow & & \nwarrow \\ 2 & \longrightarrow & 3 \end{array} \ .$$

于是 Q 具有 DB2-性质。依次在 1、2 和 3 处进行突变后，所得的 C-矩阵和 G-矩阵为

$$C = \begin{bmatrix} \sqrt{2}-2 & \sqrt{2}-1 & -1 \\ 3-2\sqrt{2} & 2-2\sqrt{2} & 1-\sqrt{2} \\ \sqrt{2}-1 & \sqrt{2}-1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad G = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1-\sqrt{2} \\ 0 & -1 & 1-\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2}-1 & 1-\sqrt{2} \end{bmatrix},$$

其中 $[4] = \sqrt{2}$。由于 $1 < \sqrt{2} < 2$，C 的前两列分别都含有正值和负值，而 G 的第三行也含有正负号的项。因此 Q 不具有 SC性质。另一方面，在 1 处进行突变便产生了一个权 $\sqrt{2}-1$，它不属于 $\mathcal{W}_{<2} \sqcup \mathbb{R}_{\geq 2}$。因此，该例不具有完全 DB2 性质。

推论3.10。 设 Q 为2-有限的。则当且仅当 Q 具有完全 *SC* 性质时，它才具有完全 *DB2* 性质。

证明。“仅当”部分由推论 3.8得出。反之，若 Q 具有完全 DB2 性质，则根据定理 2.4 它属于有限 Coxeter 型，因此根据定理3.5具有完全 SC 性质。□

定理 3.6和推论 3.10 暗示了推论 3.8中第二个断言的如下逆命题。

猜想3.11。 每个具有全 *DB2* 性质的加权箭图都具有完全 *SC* 性质。

在 [AC25中，猜想 5。1], 他们猜想，SC性质蕴含完全 SC 性质。结合这两个猜想，我们预期 SC性质、完全 SC 性质和全 DB2 性质彼此等价。

3.3. **有限性与 Coxeter分类**。 接下来，我们刻画具有完全 SC 性质时的 g-有限性。关键的一步是直接证明以下结论。

命题 3.12。 设 Q 是一个具有 *SC*性质的加权箭图。若 Q 是 g-有限的，则 Q是 2-有限的。

注意，在下面的证明中，我们不会从变异类中选择一个特定的初始箭图 Q 。特别地，当 Q 是 2-无限的并具有 SC性质时，即使 Q 本身的所有权都小于 2，我们也可以得出 Q 不是 g-有限的。

证明。 根据（3.5），只有有限多个 c-向量。假设矛盾，即变异类 R 中的一个箭图 Q 具有一条权为 $s \geq 2$ 的箭。选取两个顶点 i， j 位于R 中，使得 $b_{ij}^R = s$。将相应的一对 c-向量记为（$\mathbf{c}_i$， $\mathbf{c}j$）。

从这个箭图出发，交替在 i 和 j处进行突变。令 $\mathbf{v}_{-1} = -\mathbf{c}j$ 和 $\mathbf{v}_0 = \mathbf{c}_i$。由（2.1节），依次得到的 c-向量对为

$$(\mathbf{v}_0, -\mathbf{v}_{-1}) \overset{\mu_i}{\mapsto} (-\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1) \overset{\mu_j}{\mapsto} (\mathbf{v}_2, -\mathbf{v}_1) \overset{\mu_i}{\mapsto} (-\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) \overset{\mu_j}{\mapsto} \cdots$$

其中，这些向量$\mathbf{v}_r$ 由以下递归方式得到：

$$\mathbf{v}_{r+1} = s[\mathbf{v}_r]_+ - \mathbf{v}_{r-1} \qquad (r \geq 0). \tag{3.6}$$

这里， $[\mathbf{v}]_+ = ([v_1]_+, \ldots\ldots, [v_n]_+)^\mathsf{T}$ 表示$\mathbf{v} = (v_1, \ldots\ldots, v_n)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^n$。根据假设，向量$\mathbf{v}_r$ 只取有限多个值。由于每次突变都是一个对合，这意味着序列（$\mathbf{v}_r$）必定是周期性的。

另一方面，由 $\mathbf{v}_r = [\mathbf{v}_r]_+ - [-\mathbf{v}_r]_+$ 以及（3.6），我们有逐坐标不等式

$$(\mathbf{v}_{r+1} - \mathbf{v}_r) - (\mathbf{v}_r - \mathbf{v}_{r-1}) = (s-2)[\mathbf{v}_r]_+ + 2[-\mathbf{v}_r]_+ \geq 0.$$

因此，每个坐标上的连续差值$\mathbf{v}_{r+1} - \mathbf{v}_r$ 都是非递减的。由于这些差值具有周期性，$\mathbf{v}_{r+1} - \mathbf{v}_r$ 必定为常数。接着，由（$\mathbf{v}_r$）的周期性可知，这个常数必须为零，因此$\mathbf{v}_r$ 与 r 无关。特别地，$\mathbf{c}_i = \mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_{-1} = -\mathbf{c}j$，这与 C 矩阵可逆矛盾。因此， Q 是 2-有限的。□

综上，我们得到以下关于 g-有限性的刻画。

定理 3.13。 设 Q 为具有完全 *SC* 性质的加权箭图。则以下条件等价：

(1) Q是 g-有限的；(2) Q是2-有限的；(3) Q具有有限 *Coxeter* 型。

证明。 由推论 3.8， Q 具有全 DB2 性质。因此，(2)⇔蕴含 (3)，由定理 2.4可得；而 (3)⇒蕴含 (1)，由定理 3.5可得。剩下的蕴含关系 (1)⇒蕴含 (2)，由命题 3.12可得。 □

由于 2-有限性在突变下保持不变，定理3.13 还表明，在具有完全 SC 性质的加权箭图中， g-有限性在突变下保持不变。

4. Completeness and density of g-fans

在本节中，设 Q 是一个具有 $Q_0 = \{1, \ldots, n\}$ 的加权箭图。在以下假设下，我们引入 Q 的 g-扇，并证明它是完备的当且仅当 Q 是 g-有限的。

假设 1。 加权箭图 Q 满足以下条件：

(1) Q 具有完全 *SC* 性质；(2) 对于 Q 的变异类中的每个箭图 Q'， 所有位于坐标轴上的 Q' 的 c-向量都等于某个 $i \in Q'_0$ 的 $\pm\mathbf{e}_i$ 。

除非另有说明，本节始终假设 1 成立。条件（2）是 [AC25中猜想 5。3], 在整个变异类中均成立。对于斜对称交换矩阵，假设 1 是 [AC25中猜想 5.10 和第 6]节所采用的假设。对于准整数型箭图、具有 SC性质的秩 2 箭图以及有限 Coxeter 型的带权箭图，该假设均成立 [AC25，命题 5.11、定理 7.7 和第 89]节。

4.1. g扇。

引理 4.1。 假设 *1* 在突变下保持不变，并且可传递到满子箭图。

证明。变异不变性是假设的一部分。设 $I \subseteq Q_0$。根据引理 3.7(2)，完全 SC 性质可传递到 Q_I。为检验条件 (2)，设 S 是 Q_I 的变异类中的任意箭图。将变异序列提升到 Q，得到一个满足 $R_I = S$ 的箭图 R。使用 R 和 S 作为 c-向量的初始箭图。引理 3.7 的证明表明，S 的每个 c-向量都可以通过在 I 外添加零坐标，沿着相同的变异序列提升为 R 的一个 c-向量。若 S 的一个 c-向量位于某条坐标轴上，则其提升也位于同一坐标轴上，因此根据 R 的条件 (2)，它等于 $\pm \mathbf{e}_i$，其中某个 $i \in I$。这就证明了 S 的条件 (2)。□

对于一个有限向量集 $g = \{\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_k\}$，（多面体）锥 是形如以下形式的闭集

$$C(g) = C(\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_k) := \left\{ \sum_{i=1}^{k} a_i \mathbf{g}_i \;\middle|\; a_i \geq 0 \right\}.$$

我们使用 $C(\varnothing) = \{\mathbf{0}\}$。锥 $C \subseteq \mathbb{R}^n$ 的一个面 是集合 $C \cap \ker \ell$，其中 $\ell \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是在线性泛函 C上非负的线性泛函。若一个锥由线性无关集生成，则称其为单纯 锥。若 g 线性无关，则 $C(g)$ 的面恰好是满足 $g' \subseteq g$的锥$C(g')$。

具有 $g \in$ g-CL$_n(Q)$ 的锥 $C(g)$ 称为 g-锥。对于 $n \geq 1$，具有 $g \in$g-CL$_{n-1}(Q)$ 的锥 $C(g)$ 称为墙。令

$$\mathcal{F}(Q) := \{C(g) \mid g \in \text{g-CL}_k(Q),\ 0 \leq k \leq n\}.$$

扇 是由多面体锥组成的集合，该集合对取面封闭，且任意两个锥的交都是它们各自的一个面。若一个扇中的所有锥都是单纯锥，则称其为单纯 扇。我们不要求扇是有限的或局部有限的。

命题 4.2 （[AC25，命题 6。6]）。 设 Q 满足假设 *1*。则 $\mathcal{F}$（Q） 是一个单纯扇。

证明。 扇的性质已在 [AC25，命题 6。6]中证明。每个 g-簇都是基，由（3.4）可知，因此其锥都是单纯的。□

我们将 $\mathcal{F}(Q)$ 称为 g-扇，其对象为 Q。因此，术语 g-锥指的是该扇的满维锥。该扇的支撑为

$$|\mathcal{F}(Q)| = \bigcup_{g \in \text{g-CL}_n(Q)} C(g).$$

如果两个不同的 g-锥共享一面墙，则称它们相邻 。我们用 int 表示环境向量空间中的内部。相对内部取自该锥的线性张成。

定义 4.3。 设 Q 满足假设 1。若 g-完备 当且仅当 $|\mathcal{F}$（Q）$| = \mathbb{R}^n$，并且g-稠密 当且仅当 $|\mathcal{F}$（Q）$|$ 在 $\mathbb{R}^n$中稠密。

为证明 g-有限性蕴含 g-完备性，我们首先记录 g-锥的以下基本性质。

引理 4.4。 设 Q 满足假设 *1*。那么，每一面墙恰好位于两个 g-锥中。这些g-锥位于由该墙张成的超平面的两侧，并且它们的并集包含墙的相对内部中每一点的一个邻域。此外，任意两个 g-锥都可以通过一个相邻 g-锥的有限序列连接起来。

证明。给定一面墙 W，选取一个 g-向量种子 $(R, (\mathbf{g}1, \ldots, \mathbf{g}_n))$，使得该墙由除 $\mathbf{g}_k$ 以外的所有 g-向量张成。考虑在 k 处对 g-向量进行突变。令 $\mathbf{g}'_k$ 为由 (3.2) 给出的生成 g-向量。由于 $b^R_{kk} = 0$，我们得到 $\mathbf{g}'_k = -\mathbf{g}_k$ 属于 $\mathbb{R}^n/\langle W\rangle$，其中 $\langle W\rangle \subset \mathbb{R}^n$ 是由 W张成的线性子空间。因此，在 k 处突变得到第二个g-锥，它与同一面墙 W 相邻且位于其另一侧。由于两个锥都是满维且单纯的，每个锥都填满了公共墙相对内部中某一点附近的一个半邻域。因此，它们的并集包含该点的一个邻域。

不可能存在包含同一面墙的第三个满维锥：在任一侧，它的内部都会与这两个锥之一相交，这与命题4.2相矛盾。最后，每个 g-向量种子都可由初始种子经过有限序列的变异得到，并且每次变异都会在相邻的 g-锥之间转换。 □

命题 4.5。 设 Q 满足假设 *1*。若 Q 是 g-有限的，则它是 g-完备的。

证明。 我们沿用 [Asa21中的有限扇论证，命题 4。8]当秩为 1 时断言显然成立，因此假设 $n \geq 2$。设 Q 是 g-有限的，并令

$$F_1 := |\mathcal{F}(Q)|, \qquad F_2 := \bigcup_{g\in \text{g-CL}_{n-2}(Q)} C(g).$$

首先，我们证明 $F_1 \setminus F_2$ 是 $\mathbb{R}^n \setminus F_2$中的开集和闭集。由于只有有限个 g-锥， $F_1 \setminus F_2$ 是闭集。维数至多为 $n-2$ 的每个锥都包含于某个维数为 $n-2$的锥中，因为它由某个 g-簇的子集生成。因此， $F_1 \setminus F_2$中的每个点要么位于某个 g-锥的内部，要么位于某面墙的相对内部。在第二种情况下，引理 4.4 给出了一个包含于 F_1中的邻域。因此， $F_1 \setminus F_2$ 是 $\mathbb{R}^n \setminus F_2$中的开集。

由于 F_2 是维数至多为 $n-2$ 的锥的有限并， $\mathbb{R}^n \setminus F_2$ 是连通的。因此，它的非空开闭子集 $F_1 \setminus F_2$ 等于 $\mathbb{R}^n \setminus F_2$，从而 $F_1 = \mathbb{R}^n$。 □

4.2. 初始箭图的变异。 对于 $k \in Q_0$，令 $H^+_k = \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\mathsf{T} \mid x_k \geq 0\}$、$H^-_k = \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\mathsf{T} \mid x_k \leq 0\}$，以及 $H_k = H^+_k \cap H^-_k$。令 $\mu^Q_k \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$，$(x_1, \ldots, x_n)^\mathsf{T} \mapsto (x'_1, \ldots, x'_n)^\mathsf{T}$ 为如下定义的映射

$$x'_i = \begin{cases} -x_k & \text{if } i = k, \\ x_i + [b^Q_{ik}]_+ x_k + b^Q_{ik}[-x_k]_+ & \text{if } i \neq k. \end{cases} \tag{4.1}$$

引理 4.6。 映射 μ^Q_k 是一个分段线性同胚，在每个 H^+_k 和 H^-_k 上都是线性的。此外，其逆映射由 $\mu^{\mu_k(Q)}_k$ 给出。

证明。 通过直接计算可知， μ^Q_k 在闭域 H^+_k 和H^-_k 上均为线性函数。由于这两个域在超平面 H_k 处相交， μ^Q_k 是连续的。

由于 $b^{\mu_k(Q)}_{ik} = -b^Q_{ik}$ 对于 $i \neq k$，将（4.1）直接代入可得

$$\mu^{\mu_k(Q)}_k \circ \mu^Q_k = \mathrm{id}.$$

交换 Q 和 $\mu_k(Q)$ 可得逆恒等式 $\mu^Q_k \circ \mu^{\mu_k(Q)}_k = \mathrm{id}$。 □

在假设 1 下，此映射给出了初始箭图突变的公式。

引理 4.7。 设 Q 满足假设 *1*。设 $(\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_n)$ 为从箭图 Q 的初始种子出发，沿 $k_1, \ldots, k_r$ 进行变异所得到的 g-向量有序元组。那么，对于每个 $k \in Q_0$，从箭图 $\mu_k(Q)$ 的初始种子出发，沿 $k, k_1, \ldots, k_r$ 进行变异所得到的 g-向量有序元组为 $\left(\mu^Q_k(\mathbf{g}_1), \ldots, \mu^Q_k(\mathbf{g}_n)\right)$。特别地，对每个向量应用 μ^Q_k，可得到箭图 Q 的 g-簇与箭图 $\mu_k(Q)$ 的 g-簇之间的双射。

证明。 初始种子变异公式 [AC25，命题 6.1(c)，方程 (6.2)], 应用于每一列，恰好就是（4.1）。 □

对于 Q 的顶点序列 $\mathbf{k} = (k_1, \ldots\ldots, k_r)$，令 $Q^0 = Q$，并令 $Q^j = \mu_{k_j}(Q^{j-1})$ 对于 $1 \le j \le r$。我们定义

$$\Phi_{\mathbf{k}} = \mu_{k_r}^{Q^{r-1}} \circ \cdots \mu_{k_2}^{Q^1} \circ \mu_{k_1}^{Q},$$

当 $r = 0$ 时， $\Phi_{\mathbf{k}} = \mathrm{id}$。

命题 4.8。 设 Q 满足假设 *1*。设 $(\mathbf{g}_1, \ldots\ldots, \mathbf{g}_n)$ 是通过沿 $\mathbf{k} = (k_1, \ldots\ldots, k_r)$ 进行突变，从 Q 的初始种子得到的 g-向量有序元组。则对于任意 $i \in Q_0$，有 $\Phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{g}_i) = \mathbf{e}_i$ 。

证明。 由于每次突变都是一个对合，该断言由引理4.7得到。 □

对于 g-扇，这一初始种子突变可如下理解。

命题 4.9。 设 Q 满足假设 *1*。同胚 μ_k^Q 在 $\mathcal{F}(Q)$ 的每个锥上都是线性的，并将这些锥双射到 $\mathcal{F}(\mu_k(Q))$的锥上。特别地，g-有限性、 g-完备性和 g-稠密性在假设 *1*下均为突变不变的。

证明。由引理 4.1， $\mu_k(Q)$也满足假设 1。对于任意 g-簇 $g = \{\mathbf{g}1, \ldots, \mathbf{g}_n\}$，根据符号相容性， g 中向量的第 k 个坐标要么全部非负，要么全部非正。因此， $C(g)$位于 H_k^+ 和 H_k^- 之一中。由引理 4.7， $\{\mu_k^Q(\mathbf{g}_1) \ldots, \mu_k^Q(\mathbf{g}_n)\}$ 是 $\mu_k(Q)$的一个 g-簇。由于 μ_k^Q 在包含 $C(g)$ 的半空间上是线性的，它将 $C(g)$映射到由该簇生成的锥上。对 $C(g)$的每个面同样适用。

由于 μ_k^Q 及其逆映射由引理 4.6连续， μ_k^Q 是一个将$|\mathcal{F}(Q)|$映到 $|\mathcal{F}(\mu_k(Q))|$的同胚。该集合中 g-簇的有限性在双射下保持不变，而支撑的完备性和稠密性在同胚下保持不变。 □

4.3. **的坐标投影 g-锥**。 从现在起，为简便起见，我们自然地将 $\mathbb{R}^{Q_0} = \mathbb{R}^n$视为同一对象。对于非空子集 $I \subseteq Q_0$，令 $\pi_I \colon \mathbb{R}^{Q_0} \to \mathbb{R}^I$ 为坐标投影。根据引理 4.1， Q_I 也满足假设1。

引理 4.10。 设 Q 满足假设 *1*。对于 $k \in I$，有

$$\pi_I \circ \mu_k^Q = \mu_k^{Q_I} \circ \pi_I.$$

证明。 对于 $i \in I$， i第个分量（4.1）仅取决于 x_i、 x_k和 b_{ik}^Q，这些量在限制到 I时均保持不变。 □

一个 g锥在 π_I 下的像是 $\mathbb{R}^I$中的一个满维闭多面体锥。事实上，它由一个 g簇的投影有限生成，因此是多面体且闭的。这些生成元张成 $\mathbb{R}^I$，因为 g簇是一个基，见（3.4）。下文将不再特别说明地使用这一事实，以及满维闭凸锥是其内部的闭包这一事实。

引理 4.11。 设 Q满足假设*1*。设 C是 g的一个 Q-锥，并且 W是 $\mathcal{F}$（Q_I）的一个墙。则

$$\mathrm{int}(\pi_I(C)) \cap W = \varnothing.$$

证明。 为 Q_I 选择一个种子，使其 g-锥包含 W 作为一面墙。设 $(\mathbf{g}_i)_{i \in I}$ 为其 g-向量的有序元组，并选取一个序列 $k_1, \ldots, k_r$，它表示从 Q_I的初始种子到该种子的变异序列。令 $Q^0 = Q$, $Q^j = \mu_{k_j}(Q^{j-1})$ 对 $1 \le j \le r$，并令 $R = Q^r$。由 (2.2)，对 Q_I 应用同一变异序列可得 R_I。将引理 4.6 中的分段线性同胚的复合映射记为

同胚，分别记为 $\Phi = \mu_{k_r}^{Q^{r-1}} \circ \cdots \circ \mu_{k_1}^{Q^0}$ 和 $\Phi_I = \mu_{k_r}^{Q_I^{r-1}} \circ \cdots \circ \mu_{k_1}^{Q_I^0}$。由命题 4.9，将其应用于每个锥，这些映射诱导出双射 $\Phi\colon \mathcal{F}(Q) \to \mathcal{F}(R)$ 以及$\Phi_I\colon \mathcal{F}(Q_I) \to \mathcal{F}(R_I)$。由命题 4.8，对于任意 $i \in I$，有 $\Phi_I(\mathbf{g}_i) = \mathbf{e}_i$。特别地，$\Phi_I(W)$ 包含于某个 $k \in I$ 对应的 $H_{k;I} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^I \mid x_k = 0\}$ 中。由引理 4.10，将其应用于每个中间箭图，

$$\pi_I \circ \Phi = \Phi_I \circ \pi_I.$$

如果 $x \in \operatorname{int}(\pi_I(C)) \cap W$，那么同胚 Φ_I给出

$$\Phi_I(x) \in \operatorname{int}\big(\Phi_I(\pi_I(C))\big) \cap H_{k;I} = \operatorname{int}\big(\pi_I(\Phi(C))\big) \cap H_{k;I}.$$

另一方面，由于 $\Phi(C)$ 是 $\mathcal{F}(R)$ 的一个 g-锥，根据符号相容性，其投影位于由 $H_{k;I}$ 界定的某个闭半空间内。这样的集合的内部不可能与 $H_{k;I}$ 相交。这就产生了矛盾。□

下面的证明使用一个初等凸性观察。设 $P \subseteq \mathbb{R}^I$ 是一个满维闭凸锥，使得

$$\operatorname{int}(P) \cap W = \varnothing \quad \text{for every wall } W \text{ of } \mathcal{F}(Q_I).$$

如果 $\operatorname{int}(P)$ 与 g-锥 σ 的内部相交，那么 $P \subseteq \sigma$。否则，由于 $P = \operatorname{int}(P)$ 且 σ是闭的，便会存在一个属于 $\operatorname{int}(P)$ 但位于 σ 外的点。将该点与 $\operatorname{int}(P)$ 中的一点连接起来的线段 $\cap \operatorname{int}(\sigma)$，它始终位于 $\operatorname{int}(P)$ 内，并与边界 $\partial\sigma$ 相交。边界是若干墙的并，因而产生矛盾。该论证只使用了 σ的有限个面。

引理 4.12。设 Q 满足假设 *1*。设 C 和 C' 是 g的相邻锥 Q。若$\pi_I(C) \subseteq \sigma$对于 g的某个锥 σ Q_I成立，则 $\pi_I(C')$包含于 σ或包含于一个与 g相邻的锥 σ中。

证明。设 $F = C \cap C'$为公共墙。置 $r = |I|$。由于 $\dim \ker \pi_I = n - r$，我们有

$$\dim \pi_I(F) \geq (n-1) - (n-r) = r - 1.$$

此外，$\pi_I(F) \subseteq \sigma \cap \pi_I(C')$。若 $\pi_I(F)$ 与 $\operatorname{int}(\sigma)$ 相交，$\pi_I(C')$ 的内部$\operatorname{int}(\pi_I(C'))$ 是其内部的闭包。引理 4.11 以及上面的凸性观察给出 $\pi_I(C') \subseteq \sigma$。

假设 $\pi_I(F) \subseteq \partial\sigma$。由于 $\pi_I(F)$ 是一个维数至少为 $r-1$ 的凸锥，因此它不可能包含于 σ 的维数至多为 $r-2$ 的各个面的并集中。于是，我们可以选取一点 $x \in \pi_I(F)$，使其位于 σ的一个墙 τ的相对内部。设 σ'为包含 τ的另一个g锥。根据引理 4.4，U 的某个邻域 x 包含于 $\sigma \cup \sigma'$中。由于$x \in \pi_I(C')$和 $\pi_I(C')$是其内部的闭包，我们可以选取

$$y \in U \cap \operatorname{int}(\pi_I(C')).$$

由于 y不在 $\mathcal{F}(Q_I)$ 的任何墙上（由引理 4.11可知），因此它位于 $\operatorname{int}(\sigma)$ 或 $\operatorname{int}(\sigma')$ 中。由上述凸性观察可得 $\pi_I(C') \subseteq \sigma$或 $\pi_I(C') \subseteq \sigma'$，证毕。□

命题 4.13。设 Q 满足假设 *1*。对于每个 g-锥 C （属于 Q），存在一个 g-锥σ （属于 Q_I），使得 $\pi_I(C) \subseteq \sigma$。

证明。由引理 4.4，存在一个相邻 g-锥的序列

$$C_0, C_1, \ldots, C_m = C$$

从初始锥开始 $C_0 = \mathbb{R}^{Q_0}_{\geq 0}$。由于其投影是 $\mathbb{R}^I_{\geq 0}$ 的 Q_I初始锥，通过沿着该序列依次应用引理 4.12即可得到结论。□

定理 4.14。 设 Q 满足假设 *1*，且 $I \subseteq Q_0$ 非空。则

$$\pi_I\big(|\mathcal{F}(Q)|\big) = |\mathcal{F}(Q_I)|. \tag{4.2}$$

特别地，以下结论成立。

(1) 如果 Q 是 g-完备的，那么 Q_I 是 g-完备的。

(2) 如果 Q 是 g-稠密的，那么 Q_I 是 g-稠密的。

证明。命题 4.13 给出了包含关系 $\pi_I\big(|\mathcal{F}(Q)|\big) \subseteq |\mathcal{F}(Q_I)|$。为证明反向包含，设 σ 是 Q_I的一个 g-锥。选取一个突变序列，将 Q_I 的初始种子变为具有g-锥 σ的种子，并将同一序列应用于 Q的初始种子。根据引理 3.7 的证明，由 I 标记的所得 g-向量投影到 σ的生成元上。对于 $j \notin I$，第 j个 g-向量是 $\mathbf{e}_j$，并投影为零。因此，所得的 g-锥 Q 投影到 σ 上，从而证明了 (4.2)。

若 Q是 g-完备的，则由 (4.2) 得到 $|\mathcal{F}(Q_I)| = \pi_I(\mathbb{R}^{Q_0}) = \mathbb{R}^I$。若 Q是 g-稠密的，则对每个非空开集 $U \subseteq \mathbb{R}^I$，集合 $\pi_I^{-1}(U)$ 非空且为开集，因此它与$|\mathcal{F}(Q)|$相交。由 (4.2)， U与 $|\mathcal{F}(Q_I)|$相交。□

4.4. **秩-2障碍与完备性**。

引理 4.15. 设 Q 是一个秩为 2 且其箭的权至少为2的加权箭图。则Q 满足假设 *1*，但不是 g-完备的。

证明。 由于 Q 具有全 DB2 性质，定理 3.6 和 [AC25，定理 7。7] 给出假设 1。根据 [AC25，例 7。8] (另见 [Rea14，命题 9。6])， Q 不是 g-完备的。□

命题 4.16. 设 Q 满足假设 *1*。若 Q是 g-完备的，则 Q 是 2-有限的 .

证明。 若 Q 不是 2-有限的，则在 Q的变异类中存在一个箭图 Q'，它有一条权至少为 2 的箭。根据定理 4.14(1) 和引理 4.15， Q' 不是 g-完备的，因此根据命题 也不是 g-完备的 4.9。□

定理 4.17。 设 Q 满足假设 *1*。则以下条件等价：

(1) Q是 g-有限的；(2) Q是 g-完备的；(3) Q是2-有限的；

(4) Q是有限 *Coxeter* 型。

证明。 该结论由定理 3.13、命题 4.5和4.16得出。 □

5. Proof of Theorem 2.4

设 Q 为一个加权箭图。为证明定理2.4，我们采用 [FZ03 第 9] 节的方法：首先处理树和无弦圈，然后对顶点数进行归纳。在本节中，我们将直接使用第2.2节中陈述的关于 2-有限性和全 DB2 性质的基本事实。我们将使用恒等式$[5]^2 = [5] + 1$。在突变图中，表示进行突变的顶点。在本节中，权为零表示相应的箭不存在。

5.1. **树、圈与重新定向**。 箭图中的无弦圈 是一个满子箭图，其底图为一个圈。在源点或汇点处进行突变，只会反转关联箭。我们记录一个重新定向引理，并介绍下文将用到的两个箭图族。

引理 5.1（参见 [FZ03，命题 9。2]）。设 T 是 Q底图中的一个满子树。假设 T仅在顶点 v处与图的其余部分相交： $T\setminus\{v\}$中没有顶点与 T之外的顶点相邻。那么，对于 Q 中端点均位于 T的箭头，任何重新定向（其余箭头保持不变）都可以通过在 $T\setminus\{v\}$的顶点处进行源点与汇点变异得到。因此，它与 Q变异等价。

证明。由于 [FZ03 命题 9 的证明2] 仅使用源点与汇点变异，因此对任意正实权都同样适用。□

我们将引理5.1 中的操作称为树的重新定向。特别地，加权树的所有定向都变异等价。

定义 5.2。令 $a_1,\ a_2,\ a_3\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$和 $\mathbf{m}=(m_1,\ \ldots,\ m_{a_1})\in\mathbb{Z}_{\geq 3}^{a_1}$。加权箭图$T_{a_1,\ a_2,\ a_3}(\mathbf{m})$有一个中心顶点 v 和三条有向路径

$$v=v_0^i\longrightarrow v_1^i\longrightarrow\cdots\longrightarrow v_{a_i}^i\qquad(i=1,2,3),$$

它们没有其他公共顶点。第一条路径上的第 k 个箭的权为 $[m_k]$，其余箭的权均为 1。当所有权均为 1 时，我们省略 $\mathbf{m}$ 。例子见图2 。

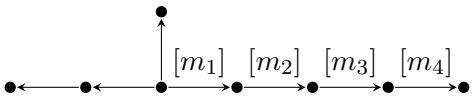


FIGURE 2. 树箭图 $T_{4,\ 1,\ 2}(m_1,\ m_2,\ m_3,\ m_4)$。

定义 5.3。令 $a_1,\ a_2,\ a_3\in\mathbb{Z}_{>0}$、 $s\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$以及 $\mathbf{m}=(m_1,\ \ldots,\ m_{a_1-1})\in\mathbb{Z}_{\geq 3}^{a_1-1}$。加权箭图 $S_{a_1,\ a_2,\ a_3}^{s}(\mathbf{m})$ 由下述有向圈附加一条有向路径得到

$$v_1\longrightarrow v_2\longrightarrow\cdots\longrightarrow v_{s+3}\longrightarrow v_1$$

通过附加一条有向路径

$$u_{a_i}^i\longrightarrow\cdots\longrightarrow u_2^i\longrightarrow u_1^i=v_i$$

对每个 v_i当 $i=1$、2、3。箭 $u_{k+1}^1\to u_k^1$的权为 $[m_k]$，其余所有箭的权均为 1。当所有权均为 1 时，我们省略 $\mathbf{m}$ 。含有 $a_i=1$ 的路径不会给圈增加顶点。示例见图 3。

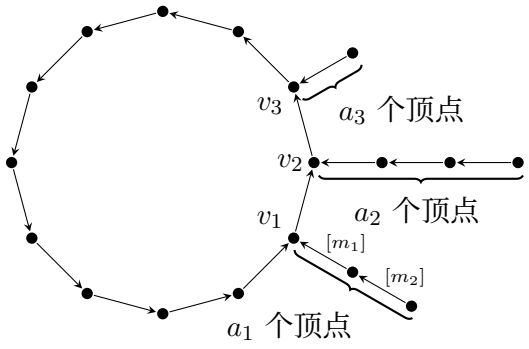


FIGURE 3. 箭图 $S_{3,\ 4,\ 2}^{9}(m_1,\ m_2)$。

引理 5.4（参见 [FZ03，引理 9。6]）。 采用上述记号，$S^s_{a_1、\,a_2、\,a_3}(\mathbf{m})$ 在突变下等价于

$$T_{a_1+a_3-1,a_2,s}(\widetilde{\mathbf{m}}), \qquad \widetilde{\mathbf{m}} = (\underbrace{3,\ldots,3}_{a_3 \text{ entries}},\mathbf{m}).$$

证明。 我们按照定义 $S^s_{a_1、\,a_2、\,a_3}(\mathbf{m})$ 为其标记顶点。依次在以下位置对其进行变异

$$v_{s+3}, v_{s+2}, \ldots, v_3, u^3_2, \ldots, u^3_{a_3}$$

得到 $T_{a_1+a_3-1、\,a_2、\,s}(\tilde{}\mathbf{m})$ 的重新定向。由引理 5.1即得断言。 □

5.2. **秩 3 的箭图**。 我们首先处理秩 3 的箭图，并证明以下分类结果。

命题 5.5。 一个连通箭图 $Q \in \mathbf{D}$ 的秩为3 ，当且仅当（在重新标记和树的重新定向意义下）是表2-有限的，等价于它是表*1*中的某个箭图。

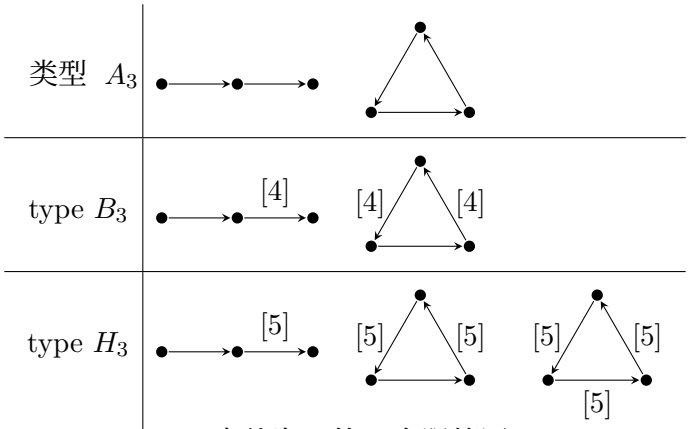
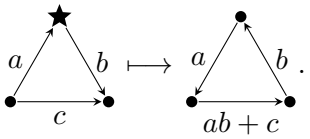


TABLE 1. D 中秩为 3 的 2-有限箭图。

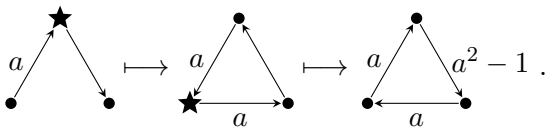
为证明命题 5.5，我们先准备三个引理。

引理 5.6。 若连通箭图 $Q \in \mathbf{D}$ 的秩为 3 ，且无环并且是2-有限的，则它是一个有限 *Coxeter* 箭图，类型为 A_3、B_3 或 H_3。特别地，它是一棵权至多为 $[5]$ 的树。

证明。 Q 的所有权都至少为 1。若其底图是三角形，则进行以下突变会得到权 $ab+c \geq 2$，这与条件矛盾：



因此 Q 是一棵树。由引理 5.1，我们可以将其重新定向为一条权为 $a \geq b$ 的有向路径。在中间顶点处突变会得到权 ab。由于 $b^2 \leq ab < 2$，我们有 $b = 1$。接着进行以下两次突变会得到权 $a^2 - 1$：



由于 $a^2 - 1 < 2$，我们得到 $a \in \{1, [4], [5]\}$。 □

接下来，我们考虑有向三角形的情形。根据显然的对称性，不妨设权为 $\mathcal{W}_{<2}$ 的有向三角形具有如下形式

$$Q:\quad \begin{array}{ccc} & [p] & \\ [q] & & \\ & [r] & \end{array}\ ,\qquad p\geq q\geq r\geq 3, \tag{5.1}$$

其中 p,q,r 均为整数。令 Q_ℓ 由 Q 经过在两个下方顶点处交替变异得到，从右下方顶点开始，且 $Q_0=Q$。对于 $\ell\geq -1$，定义

$$f_\ell=\frac{[q]\sin\big((\ell+1)\pi/r\big)-[p]\sin(\ell\pi/r)}{\sin(\pi/r)}.$$

引理 5.7 (参见 [FT19，引理 3 的证明。3])。设 $\ell\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$。若 $Q_0,\dots,Q_{\ell-1}$ 均为有向三角形，则 Q_ℓ 的三个权为 $[r]$, $|f_{\ell-1}|$和 $|f_\ell|$。此外， Q_ℓ 是有向三角形，当且仅当 $f_\ell>0$。

证明。我们有 $f_{-1}=[p]$、 $f_0=[q]$ 和 $f_{\ell+1}=[r]\,f_\ell-f_{\ell-1}$。当三角形为有向三角形时，这正是突变下带符号权的变化。新的带符号权为正，则得到有向三角形；权为零，则得到一棵树；权为负，则得到无环三角形。由归纳法可证此断言。□

引理 5.8. Q_1，……， Q_{r-1} 中至少有一个是无环的。

证明。若 Q_1、……、 Q_{r-2} 都不是无环的，则引理 5.7适用于第 $r-1$ 步，并表明Q_{r-1} 是无环的，因为 $f_{r-1}=-[p]<0$。 □

命题 *5.5* 的证明。首先假设 Q 是 2-有限的。无环情形由引理 5.6 得出。否则，我们可以假设 Q 具有形式 (5.1)，并采用上述记号。引理 5.7 和5.8 给出了其变异类中的一个无环箭图，且其权仍包含 $[r]$。因此，引理 5.6 给出 $r\leq 5$。

若 $r=3$，则 $f_1=[q]-[p]\leq 0$。若取负值，则会得到一个无环三角形，这与引理 5.6 矛盾。因此， $p=q$，且 Q_1 是一棵权为 1 和 $[p]$ 的树。引理 5.6 给出$p=q\in\{3,4,5\}$。

若 $r=4$，则 $f_1=[4]\,[q]-[p]>0$，因为 $[q]\geq[4]=\sqrt{2}$ 且 $[p]<2$。然而， $f_2=[q]-[4]\,[p]<0$，因此 Q_2 是一个无环三角形，这与引理 5.6矛盾。

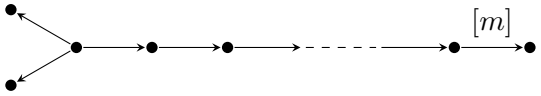
若 $r=5$，则 $f_1=[5]\,[q]-[p]>0$ 且 $f_2=[5]([q]-[p])\leq 0$。由于负值同样会与引理 5.6矛盾， $p=q$ 且 Q_2 是一棵权为 $[5]$ 和 $([5]-1)\ [p]$ 的树。由引理 5.6， $p=q=5$。

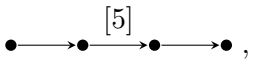
反过来，对于 $p\in\{3,4,5\}$，一个权为（1， $[p]$， $[p]$）的有向三角形经变异后变为一棵权为 1 和 $[p]$的树。一个所有权均为 $[5]$ 的三角形首先变异为权为 $(1,[5],[5])$ 的三角形，因为 $[5]^2-[5]=1$，然后再变异为一棵权为 1 和 $[5]$的树。这些树是秩 3 的有限 Coxeter 箭图，根据（2.3），它们是 2-有限的。□

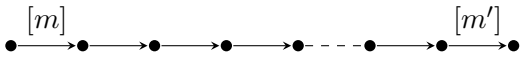
5.3. 树的分类。接下来我们研究树箭图，并证明以下分类定理。

命题 5.9。 树箭图 $Q\in\mathbf{D}$ 是2-无限的，当且仅当它是有限 *Coxeter* 箭图。

为证明命题 5.9，我们首先确定若干个 2-无限树。令 $m,\ m' \in \mathbb{Z}_{\geq 3}$。我们考虑以下树箭图：

$Y_n(m)\ =$  $(n \geq 4)$,

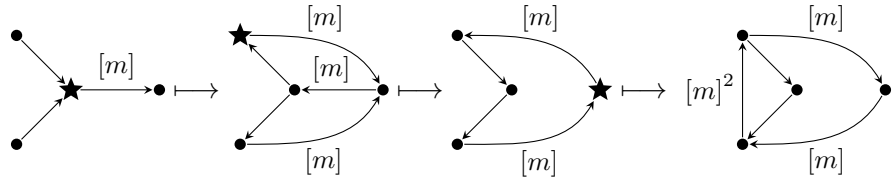
$\mathcal{H}_4\ =$ ,

$Z_n(m,\ m')\ =$  $(n \geq 3)$。

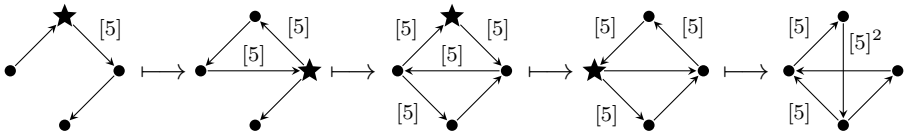
根据引理 5.1，它们的 2-有限性不依赖于定向。

引理 5.10. 箭图 $Y_4(m)$ 在 $m \in \mathbb{Z}_{\geq 4}$、$\mathcal{H}_4$ 和 $Z_5(3,5)$ 的情况下是2-无限的。

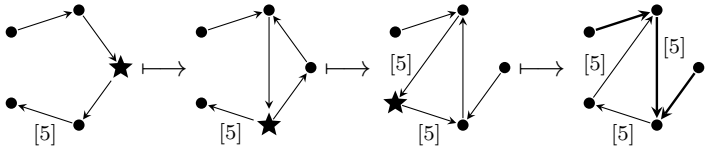
证明。按下方左侧所示对 $Y_4(m)$ 重新定向。以下突变给出权 $[m]^2 \geq 2$。



对于 $\mathcal{H}_4$，以下突变给出权 $[5]^2 > 2$。



对于 $Z_5(3,5)$，以下突变得到一个箭图，其粗体箭头构成一个满子箭图，该满子箭图是 $\mathcal{H}_4$ 的重新定向。因此上述结论适用。



□

引理 5.11. 以下陈述成立。

(1) $Y_n(m)$ 在 m、$n \in \mathbb{Z}_{\geq 4}$ 的情况下是2-无限的。(2) 设 m、m'、$n \in \mathbb{Z}_{\geq 3}$。那么 $Z_n(m$、$m')$ 是2-无限的，除非

$$\{m, m'\} = \{3\}, \{3, 4\}, \quad or \quad \{m, m'\} = \{3, 5\}\ with\ n \in \{3, 4\}.$$

证明。我们使用以下缩短操作。在树中一个度数为 2 的顶点 k 处，引理 5.1 允许我们按下图所示定向两条关联箭。对 k进行变异，然后将其删除，得到

$$i \xrightarrow{a} k \xrightarrow{b} j \quad \xrightarrow{\mu_k,\ \text{delete } k} \quad i \xrightarrow{ab} j.$$

特别地，如果 $a,\ b$ 中有一个为 1，则另一个权保持不变。

对于 (1)，此操作缩短 $Y_n(m)$ 的长分支，得到 $Y_4(m)$，根据引理5.10，它是 2-无限的。

对于 (2)，不妨设 $m \le m'$。首先，假设 m，$m' \ge 4$。缩短后得到一条权为 $[m]$ 和 $[m']$ 的三顶点路径。在其中间顶点处突变后，得到权$[m]\,[m'] \ge 2$。接下来，假设 $m = 3$ 且 $m' \ge 6$。缩短后得到一条权为 1 和 $[m']$的路径。进行两次突变后，得到权 $[m']^2 - 1 \ge 2$，如引理 5.6的证明所示。最后，当 $(m,\ m') = (3,\ 5)$ 且 $n \ge 5$时，缩短后得到 $Z_5(3,\ 5)$，根据引理 5.10，它是 2-无限的。这些就是陈述中未列出的所有情形。□

我们使用以下已知事实。

引理 5.12 ([FZ03，命题 9 的证明。3])。 下列加权树的任意定向都是2-无限的：

$\widetilde{F}_4$： ●——●——●——●——● $[4]$

这里我们使用 [FZ03]中图示权重的平方根。

命题 *5.9* 的证明。“若”这一蕴含由（2.3）给出。设 $Q \in \mathbf{D}$ 是 2-有限的。其权为 $[m]$，其中 $m \ge 3$。秩为 1 和 2 时结论显然成立，因此设 Q的秩至少为 3。

若所有权均为 1，则结论由 [FZ03，命题 9 得出。3]因此我们可以假设 Q 有一条非单位边。若 Q 有多于一条非单位边，则它将包含一个满子箭图 $Z_k(m,\ m')$，其中 m，$m' \ge 4$ 且 $k \ge 3$，这与引理 5.11(2) 矛盾。因此 Q 恰有一条非单位边，其权为 $[m]$，其中 $m \ge 4$。若 Q 有一个分支顶点，则它将包含一个满子箭图 $Y_k(m)$，这与引理5.11(1) 矛盾。因此 Q 是一条路径。

若 $m = 4$，则一条末端非单位边给出类型 B_n。若该边是内部边，则一条至少含有五个顶点的 a~路径将包含 F_4，这与引理 5.12 矛盾。因此，内部非单位边给出类型 F_4。若 $m = 5$，则引理 5.10 排除了 $\mathcal{H}_4$，所以该非单位边必为末端边。引理 5.10 排除了 $Z_5(3, 5)$，并推出 Q 的秩至多为 4。这给出 H_3 或 H_4。若 $m \ge 6$，则 Q 包含 $Z_3(3, m)$，这与引理 5.11(2) 矛盾。□

5.4. **无弦环的分类**。 接下来我们处理无弦圈，并证明如下分类结果。

命题 5.13 (参见 [FZ03，命题 9。7])。 设 $Q \in \mathbf{D}$ 是一个箭图，其底层加权图是一个 n-圈。那么 Q 是2-有限的，当且仅当它是一个有向圈，并满足以下条件之一：

(1) 所有权均为 *1*，得到变异类型 D_n （带有 $D_3 = A_3$）；*(2)* $n = 3$，且权为 $(1, [4], [4])$、$(1, [5], [5])$ 或 $([5], [5], [5])$，分别得到类型 B_3、H_3 和 H_3，如表 *1* 所列；*(3)* $n = 4$，且连续的权为 $([4], 1, [4], 1)$ 或 $([5], 1, [5], 1)$，分别得到类型 F_4 和 H_4（见 *(5.2)* 和 *(5.3)*）。

为证明命题 5.13，我们先准备两个引理。

引理 5.14. 设 Q 是一个有向圈，其中有两条指定的箭，其权分别为 $[m]$ 和$[m']$，且 $m > m' \ge 3$。如果其他所有箭的权均为 1，那么 $Q \notin \mathbf{D}$。

证明。 对于一个三角形，在权为 1 和 $[m']$ 的箭头之间的顶点处进行突变，得到权 $[m] - [m']$。由于 $0 < [m] - [m'] < 1$, $Q \notin \mathbf{D}$。

对于更长的圈，选取权为 1 的箭头的一个端点 k。那么 $\mu_k(Q) \setminus \{k\}$ 是一个更短的有向圈，其权为 $[m]$、$[m']$，其余所有箭头的权均为 1。由对圈长度的归纳法可得结论。□

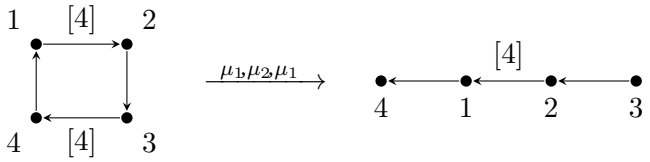
引理 5.15 (参见 [FZ03，命题 9。7])。 每个 2-有限箭图 $Q \in \mathbf{D}$中的无弦圈都是有向圈。

证明。我们可以假设 Q 的底层加权图是一个 n-圈。我们对 n使用归纳法。情形 $n = 3$ 由命题5.5得出。

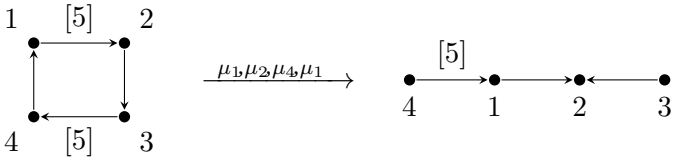
假设 $n \geq 4$。若顶点 k 有一条入箭和一条出箭，则 $\mu_k(Q)\backslash\{k\}$是一个无弦的（$n-1$）-圈。由归纳法可知它是有向的，因此 Q 也是如此。否则，每个顶点都是源点或汇点。在任意顶点处进行变异，都会得到一个圈，其中该顶点的邻点各有一条入箭和一条出箭。这与前述论证矛盾。□

注意，引理 $Q \in \mathbf{D}$ 中的假设5.15 不可省略：在例2.3中的 2-有限箭图的任意顶点处进行变异，都会得到一个无环三角形。

命题*5.13*的证明。我们先检查列表中的箭图。对于 (1)，引理5.4 表明$S_{1\,1}^{n-3}{}_{,,1}$ 与$T_{1,1,n-3}$变异等价，后者的类型为 D_n。 (2) 中的三角形已在命题5.5中处理。对于 (3)，按所示顺序进行以下变异，可得到类型为 F_4 和 H_4的有限 Coxeter 箭图。



(5.2)



(5.3)

因此（2.3）表明列表中的每个箭图都是 2-有限的。C

由引理5.15得到的有向圈。情形 3 由命题5.5得出，因此假设 $n \geq 4$。若所有权重均为 1，则 Q 属于情形 (1)。否则，引理 5.14 表明 Q 至少有两条非单位边。两条非单位边不能相邻，否则会形成一个满子箭图 $Z_3(m,\ m')$，其中$m,\ m' \geq 4$，这与引理 5.11(2) 矛盾。

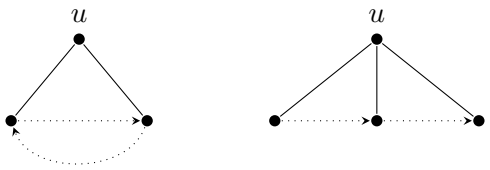
若 $n \geq 5$，则 Q将包含一个满子箭图 $Z_k(m,\ m')$，其中 $m,\ m' \geq 4$，这与引理 5.11(2) 矛盾。因此 $n = 4$。恰有两条对边的权重不是单位权重，且根据引理 5.14，它们的权重必须相等。根据引理 5.6，应用于三个连续顶点时，该权重为 [4] 或 [5]。 □

5.5. **归纳法的准备工作**。 在定理 2.4的证明中，我们使用以下引理进行归纳。在下面的图中，点划箭头表示有向路径；在不需要时省略权和边的定向。

引理 5.16。 设 $Q \in \mathbf{D}$ 是 2-有限的， $\mathcal{C} \subseteq Q$ 是一个至少含有四个顶点的无弦圈，且u 是 $\mathcal{C}$外部的一个顶点。则 u 在 $\mathcal{C}$中至多有两个邻点。若有两个，则它们在 $\mathcal{C}$中相邻。

证明。 由引理 5.15可知， Q 中的每个无弦圈都是有向的。如果 u 在 $\mathcal{C}$ 中恰有两个邻点，且它们不相邻，那么经过 u 的两个无弦圈要求 u处每条边的定向都相反，如下方左图所示。如果 u 至少有三个

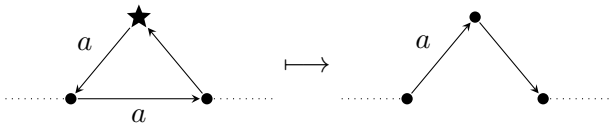
邻点，那么我们考虑沿着 $\mathcal{C}$连续的三个邻点。如下方右图所示，这两个无弦圈要求它们的公共边在 u 处具有相反的定向。



两种情况都会导出矛盾。 □

引理 5.17. 设 $\mathcal{C}$ 是一个权为 $(1, a, a)$ 的有向三角形，其中 $a > 0$。将两条互不相交的路径分别连接到 $\mathcal{C}$的两个不同顶点上，且每条路径仅在一个端点处与 $\mathcal{C}$ 相交。路径的长度可以为零。若至少一条路径上的所有箭的权均为1，则所得箭图与一棵树变异等价。

证明. 若权为 1 的那条箭在 $\mathcal{C}$ 中的一个端点没有连接长度为正的路径，则进行以下突变可得到一棵树。



否则，我们考虑一条所连接路径上的权均为 1 的路径。由引理 5.1 及显然的对称性，可将所得箭图定向为下图左侧所示。以下突变保持箭图的形式不变，并使所连接的路径缩短一条边：



对这条路径的长度进行归纳，即得所述结论。 □

引理 5.18. 设 $Q \in \mathbf{D}$ 是连通的。若它包含一个变异类型为 F_4或 H_4 的有向4-圈，且该圈是其真满子箭图，则 Q 是2-无限的。

证明。 假设 Q 是 2-有限的。设 $\mathcal{C}$是给定的圈，其权按循环顺序为 $([m], 1, [m], 1)$，其中 $m \in \{4, 5\}$。由连通性可知，只需考虑由 $\mathcal{C}$和一个与其相邻的顶点 u 所构成的满子箭图。根据引理 5.16， u 在 $\mathcal{C}$中有一个邻点或两个相邻邻点。

若 u 只有一个邻点，则 Q 包含一个满子箭图 $Y_4(m)$ 或 $Z_3(m, m')$，且 $m' \geq 4$，这与引理 5.11矛盾。若 u 有两个邻点，则命题 5.5 表明，在 u 处突变会反转或删除连接它们的边。第一种情况下， $\mu_u(Q) \setminus \{u\}$ 是一个非有向圈，这与引理 5.15矛盾。第二种情况下， $\mu_u(Q)$ 是一个含非单位边的无弦 5-圈，这与命题5.13矛盾。 □

5.6. **证明的完成。** 当所有权均为 1 时，交换矩阵是整数斜对称矩阵。在这种情况下，我们意义下的 2-有限性等价于 [FZ03] 意义下的 2-有限性。因此 [FZ03，定理 86]给出了以下表述。

$$\text{a connected 2-finite quiver with all weights 1 is of finite Coxeter type.} \tag{5.4}$$

利用这一事实，我们完成了定理2.4的证明。

定理 2.4的证明。“若”这一蕴含由（2.3）给出。令 $Q \in \mathbf{D}$ 为连通且 2-有限的。我们通过对其秩进行归纳法，证明 Q 属于有限 Coxeter 型。秩为 1 和 2 的情形显然成立，而秩 3 的情形由命题 5.5得出。

假设 Q 的秩为 $n+1$，其中 $n \geq 3$。选取一个顶点 u 使得 $Q' = Q \setminus \{u\}$连通。由归纳法，Q' 属于有限 Coxeter 型。由于 Q' 的突变可根据（2.2）扩展到 Q，我们可以用其变异类中的任意箭图替换 Q'。每当得到一棵树时，命题 5.9 便完成了论证。

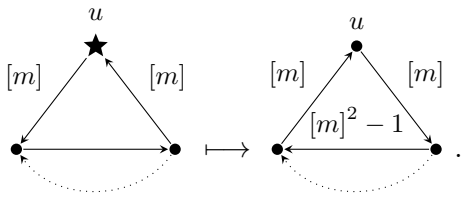
情形 *1*：Q' 的类型为 A_n，B_n，F_4，H_3，或 H_4。取 Q' 为相应的有向路径。按照引理 5.16证明中的同样论证，u 在 Q'中至多有两个邻点。若它只有一个邻点，则 Q是一棵树。否则，Q 存在唯一一个无弦圈 $\mathcal{C}$，并有路径连接到该圈的两个顶点。我们考察命题 $\mathcal{C}$ 给出的 5.13 中的各种可能性。

首先假设 $\mathcal{C}$是一个三角形。若其权为 $(1, [m], [m])$，且 $m \in \{3, 4, 5\}$，则引理 5.17 推出 Q与一棵树变异等价，因为 Q' 至多有一条非单位边。若其所有权均为 $[5],$，则 $\mu_u(Q)$ 是上述权为 $(1, [5], [5])$ 的情形。

若 $\mathcal{C}$ 至少有四个顶点且所有权均为 1，则 $\mathcal{C}$之外的任何非单位边都会产生一个满子箭图 $Y_k(m)$，其中 $m \geq 4$，这与引理 5.11(1) 矛盾。因此，Q 的所有权均为 1，故可应用 (5.4)。

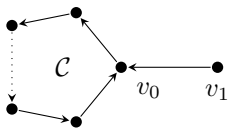
最后，若 $\mathcal{C}$ 是一个变异类型为 F_4 或 H_4的四环，则引理 5.18 推出 $Q = \mathcal{C}$，其变异类型已知。

情形 2：Q' 的类型为 D_n，其中 $n \geq 4$。根据命题 5.13(1)，取 Q' 为所有权均为 1 的有向 n-圈。由引理 5.16，u在 Q'中有一个邻点或两个相邻邻点。在第一种情形下，Q 是 $S_{2\,1\,1}^{n-3}$的树的重新定向，$,(m)$，其中某个 $m \geq 3$，故由引理 5.4 可得一棵树。在第二种情形下，命题 5.5 表明包含 u 的三角形是有向的，其权为 $(1, [m], [m])$，且 $m \in \{3, 4, 5\}$。在 u处突变得到



若 $m > 3$，则 $\mu_u(Q) \setminus \{u\}$ 是一个非有向圈，这与引理5.15矛盾。因此$m = 3$，且 $\mu_u(Q)$ 是所有权均为 1 的有向 $(n+1)$-圈，其类型为 D_{n+1}，由命题5.13(1) 得出。

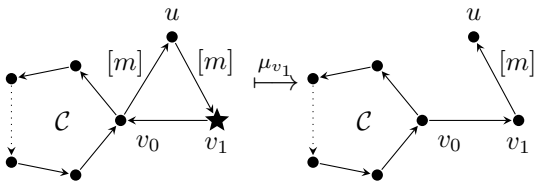
情形 *3*：Q' 的类型为 E_n，其中 $n = 6$，7，8。根据引理5.4，取 $Q' = S_{2\,1\,1,\ ,}^{n-4}$，它由一个有向 $(n-1)$-圈 $\mathcal{C}$ 和一个连接在 v_0 处的叶节点 v_1 组成，所有权均为 1：



根据引理5.16，u在 $\mathcal{C}$中至多有两个邻点，且这样的两个邻点必须相邻。若 u 在 $\mathcal{C}$中没有邻点，那么它仅与 v_1相邻。因此 Q 是$S_{3\,1\,1,\ ,}^{n-4}(3,\ m)$ 的树的重新定向，其中 $m \geq 3$，而引理5.4 给出一棵树。

假设 u 恰好有一个邻点 x 在 $\mathcal{C}$中。如果 u 不与 v_1相邻，那么 u与 x 之间的边的权必为 1：否则，Q 将包含一个满子箭图 $Y_4(m)$，其中$m \geq 4$，这与引理5.11（1）矛盾。因此所有权均为 1，且（5.4）适用。现在假设

也 u 与 v_1相邻。如果 $x = v_0$，那么命题5.5 给出如下突变，其中 $m \in \{3, 4, 5\}$:



所得结果是 $S^{n-4}_{3\,1\,1,,}(3, m)$ 的树的重新定向，因此引理 5.4 给出一棵树。若 $x \neq v_0$，则边 $v_1 - u$ 和 $u - x$ 属于一个长度至少为 4 的无弦圈，且其余边的权均为 1。由于这两条边相邻，根据命题 5.13，它们的权均为 1。因此，式（5.4）适用。

最后，假设 u 在 $\mathcal{C}$中有两个邻点。情形 2 中的论证表明， u与 $\mathcal{C}$ 之间的两条边的权均为 1。若 u 也与 v_1相邻，则这条边属于一个无弦圈，且圈中其余边的权均为 1。根据命题 5.13，该边的权也为 1。因此，无论哪种情况， Q 的所有权均为 1，式（5.4）适用。□

致谢。第一作者获日本学术振兴会科研费资助，项目编号为 25KJ1438。第二作者曾获日本学术振兴会科研费资助，项目编号为 JP21K13761。

References

[AC25] Ryota Akagi 和 Zhichao Chen。实 C G *arXiv* –、–结构与簇代数的符 *preprint arXiv:2509.06486* 2025 号相容性。[Asa21] Sota Asai。实格罗滕迪克群的墙室结构。 *Advances in Mathematics*，381:107615，2021。[CK26] Roger Casals 和 Kenton Ke。秩为 3 *Algebraic Combina-* 的实箭图的有界性判据。 *torics* 9 2 403 425, 2026 [CL20] Peigen Cao 和 Fang Li。簇代数的充分 g–对性质与分母向量。*Mathematische Annalen*，377(3):1547–1572，2020。[DT24] Drew Damien Duffield 和 Pavel Tumarkin。非整数箭图的范畴化：类型 H_4、 H_3 和 $I_2(2n+1)$。 *Representation Theory*，28:275–327，2024。[DT25] Drew Damien Duffield 和 Pavel Tumarkin。非整数箭图的范畴化：类型 $I_2(2n)$。*Algebras and Representation Theory*，28(3):787–840，2025。[FL23] Anna Felikson 和 Philipp Lampe。变异有限非整数箭图的交换图。 *Jour-* *nal of Geometry and Physics* 188 104811, 2023 。[FT19] Anna Felikson 和 Pavel Tumarkin。秩为 3 *Arnold Math-* 的箭图变异类的几何。[。 *ematical Journal* 5 1 37 55, 2019 *Forum of Mathe-* 23] FT*matics* 11 Anna Felikson 和 Pavel Tumarkin。具有实权的变异有限箭图。 *Sigma*，：e9，2023。[FZ02] Sergey Fomin 和 Andrei Zelevinsky。簇 *Journal of the American* 代数 I：基础。*Mathematical Society* 15 2 497 529, 2002 。[FZ03] Sergey Fomin 和 Andrei Zelevinsky。簇代数 II：有限型分类。 *Inventiones* *mathematicae* 154 1 63 121, 2003 。[FZ07] Sergey Fomin 和 Andrei Zelevinsky。簇代数 IV：系数。 *Compositio Mathematica*，143 1 112 164，2007。[GHKK18] Mark Gross、Paul Hacking、Sean Keel 和 Maxim Kontsevich。簇代数的典范基。 *Journal of the American Mathematical Society*，31(2):497–608，2018。[Lam18] Philipp Lampe。关于附属于非晶体根系的序列的近似周期性。 *Experimental Mathematics*，27(3):265–271，2018。[Mul16] Greg Muller。极大绿色序列的存在性并非箭图突变下的不变量。*The Electronic Journal of Combinatorics*，23(2):P2–47，2016。[Nak26] Tomoki Nakanishi。全无限型的秩为 3 G *Experimental* 的扇的 局部与全局模式。*Mathematics* ，第–27页，2026。[1]

[NZ12] Tomoki Nakanishi 和 Andrei Zelevinsky。关于簇代数中的热带对偶。 *Algebraic groups and quantum groups* 565 217 226, 2012。[Rea14] Nathan Reading。通用几何簇代数。 *Mathematische Zeitschrift*, 277(1-2):499–547, 2014。[RS16] Nathan Reading 和 David Speyer。簇代数的组合框架。*Mathematics Research Notices. IMRN* 1 109 173, 2016。[RS18] Nathan Reading 和 David Speyer。仿射型簇代数的Cambrian框架。 *International Transactions of the American Mathematical Society* 370 2 1429 1468, 2018。[Yur25] Toshiya Yurikusa。有限型与 g-扇的完备性。 *arXiv preprint arXiv:2512.21603*, 2025。

Graduate School of Mathematics, Nagoya University, Chikusa-ku, Nagoya, 464-0813, Japan
Email address: ryota.akagi.e6@math.nagoya-u.ac.jp

Department of Mathematics, Osaka Metropolitan University, Osaka 558-8585, Japan
Email address: yurikusa@omu.ac.jp