arXiv:2611.31955v1 [cs.DS] 24 Nov 2026

矩阵-向量复杂度的新视角

CeciliaChen* EthanN. W. Epperly*,† Michael W. Mahoney*,†,‡

Raphael A. Meyer*, †, ‡ JohnUrschel§{cdchen, eeppe

rly, ram900}@伯克利.edu, mmahoney@stat.伯克利.edu, urschel@mit.edu

2026年11月25日

摘要

最坏情况矩阵-向量复杂度理论一直有助于指导快速线性代数算法的设计。然而，在对单侧方法的研究中，理论与实践之间存在巨大差距。这类方法使用与$\boldsymbol{A}$的矩阵-向量乘积，但不使用$\boldsymbol{A}^\intercal$。在实践中，对于求解线性方程组等基础问题，GMRES 等单侧方法通常是最快的。相比之下，最坏情况分析往往会得出悲观的结果，例如表明：除非读取整个矩阵$\boldsymbol{A}$，否则单侧方法无法求解条件数为理想值 1 的线性方程组。这类最坏情况复杂度结果无法反映现实世界中的实际经验。

为解决这一问题，本文提出了一种不同的最坏情况矩阵-向量复杂度理论，其中纳入了$\boldsymbol{A}$的特征值在复平面中的位置信息。具体而言，我们通过矩阵$\boldsymbol{A}$的谱条件数$\kappa = |\lambda_{\max}(\boldsymbol{A})|/|\lambda_{\min}(\boldsymbol{A})|$以及角特征值间隙 θ来刻画矩阵的“良态性”；角特征值间隙定义为不包含任何特征值的最大扇区的角度。在这些参数下，我们建立了匹配的复杂度上下界，表明线性系统问题的单侧复杂度为 $\Theta(\theta^{-2}\kappa^{\pi/\theta})$。这些结果连接了关于正定矩阵（$\theta = 2\pi$）、对称不定矩阵（$\theta = \pi$）和一般矩阵（$\theta = 0$）的已有复杂度结果。该复杂度结果为单侧方法在实践中的成功提供了严格解释，因为它表明，当$\boldsymbol{A}$的特征值位于复平面不足一半的区域内时（$\theta > \pi$），单侧方法优于“最优”的双侧算法（CGN，复杂度为 $\Theta(\kappa)$）。我们的分析依赖于数值分析、复分析的多个子领域以及信息论复杂度中的工具，并以模块化方式呈现结果，以便今后使用。

1 引言

最坏情况分析 是计算理论的核心。通过评估算法在每一种输入上的表现，最坏情况分析为从业者提供了简单可靠的指导，帮助他们判断哪些方法最有效地利用计算资源。

然而，在研究涉及数值量的问题时，合适的最坏情形输入概念可能并不明确。例如，考虑这样一项任务：通过查询非负函数 $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}_+$，计算 $(x)\,\mathrm{d}xf$ 的积分的（$1\pm\varepsilon$）近似值。显然，任何算法都无法在最坏情况下仅凭有限次查询完成这一目标，因为函数 f 的质量可以集中在区间中任意小的子集上。为了解决这个问题，我们必须假设函数f具有良好性质。例如，我们可以假设 f 的导数有界 [Bak59，TWW88]。

*加州大学伯克利分校，伯克利，加利福尼亚州 94720，美国

†劳伦斯伯克利国家实验室，Cyclotron 路 1 号，伯克利，加利福尼亚州 94720，美国

‡国际计算机科学研究所，伯克利，加利福尼亚州 94704，美国 §麻省理工学院，马萨诸塞大道 77 号，剑桥，马萨诸塞州 02139，美国

不同的情境必然需要不同的复杂度度量，以量化一个问题具有多大程度的“良好性质”。信号处理方法可能会假设，数据是由最高频率有界的信号生成的 [Sha49，TLD+10，CFG14]。矩阵补全方法通常假设数据具有相干性 [Rec11，CR12]。特征值算法通常假设输入矩阵的特征值之间存在间隙 [KW92，Saa11，MMM24，CEM+26]。只要我们找到了能够描述复杂度的度量，最坏情况分析就能帮助我们判断哪种算法最适合该问题。反过来说，如果最坏情况分析无法描述算法在实践中的表现，那就说明正确的复杂度参数尚未确定。

传统上，理论计算机科学对线性代数的研究一直依赖于针对线性代数问题的粗粒度复杂度度量。这些度量通常仅取决于奇异值，例如条件数（最大奇异值与最小奇异值之比）或奇异值之间的最小间隔 [PV24、MMM24、DEM26]。然而，数值分析领域的认识是，对于非对称矩阵，许多算法的行为取决于特征值在复平面 [DTT98、Gre97、Tre19]中的位置。（请注意，即使是实非对称矩阵通常也具有复特征值。）我们认为，要进行有用的理论计算机科学式最坏情况分析，就需要能够反映这种位置的复杂度度量。

通过研究单侧矩阵–向量算法这一类算法，可以最直观地理解特征值定位对复杂度的重要性。这类算法通过正向矩阵-向量乘积（矩阵-向量乘法）$\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 访问输入矩阵$\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，但无法访问转置乘积$\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{A}^\mathsf{T}\boldsymbol{x}$。这类算法得到了广泛应用，研究它们的原因也有很多，详见下文。然而，在单侧矩阵-向量复杂度的研究中，理论与实践之间存在着巨大的差距。

在现有理论中，求解线性系统的复杂度通常仅以条件数为参数，因此，即使 $\Theta(n)$ 次矩阵-向量乘法也只是求解线性系统的平凡代价，任何单侧矩阵-向量算法都无法超越这一代价 =，即使 $\boldsymbol{A}$ 的条件数完美 [DEM26]。双边方法还可以使用转置乘积，并能通过转化为正规方程 $\boldsymbol{A}^\mathsf{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^\mathsf{T}\boldsymbol{b}$求解条件数有界的系统；对于该方程，$\boldsymbol{A}^\mathsf{T}\boldsymbol{A}$ 总是具有正的实数特征值。尽管如此，单侧算法在实践中表现出色，且往往远胜于这些双边方法。因此，我们必须得出结论：要刻画单侧方法求解线性系统的复杂度，需要新的复杂度参数。

本文以线性方程组求解为贯穿全文的示例。我们将展示如何构建一种有意义的最坏情形理论，用于分析采用单侧矩阵-向量乘法方法求解线性系统的复杂度。具体而言，我们通过两个参数来刻画特征值定位：两个谱条件数

$$\mathrm{cond}_{\mathrm{eig}}(\boldsymbol{A}) := \frac{\max_i |\lambda_i(\boldsymbol{A})|}{\min_i |\lambda_i(\boldsymbol{A})|}$$

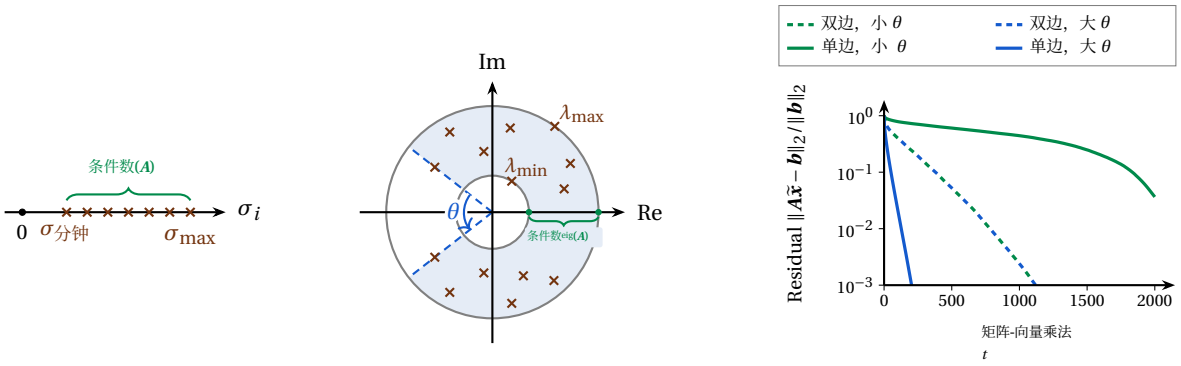
和角特征值间隙

$$\measuredangle(\boldsymbol{A}) := \max\left\{\theta \in (0, 2\pi] : \text{存在一个角度为 } \theta \text{ 的扇区，其中不包含} \boldsymbol{A} \text{ 的任何特征值。}\right\}$$

参见图1查看可视化示意图。利用这两个参数，我们构建了一个关于单侧矩阵-向量算法的描述性理论。我们的主要结果可概括如下。

定理1.1（$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$的单侧矩阵-向量复杂度，非正式表述）。考虑具有角特征值间隙$\measuredangle(\boldsymbol{A}) \geq \theta$的正规矩阵$\boldsymbol{A}$这一类。

(a) 有界谱条件数。 对于谱条件数有界的此类矩阵 $\mathrm{cond}_{\mathrm{eig}}(\boldsymbol{A}) \leq \kappa$，将线性方程组求解至残差精度 ε 所需的单侧矩阵-向量复杂度为 $t_\star = \Theta(\theta^{-2}\kappa^{\pi/\theta}\log(1/\varepsilon))$。



(a)奇异值　　**(b)** 特征值　　**(c)**求解器收敛

图1： 矩阵及其条件性的三个方面的可视化。**子图 (a)**：矩阵的奇异值始终为正实数，条件数 $\mathrm{cond}(\boldsymbol{A})$ 是最大奇异值与最小奇异值之比。**子图 (b)**：对于一般矩阵，特征值可能位于复平面上的任意位置。谱条件数 $\mathrm{cond}^{\mathrm{eig}}(\boldsymbol{A})$ 是特征值绝对值中的最大值与最小值之比。角间隙 $\theta = (\boldsymbol{A})$ 是复平面上不包含任何特征值的最大圆扇形的角度。由 $(\mathrm{cond}^{\mathrm{eig}}(\boldsymbol{A}), (\boldsymbol{A}))$ 参数化的蓝色阴影区域称为极坐标矩形。**子图 (c)**：我们对两个矩阵分别使用单边方法（GMRES）和双边方法（CGN）进行计算，这两个矩阵的谱条件数均为 $\kappa = 200$。一个矩阵的角间隙较小，为 $\pi/2$；另一个矩阵的角间隙较大，为 $3\pi/2$。与我们的理论一致，角间隙较大的矩阵使用单边方法收敛更快，而角间隙较小的矩阵使用双边方法收敛更快。

(b) 无界谱条件数。 对于任意此类矩阵和任意常数 θ，将线性方程组求解至后向精度 ε 所需的单侧矩阵-向量复杂度为 $t_\star = \Theta_\theta(\varepsilon^{-\pi/\theta})$。

该定理包含两个结果，它们使用不同的误差度量（残差与后向误差），并作出不同的假设（有界谱条件数与无界谱条件数）。在第一个结果中，我们证明，如果条件数有界，则复杂度取决于所需精度的对数，其前因子 $\theta^{-2}\kappa^{\pi/\theta}$ 取决于角特征值间隙和谱条件数。在第二个结果中，我们证明，如果条件数无界，则复杂度以多项式方式取决于所需精度，其速率由角特征值间隙控制。两个结果都针对复正规矩阵类，即由所有具有正交归一特征向量的矩阵组成的矩阵类。对于非正规矩阵，我们获得了类似的复杂度上界，其中包含一个取决于特征向量矩阵条件数的因子。

定理1.1 可与双边方法的已知复杂度结果相比较；这些结果表明，正规方程共轭梯度法（CGN）$\boldsymbol{A}^\intercal\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^\intercal\boldsymbol{b}$ 在 $\mathrm{cond}(\boldsymbol{A}) \le \kappa$的矩阵类中是最优的，其复杂度为 $\Theta(\kappa\log(1/\varepsilon))$ [DEM26, Sha26]。特别地，我们得到如下结论。

> 当且仅当特征值最多位于复平面的一半内时，最优单边求解器（*GMRES*）的复杂度低于“最优”双侧算法（*CGN*）。　　复平面的一半（$\theta > \pi$）。

这一结果为单侧方法在实际应用中优于双边方法的现象提供了清晰的复杂性理论解释，并精确刻画了单侧方法何时以及为何具有优势。

我们注意到，与这一思想稍有相似的论述在数值分析中由来已久。当特征值至多填充复平面的一半时，已知 Richardson 迭代及其他几种 Krylov 方法能够收敛 [Eie89, CG15] 并且，对于若干特征值几何结构，GMRES 的收敛界也是已知的

表 1： 对于 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 达到残差精度 $\|\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{b}\|_2 \le \varepsilon\|\boldsymbol{b}\|_2$，任意正规矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最坏情况矩阵-向量复杂度，其中条件数 $\mathrm{cond}(\boldsymbol{A}) \le \kappa$。在最后一行中，我们还假设（$\boldsymbol{A}$）$\ge \theta$。近期工作[DEM26] 为每种情形下的一般随机化算法提供了紧下界；早期工作见 [NY83、TWW88、NRT92、BHSW20] 。对于半正定和对称系统，单边方法与双边方法之间没有差异。

				相关引用		
矩阵 $\boldsymbol{A}$	访问	最优矩阵-向量乘法次数	实现方法	Alg.	上界	下界
Psd	–	$\Theta(\sqrt{\kappa}\log(1/\varepsilon))$	在 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 上运行 MINRES	[PS75]	[Mei63, Kan66]	[NY83, BHSW20, DEM26]
对称	–	$\Theta(\kappa\log(1/\varepsilon))$	共轭梯度法作用于 $\boldsymbol{A}^\mathsf{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^\mathsf{T}\boldsymbol{b}$	[HS52]	[Mei63, Kan66]	[TWW88, DEM26]
一般	双侧	$\Theta(\kappa\log(1/\varepsilon))$	在 $\boldsymbol{A}^\mathsf{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^\mathsf{T}\boldsymbol{b}$ 上应用共轭梯度法	[HS52]	[Mei63, Kan66]	[TWW88, DEM26]
一般	单边	$\Theta(n)$ 即使在 $\kappa = 1$	GMRES 作用于 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$	[SS86]	–	[NRT92, DEM26]
一般	单边	$\Theta(\theta^{-2}\kappa^{\pi/\theta}\log(1/\varepsilon))$	在 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 上应用 GMRES	[SS86]	本文	本文

特征值几何结构 [SS86，DTT98，Emb22]。此外，许多针对非对称问题的预条件器，其设计意图都是将特征值聚集到复平面上尽可能小的区域内 [EVO06，Sid03，BGL05]。然而，据我们所知，数值分析领域尚无文献利用角特征值间隙刻画单侧算法的复杂度，也没有文献明确表述这个框中最大值。特别是，本文首次为单侧算法能够有效运行建立了特征值定位的充要条件。

1.1 矩阵-向量算法与复杂度：单侧与双侧 d

目前已知最快的线性代数算法中，相当大一部分是矩阵-向量算法，它们仅通过矩阵-向量乘积（matvec）操作 $z \mapsto Az$ 和 $z \mapsto A^\mathsf{T}z$ 与矩阵 A 交互。若算法使用这两种基本操作，则称为双侧算法；若只使用第一种基本操作，则称为单侧算法。矩阵-向量算法的例子很多，包括用于特征值问题的幂法和 Krylov 方法 [Lan50, KW92, Saa11], , 用于线性系统的共轭梯度算法及相关方法 [HS52, Gre97, Saa03, BJH+25]，随机迹估计算法 [Gir87, Hut89, MMMW21, PCK22, ETW24], , 以及许多其他算法 [BCW22, BKM22, BN23, Che24, CKH+25]。

不断发展的单侧或无转置线性代数 [BHOT24、DEM26、HHT26] 旨在理解单侧算法与双侧算法的相对能力。人们有许多理由希望了解单侧算法的能力。

(a) **转置矩阵-向量乘法可能代价高昂或无法执行。** 在某些场景中，转置矩阵-向量乘法的代价远高于前向矩阵-向量乘法。例如，在 GPU 上，由于架构方面的原因，前向矩阵-向量乘法的成本可能低于转置矩阵-向量乘法；在大规模机器学习应用中，利用神经网络雅可比矩阵进行前向矩阵-向量乘法需要对网络执行一次前向传播，而转置矩阵-向量乘法则需要进行反向传播。在其他应用中，转置矩阵-向量乘法可能根本无法执行。例如，在算子学习中，每次矩阵-向量乘法都需要求解一个偏微分方程。前向矩阵-向量乘法和转置矩阵-向量乘法分别对应不同的偏微分方程，而人们通常只能获得其中一种方程的求解器。

(b) **原变量与对偶变量。** 对于问题 $\min_{\boldsymbol{x}}\max_{\boldsymbol{y}} \boldsymbol{y}^\mathsf{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + f(\boldsymbol{x}) - g(\boldsymbol{y})$，前向矩阵-向量乘法访问原变量的梯度，而转置矩阵-向量乘法访问对偶变量。因此，单侧算法是仅使用原变量的方法，理解其能力是优化中的一个自然问题。

(c) **解释 pr 践。** 即使在转置矩阵-向量乘法成本低廉且可用的场景中，单侧

算法在实践中也常常比已知的双侧算法更快。因此，理解单侧算法对于理解实际应用中的算法至关重要。

现有的线性系统复杂性理论为单侧算法描绘了一幅黯淡的图景；请参见表 1 ，其中总结了现有结果。有关研究单侧算法的更多动机，请参见 [HHT26]。

1.2 为什么角间隙有帮助：复平面上的多项式

为了理解线性系统问题的单侧复杂度，考虑最广泛使用的算法会很有帮助，该算法称为广义最小残差 (GMRES) 方法 [SS86]。忽略实现方面的问题，该方法很简单：首先，它生成 Krylov 子空间

$$\mathcal{K}_t(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}) := \operatorname{span}\{\boldsymbol{b},\boldsymbol{A}\boldsymbol{b},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{b},\ldots,\boldsymbol{A}^{t-1}\boldsymbol{b}\}. \tag{1.1}$$

然后，它输出该空间中的向量 $\tilde{\boldsymbol{x}} \in \mathcal{K}_t(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$，使残差 $\|\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{b}\|_2$ 最小。这一策略很自然：它反复应用矩阵-向量预言机，然后返回由所生成向量的张成空间中的最佳候选向量。

由于 GMRES 的输出位于 Krylov 子空间中，因此它具有 $\tilde{\boldsymbol{x}} = p(\boldsymbol{A})\boldsymbol{b}$ 的形式，其中 p 是一个次数为 $(t-1)$ 的多项式。相应地，GMRES 的残差为

$$\|\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{b}\|_2 = \|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{A}p(\boldsymbol{A})\boldsymbol{b}\|_2 = \|(\mathbf{I}-\boldsymbol{A}p(\boldsymbol{A}))\boldsymbol{b}\|_2 = \|q(\boldsymbol{A})\boldsymbol{b}\|_2 \quad \text{where } q(z) = 1 - zp(z).$$

多项式 q 的次数至多为 t，并且满足条件 $q(0) = 1$。因此，GMRES算法确定了使向量 $q(\boldsymbol{A})\boldsymbol{b}$的范数最小的多项式：

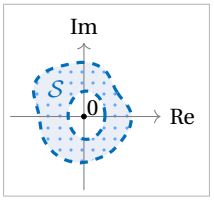
$$\|\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{b}\|_2 = \min_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{K}_t(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})} \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}\|_2 = \min_{\substack{\deg(q)\le t\\ q(0)=1}} \|q(\boldsymbol{A})\boldsymbol{b}\|_2. \tag{1.2}$$

因此，当且仅当存在一个多项式，使得 $\|q(\boldsymbol{A})\boldsymbol{b}\|_2$较小时，GMRES算法才能成功。由于矩阵 $q(\boldsymbol{A})$ 的特征值为 $q(\lambda_i(\boldsymbol{A}))$，这就意味着需要证明：存在一个次数为 t的滤波多项式 $q(z)$，满足 $q(0) = 1$，同时在 $\boldsymbol{A}$ 的特征值上较小。通过平凡插值，使用次数为 n 的多项式总能实现这一点。问题在于，何时存在满足 $t \ll n$的次数为 q 的多项式。

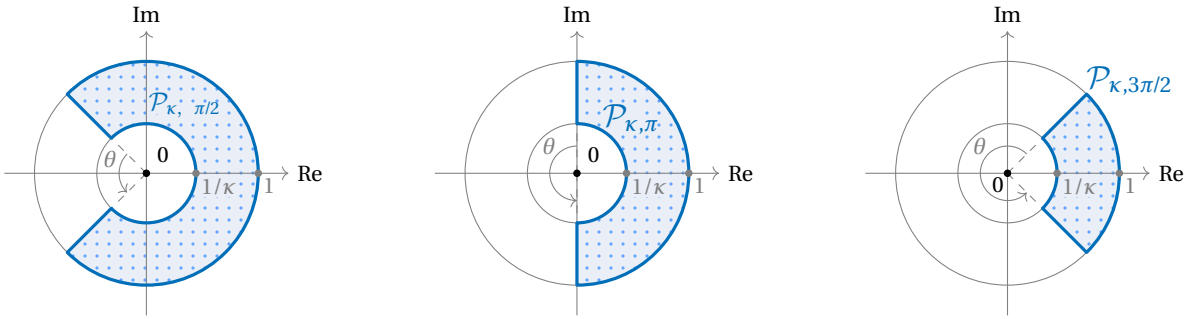
考虑到这种多项式表述，一侧方法（如GMRES）要想成功，为什么必须存在角间隙就很清楚了。事实上，直接应用最大模原理（事实 3.3）可知，任何满足 $q(0) = 1$ 的多项式，都不可能在环绕原点的区域上处处很小。

命题 1.2 （没有角间隙就不存在滤波多项式）。 设 $\mathcal{S} \subset \mathbb{C}$ 是一个包含围住原点的简单闭曲线的集合。那么，任何满足 $q(0) = 1$ 的多项式都不可能在 $\mathcal{S}$ 上很小：

$$\max_{z\in\mathcal{S}} |q(z)| \ge 1.$$



也就是说，在任何允许围绕原点的集合 $\mathcal{S}$ 上都不存在滤波多项式，例如右侧所示的集合。因此，只有当我们令 q 对 $\boldsymbol{A}$ 的特征值进行精确插值时，GMRES 才能在所有特征值位于 $\mathcal{S}$ 中的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 上成功。这就恢复了 $t = n$ 次矩阵-向量乘法这一平凡的代价。然而，如果我们要求存在角特征值间隙，这一失败点就会消失，正如我们将在下一节中形式化说明的那样。



(a) $\theta < \pi$：单侧方法困难。 **(b)** $\theta = \pi$：与双侧方法相当。 **(c)** $\theta > \pi$：单侧方法的快速情形。

图2： 极坐标矩形的可视化 $\mathcal{P}_{\kappa,\,\theta}$ 具有不同的角度参数 θ。对于任意参数 $\theta > 0$，我们的主要结果定理1.4 和 1.5 表明，单侧方法使用少于平凡矩阵-向量乘法复杂度 $\Omega(n)$ 次矩阵-向量乘法即可收敛到一个解。然而，我们可以比较单侧方法与求解正规方程的双侧方法何时更快或更慢。对于像 **子图(a)**这样的系统，其角间隙较小，单侧方法比求解正规方程的方法收敛得更慢。在恰好 $\theta = \pi$时，如 **子图(b)**所示，单侧方法与双侧方法一样快。当角间隙变大后，如 **子图(c)**所示，单侧方法在理论上优于那些基于正规方程的方法。这与图1子图(c)中的实验图一致。

1.3 主要结果I：有界谱条件数

我们的第一个结果针对满足以下条件的矩阵 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$：其谱条件数 $\mathrm{cond}^{\mathrm{eig}}(\boldsymbol{A}) \le \kappa$ 有界，并且具有非平凡的角特征值间隙 $\mathrm{gap}(\boldsymbol{A}) \ge \theta > 0$。任何这样的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 都可以乘以一个复数进行缩放，使其特征值位于以下集合中

$$\mathcal{P}_{\kappa,\theta} := \left\{ r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} \,:\, 1/\kappa \le r \le 1,\, |\phi| \le \pi - \theta/2 \right\},$$

我们称之为极坐标矩形；见图2。我们的主要技术结果给出了构造适用于该集合的滤波多项式所需次数的精确上下界。

定理1.3 （极坐标矩形上的滤波多项式）。 固定 $\kappa \ge 600, \theta \in (0, 2\pi]$，以及 $\varepsilon \in (0,1)$。令 $t_\star$ 为满足以下条件的滤波多项式 q 的最小次数 t:

$$q(0) = 1 \quad \textit{and} \quad |q| \le \varepsilon \ \textit{on}\ \mathcal{P}_{\kappa,\theta}.$$

那么 $t_\star \asymp \theta^{-2}\kappa^{\pi/\theta}\log(2\pi/\varepsilon)$。

由此，我们得到定理1.1的第（a）项的精确表述。

定理 1.4 （主要结果I：有界谱条件数）。 考虑一个可对角化矩阵$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{X}^{-1}$，其谱条件数至多为 κ，角特征值间隙至少为 θ。那么，*GMRES*算法满足以下复杂度界

$$\|\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{b}\|_2 \le \varepsilon\|\boldsymbol{b}\|_2 \quad \textit{after} \quad t = \left\lceil 1 + (\pi^3\mathrm{e})\,\theta^{-2}\kappa^{\pi/\theta}\log\left(\frac{6\pi\,\mathrm{cond}(\boldsymbol{X})}{\varepsilon}\right)\right\rceil \ \textit{matvecs.}$$

反之，任何单侧算法若要对所有具有该谱条件数和角特征值间隙的正规矩阵，以 *2/3* 的概率生成这样的 $\tilde{\boldsymbol{x}}$，则必须使用 $t \gtrsim \theta^{-2}\kappa^{\pi/\theta}\log(1/\varepsilon)$ 次矩阵-向量乘法。

回顾一下，如果一个矩阵拥有一组正交归一特征向量，那么它就是正规矩阵；这等价于它拥有一个条件数为 1 的特征向量矩阵 $\boldsymbol{X}$。因此，这一结果表明，对于正规矩阵，将 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 求解至 ε- 小的残差误差，其矩阵 – 向量复杂度为 $\Theta(\theta^{-2}\kappa^{\pi/\theta}\log(1/\varepsilon))$。

对于非正规矩阵，我们也能得到相同的复杂度结果，但特征向量条件数会带来一个对数因子。

将 GMRES 的这一复杂度结果与其他算法进行比较可能会很有启发性。为简便起见，考虑$\boldsymbol{A}$为正规矩阵且 ε 为常数的情形。当 $\theta = 2\pi$时，特征值位于同一条射线上，且该矩阵为半正定矩阵（允许乘以复相位进行缩放）。在这种情况下，GMRES 的复杂度为$\Theta(\sqrt{\kappa})$，与所有（可能为双边的）矩阵-向量乘法算法中的最优复杂度相匹配。接下来回顾一下，每个对称矩阵都具有实特征值，因此经过缩放后，其特征值位于实区间 $\mathcal{I}_\kappa := [-1, -1/\kappa] \cup [1/\kappa,\ 1]$内。再经过一次缩放后，这是$\mathcal{P}_\kappa$、$_\pi$的子集。当然，并非所有具有角特征值间隙 π 的矩阵都是实对称矩阵。然而，在$\mathcal{P}_\kappa$、$_\pi$ 上的单边方法，以及求解对称线性系统的双边方法，其最优复杂度均为$\Theta(\kappa)$。也就是说，与特征值仅位于实轴上相比，即使特征值填满复平面的半边，我们也无需付出额外代价。

比较单边方法和双边方法的关键阈值是 $\pi = \theta$。当 $\pi < \theta \le 2\pi$ 时，GMRES 可在少于 $\mathcal{O}(\kappa)$ 次矩阵-向量乘法内收敛，其速度快于任何求解正规方程的方法。另一方面，当 $\theta < \pi$ 时，可以证明，单边方法所需的矩阵-向量乘法次数多于求解正规方程的方法。

1.4 主要结果II：无界谱条件数

对于谱条件数无界甚至为无穷大的矩阵 $\boldsymbol{A}$，不存在任何高效的单边或双边矩阵-向量算法能够保证残差较小 $\|\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{b}\|_2 \le \varepsilon\|\boldsymbol{b}\{$v15>。不过，还有一种不同且自然的误差概念 —— 后向误差，在这种误差度量下，可以得到非平凡且与 κ 无关的复杂度结果。

若存在扰动 $\boldsymbol{\Delta A}$ 使得向量 $\tilde{\boldsymbol{x}}$ 满足以下条件，则称其为方程 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的 ε-后向误差解：

$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{\Delta A})\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b} \quad \text{and} \quad \|\boldsymbol{\Delta A}\|_2 \le \varepsilon\|\boldsymbol{A}\|_2. \tag{1.3}$$

后向误差这一概念是合理的。它反映了这样一个事实：在对包含现实世界数据的矩阵进行数值计算时，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素本身就带有噪声或测量误差，而我们在用浮点数表示 $\boldsymbol{A}$ 时又会引入进一步的不精确。因此，从实际应用者的角度来看，将系统求解到输入受到足够小的扰动这一程度（在某种意义上），就是算法所能达到的最高精度。后向误差分析可追溯至计算机科学的早期，在 von Neumann 和 Goldstine 的著作中已有隐含体现 [vNG47] 以及 Turing 的著作中 [Tur48], ; Wilkinson 因系统地发展了后向误差分析，于 1970年 获得图灵奖。

Derezi´nski、Rebrova 和 Nakatsukasa 最近的工作 [DNR26] 展示了一种矩阵-向量算法，可将半正定线性系统求解至后向误差 ε，使用 $\mathcal{O}(\varepsilon^{-1/2})$ 次矩阵-向量乘法，且与 $\boldsymbol{A}$ 的条件数无关。对于一般矩阵，他们提出了一种双侧算法，需要 $\mathcal{O}(\log(n)\cdot\varepsilon^{-1})$ 次矩阵-向量乘法。

利用我们的方法，我们在仅假设存在特征值角间隔的情况下，为单边线性方程组求解建立了与条件数无关的结果。

定理1.5 (主要结果 II：无界谱条件数)。 考虑一个可对角化矩阵$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{X\Lambda X}^{-1}$，其角特征值间隙至少为 θ。那么，*GMBACK* 算法至多经过以下次数后，即可得到一个 ε-后向误差解

$$t \lesssim \theta^{-1}\left(\frac{2\,\mathrm{cond}(\boldsymbol{X})}{\varepsilon}\right)^{\pi/\theta} \textit{ one-sided matrix–vector products.}$$

反之，对于具有该角特征值间隙的所有正规矩阵，任何能以 *2/3* 的概率达到此类保证的单侧算法都必须使用 $t \gtrsim \theta^{-1}\varepsilon^{-\pi/\theta}$ 次矩阵-向量乘法。

表 2： 结果概览。我们的一般流程是将矩阵向量乘法复杂度问题归约为所需多项式逼近次数的问题。接着，我们将逼近次数与特别选取的格林函数的值联系起来。最后，我们给出格林函数的界，从而完成主要结果。请注意，所有引入的定理均为文献中的已有结果。匕首符号 † 表示 定理 1.5 中的下界并未直接关联到多项式逼近问题，而是通过使用引入的定理 1.11 进行归约证明。

误差度量	界	主要结果	从矩阵-向量乘法到多项式	多项式到格林函数	界定格林函数
残差	上界	定理 1.4	事实 1.6	定理 3.2	定理 4.1
残差	下界	定理 1.4	定理 1.7	定理 3.2	定理 5.1
反向	上界	定理 1.5	定理 1.10	定理 7.1	定理 7.4
反向	下界	定理1.5†	–	–	–

请注意，当 $\theta = 2\pi$ 时，特征值位于正实轴上，因此我们得到了 Derezi´nski 等人的 $\mathcal{O}(\varepsilon^{-1/2})$ 复杂度结果。将半正定情形的结果推广后，我们实现了不受 $\boldsymbol{A}$ 条件数影响的后向误差保证。此外，与求解正规方程所需的 $\mathcal{O}(\log(n)\cdot\varepsilon^{-1})$ 成本不同，我们的保证不依赖于维数n。因此，随着n 增大，对于开区间 $(0,2\pi)$ 中任意固定的 θ，使用单边方法在渐近意义上都比使用最坏情形下名义上最优的方法更快。

此外，Derezi´nski、Mahoney、Meyer 和 Musco [DMMM26] 的工作表明，不存在一种确定性双侧方法，能够以独立于条件数的复杂度求解一般线性方程组。我们证明，对于开区间 $(0,\theta$ 中的每个固定2π，确定性 GMBACK 算法完全能够避免对条件数的依赖。换言之，对于确定性方法，我们已经证明，可以选择运行一种独立于 θ 的双侧方法，或一种独立于 κ的单边方法。然而，确定性方法不可能同时完全独立于二者。

1.5 技术概述

为证明我们的主要定理（定理 1.4 和1.5），我们采用并扩展了数值分 [Gre97析98]，、位势理论 [ABW01、Saf10]，复分析 [Vuo88、Bel20]，以及信息论矩阵-向量复杂度 [DEM26、Sha26]中的工具；参见第 1.7 节，其中讨论了前人的工作。分析首先将矩阵-向量复杂度与低次滤波多项式的存在性保证联系起来。我们将这些存在性结论与复分析中的一个称为格林函数的量联系起来。最后，我们利用复分析中的各种工具来界定格林函数。

在本引言中，我们简要概述每个步骤的核心思想，并在表 2中列出关键定理。残差误差和后向误差的论证略有不同，因此我们先介绍残差误差的论证，再介绍后向误差结果。

1.5.1 步骤 1：矩阵-向量复杂度与多项式

如第1.2节所述，我们有充分理由怀疑，对于特征值属于集合 $\mathcal{S}$ 的矩阵，求解 $\boldsymbol{Ax}$ =b 的复杂度，应当与生成满足以下条件的滤波多项式 q 所需的最低次数$t_\star$ 相当：

$$q(0) = 1 \quad \text{and} \quad \|q\|_{\mathcal{S}} := \max_{z\in\mathcal{S}} |q(z)| \le \varepsilon. \tag{1.4}$$

确实，这一等价关系成立。该联系的前半部分来自以下关于GMRES算法的标准复杂度界。

事实 1.6（矩阵-向量复杂度与滤波多项式：上界 [SS86，命题 4]）。 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个具有分解式 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{X}^{-1}$ 的可逆对角化矩阵，并假设 $\boldsymbol{A}$ 的特征值位于某个紧集 $\mathcal{S} \subset \mathbb{C}$中。那么，如果存在一个满足 方程 （1.4）的 t 次多项式，则 *GMRES*算法可达到以下保证

$$\|\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{b}\|_2 \leq \varepsilon \,\mathrm{cond}(\boldsymbol{X})\|\boldsymbol{b}\|_2$$

经过 t 次单边矩阵-向量乘积后。如果 $\boldsymbol{A}$ 是正规矩阵，则 $\mathrm{cond}(\boldsymbol{X}) = 1$。

事实上，证明可直接由方程 (1.2)得出：

$$\|\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{b}\|_2 \leq \|q(\boldsymbol{A})\boldsymbol{b}\|_2 \leq \|\boldsymbol{X}\|_2 \cdot \|q(\boldsymbol{\Lambda})\|_2 \cdot \|\boldsymbol{X}^{-1}\|_2 \cdot \|\boldsymbol{b}\|_2 \leq \varepsilon \,\mathrm{cond}(\boldsymbol{X})\|\boldsymbol{b}\|_2.$$

要证明相反方向，需要一个信息论下界。以下新结果实现了这一点，我们将在第 6 节中证明该结果。

定理 1.7 （矩阵-向量复杂度与滤波多项式：下界）。 设 $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{C}$ 为非空紧集，且设 $0 < \varepsilon < 1$。假设任何次数至多为 t 且满足 $p(0) = 1$ 的多项式 p 都有$\|p\|_{\mathcal{S}} \geq \varepsilon$。那么，任何一种单侧矩阵-向量乘法算法，输入一个向量 $\boldsymbol{b}$，并使用正规矩阵 $\boldsymbol{A}$进行单侧矩阵-向量乘法，其中该矩阵的特征值位于 $\mathcal{S}$ 中，输出一个向量 $\tilde{}\boldsymbol{x}$，使得 $\|\boldsymbol{A}\tilde{}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|_2 \leq \varepsilon\|\boldsymbol{b}\|_2$ 的概率至少为 2/3，则必须使用至少 $\Omega(t)$ 次矩阵-向量乘法。

证明采用了 Chewi 等人提出的 Krylov 模拟论证。 [CDDPL+24] 并由 Derezi´nski 等人 [DEM26] 以及 Shamir [Sha26]进一步完善。该结果的证明仿照了 Shamir 的论证，而他的论证仅适用于实对称矩阵。我们将 Shamir 的论证推广到复数域，这需要借助复多项式逼近理论 [KP10]。

1.5.2 第 2 步：多项式与格林函数

事实 1.6和定理 1.7 将算法是否存在的问题归结为多项式是否存在的问题。幸运的是，滤波多项式在数值分析中已有广泛研究 [Gre97、DTT98、Saa03、Saa11]，在逼近理论中也有广泛研究 [Saf10]，，并且已有成熟的方法来给出所需滤波多项式次数$t_\star$ 的上下界，使其满足方程 (1.4)。本文借助共形映射来理解次数$t_\star$。下面简要说明基本思路；另一种基于位势理论的论证见 DTT98] 。

假设非奇异矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值位于一个“良好”的紧集 $\mathcal{S}$（具体而言，是一个闭若尔当域）中。区域 $\mathcal{S}$ 可能很难分析，因此难以在 $\mathcal{S}$上显式构造滤波多项式。我们转而研究 共形映射，这是复分析的基本构件之一。共形映射 $\chi\colon \mathcal{Q}_1 \to \mathcal{Q}_2$ 是开集 $\mathcal{Q}_1 \subseteq \mathbb{C}$ 与 $\mathcal{Q}_2 \subseteq \mathbb{C}$ 之间的双射，并且 χ 和 χ^{-1} 都是解析的。复分析的一项重要发现是，共形映射能够（近似地）保留许多我们所关注的多项式性质。因此，我们可以利用共形映射，将 $\mathcal{S}$ 上困难的多项式问题转化为一个定义在简单得多的域上的逼近问题。

我们将使用一种最常见的共形映射构造。根据黎曼映射定理，存在一个共形映射 $\chi_{\mathcal{S}}$，将 $\mathcal{S}$ 的外部映射到单位圆盘 [Bel20]的外部。也就是说，我们取 $\mathcal{Q}_1 = \mathbb{C} \setminus \mathcal{S}$和 $\mathcal{Q}_2 = \mathbb{C} \setminus \mathcal{D}$，其中 $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| \leq 1\}$ 是闭单位圆盘；见 图 3。于是，我们不再尝试在 $\mathcal{S}$上构造滤波多项式，而是专注于在变换坐标 $w = \chi_{\mathcal{S}}(z)$ 中构造滤波多项式。由此得到更简单的优化问题：

$$\min \|\widehat{q}\|_{\mathcal{D}} \quad \text{such that} \quad \widehat{q}(w_\star) = 1$$

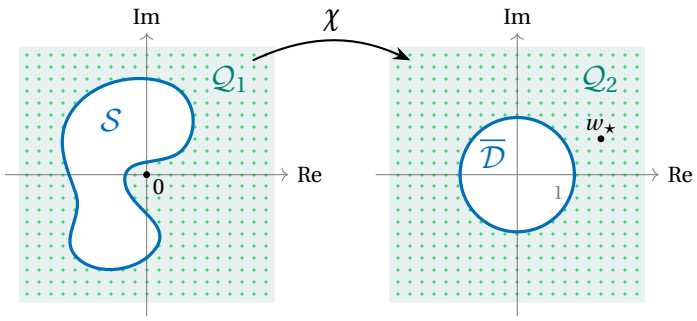


图 3： 第 1.5.2 节中使用的典范共形映射的可视化第 1.5.2 节。对于任意有界单连通区域 $\mathcal{S}$，我们定义补区域 $\mathcal{Q}_1 = \mathbb{C} \setminus \mathcal{S}$。类似地，对于闭单位圆盘 $\mathcal{D}$，其补集为$\mathcal{Q}_2 = \mathbb{C} \setminus \mathcal{D}$。黎曼映射定理保证存在一个从 $\mathcal{Q}_1$ 到 $\mathcal{Q}_2$的共形映射。点 0 映射到点$w_\star := \chi(0)$。一个众所周知的事实是，格林函数在零点处的值$G_{\mathcal{S}}(0) = \log|w_\star|$，描述了在 $\mathcal{S}$上存在滤波多项式所需的最小次数；参见第 1.5.2 节。因此，本文的大部分内容都致力于界定极坐标矩形的格林函数。

其中 $w_\star := \chi_{\mathcal{S}}(0)$。利用最大模原理（事实 3.3）可以证明，对于所有次数为 t 的多项式，$\hat{q}(w) = (w/w_\star)^t$ 是该问题的解。因此，若要使 $\|\hat{q}\|_{\mathcal{D}} \le \varepsilon$ 满足 $\hat{q}(w_\star) = 1$，所需的最低次数恰为 $\lceil (\log|\chi_{\mathcal{S}}(0)|)^{-1} \log(1/\varepsilon) \rceil$。这种记法不太简洁；因此我们引入该共形映射绝对值的对数，称为格林函数：

$$G_{\mathcal{S}}(z) := \log|\chi_{\mathcal{S}}(z)| \quad \text{for } z \notin \mathcal{S}.$$

因此，我们也可以写成：$\hat{q}$ 的最优次数为 $\lceil G_{\mathcal{S}}(0)^{-1} \log(1/\varepsilon) \rceil$。换言之，在 w 坐标中，滤波多项式存在所需的次数与零点处的格林函数成反比。遗憾的是，函数 $\hat{q}(w) = (\chi_{\mathcal{S}}(z)/\chi_{\mathcal{S}}(0))^t$ 并不是关于 z 的 t 次多项式，但渐近而言，它与 t 次多项式非常接近，差异仅在于一些当 $z \to \infty$ [EG83] 时趋于零的项。这就得出了最大

$$t_\star \approx G_{\mathcal{S}}(0)^{-1} \log(1/\varepsilon). \tag{1.5}$$

非正式关系 公式（1.5）是标准的，而下界 $t_\star \ge G_{\mathcal{S}}(0)^{-1} \log(1/\varepsilon)$ 称为伯恩斯坦–沃尔什定理 [Saf10]。然而，尽管关于这一主题的文献十分丰富，我们仍未能找到可比的非渐近上界的参考资料，因此我们在定理 3.2中推导了一个结果。现在，我们先陈述一个专门针对极坐标矩形的版本。

定理 1.8 (滤波多项式与格林函数)。令 $G_{\mathcal{P}_{\kappa,\theta}}$ 为极坐标矩形 $\mathcal{P}_{\kappa,\theta}$的格林函数，令 $\varepsilon \in (0,1)$，并令

$$t_\star := \min\{t : \text{存在一个 } t \text{ 次多项式，使得 } q(0) = 1 \text{ 且 } \|q\|_{\mathcal{P}_{\kappa,\theta}} \le \varepsilon\}.$$

那么 $G_{\mathcal{P}_{\kappa,\theta}}(0)^{-1} \log(1/\varepsilon) \le t_\star \le 1 + G_{\mathcal{P}_{\kappa,\theta}}(0)^{-1} \log(6\pi/\varepsilon)$。

再次强调，下界仅仅是伯恩斯坦–沃尔什定理 [Saf10]。上界的证明并不困难多少，只需依靠对法贝尔多项式的估计 [EG83]。因此，本节的贡献主要在于从文献中确定正确的要素，并以直接明了的方式将它们结合起来。

1.5.3 步骤 3：界定格林函数

结合事实 1.6 和 定理 1.7 以及 定理 1.8，我们将线性方程组求解的单侧矩阵–向量复杂度归结为理解极坐标矩形的格林函数。我们的主要结果给出了匹配的下界和上界 $\Theta(\theta^2 \kappa^{-\pi/\theta})$。

定理 1.9 （B　极坐标矩形的格林函数界)。 固定 $\kappa \geq 600$ 和 $\theta \in (0, 2\pi]$。*Th* *en*

$$\frac{1}{\pi^3 \mathrm{e}}\,\theta^2 \kappa^{-\pi/\theta} \leq G_{\mathcal{P}_{\kappa,\theta}}(0) \leq \frac{5}{2\pi^2}\,\theta^2 \kappa^{-\pi/\theta}.$$

这些界是精确的，数值常数（$\pi^3 \mathrm{e}$）$^{-1} \geq 0.01$ 和 $\frac{5}{2\pi^2} \leq 0.26$ 的差距不超过 26 倍。下界和上界是两个独立的结果，证明方法也各不相同。下界的证明见第 4 节，它运用了调和函数理论中的比较定理，将求界归结为对一个显式函数的计算。上界的证明见第 5 节，它运用了几何函数论中的思想，通过曲线量化在补域 $\mathbb{C}\backslash\mathcal{P}_{\kappa,\theta}$上将 0 与$\infty$ 分隔开有多“困难”。我们力求使这两个证明对没有复分析、调和函数或几何函数论背景的读者也易于理解。

1.5.4 综述：定理 定理 1.4 的证明

有了上述所有准备，我们现在可以证明定理 1.4。首先，定理 1.9 给出了极坐标矩形上格林函数的匹配上下界，其中 $G^{\mathcal{P}_{\kappa,\theta}}(0) \asymp \theta^2 \kappa^{-\pi/\theta}$。其次，定理 1.8 表明，要使极坐标矩形上存在滤波多项式，所需的最小次数 $t_\star$ 为 $t_\star \asymp \theta^{-2}\kappa^{\pi/\theta}\log(1/\varepsilon)$。最后，事实 1.6 利用 $t_\star$ 的这个上界证明，GMRES 会在指定的矩阵 - 向量乘法次数内收敛；而定理 1.7 表明，任何单边方法若使用少于 $\Omega(t_\star)$ 次矩阵-向量乘法，都无法成功。

1.5.5 后向误差的无界谱条件数结果

我们对无界谱条件数的分析基本沿用了有界情形下的分析路径，但也有一些变化。设$\boldsymbol{A}$为一个角特征值间隙为 $\Theta(\boldsymbol{A}) \geq \theta$ 的矩阵。通过适当地乘以一个复数进行缩放，我们可以不失一般性地假设其特征值位于圆扇形

$$\mathcal{T}_\theta := \left\{ r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} : 0 \leq r \leq 1,\ |\phi| \leq \pi - \theta/2 \right\}.$$

我们建立在 Derezi´nski 等人所提出的、用于界定后向误差的解析方法之上。 [DNR26],他们研究了一种名为 MINBERR 的算法，该算法利用 Krylov 子空间搜索半正定线性系统的最小后向误差解。对于一般（非对称）系统，相应的单侧算法称为 GMBACK [Kas95，KS97]。我们的主要结果将是：针对具有角特征值间隙的矩阵，给出 GMBACK 的复杂度上界；并给出复杂度下界，表明任何单侧算法都无法从根本上改进这一复杂度。

继 [DNR26], 之后，多项式分析的适当问题如下：给定一个矩阵 $\boldsymbol{A}$，其特征值属于集合 $\mathcal{S}$，需要多项式达到什么次数 t_{b} 才能保证

$$\max_{z\in\mathcal{S}} \left| z - \frac{1}{p(z)} \right| \leq \varepsilon \max_{z\in\mathcal{S}} |z| \quad \text{for some polynomial } p \text{ of degree } t_{\mathrm{b}}?$$

以下定理量化了这一数量对于 GMBACK 算法的重要性。

定理 1.10 （GMBACK 与逆矩阵的近似）。 设$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{X}^{-1}$ 为可逆的可对角化矩阵。假设存在一个次数至多为 t_{b} 的多项式 p，使得 $\max_i |\lambda_i - 1/p(\lambda_i)| \leq \varepsilon \max_i |\lambda_i|$ 对某个 $\varepsilon \in (0,1)$ 成立。那么，对于任意向量$\boldsymbol{b}$，使用 $t_{\mathrm{b}}+1$ 次单侧矩阵-向量乘法运行 *GMBACK*$\boldsymbol{A}$ 后，将返回一个向量 $\tilde{}\boldsymbol{x}$，使得

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}\widetilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b} \text{ for some matrix } \widetilde{\boldsymbol{A}} \text{ with } \|\boldsymbol{A} - \widetilde{\boldsymbol{A}}\|_2 \leq \varepsilon\, \mathrm{cond}(\boldsymbol{X}) \|\boldsymbol{A}\|_2.$$

$\tilde{}$特别地，如果$\boldsymbol{A}$是正规矩阵，那么$\mathrm{cond}(\boldsymbol{X}) = 1$，并且我们有 $\|\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}\|_2 \leq \varepsilon \|\boldsymbol{A}\|_2$。

我们在第 7 节中证明定理 1.10。证明过程与针对 MINBERR 的分析非常相似，但经过了修改，以处理$\boldsymbol{A}$可能不是正规矩阵的情况。

对于复杂度下界，我们采用归约，而非直接论证。论证中会用到 Derezi´nski、Mahoney、Meyer 和 Musco [DMMM26] 的一篇论文中的以下定理。

引入的定理 *1.11*（下界：将后向误差归约为残差误差 [*DMMM26*，引理 *4.8*]）。固定参数 $\varepsilon > 0$。设 A 的条件数至多为 κ。对于任意向量 b，假设 $\hat{}x$ 是方程组 $Ax = b$ 的一个解，且后向误差至多为 ε。只需对 A 进行一次单侧矩阵向量乘法，就能构造向量 $\hat{}x$，使得 $\|A\,\hat{}x - b\|_2 \le \kappa\varepsilon\|b\|_2$。

这一结果表明，较小的后向误差意味着较小的残差。因此，由于求解到较小残差很困难（定理 1.4），求解到较小的后向误差同样困难。利用这一归约，我们可以直接证明主要结果的下界 定理 1.5。

定理 1.5 的证明（下界）。令 $\kappa := \alpha/\varepsilon$，其中 $\alpha \in (0,1)$，具体取值将在后文给出。假设某个算法使用 t_b 次单侧矩阵-向量乘法，以至少 2/3 的概率将任意线性方程组 Ax =b 求解至后向误差 ε，其中 A 是特征值位于 $\mathcal{T}_\theta$中的任意正规矩阵。那么，只需再额外进行一次矩阵-向量乘法，我们就能恢复一个向量 $\hat{}$x，使其将特征值位于 $\mathcal{T}_\theta$、条件数至多为 κ的任意正规矩阵 A 所对应的线性方程组 Ax =b 求解至相对残差 $\kappa\varepsilon = \alpha$。因此，A 的特征值位于极坐标矩形$\mathcal{P}_{\kappa,\theta}$中。于是，根据定理 1.4，我们知道

$$t_b \gtrsim \theta^{-2}\left(\frac{\alpha}{\varepsilon}\right)^{\pi/\theta}\log(1/\alpha).$$

对 α 取最大值得 $\alpha = e^{-\theta/\pi}$。代入并化简后得到 $t_b \gtrsim \theta^{-1}\varepsilon^{-\pi/\theta}$。 □

通过单独的论证处理完复杂度下界后，剩下的就是上界。采用与我们分析残差误差时类似的框架，现在需要证明存在一个低次数多项式满足 $\|z - 1/p(z)\|_{\mathcal{T}_\theta} \le \varepsilon$。我们也可以借助一系列复分析工具得到这一结果：共形映射、格林函数，以及调和函数的比较原理。结论如下。

定理1.12（多项式逼近：圆扇形上的后向误差界）。 固定 $\theta \in (0, 2\pi]$。存在一个次数为 t 的多项式 p $t_b \lesssim \theta^{-1}(2/\varepsilon)^{\pi/\theta}$使得 $\|z - 1/p(z)\|_{\mathcal{T}_\theta} \le \varepsilon$。

我们在第 7 节中第 7 节证明定理 1.10 。结合这一结果，便可证明定理 1.5中 GMBACK 的矩阵向量乘法上界。

1.6 扩展：特征向量近似

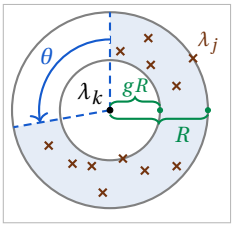
本文的结果也可用于分析 Arnoldi算法在特征向量近似中的应用[Arn51，Saa80]。在 Arnoldi算法中，首先从一个初始向量$\boldsymbol{b}$（通常是随机向量）出发，并为 Krylov 子空间构造一组标准正交基 $\mathcal{K}_t(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$（方程 (1.1)），随后可用它来估算特征值或特征向量，或构造低秩近似。

为研究这一问题，考虑一个可对角化矩阵 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{X}\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\boldsymbol{X}^{-1}$，其特征值为$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$；再考虑一个特定特征值 λ_k及其对应的特征向量 $\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{X}\mathbf{e}_k$。假设 λ_k与其余特征值之间既有角间隙 $\theta \in (0, 2\pi]$，也有相对距离 $g \in (0, 1]$；见下方插图。也就是说，经过平移、旋转和缩放后，其余特征值都落在一个极坐标矩形 $\mathcal{P}_{1/g,\theta}$内。形式化地说，存在数值 $R > 0$、$g \in$和$0, 1]$,及 $\phi \in [0, 2\pi$，使得

$$\lambda_j \in \lambda_k + Re^{i\phi}\mathcal{P}_{1/g,\theta} \qquad \text{for all } j \ne k. \tag{1.6}$$

在此设定下，特征向量与 Krylov 子空间 $\mathcal{K}_t(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$之间的距离满足以下界；这直接推论自标准估计 [Saa11，引理 6。2]以及定理 1.8 和1.9。

推论1.13（利用角特征值间隙恢复特征向量）。 假设上述设置成立，并假设 方程 (1.6) 成立，其中 $g \le \frac{1}{600}$。则



$$\|(\mathbf{I}-\mathbf{\Pi}_{\mathcal{K}_t(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})})\boldsymbol{x}_k\|_2 \le 6\pi \exp\left(-\frac{(t-2)\theta^2 g^{\pi/\theta}}{\pi^3 \mathrm{e}}\right)\left(\frac{\|\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{b}\|_1}{|(\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{b})_k|}-1\right),$$

其中，$\mathbf{\Pi}_{\mathcal{K}_t}(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{b})$ 是到 $\mathcal{K}_t$（$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{b}$）上的正交投影。

当随机选择向量 $\boldsymbol{b}$ 时，该界表明，

$$t = \mathcal{O}\left(\theta^{-2} g^{-\pi/\theta} \log\left[\frac{\mathrm{cond}(\boldsymbol{X})n}{\varepsilon}\right]\right)$$

经过足够的迭代即可确保 Krylov 子空间 $\mathcal{K}_t(\mathrm{A},\ \mathrm{b})$ 以 ε-接近于包含特征向量 x_k，且这一结论以高概率成立。关于数量 $\|(\mathrm{I}-\mathbf{\Pi}_{\mathcal{K}_t}(\mathrm{A},\mathrm{b}))\mathrm{x}_k\|_2$ 的界，在数值分析文献中已有标准结果 [Saa80、JS01、BSS10、Saa11]。利用这一界，可以分析使用 Krylov 子空间 $\mathcal{K}_t(\mathrm{A},\mathrm{b})$ [MM15、MMM24、TW23、CEM+26] 对矩阵 A 进行低秩近似的质量，并理解通过 Arnoldi算法 [Saa80、JS01] 获得的特征值近似的质量。关于这些扩展的更详细讨论留待未来工作。

1.7 相关工作

几十年来，理解 GMRES 等 Krylov线性求解器的复杂度一直是数值分析领域的重要研究课题，而特征值定位在这一理论中发挥着核心作用；参见 [Emb22]，其中介绍了相关综述、新结果和研究视角。这一理论中共形映射的使用已经十分标准；参见 [DTT98] 及其中的参考文献。总体而言，这些工作主要关注：对于特征值位于某个区域内的矩阵，理解其 渐近收敛速率；而我们未能从这些文献中找到关于 GMRES 的非渐近收敛结果。Eiermann 及其合作者针对另一类半迭代方法给出了更明确的界 [EN83、ENV85、Eie89、ELV89]；相关技术与我们的 定理 3.2类似。如果特征向量矩阵是病态的，我们研究的界可能缺乏信息；在这种情况下，基于伪谱 [Tre90] 或数值域 [Eie93、BGT05、Cro07] 的界可能更具信息量。

许多作者都曾讨论和争论过单侧方法（GMRES）与双侧方法（CGN）的相对优势；例如参见 [NRT92、Gre97、Wat22、EGN26]。与GMRES收敛缓慢相关的现象见 [NRT92、GG94、GPS96]。

我们认为，使用谱条件数和角特征值间隙来刻画线性方程组的难度是一种自然的方式$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$。此前采用这一视角的研究非常有限。Coleman 和 Myers [CM95] 通过有理函数根式的积分，给出了共形映射 χ 的显式表示，并给出了优良滤波多项式的表达式。据我们所知，基本复杂度尺度$t_\star \asymp \theta^{-2}\kappa^{\pi/\theta}$ 并不能轻易从这些表达式中推导出来。论文 [MO95] 研究了极坐标矩形上的滤波多项式，并计算了 [CM95] 中的积分，以估计 κ 和 θ取特定值时的收敛速度。据我们所知，论文 [CM95、MO95] 是仅有的研究特征值位于极坐标矩形内时线性代数算法收敛性的文献。论文 [KL00] 研究了特征值位于“香肠状”区域内的线性系统的收敛速度。

2 预备知识

标量用斜体表示，向量用粗体小写字母表示，矩阵用粗体大写字母表示，集合用花体表示。普适常数可以用正体表示。实数集合为 $\mathbb{R}$，复数集合为 $\mathbb{C}$。正实数为 $\mathbb{R}_+$。扩充复平面为 $\widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$。复共轭记作 $\overline{z}$，模记作 $|z|$。

集合 $\mathcal{S}$ 的（拓扑）闭包为 $\overline{\mathcal{S}}$，边界为 $\partial\mathcal{S}$。域是非空的开连通集合。若曲线不与自身相交，则称其为简单曲线。若 $\mathcal{S}$ 是开且有界的，并且 $\partial\mathcal{S}$ 是简单闭曲线，则称 $\mathcal{S}$ 为 Jordan 域。开单位圆盘为 $\mathcal{D} = \{z : |z| < 1\}$。闭单位圆盘为 $\overline{\mathcal{D}}$，单位圆为 $\partial\mathcal{D}$。对于定义在集合 $\mathcal{S}$ 上的函数 f，其上确界范数为 $\|f\|_{\mathcal{S}} = \sup_{z\in\mathcal{S}} |f(z)|$。如果函数在 z 的某个开邻域内有收敛到该函数的幂级数，则称该函数在 z 处解析。共形映射是两个域之间的解析双射。

实向量和实矩阵的集合分别记为 $\mathbb{R}^n$ 和 $\mathbb{R}^{n\times d}$，复向量和复矩阵也采用类似记法。转置记为 $\boldsymbol{A}^\mathsf{T}$，共轭转置记为 $\boldsymbol{A}^*$。单位矩阵记为 $\mathbf{I}$。向量的欧几里得范数为 $\|\boldsymbol{x}\|_2$，矩阵算子范数为 $\|\boldsymbol{A}\|_2$。

我们使用标准的大 O 记号 $\mathcal{O}(\cdot)$、$\Omega(\cdot)$、$\Theta(\cdot)$。对于两个函数 f 和 g，如果 $f \le Cg$，其中 $C > 0$ 为某个普适常数，则记作 $f \lesssim g$。类似地定义 $f \gtrsim g$，并且当 $f \lesssim g$ 且 $g \lesssim f$ 时，记作 $f \asymp g$。所有对数均为自然对数。

3 归约：从多项式到格林函数

本节旨在构建 定理 1.8 的一般版本，该定理用于残差误差上界和下界的分析。该定理将滤波多项式的多项式逼近界与格林函数联系起来。本节中的数学论证基于逼近理论中的一些众所周知的思想，不过现有的界通常是渐近的。我们在此解释这一论证有两个原因：一是为了向理论计算机科学领域的读者清晰地阐述，二是为了解释 定理 1.8 中的非渐近上界源自何处。

为陈述这一结果，我们回顾第 1.5.2 节中的格林函数。设 $\mathcal{S}$ 表示复平面中的一个有界、闭且单连通子集。对于任意这样的集合，黎曼映射定理（参见 [Bel20]）保证共形函数

$$\chi : \widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{S} \to \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathcal{D}}, \tag{3.1}$$

它将区域 $\mathcal{S}$ 的外部映射到单位圆盘 $\mathcal{D}$ 的外部。这里，$\widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 表示扩充复平面。为了唯一确定这样的共形映射，我们施加正规化约束 $\chi(\infty) = \infty$ 以及 $\lim_{z\to\infty} \chi(z)/z \in \mathbb{R}_+$，这些约束在复分析中是标准的。格林函数是

$$G_{\mathcal{S}}(z) := \log(|\chi(z)|),$$

并回顾我们的目标是理解它在零点处的值：

$$g := G_{\mathcal{S}}(0).$$

为了陈述这一结果，我们需要定义谱 $\mathcal{S}$ 的几何复杂度度量。我们给出边界旋转的一般定义的简化/特化版本。关于一般定义，参见 [Gai87，第 45页。

定义 3.1（边界旋转）。设 $\gamma = \gamma_1 \cup \cdots \cup \gamma_k$ 是一条连续的闭曲线，可分解为若干子曲线 γ_i 的并集，这些子曲线或者是圆弧，或者是直线。设 $\alpha_i \in [0, 2\pi]$ 为子曲线 γ_{i-1} 与 γ_i 在其交点处的内角（其中 $\gamma_0 := \gamma_k$），并设 $\beta_i \in [0, 2\pi]$ 为每段圆弧的角度，对于线段则令 $\beta_i = 0$。于是，γ 的边界旋转为

$$V := \sum_{i=1}^{k} (|\pi - \alpha_i| + \beta_i).$$

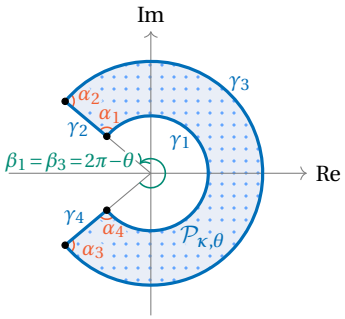


图4： 极坐标矩形 $\mathcal{P}_{\kappa,\theta}$ 的边界旋转计算示意图。我们将 $\mathcal{P}_{\kappa,\theta}$ 的边界分解为子曲线 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 和 γ_4。各子曲线之间的交点均具有内角 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \pi/2$。子曲线 γ_2 和 γ_4 是直线，因此贡献为 $\beta_2 = \beta_4 = 0$。子曲线 γ_1 和 γ_3 是圆弧，角度为 $\beta_1 = \beta_3 = 2\pi - \theta$。因此，总边界旋转为 $V = 4|\pi - \pi/2| + 2(2\pi - \theta) = 6\pi - 2\theta$。

如 图4 所示，极坐标矩形的边界旋转为 $V = 6\pi - 2\theta$。以下结果表明，要理解获得较小残差所需的逼近次数，只需考察零点处的格林函数。

定理 3.2 （格林函数控制多项式逼近性）。 固定 $\varepsilon \in (0,1)$。设 $\mathcal{S} \subset \mathbb{C}$ 是一个紧致的单连通区域，其中 $\partial\mathcal{S}$ 的边界旋转为 V；设 χ 是从 $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{S}$ 到 $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{D}$的标准化共形映射。假设 $0 \notin \mathcal{S}$，并令 $g = G_{\mathcal{S}}(0) = \log(|\chi(0)|)$ 为格林函数在零点处的值。令 $t_\star$ 为满足以下条件的最小整数：存在一个次数为 $t_\star$的多项式 p，使得 $p(0) = 1$ 且 $\|p\|_{\mathcal{S}} \le \varepsilon$。那么，

$$g^{-1}\log(1/\varepsilon) \le t_\star \le 1 + g^{-1}\log(V/\varepsilon).$$

定理 3.2 中的下界是位势理论中一个明确已知的结果，称为伯恩斯坦–沃尔什定理 [Saf10，引理 3。7]。因此，我们着重讨论 $_\star$t 的上界。与这一上界类似的结果已有明确结论，例如 [Eie89，定理 2]，该结果改为假设 $\mathcal{S}$ 是一个凸集。对于我们的结果，我们将利用以下关于法贝尔多项式的已知事实，这里不正式给出其定义。值得注意的是，极坐标矩形 [CM95]上的法贝尔多项式实际上是已知的。然而，其中涉及的表达式相当复杂，因此难以从中得到渐近保证。我们还将用到最大模原理，这是复分析最基本的构建要素之一。

事实 3.3 （最大模原理）。 设 $\mathcal{Q} \subset \widehat{\mathbb{C}}$ 是一个非空开集。设 f： $\mathcal{Q} \to \mathbb{C}$ 在 $\mathcal{Q}$ 上解析，并且在其闭包 $\mathcal{Q}$ 上连续且有界。在域 $\mathcal{Q}$ 上，函数 $z \mapsto |f(z)|$ 在边界上取得最大值： $\|f\|_{\mathcal{Q}} = \|f\|_{\partial\mathcal{Q}}$。

Imported Theorem 3.4 （法贝尔多项式与边界旋转 [EG83，引理 2。1]）。 设 $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{C}$ 是一个闭集，其边界是一条边界旋转为 V 的简单闭曲线。设 χ： $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{S} \to \widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{D}$ 是从 的外部到单位圆盘外部的归一化共形映射。对于所有 $t \ge 1$，存在一个次数为 t 的多项式 p，使得

$$\|p\|_{\mathcal{S}} \le \frac{V}{\pi} \quad \textit{and} \quad \lim_{z\to\infty} p(z) - \chi(z)^t = 0.$$

定理证明 定理 *3.2*。 下界部分正是 Bernstein–Walshtheorem [Saf10，引理 3。7], 因此我们证明上界。

令 χ 为从 $\mathcal{S}$ 外部映射到单位圆盘外部的归一化共形映射，并令 p 为由 Imported Theorem 3.4 构造的多项式。定义 $\mathrm{f}(z) := \mathrm{p}(z) - \chi(z)^t$，它在 $\mathcal{Q} := \widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{S}$ 上解析。由于 $\mathrm{f}(\infty) = 0$，我们知道 f 在 $\mathcal{Q}$ 上有界。根据最大模原理，有 $|\mathrm{f}(0)| \le \|\mathrm{f}\|_{\mathcal{Q}} = \|\mathrm{f}\|_{\partial\mathcal{Q}}$。

现在我们对 $\|f\|_{\partial\mathcal{Q}}$ 进行上界估计。由于 p 在整个复平面上解析，χ 将 $\partial\mathcal{S}$ 映射到单位圆，并且 $\partial\mathcal{Q} = \partial\mathcal{S}$，因此我们有

$$\|f\|_{\partial\mathcal{Q}} = \|f\|_{\partial\mathcal{S}} \le \|p\|_{\partial\mathcal{S}} + \|\chi\|^t_{\partial\mathcal{S}} = \|p\|_{\mathcal{S}} + 1 \le \tfrac{V}{\pi} + 1.$$

因此，我们有 $|f(0)| = |p(0) - \chi(0)^t| \le 1 + V_{\pi}$。由于 $|\chi(0)| = \mathrm{e}^g$，且 $t \ge g^{-1}\log(1 + V_{\pi} + V_{\pi\varepsilon})$，

$$|p(0)| \ge \mathrm{e}^{gt} - 1 - \tfrac{V}{\pi} \ge \tfrac{V}{\pi\varepsilon}.$$

观察到归一化多项式 $\hat{p}(z) = p(z)/p(0)$ 具有所需性质 $\hat{p}(0) = 1$，且 $\|\hat{p}\|_{\mathcal{S}} \le \pi\varepsilon V \|p\|_{\mathcal{S}} \le \varepsilon$，由此得出结论。要得到 t 上界中的精确常数，注意到每个集合 $\mathcal{S}$ 的边界旋转至少为 2π，因此 $1 + V_{\pi} + V_{\pi\varepsilon} \le 2.5\, V_{\pi\varepsilon} \le V\varepsilon$。 □

4 调和函数理论：格林函数的下界

本节将证明格林函数的下界，而这又给出了将残差最小化所需矩阵-向量乘法次数的上界。本节的具体目标是证明以下下界 $G^{\mathcal{P}_\kappa,\,\theta}(0) \gtrsim \theta^2\kappa^{-\pi/\theta}$，该下界来自 定理 1.9。格林函数的相应上界将在后文 第 5 节中证明。

我们最初通过共形映射引入格林函数。在这种解释下，格林函数 $G_{\mathcal{S}}(z) = \log(|\chi(z)|)$ 衡量点 z 在共形映射 $\chi : \widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{S} \to \widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{D}$ 下距离单位圆盘边界有多远。另一种视角则是将 $G_{\mathcal{S}}$ 视为拉普拉斯微分方程的一个解

$$\frac{\partial^2 u}{\partial a^2}(a + \mathrm{i}b) + \frac{\partial^2 u}{\partial b^2}(a + \mathrm{i}b) = 0 \tag{4.1}$$

在区域 $\mathbb{C} \setminus \mathcal{S}$ 上。任何满足 u 的函数方程 (4.1) 称为调和函数。调和函数类具有很强的刚性，并拥有许多有用的解析性质和比较原理。利用调和函数理论的结果，我们将得到以下格林函数下界，以满足定理 3.2所需的残差误差分析。

定理 4.1（极坐标矩形的格林函数下界）。设 $\kappa \ge 1$ 和 $\theta \in (0, 2\pi]$。那么，极坐标矩形 $\mathcal{P}_{\kappa,\,\theta}$ 的格林函数满足 $G^{\mathcal{P}_\kappa,\,\theta}(0) \ge (\pi^3\mathrm{e})^{-1}\theta^2\kappa^{-\pi/\theta}$。

4.1 调和函数和格林函数的核心结果

我们从以下调和函数的标准性质列表开始 .

事实 4.2（调和函数）。设 $\mathcal{Q} \subseteq \mathbb{C}$ 是一个开集，其边界是有限条简单曲线的并。假设 $u,\ v : \mathcal{Q} \to \mathbb{R}$ 是连续函数，且在 $\mathcal{Q}$ 上为调和函数。则有以下结论：

(a) 边界支配 *[ABW01，推论 1。9]*。假设 $\mathcal{Q}$ 有界。如果 $u(z) \ge v(z)$ 对所有 $z \in \partial\mathcal{Q}$，则对所有 z，$u(z) \ge v(z)$。

(b) 平均值积分 *[ABW01，定理 1.4]*。若 $\mathcal{Q}$ 包含开圆盘 $\{z : |z - z_\star| < r\}$，则 $u(z_\star)$ 等于其在圆周上的平均值：$u(z_\star) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_\star + r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi})d\phi$。

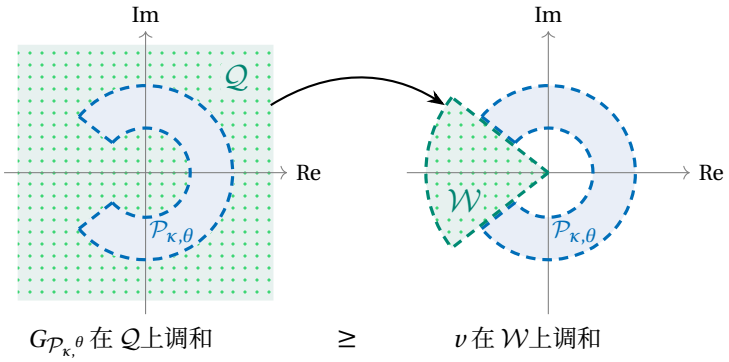


图 5： 调和函数理论分析中用于归约到楔形区域的可视化。第一幅图显示了极坐标矩形 $\mathcal{P}_{\kappa,\theta}$。其补集为 $\mathcal{Q}$，格林函数$G\mathcal{P}_{\kappa,\theta}$ 保证在该区域上调和。由于这个区域难以分析，我们转而考察楔形区域 $\mathcal{W}\subseteq\mathcal{Q}$。由于 $G\mathcal{P}_{\kappa,\theta}$在整个 $\mathcal{Q}$上调和，因此在 $\mathcal{W}$上也调和。由于 $\mathcal{W}$形状简单，我们可以显式构造一个在 v 上调和的函数 $\mathcal{W}$。 引理 4.5 接着证明，格林函数在楔形区域 v 上有下界 $\mathcal{W}$。

(c) 解析函数的分量 *[ABW01，第 2] 页。* 若 $f\colon \mathcal{Q}\to\mathbb{C}$ 在 $\mathcal{Q}$上是复解析函数，则 $w(z):=$ 实部$[f(z)]$ 在 $\mathcal{Q}$上是调和函数。

我们还将使用以下两个标准事实，它们将调和函数的这些性质与格林函数联系起来：格林函数是调和的，而嵌套区域上的格林函数满足主控关系。

事实 4.3 (格林函数)。 设 $\mathcal{S}\subseteq\mathbb{C}$ 为一个 *Jordan* 域的闭包，并令 $G_{\mathcal{S}}(z)=\log|\chi(z)|$ 表示 $\mathcal{S}$的格林函数。则以下性质成立：

(a) 调和性 *[GM05，第 2]节。* 定义开集 $\mathcal{Q}=\mathbb{C}\setminus\mathcal{S}$。则 $G_{\mathcal{S}}$在 $\mathcal{Q}$上连续，在 $\mathcal{Q}$上连续，并且在边界 $\partial\mathcal{Q}=\partial\overline{\mathcal{S}}$上为零。

(b) 域单调性 *[GM05，第 75]页。* 如果 $\mathcal{S}'\supseteq\mathcal{S}$ 是一个 *Jordan* 域的闭包，那么我们有单调关系 $G_{\mathcal{S}}(z)\geq G_{\mathcal{S}'}(z)$ 对所有 $z\notin\mathcal{S}'$均成立。

4.2 归约到一个楔形区域

由于我们不知道共形映射 χ从 $\mathcal{Q}=\widehat{\mathbb{C}}\setminus\mathcal{P}_{\kappa}$映射$\theta$ 到 $\widehat{\mathbb{C}}\setminus\mathcal{D}$的确切表达式，因此格林函数难以处理。相反，我们可以利用调和函数的性质来为格林函数构造下界。关键思路是找到一个简单的子域 $\mathcal{W}\subseteq\mathcal{Q}$，并设计一个显式且性质良好的调和函数 v 定义在 $\mathcal{W}$上。根据边界支配原理，如果我们能证明格林函数在边界 v 上大于 $\partial\mathcal{W}$，那么就知道 v 是整个 $\mathcal{W}$上格林函数的下界。这个关系足以精确地证明 定理 4.1。下文第 7 节 也将采用相同思路，为圆扇形的格林函数构造下界（定理 7.4），这是后向误差结果所需的。

在本节中，我们选取该子集 $\mathcal{W}$ 作为楔形区域

$$\mathcal{W}:=\left\{-re^{i\phi}\,:\,r\in(0,R),\,|\phi|<\theta/2\right\} \tag{4.2}$$

对于某个参数 $R\geq 1$，其值稍后确定；我们将函数 v 取为

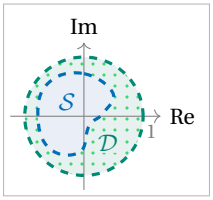
$$v(-re^{i\phi}):=(\log R)\left(\frac{r}{R}\right)^{\pi/\theta}\cos\left(\frac{\pi}{\theta}\phi\right). \tag{4.3}$$

选择这种楔形是因为它在几何上很自然。函数 v称为 楔形调和函数 [Ran95],，可通过在极坐标中使用分离变量法求解拉普拉斯方程，并满足边界条件 $v(-re^{i\phi}) = 0$ 当 $|\phi| = \theta/2$ 时导出。该选择的 $\mathcal{W}$ 和 v 足以为 极坐标矩形和圆扇形 的格林函数提供下界，这意味着该归约对于残差误差和后向误差复杂度结果都很有帮助。

我们最终希望证明，格林函数在楔形区域$\mathcal{W}$的边界上大于v。为此，我们需要格林函数取值的一些基本下界。

引理 4.4 (格林函数的基本界)。 设 $\mathcal{S}$ 是一个 *Jordan* 域的闭包，且$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{D}$。那么，对于所有 $z \notin \mathcal{S}$，$G_{\mathcal{S}}(z) \geq 0$；对于所有 $|z| \geq 1$，$G_{\mathcal{S}}(z) \geq \log|z|$。

证明。 设 χ 是从 $\mathcal{S}$ 外部映到 $\mathcal{D}$外部的归一化共形映射。对于第一个界，根据定义，对于所有 $z \notin \mathcal{S}$，有 $|\chi(z)| \geq 1$，因此对于所有 $z \notin \mathcal{S}$，$G_{\mathcal{S}}(z) = \log|\chi(z)| \geq 0$。对于第二个界，根据域单调性（事实 4.3(b)），当 $z \notin \mathcal{D}$时，有 $G_{\mathcal{S}}(z) \geq G_{\mathcal{D}}(z)$。闭单位圆盘的共形映射为 $\psi(z) = z$，因此相应的格林函数为 $G_{\mathcal{D}}(z) = \log|z|$。所以，对于任意 $|z| \geq 1$，都有 $G_{\mathcal{S}}(z) \geq \log|z|$。 □



现在，我们可以证明格林函数支配v在楔形区域上。这个论证只是边界支配（事实 4.2(a)）的直接应用。

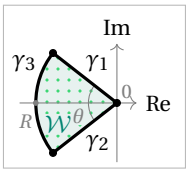
引理 *4.5*（格林函数支配 v）。设 $\mathcal{S}$ 为极坐标矩形 $\mathcal{P}_{\kappa,\theta}$ 或圆扇形 $\mathcal{T}_\theta$，其中 $\kappa \geq 1$ 和 $\theta \in (0, 2\pi]$。对于任意 $R \geq 1$，考虑楔形区域 $\mathcal{W}$ 以及方程 *(4.2)* 和 *(4.3)* 中定义的函数 v。那么，对于所有 $z \in \mathcal{W}$，$G_{\mathcal{S}}(z) \geq v(z)$。

证明。首先，我们证明 v 在 $\mathcal{W}$ 上是调和函数。由欧拉公式，我们注意到 $\mathrm{Re}[(re^{i\phi})^\alpha] = r^\alpha \cos(\alpha\phi)$，因此 v是某个复解析函数的实部：

$$v(z) = \mathrm{Re}\left[(\log R)\left(-\tfrac{z}{R}\right)^{\pi/\theta}\right].$$

由于内部的函数在 $\mathcal{W}$上是解析的，根据事实 4.2(c)，我们知道v 在 $\mathcal{W}$上是调和函数。根据事实 4.3(a)，我们还知道$G_{\mathcal{S}}$ 在 $\mathcal{W}$上是调和函数。

根据边界支配（事实 4.2(a)），要完成证明，只需证明 $v(z) \leq G_{\mathcal{S}}(z)$ 在边界 $\partial\mathcal{W}$ 上。我们将边界 $\partial\mathcal{W}$分成弧段 γ_1、γ_2 和 γ_3，如右图所示。我们有



- On $\gamma_1 = \{-re^{-i\theta/2} : r \in [0, R]\}$ and $\gamma_2 = \{-re^{i\theta/2} : r \in [0, R]\}$, we have $v(z) = 0$.
- 在 $\gamma_3 = \{-Re^{i\phi} : |\phi| \leq \theta/2\}$ 上，我们有 $v(z) \leq \max_{|\phi|\leq\theta/2} v(-Re^{i\phi}) = \log R$。

根据 引理 4.4，由于极坐标矩形和圆扇形都是单位圆盘的子集，我们知道 $G_{\mathcal{S}}(z) \geq 0$在整个 $\partial\mathcal{W}$ 上，并且 $G_{\mathcal{S}}(z) \geq \log R$在 γ_3 上。因此，我们有 $v(z) \leq G_{\mathcal{S}}(z)$ 在整个边界 $\partial\mathcal{W}$ 上，证明完毕。

□

现在我们可以证明本节的主要结果：针对极坐标矩形和圆扇形的格林函数，给出一个简单明了的下界。

定理 4.6 （格林函数的直观下界）。 设 $\mathcal{S}$为极坐标矩形 $\mathcal{P}_{\kappa,\theta}$或圆扇形 $\mathcal{T}_\theta$，其中 $\kappa \geq 1$ 和 $\theta \in (0, 2\pi]$ 为任意值。$\mathcal{S}$ 的格林函数满足

$$G_{\mathcal{S}}(-re^{i\phi}) \geq \frac{\theta}{\pi e} r^{\pi/\theta} \cos\left(\frac{\pi}{\theta}\phi\right) \qquad \textit{for } r \in (0, 1] \textit{ and } |\phi| \leq \frac{\theta}{2}.$$

证明。 根据前面的引理（引理 4.5），对于任意 $-re^{i\phi} \in \mathcal{W}$，有

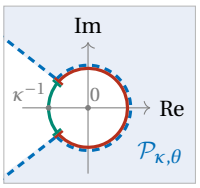
$$G_{\mathcal{S}}(-re^{i\phi}) \geq (\log R)\left(\frac{r}{R}\right)^{\pi/\theta} \cos\left(\frac{\pi}{\theta}\phi\right) = \left(R^{-\pi/\theta}\log R\right) r^{\pi/\theta}\cos\left(\frac{\pi}{\theta}\phi\right).$$

对R取最大值可得$R = e^{\theta/\pi}$，从而恢复所述下界。由于 $e^{\theta/\pi} > e^0 = 1$，任何具有所述参数的 $-re^{i\phi}$ 都属于 $\mathcal{W}$。 □

4.3 界定必要的量

现在，我们很容易就能为感兴趣的量给出下界。首先，我们为界定残差误差所需的格林函数给出下界。在这种情况下，我们需要为$G^{\mathcal{P}_{\kappa,\theta}}(0)$给出下界。若直接代入定理 4.6中的界，我们只能证明$G^{\mathcal{P}_{\kappa,\theta}}(0) \geq 0$，这显然没有实际意义。为了得到更好的保证，我们转而使用平均值定理，通过在半径为 κ^{-1} 的圆上积分，为$G^{\mathcal{P}_{\kappa,\theta}}(0)$给出下界。这个圆包含了 $\mathcal{W}$内部的大部分区域，因此能得到一个非平凡的下界。

证明 定理 *4.1*。 圆 $\{z\colon |z| = \kappa^{-1}\}$可以分解为两部分，
如右图所示：一条绿色曲线被 定理 4.6 覆盖，另一条红色曲线位于 $\mathcal{P}_{\kappa,\theta}$的边界上。回顾 事实 4.3(a) 可知$G^{\mathcal{P}_{\kappa,\theta}}$ 在$\mathcal{P}_{\kappa,\theta}$的边界上为零。因此，根据平均值定理（事实 4.2(b)）和调和下界（定理 4.6），



$$G_{\mathcal{P}_{\kappa,\theta}}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} G_{\mathcal{P}_{\kappa,\theta}}(-\kappa^{-1}e^{i\phi})\,d\phi \geq \frac{1}{2\pi}\int_{-\theta/2}^{\theta/2} \frac{\theta}{\pi e}\kappa^{-\pi/\theta}\cos\left(\frac{\pi}{\theta}\phi\right)d\phi = \frac{1}{\pi^3 e}\theta^2\kappa^{-\pi/\theta}.$$

□

5 几何函数论：格林函数的上界

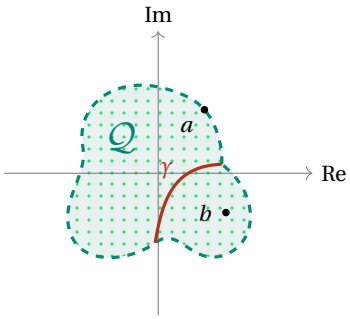
本节将介绍并运用几何函数论领域的工具，为 第 3 节中出现的格林函数构造上界。格林函数的上界可为求解线性系统且使残差较小所需的次数 $t_\star$ 提供下界；而格林函数相反方向的下界见 第 4 节。Andrievskii 及其合作者在数十年间的一系列研究中，系统地运用了几何函数论领域的工具，尤其是曲线族模 [ABD95、AR94、And04a、And04b、And06b、And06a、AR07]。本文将调整这一通用策略，构建精确的工具，以理解极坐标矩形的格林函数。

本节分为三个部分。在 第 5.1 节中，我们介绍研究几何函数论所需的一系列定义和事实，最终给出将 0 与 ∞分隔开的横截线族的模的定义。在 第 5.2 节中，我们证明，模的下界足以证明格林函数的上界。在 第 5.3 节中，我们给出控制残差误差所需的上述模的界限，从而证明以下结论：

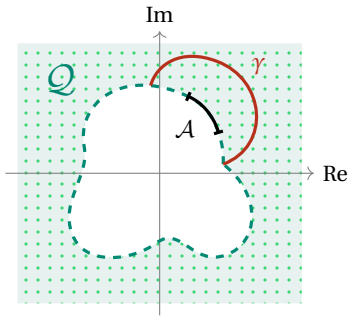
定理 5.1（极坐标矩形的格林函数上界）。 令 $\kappa \geq 536$ 和 $\theta \in (0,\ 2\pi]$。则，极坐标矩形的格林函数满足 $G^{\mathcal{P}_{\kappa,\theta}}(0) \leq (5/2\pi^2)\,\theta^2\kappa^{-\pi/\theta}$。

5.1 几何函数论：设置

在我们讨论几何函数论时，基本构件是曲线，按标准方式定义为连续函数 $\gamma : (0,1) \to \mathbb{C}$。若曲线 γ 的端点相等（$\lim_{t\to 0}\gamma(t) = \lim_{t\to 1}\gamma(t)$），则称其为闭合的；若它从不与自身相交（对所有$t \neq s$，$\gamma(t) \neq \gamma(s)$），则称其为简单的。对于绝对连续曲线，其弧长为 $\int_0^1 |\gamma'(t)|\,dt$；若弧长有限，则称该曲线为可求长的。我们将



(a) 分离横截线的示例 $\gamma \in \Gamma_{\mathcal{Q}}(a,\ b)$。这里，阴影区域 $\mathcal{Q}$ 位于虚线边界内，因此 γ也位于边界内。



(b) 分离横截线的示例 $\gamma \in \Gamma_{\mathcal{Q}}(\mathcal{A},\ \infty)$。这里，$\gamma$确保从阴影区域 $\mathcal{Q}$上的 $\mathcal{A}$ 到 ∞ 的每条路径都必须与 γ相交。

图 6： 不同域上的分离横截线示例 $\mathcal{Q}$。域 $\mathcal{Q}$ 既可以是有界的，如 图 6a所示，也可以是无界的，如图 6b所示。

约定俗成地使用记号，让 $\gamma(t)$ 表示参数化曲线，同时让 $\gamma \subset \mathbb{C}$ 表示该曲线所描绘的点集。

我们的研究将聚焦于一种称为横截线的特殊曲线。

定义 5.2（横截线）。设 $\mathcal{S} \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$ 为开且单连通。若 γ 是 $\mathcal{S}$中的一条曲线，并且 γ 是简单、可求长的，且具有位于边界 $\partial\mathcal{S}$上的不同端点，则称曲线 γ 为 $\mathcal{S}$的横截线。横截线将$\mathcal{S}\setminus\gamma$ 划分为两个区域。若集合 $\mathcal{A}$ 和 $\overline{\mathcal{B}}$ 位于不同区域，则称横截线 γ 将它们分离，并令

$$\Gamma_{\mathcal{S}}(\mathcal{A},\mathcal{B}) := \{\gamma\ :\ \gamma \text{ separates } \mathcal{A} \text{ from } \mathcal{B} \text{ in } \mathcal{S}\}.$$

集合 $\Gamma_{\mathcal{S}}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ 称为分离 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 的横截线族。

我们也可以将分离的概念应用于点a、$b \in \mathcal{S}$，方法是将它们视为单点集 $\{a\}$、$\{b\}$。特别地，我们可以将集合 $\Gamma_{\mathcal{S}}(a,b)$ 或 $\Gamma_{\mathcal{S}}(a,\mathcal{B})$ 描述为分离两个点或一个点与一个集合的曲线集。横截线和分离横截线的概念见图 6。

我们将致力于量化分离 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 的难易程度。为此，对于任意（博雷尔可测）函数 $\rho\colon \mathcal{S} \to \mathbb{R}_+$ 以及任意可求长曲线 γ，我们定义其 ρ-弧长为

$$\int_\gamma \rho(z)\,\mathrm{d}s(z) = \int_0^1 \rho(\gamma(t))|\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

这里，s 表示复平面上的弧长测度。函数 ρ 通常称为度量。

定义 5.3（曲线集的模数）。设 $\mathcal{S} \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$ 为单连通集，且 Γ 为 $\mathcal{S}$ 中可求长曲线的集合。若度量 $\rho\colon \mathcal{S} \to \mathbb{R}_+$ 满足其中每条 $\gamma \in \Gamma$ 的 ρ-弧长至少为 1，则称其对 Γ 可容许。Γ 的模是所有可容许度量下 $\mathcal{S}$ 的 ρ^2-面积的最小值

$$\mathrm{M}_{\mathcal{S}}(\Gamma) := \inf\left\{\iint_{\mathcal{S}} |\rho(z)|^2\,\mathrm{d}A(z)\ :\ \rho \text{ is admissible for } \Gamma\right\}.$$

这里，A 表示复平面上的面积测度。

我们采用以下简写

$$\mathrm{M}_{\mathcal{S}}(a,b) := \mathrm{M}_{\mathcal{S}}(\Gamma_{\mathcal{S}}(a,b)),\quad \mathrm{M}_{\mathcal{S}}(\mathcal{A},\mathcal{B}) := \mathrm{M}_{\mathcal{S}}(\Gamma_{\mathcal{S}}(\mathcal{A},\mathcal{B})),\quad \text{etc.}$$

表示横截线族模数的简写，它们将是我们分析中的核心量。对于想进一步了解这一量的起源和原理的读者，我们建议阅读 Beliaev 所著的优秀且易读的著作第4章 [Bel20]。

正如复分析中的任何自然概念所预期的那样，横截线集合与模同共形映射之间具有良好的相容性。

导入定理 *5.4*（共形映射保持横截线的模，[*Bel20*，定理 *2.24* 和 *4.2*]）。设 $\mathcal{Q}$、$\mathcal{Q}' \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$ 为边界是简单闭曲线的域。设 $\chi : \mathcal{Q} \to \mathcal{Q}'$ 为共形双射。对于任意不相交的集合 $\mathcal{A}$、$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{Q}$，有 $M_{\mathcal{Q}}(\mathcal{A},\mathcal{B}) = M_{\mathcal{Q}'}(\chi(\mathcal{A}), \chi(\mathcal{B}))$。

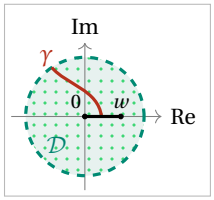
5.2 格林函数与模的关系

为了使用模，我们需要了解模与格林函数之间的关系。我们证明以下界。

定理 5.5（模界定格林函数）。设 $\mathcal{S}$ 是具有 $0 \notin \mathcal{S}$ 的 *Jordan* 域的闭包。设 $\mathcal{Q} := \widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{S}$，并假设 $\mathrm{M}_{\mathcal{Q}}(0, \infty) \geq 1$。则 $G_{\mathcal{S}}(0) \leq 10 e^{-\pi \mathrm{M}_{\mathcal{Q}}(0, \infty)}$。

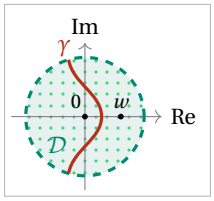
与定理 5.5 类似的结果隐含于先前研究 [And04b、Bel20]，中，但我们尚未找到这一结果的参考文献。为证明该界，我们首先引入一个常见研究对象——格勒茨环——上的模界。这里，我们考察单位圆盘中的曲线集，这些曲线连接单位圆与圆内的一个区间。

引入的定理 5.6（圆盘上连接横截线的模，[Bet98，式 2。4] 以及 [Vuo88，式 5.57、5。58]）。令 $\mathcal{D} = \{z : |z| < 1\}$ 为单位圆盘，并令 $w \in (0,1)$。令 Γ_w 为一端点位于 $\partial\mathcal{D}$、另一端点位于区间 $[0,w]$上的可求长曲线集。那么，



$$\mathrm{M}_{\mathcal{D}}(\Gamma_w) \leq \frac{4}{\pi} \log\left(4 + \frac{8}{w^{-1} - 1}\right).$$

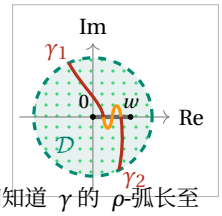
引入的定理 5.6中的结果使用的是连接曲线，而不是横截线。为了使这一结果更便于我们在横截线的语境下使用，我们进行一个简单的归约。



引理 5.7（圆盘上横截线的模）。设 $\mathcal{D} = \{z : |z| < 1\}$ 为单位圆盘，且 $w \in \in (0,1)$。则圆盘上分隔 0 和 w 的横截线模满足

$$\mathrm{M}_{\mathcal{D}}(0, w) \leq \frac{1}{\pi} \log\left(4 + \frac{8}{w^{-1} - 1}\right).$$

证明。设 γ 为 $\Gamma_{\mathcal{D}}(0,w)$ 中的任意曲线。由于 γ 分隔了 0 和 w，它必定与区间 $[0,w]$ 至少相交一次。如右图所示，设 γ_1 为 γ 在第一次与该区间相交之前的子弧，并设 γ_2 为 γ在最后一次与该区间相交之后的子弧。由于 γ_1 和 γ_2 各有一个端点在 $\partial\mathcal{D}$ 上，另一个端点在区间 $[0, w]$, 上，因此有 $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma_w$。



现在设 ρ 为 Γ_w上的任意度量可容许函数。我们知道 γ_1 和 γ_2 的 ρ-弧长至少为一。因此，我们知道 γ 的 ρ-弧长至少为二。于是，度量 $\widehat{\rho}(z) := \frac{1}{2}\rho($ $-$ $z)$ 对于 $\Gamma_{\mathcal{D}}(0,$ $w)$ 是可容许的。因此，我们有

$$\mathrm{M}_{\mathcal{D}}(0, w) \leq \iint_{\mathcal{D}} |\widehat{\rho}(z)|^2 \, \mathrm{d}A(z) = \frac{1}{4} \iint_{\mathcal{D}} |\rho(z)|^2 \, \mathrm{d}A(z).$$

对所有 ρ 可容许的 Γ_w取下确界，得到 $\mathrm{M}_{\mathcal{D}}(0, w) \leq \frac{1}{4}\mathrm{M}_{\mathcal{D}}(\Gamma_w)$。应用引理 5.6即可完成定理的证明。

□

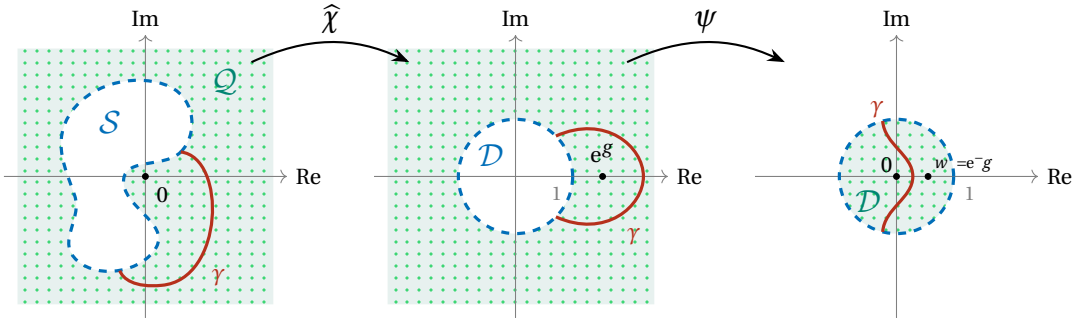


图 7：定理 5.5 证明中所执行变换序列的可视化。第一幅图：我们从一个不包含点 0 的任意 Jordan 域 $\mathcal{S}$ 开始，并关注在 $\mathcal{Q}=\widehat{\mathbb{C}}\setminus\mathcal{S}$ 上将 0 与 ∞ 分隔开的横截线。第二幅图：共形映射 $\widehat{\chi}$ 将 $\mathcal{Q}$ 映射到单位圆盘 $\mathcal{D}$ 的外部。根据公式（3.1），我们知道 $\widehat{\chi}(0)=e^g$，其中 $g=G_{\mathcal{S}}(0)$ 是在 0 处的格林函数。此映射保持 $\widehat{\chi}(\infty)=\infty$，因此我们关注将 e^g 与 ∞ 分隔开的横截线。第三幅图：共形映射 ψ 将单位圆盘的外部映射到单位圆盘的内部。现在我们希望得到将 $w:=\psi(e^g)=e^{-g}$ 与 $\psi(\infty)=0$ 分隔开的曲线 γ。

We 现在我们已经做好准备，证明定理 5中的模数到 Green 函数关系 .5.

定理 5.5 的证明。 该证明通过依次连接一系列共形映射来完成。我们在图 7中直观地展示了这些步骤。

我们的第一个保角变换将 $\mathcal{Q}:=\widehat{\mathbb{C}}\setminus\mathcal{S}$ 映射到单位圆盘 $\widehat{\mathbb{C}}\setminus\mathcal{D}$ 的外部，如图 7的第一步所示。回想一下，上文在 χ 公式（3.1）中引入了这样一个映射，用于定义格林函数。具体来说，$|\chi(0)|=e^g$ 是格林函数在零点$g:=G_{\mathcal{S}}(0)$处的指数。为简化记号，乘以 χ 一个相位 $e^{i\phi}$，使得 $\phi\in\mathbb{R}$。

$$\widehat{\chi}(z):=e^{i\phi}\chi(z)\quad\text{satisfies}\quad\widehat{\chi}(0)=e^g.$$

也就是说，我们只是旋转了这个共形映射，使其将零点映射到实轴上的一个点，正如图 7所示。接下来，我们应用共形映射 $\psi(z):=1/z$，它将单位圆的外部映射到单位圆的内部，如图 7的第二步所示。

复合映射 $\psi\circ\widehat{\chi}$ 将原区域的开外部区域 $\widehat{\mathbb{C}}\setminus\mathcal{S}$ 共形映射到单位圆盘$\mathcal{D}$。点 0 和 ∞ 被映射到

$$\psi(\widehat{\chi}(0))=\psi(e^g)=e^{-g}\quad\text{and}\quad\psi(\widehat{\chi}(\infty))=\psi(\infty)=0.$$

根据模的保角不变性（导入定理 5.4）以及我们对单位圆盘中横截线的界（引理 5.7），可得

$$M_{\mathcal{Q}}(0,\infty)=M_{\widehat{\mathbb{C}}\setminus\overline{\mathcal{D}}}(e^g,\infty)=M_{\mathcal{D}}(e^{-g},0)\le\frac{1}{\pi}\log\left(4+\frac{8}{e^g-1}\right)\le\frac{1}{\pi}\log\left(4+\frac{8}{g}\right),$$

其中，最后一个不等式使用了 $e^g-1\ge g$。等价地，我们有 $e^{\pi M_{\mathcal{Q}}}(0,\infty)\le 4+8/g$。由于 $M_{\mathcal{Q}}(0,\infty)\ge 1$，我们有 $e^{\pi M_{\mathcal{Q}}}(0,\infty)-4\ge 4/5\cdot e^{\pi M_{\mathcal{Q}}}(0,\infty)$。因此，

$$\frac{4}{5}e^{\pi M_{\mathcal{Q}}(0,\infty)}\le e^{\pi M_{\mathcal{Q}}(0,\infty)}-4\le\frac{8}{g}.$$

重新排列最外层的项即可恢复$g\le 10e^{-\pi M_{\mathcal{Q}}}(0,\infty)$，从而完成证明 f. □

5.3 极坐标矩形的模数

在本节中，我们终于看到了横截线模的全部威力：借助它，只需将区域 $\mathcal{P}_{\kappa,\theta}$ 的补集 $\mathcal{Q} := \widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{P}_{\kappa,\theta}$ 划分为几何形状简单的子区域，就能轻松地界定其格林函数。随后，我们可以计算每个子区域上相应的横截线模，从而界定 $\mathcal{Q}$ 上的模。本节的基本结果如下。

定理 5.8（极坐标矩形的模数界）。 对于任意 $\kappa \geq 1$ 和 $\theta \in (0, 2\pi]$，有

$$\mathrm{M}_{\mathcal{Q}}(0,\infty) \geq \frac{\log \kappa}{\theta} + \frac{2}{\pi} \log\left(\frac{2\pi}{\theta}\right).$$

与调和函数理论一节类似，我们将几何地把补集空间 $\mathcal{Q} := \widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{P}_{\kappa,\theta}$ 分割成更小的几何区域。下面这个事实有时也称为“平行规则”，它展示了如何对模数进行这种分割。

引理 5.9（模数的超可加性；另见 [Bel20，命题 4。7]）。 设 $\mathcal{Q} \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$ 为一个域，Γ 为 $\mathcal{Q}$ 上的一组曲线。设 $\mathcal{Q}_1$、……、$\mathcal{Q}_k \subseteq \mathcal{Q}$ 为 $\mathcal{Q}$ 的两两不相交子集。设 Γ_1、……、$\Gamma_k \subseteq \Gamma$ 满足：Γ_i 仅包含支撑在 $\mathcal{Q}_i$ 上的曲线。则，$\mathrm{M}_{\mathcal{Q}}(\Gamma) \geq \sum^{k} i=1 \mathrm{M}_{\mathcal{Q}_i}(\Gamma_i)$。

证明。 设 ρ 是 Γ的任意可容许度量。由于每个 Γ_i 都是 Γ的子集，我们知道 ρ 对 Γ_i是可容许的，因此 $\iint_{\mathcal{Q}_i} |\rho(z)|^2 \, \mathrm{d}A(z) \geq \mathrm{M}_{\mathcal{Q}_i}(\Gamma_i)$。由于这些区域 $\mathcal{Q}_i$互不相交，我们有

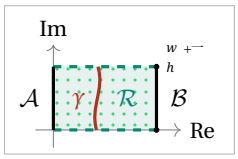
$$\iint_{\mathcal{Q}} |\rho(z)|^2 \, \mathrm{d}A(z) \geq \sum_{i=1}^{k} \iint_{\mathcal{Q}_i} |\rho(z)|^2 \, \mathrm{d}A(z) \geq \sum_{i=1}^{k} \mathrm{M}_{\mathcal{Q}_i}(\Gamma_i).$$

对所有可容许的 ρ 取下确界，即完成证明。 □

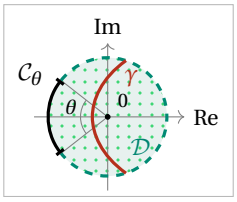
这个证明让我们可以考虑 $\mathcal{Q}$ 中所有分隔0与无穷远的横截线，将 $\mathcal{Q}$ 分成三个子区域，并考虑这些子区域上相应的横截线。在分析过程中，我们会看到由此产生两个更简单的模问题。

导入定理 5.10（穿过矩形的横截线模，[Bel20，第 137]）。考虑矩形 $\mathcal{R}$，其宽度为w，高度为h:

$$\mathcal{R} := \{x + \mathrm{i}y : x \in (0, w), y \in (0, h)\}.$$



设 $\mathcal{A} = \{\mathrm{i}y : y \in [0, h]\}$ 和 $\mathcal{B} = \{w + \mathrm{i}y : y \in [0, h]\}$ 分别为矩形的左右两侧。那么，$\mathrm{M}_{\mathcal{R}}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = w/h$。



导入定理 5.11（逃离圆的横截线模，[Bel20，定理 4.15 和定义 2.45]）。令 $\mathcal{D} := \{z : |z| < 1\}$ 为单位圆盘，并定义圆弧 $\mathcal{C}_\theta := \{-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} : |\phi| < \theta/2\}$。则 $\mathrm{M}_{\mathcal{D}}(\Gamma_{\mathcal{D}}(0, \mathcal{C}_\theta)) \geq \frac{1}{\pi} \log(2\pi/\theta)$。

现在我们可以证明定理 5.8，即分隔 0 和 ∞ 在 $\mathcal{Q}$上的横截线模的下界。

定理的证明：*定理 5.8*。 我们首先将 $\mathcal{Q}$ 分解为三个区域，如图 8所示。我们将对这些区域应用引理 5.9 。令 Γ_1，Γ_2和 Γ_3 为 $\Gamma = \Gamma_{\mathcal{Q}}(0, \infty$中分别位于区域 $\mathcal{Q}_1$，$\mathcal{Q}_2$和 $\mathcal{Q}_3$上的子集：

$$\Gamma_i = \{\gamma \in \Gamma : \gamma \subset \mathcal{Q}_i\}.$$

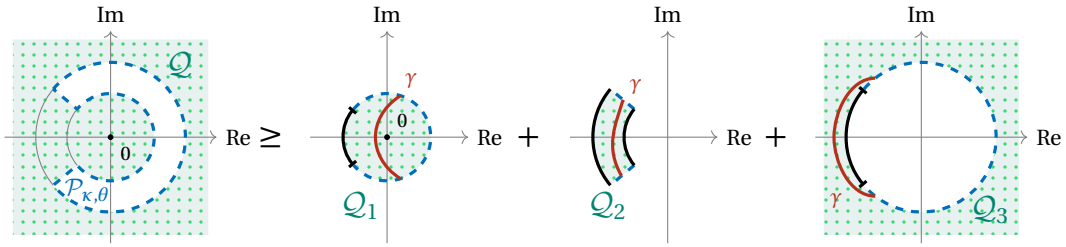


图 8：定理 5.8 证明中所使用分解的可视化。我们将 $\mathcal{Q} = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{P}_{\kappa,\theta}$ 分解为区域 $\mathcal{Q}_1$、$\mathcal{Q}_2$ 和 $\mathcal{Q}_3$。对于每个区域 $\mathcal{Q}_i$，我们考察完全位于 $\mathcal{Q}_i$ 上的横截线 $\Gamma_i \subset \Gamma_{\mathcal{Q}}(0,\infty)$ 子集，并在上方展示一个示例 $\gamma \in \Gamma_i$。我们有 $\mathrm{M}_{\mathcal{Q}}(0,\infty) \geq \mathrm{M}_{\mathcal{Q}_1}(\Gamma_1) + \mathrm{M}_{\mathcal{Q}_2}(\Gamma_2) + \mathrm{M}_{\mathcal{Q}_3}(\Gamma_3)$。对于 $\mathcal{Q}_1$，我们考察将 0 与黑色圆弧分隔开的横截线，从而得到导入定理 5.11。对于 $\mathcal{Q}_2$，我们考察将通道的左右两侧分隔开的横截线。在共形映射下，这等价于导入定理 5.10 中研究的矩形。对于 $\mathcal{Q}_3$，我们考察将 ∞ 与另一条圆弧分隔开的横截线。在共形映射下，这等价于导入定理 5.11。

我们可以应用超可加性规则引理 5.9 得到

$$\mathrm{M}_{\mathcal{Q}}(\Gamma) \geq \mathrm{M}_{\mathcal{Q}_1}(\Gamma_1) + \mathrm{M}_{\mathcal{Q}_2}(\Gamma_2) + \mathrm{M}_{\mathcal{Q}_3}(\Gamma_3). \tag{5.1}$$

现在，我们的目标转向求这三个独立模数的下界。我们分情况讨论。

区域 1。将区域 $\mathcal{Q}_1 = \{z : |z| < \kappa^{-1}\}$ 按比例因子 κ 缩放后，它就是单位圆盘 $\mathcal{D}$。因此，经过缩放，Γ_1 是将 0 与 $\mathcal{C}_\theta$ 分隔开的 $\mathcal{D}$ 的横截线集合，其中 $\mathcal{C}_\theta$ 是导入定理 5.11 中定义的集合。也就是说，$\mathrm{M}_{\mathcal{Q}_1}(\Gamma_1) = \mathrm{M}_{\mathcal{D}}(\Gamma_{\mathcal{D}}(0,\mathcal{C}_\theta)) \geq \frac{1}{\pi}\log(2\pi/\theta)$。

区域 2。下一个区域是 $\mathcal{Q}_2 = \{-re^{i\phi} : r \in (\kappa^{-1}, 1),\ \phi \in (-\theta/2, \theta/2)\}$。$\Gamma_2 \subseteq \Gamma$ 的横截线集合是在 $\mathcal{Q}_2$ 上将内侧径向弧 $\{-\kappa^{-1}e^{i\phi} : \phi \in (-\theta/2, \theta/2)\}$ 与外侧径向弧 $\{-e^{i\phi} : \phi \in (-\theta/2, \theta/2)\}$ 分隔开的曲线集合。映射 $\psi(z) = \log(-\kappa z) + i\,\theta/2$ 在 $\mathcal{Q}_2$ 上是共形的，我们可以认出

$$\psi(\mathcal{Q}_2) = \{x + i\phi : x \in (0, \log\kappa), \phi \in (0, \theta)\}$$

作为一个宽度为 $\log\kappa$、高度为 θ的矩形。同样，在 ψ 下横截线的像是所有连接矩形底部和顶部的曲线的集合。根据横截线模的共形不变性（导入定理 5.4）以及穿过矩形的截线模数（导入定理 5.10），因此有 $\mathrm{M}_{\mathcal{Q}_2}(\Gamma_2) = \mathrm{M}_{\psi(\mathcal{Q}_2)}(\psi(\Gamma_2)) = \log_\theta \kappa$。

区域 3。第三个区域 $\mathcal{Q}_3 = \{z : |z| > 1\}$ 由半径为 1 的圆的外部组成，而集合 Γ_3 是 $\mathcal{Q}_3$ 上的横截线集合，这些横截线将径向弧 $\{-e^{i\phi} : |\phi| < \theta/2\}$ 与 ∞分隔开。注意，映射 $\psi(z) = 1/z$ 将 $\mathcal{Q}_3$ 共形映射到单位圆盘 $\mathcal{D}$，并将 Γ_3 映射到 导入定理 5.11中所使用的确切横截线集合。因此，根据共形不变性（导入定理 5.4）和圆形逃逸模数界（导入定理 5.11），我们得到 $\mathrm{M}_{\mathcal{Q}_3}(\Gamma_3) = \mathrm{M}_{\psi(\mathcal{Q}_3)}(\psi(\Gamma_3)) \geq \frac{1}{\pi}\log(2\pi/\theta)$。

将这三个界与方程（5.1）结合起来，证明便告完成。 □

我们终于集齐了证明定理 5.1所需的所有要素。该定理给出了控制残差误差所需的格林函数上界。

证明定　　理 *5.1*。对于 $\theta < 2\pi$，结合定理 5.5和定理 5.8可知　　t

$$G_{\mathcal{P}_{\kappa,\theta}}(0) \leq 10 \cdot e^{-\frac{\pi}{\theta}\log\kappa - 2\log(1/\theta) - 2\log(2\pi)} = \frac{5}{2\pi^2} \cdot \theta^2 \kappa^{-\pi/\theta}$$

只要 $\mathrm{M}_{\mathcal{Q}}(0,\infty) \geq 1$。对于任意 $\theta \in (0, 2\pi)$，根据定理 5.8，只要 $\kappa \geq 536$，就能保证这一点。要恢复 $\theta = 2\pi$的结果，令 $\theta \to 2\pi$趋于其极限。 □

6 矩阵-向量下界与复多项式逼近

本节将证明定理 1.7，该定理表明：要找到一个残差较小的线性方程组解，而其特征值属于集合 $\mathcal{S}$，所需的复杂度必须超过在 t 次滤波多项式上构造所需的次数 $\mathcal{S}$，其范数为 ε。对于极坐标矩形，关于次数的下界由定理 1.8 和1.9给出。

定理 *1.7*，重述（矩阵-向量复杂度与滤波多项式：下界）。设 $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{C}$ 非空且紧，并设 $0 < \varepsilon < 1$。假设任意次数至多为 t 且 $p(0) = 1$的多项式 p 都满足 $\|p\|_{\mathcal{S}} \geq \varepsilon$。那么，任何接收向量 b，并使用具有正规矩阵 A 的单侧矩阵-向量乘法算法（其中 A 的特征值位于 $\mathcal{S}$ 中）来生成向量 $\tilde{x}$，使得 $\|A\tilde{x} - b\|_2 \leq \varepsilon\|b\|_2$ 的算法，以至少 *2/3* 的概率都必须使用至少 $\Omega(t)$ 次矩阵-向量乘法。

为了从多项式逼近得到复杂度，我们可以采用 针对随机化算法的 *Krylov* 模拟论证 。该论证最初由 Narayanan 及其合作者 [CDDPL+24提出，BN23], 随后由 Derezi´nski 等人扩展并简化， [DEM26], 之后又由 Shamir [Sha26]进一步简化。该论证的核心是：一个计算 t次矩阵-向量乘法的一般算法，其能力不超过一个块大小为 t、深度为 t的随机块 Krylov 方法。现有结果都处理实对称矩阵，因此只考虑实特征值。我们将 Shamir 方法中的论证 [Sha26] 推广到具有复特征值的正规矩阵。我们的证明与 Shamir 的证明非常接近；为完整起见，我们给出完整论证。

6.1 预备知识

我们首先介绍 Shamir 版本的 Krylov 模拟论证，并将其改编用于复矩阵。考虑一个涉及矩阵 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$和向量 $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^n$的线性代数问题。我们要证明，对于允许随机化和自适应的单侧矩阵-向量算法，求解问题 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的复杂度下界。

根据 Yao 极小极大原理，只需针对一种输入的困难随机分布，证明自适应确定性单侧算法的下界。在该论证中，我们将困难实例构造为 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{U}^*$，其中 $\boldsymbol{\Lambda} \in \mathbb{C}^{n\times n}$是算法已知的对角矩阵，而 $\boldsymbol{U}$是 Haar 随机酉矩阵。我们将针对能够访问功能更强的预言机的算法证明下界

$$\boldsymbol{z} \mapsto (\boldsymbol{Az}, \boldsymbol{U}^*\boldsymbol{z}). \tag{6.1}$$

6.2 Krylov 模拟引理

Shamir 版本的 Krylov 模拟论证中的核心结果如下引理。

引理 *6.1*（*Krylov* 模拟 [*Sha26*，引理 4]）。设 $\boldsymbol{\Lambda} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 为对角矩阵且固定，$U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 为 *Haar* 随机酉矩阵，$b \in \mathbb{C}^n$ 为标准复高斯向量。考虑一个自适应确定性算法，其输入为 $(\boldsymbol{\Lambda}, b)$，对由方程 *(6.1)* 给出的预言机进行 $t - 1$ 次查询，其中 $A = U\,\boldsymbol{\Lambda}U^*$，并输出向量 $\tilde{x}$。那么，存在彼此独立的标准复高斯向量 $g_0, \ldots, g_t$，使得 $U^*b = g_0$，且

$$\boldsymbol{U}^*\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}} \in \operatorname{span}\left\{\boldsymbol{\Lambda}^j \boldsymbol{g}_i : 1 \leq j \leq t, 0 \leq i \leq t\right\}.$$

证明　　证 [Sha26，引理 4] 可原封不动地推广到复数情形，因此我们省略证明　　.

6.3 选择特征值集合

为了完成证明，我们必须用来自 $\mathcal{S}$ 的元素填充对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda} \in \mathbb{C}^{n\times n}$，这些元素难以通过滤波多项式变小。以下关于滤波多项式的最优性结果有助于实现这一目标。

导入定理 6.2 （滤波多项式：最优性条件， [KP10，定理 10。3]）。 设 $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{C}$ 非空且紧，并考虑以下优化问题

$$\min_{\deg(q)\le t} \|q\|_{\mathcal{S}} \quad \textit{such that} \quad q(0) = 1.$$

次数至多为 t 且 $q(0) = 1$ 是该问题的最优解，当且仅当存在 $1 \le k \le 2t+1$ 个位置 $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathcal{S}$ 以及凸组合系数 $w_1, \dots, w_k$，使得

$$|q(\lambda_i)| = \|q\|_{\mathcal{S}} \quad \textit{for each } i = 1, \dots, k \tag{6.2}$$

and

$$\sum_{i=1}^{k} w_i \, \overline{p(\lambda_i)} \, q(\lambda_i) = 0 \quad \textit{for every polynomial } p \textit{ with } \deg(p) \le t \textit{ and } p(0) = 0. \tag{6.3}$$

这一结果是一个更一般定理的特例；一般结果请参见 [KP10，定理 10。3] 利用 导入定理 6.2，我们得到连续到离散转换原理，这是对 [Sha26，引理 2]的直接推广。

引理 6.3 （从连续到离散）。 设 $\mathcal{S}$ 为非空紧集，且 $t \ge 0$。则存在 $k \le 2t+1$ 个点 $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathcal{S}$ 以及凸组合系数 $w_1, \dots, w_k$，使得

$$\min\{\|q\|_{\mathcal{S}}^2 : \deg(q) \le t, \, q(0) = 1\} = \min\Big\{\sum_{i=1}^{k} w_i |q(\lambda_i)|^2 : \deg(q) \le t, \, q(0) = 1\Big\}. \tag{6.4}$$

证明。 设 $\{\lambda_i\}_{i=1}^k \subseteq \mathcal{S}$ 为导入定理 6.2所给出的点，并设 $\{w_i\}_{i=1}^k$ 为相应的权重。表达式 $\sum_{i=1}^k w_i |q(\lambda_i)|^2$ 总是小于 $\|q\|_{\mathcal{S}}^2$，因此方程 (6.4) 的左侧总是小于右侧。下面证明反向不等式。

令 $q_\star$ 为 方程 (6.4)左侧的最优解，并考虑任意一个可容许多项式 $q_\star + p$，其中 t次多项式 p满足 $p(0) = 0$。那么

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k} w_i |q_\star(\lambda_i) + p(\lambda_i)|^2 &= \sum_{i=1}^{k} w_i \overline{[q_\star(\lambda_i) + p(\lambda_i)]} [q_\star(\lambda_i) + p(\lambda_i)] \\ &= \sum_{i=1}^{k} w_i |q_\star(\lambda_i)|^2 + 2\mathrm{Re}\Big[\sum_{i=1}^{k} w_i \overline{p(\lambda_i)} q_\star(\lambda_i)\Big] + \sum_{i=1}^{k} w_i |p(\lambda_i)|^2 \ge \sum_{i=1}^{k} w_i |q_\star(\lambda_i)|^2 = \|q_\star\|_{\mathcal{S}}^2.\end{aligned}$$

中间项根据 方程 (6.3)消失。最后一个等号由 方程 (6.2). □

6.4 定理 1.7 的证明

现在我们准备证明 定理 1.7。我们先列出一些将要用到的基本集中界，这些结论很容易利用例如 [LM00，引理 1]:

事实 6.4 (高斯向量的范数)。 令 $\boldsymbol{g} \in \mathbb{C}^n$ 为一个具有 $n \gtrsim 1$ 的标准复高斯向量。那么

$$\mathbb{P}\{\|\boldsymbol{g}\|_2^2 \ge 2n\} \le \frac{1}{n^2} \quad \textit{and} \quad \mathbb{P}\{\|\boldsymbol{g}\|_2^2 \le n/2\} \le \frac{1}{n^2}.$$

证明定理 *1.7*。 调用引理 6.3可知，每个次数至多为q的t且$q(0) = 1$must have $\sum_{j=1}^k w_j |q(\lambda_j)|^2 \ge \varepsilon^2$的多项式都具有某些非负权重$w_1, \dots, w_k$以及节点 λ_1、…、 $\lambda_k \in \mathcal{S}$，其中$k \le 2t+1$。对于一个普适常数 $C \ge 1$，定义常数$N = C^2 t^2$ 以及重数

$$m_j := \lceil N w_j + Ct \rceil.$$

令 $n = \sum_{j=1}^k m_j$，构造对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda} \in \mathbb{C}^{n \times n}$，使其特征值为 λ_1、…、 λ_k，其重数分别为 m_1,……、 m_k。

我们构造 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{U}^*$，其中 $\boldsymbol{U}$是 Haar 随机酉矩阵，并令 $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^n$为标准复高斯向量。考虑任意固定的确定性单侧矩阵-向量乘法算法，该算法使用 $t-1$次矩阵-向量乘法计算 $\boldsymbol{A}$，并返回向量 $\boldsymbol{x}$。根据 引理 6.1，我们知道存在标准复高斯向量 $\boldsymbol{g}_0$,、…、$\boldsymbol{g}_t$，使得 $\boldsymbol{U}^*\boldsymbol{b} = \boldsymbol{g}_0$，并且

$$\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{U}^*\tilde{\boldsymbol{x}} = \sum_{i=0}^{t} p_i(\boldsymbol{\Lambda})\boldsymbol{g}_i \quad \text{for some } \deg(p_i) \le t \text{ and } p_i(0) = 0.$$

条件 $\mathrm{p}_i(0) = 0$ 是引理 6.1 的推论，因为 $\boldsymbol{\Lambda}$ 上的指数始终至少为 1。现在令 $\boldsymbol{\Pi}_j$ 为投影到与特征值 λ_j对应的 $\boldsymbol{\Lambda}$ 特征子空间上的投影。定义子向量 $\mathrm{g}_{i,j} := \boldsymbol{\Pi}_j \mathrm{g}_i$，并令 $\boldsymbol{\Pi}'\mathrm{j}$ 为从张成空间$\{\mathrm{g}1,_j, \ldots, \mathrm{g}_{t,j}\}$中投影出去的正交投影。进一步定义 $\mathrm{h}j := \boldsymbol{\Pi}'\mathrm{j}\ \mathrm{g}0,_j$。根据事实 6.4 应用并集界可知,

$$\|\boldsymbol{g}_0\|_2^2 \lesssim n \quad \text{and} \quad \|\boldsymbol{h}_j\|_2^2 \gtrsim m_j \quad \text{for all } j \in \{1, \ldots, k\}$$

其概率至少为 2/3。现在我们来界定残差。展开

$$\|\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{b}\|_2^2 = \|\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{U}^*\tilde{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{g}_0\|_2^2 = \left\|(p_0(\boldsymbol{\Lambda}) - \mathbf{I})\boldsymbol{g}_0 + \sum_{i=1}^{t} p_i(\boldsymbol{\Lambda})\boldsymbol{g}_i\right\|_2^2 = \sum_{j=1}^{k}\left\|(p_0(\lambda_j) - 1)\boldsymbol{g}_{0,j} + \sum_{i=1}^{t} p_i(\lambda_j)\boldsymbol{g}_{i,j}\right\|_2^2.$$

用 $\boldsymbol{\Pi}'_j$ 投影每个求和项范数内部的向量。由于正交投影不会增大范数，并且利用 $m_j \ge N w_j$，以及 $q(z) := 1 - p_0(z)$ 满足 $q(0) = 1$ 且次数至多为 t 这一事实,

$$\|\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{b}\|_2^2 \ge \sum_{j=1}^{k} \|(p_0(\lambda_j) - 1)\boldsymbol{h}_j\|_2^2 \gtrsim \sum_{j=1}^{k} m_j |q(\lambda_j)|^2 \ge N \sum_{j=1}^{k} w_j |q(\lambda_j)|^2 \ge \varepsilon^2 N.$$

最后注意到 $\|\boldsymbol{b}\|_2^2 \lesssim n \lesssim N$，因此 $\|\boldsymbol{A}\tilde{}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|_2 \gtrsim \varepsilon\|\boldsymbol{b}\|_2$。 □

7 无界谱条件数：GMBACK 算法

在本节中，我们证明定理 1.10，即针对谱条件数无界的线性方程组，GMBACK 算法 [Kas95, KS97]将其求解至后向误差较小的复杂度结果。从概念上讲，GMBACK 算法生成 Krylov 子空间 $\mathcal{K}_t$(A,b)，如方程 (1.1) 中所定义，并输出向量 $\tilde{}\mathrm{x} \in \mathcal{K}_t(\mathrm{A}, \mathrm{b})$，使后向误差达到最小，如方程 (1.3) 中所定义。算法及其实现的细节请参阅原始论文 [Kas95, KS97] 。其他旨在最小化后向误差或相关量的 Krylov 子空间算法包括 MINPERT [KS97], 、CGBACK [GJV10], 和 LSMB [HG18]。

我们的第一个主要定理将 GMBACK 的分析归结为一个多项式逼近问题。该结果及其分析与针对实对称矩阵的 MINBERR 算法的分析十分相似 [DNR26，第 4]。

定理 1.10，重述（GMBACK 与逆矩阵的近似）。设 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{X}^{-1}$ 是一个可逆对角化矩阵。假设存在一个次数至多为 t_{b} 的多项式 满足$_i\,|\lambda_i - 1/p(\lambda_i)| \le \varepsilon$最大值$_i\,|\lambda_i|$对某个 $\varepsilon \in (0, 1)$ 成立。于是，对于任意向量 $\boldsymbol{b}$，使用 $t_{\mathrm{b}} + 1$次单侧矩阵-向量乘法（使用 $\boldsymbol{A}$）运行 *GMBACK*，可返回一个向量 $\tilde{}\boldsymbol{x}$ 使得

$$\tilde{\boldsymbol{A}}\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b} \textit{ for some matrix } \tilde{\boldsymbol{A}} \textit{ with } \|\boldsymbol{A} - \tilde{\boldsymbol{A}}\|_2 \le \varepsilon\,\mathrm{cond}(\boldsymbol{X})\|\boldsymbol{A}\|_2.$$

$\tilde{}$特别地，如果$\boldsymbol{A}$是正规矩阵，那么$\mathrm{cond}(\boldsymbol{X}) = 1$，并且有 $\|\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}\|_2 \le \varepsilon\|\boldsymbol{A}\|_2$。

证明。 设p为由前提保证存在的多项式。由于p的次数至多为t_b，向量$\boldsymbol{y} = p(\boldsymbol{A})\boldsymbol{b} \in \mathcal{K}_{t_\mathrm{b}+1}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$属于次数为（$t_\mathrm{b}+1$）的 Krylov 子空间。根据关于$p$的假设，对所有$i$都有$p(\lambda_i) \neq 0$，因此矩阵$p(\boldsymbol{A})$是可逆的。

令 $\widehat{\boldsymbol{A}} = p(\boldsymbol{A})^{-1}$，使得 $\widehat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$。我们将 $\boldsymbol{y}$的后向误差界定为

$$\|\widehat{\boldsymbol{A}} - \boldsymbol{A}\|_2 = \|\boldsymbol{X}(p(\boldsymbol{\Lambda})^{-1} - \boldsymbol{\Lambda})\boldsymbol{X}^{-1}\|_2 \leq \mathrm{cond}(\boldsymbol{X}) \max_i \left|\lambda_i - \frac{1}{p(\lambda_i)}\right| \leq \varepsilon\,\mathrm{cond}(\boldsymbol{X})\|\boldsymbol{A}\|_2.$$

因此，$\boldsymbol{y}$是 $\boldsymbol{X}$的 $\varepsilon\mathrm{cond}(\boldsymbol{X})$-后向误差解，满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$。因此，由于 GMBACK 会返回 $\mathcal{K}_{t_\mathrm{b}+1}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$ 中后向误差最小的解，GMBACK 必定也会返回一个 $\varepsilon\,\mathrm{cond}(\boldsymbol{X})$-后向误差解，从而完成证明。

□

有了这个定理，分析 GMBACK 就归结为证明：当角特征值间隙为 p的 $(\boldsymbol{A}) \geq \theta$ 时，存在具有所需性质的多项式。等价地，通过乘以适当的复数进行缩放，我们可以假设特征值位于圆扇形$\mathcal{T}_\theta$中，该扇形已在 第 1.5.5 节中定义；参见 图 9的 (b) 面板。这正是 定理 1.12的内容，本节余下部分将用于证明该定理。

定理1.12，重述 （多项式逼近：界定圆扇形上的后向误差）。固定 $\theta \in (0,\ 2\pi]$。存在一个次数为 $t_\mathrm{b} \lesssim \theta^{-1}(2/\varepsilon)^{\pi/\theta}$的多项式 p，使得 $\|z - 1/p(z)\|_{\mathcal{T}_\theta} \leq \varepsilon$。

证明分为两部分。在 第 7.1 节中，我们将多项式逼近与格林函数联系起来。在第 7.2 节中，我们界定格林函数。

7.1 通过格林函数逼近逆

要分析矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 GMBACK，我们必须给出一个低次数多项式 p，使得对于 $\boldsymbol{A}$ 的每个特征值，$1/p(\lambda) \approx \lambda$。如前所述，我们令 $\mathcal{S}$ 表示一个特征值集合，并假设在本节中该集合是紧的且单连通。此外，由于我们关注无界谱条件数的情形，因此假设 $0 \in \mathcal{S}$ 位于允许的特征值集合中。

一个技术难点是，由于 0 属于允许的特征值集合，格林函数满足 $G_{\mathcal{S}}(0) = 0$。因此，我们无法直接利用零点处的格林函数来界定多项式逼近误差。幸运的是，紧邻允许的特征值集合外侧的格林函数值，将为我们提供所需的信息。我们有如下结果。

定理 7.1 （格林函数控制多项式逼近，反向变体）。 设 $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{C}$ 是一个紧单连通区域，且 $R = \max_{z\in\mathcal{S}}|z|$。进一步假设 $\mathcal{S}$ 至少包含两个不同的元素，且 $0 \in \mathcal{S}$，并且 0 位于 $\mathcal{S}$ 的边界上。设 $G_{\mathcal{S}}(z)$ 为$\mathcal{S}$的格林函数。对于任意 $\varepsilon \in (0,1)$，存在一个次数为 t_b 的多项式 p，使得

$$\left\|z - \frac{1}{p(z)}\right\|_{\mathcal{S}} \leq \varepsilon\|z\|_{\mathcal{S}} \quad \textit{and} \quad t_\mathrm{b} \lesssim 1 + \frac{1}{\max\limits_{\substack{z\notin\mathcal{S}:\\ |z|\leq\varepsilon R/2}} G_{\mathcal{S}}(z)}.$$

特别地，要证明 定理 1.12，只需证明存在一个点 z满足 $|z| \leq \varepsilon/2$，使得 $G_{\mathcal{T}_\theta}(z) \gtrsim \theta\varepsilon^{\pi/\theta}$。

证明首先将构造一个函数 $(z-w)^{-1}$ 的多项式逼近 p，其中的某个 w接近但不属于集合 $\mathcal{S}$。然后，我们将证明该多项式满足 $1/p(z) \approx z$在 $\mathcal{S}$ 上成立。核心引理如下。

引理 7.2 （对（$z-w$）$^{-1}$）。 设 $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{C}$ 是一个紧致的单连通集合，并假设 $w \notin \mathcal{S}$。则存在一个次数为 $t \lesssim 1 + {}^{1}\!/\!_{G_{\mathcal{S}}(w)}$ 的多项式 p，使得

$$\left|p(z) - \frac{1}{z-w}\right| \leq \frac{1}{9} \cdot \min_{v\in\mathcal{S}}\left|\frac{w-v}{z-v}\right| \cdot \left|\frac{1}{z-w}\right| \qquad \textit{for all } z \in \mathcal{S}. \tag{7.1}$$

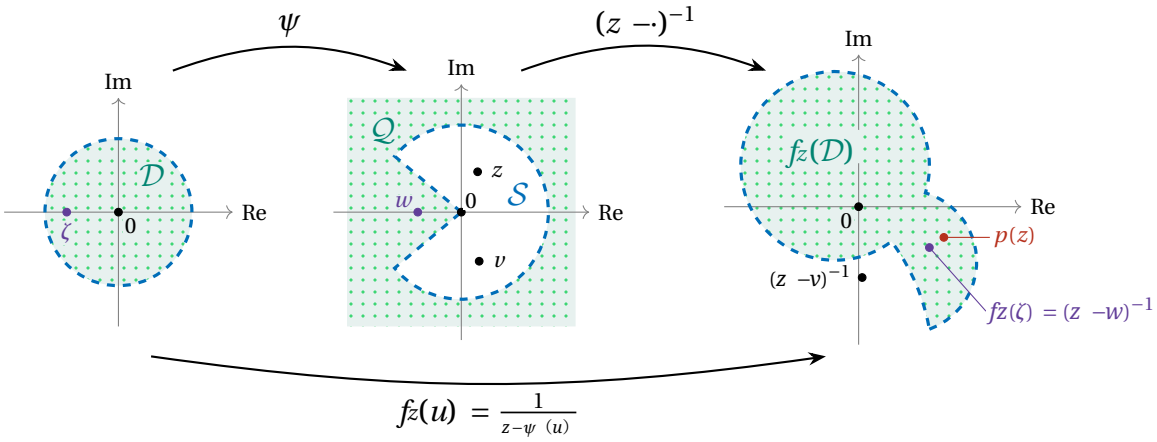


图 9：引理 7.2 证明中涉及的各个元素示意图。给定补域 $\mathcal{Q} = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{S}$中的一点 w。 ψ 将单位圆盘 $\mathcal{D}$的内部映射到 $\mathcal{Q}$，而 ζ 定义为 w 在 ψ下的原像。对每个固定点 z $\in \mathcal{S}$，我们构造定义在 $\mathcal{Q}$上的单叶函数 1/(z −w)。因此，函数 f_z (u) := 1/(z − ψ(u)) 是定义在 $\mathcal{D}$上的单叶函数。接着，我们使用 Imported Theorem 7.3 构造多项式 p，并保证对于所有 v $\in \mathcal{S}$，误差 |p(z) − 1/(z −w)| 比距离|(z − w)$^{-1}$ −(z − v)$^{-1}$| 小 9 倍。

我们将借助单叶函数理论来证明这个引理。单叶函数具有非常严谨的结构，并且拥有极强的逼近论性质。我们的证明沿用了成熟的方法，但这种方法的具体应用似乎是新的。关于早期研究，请参见论文 [AST20]，，该文运用单叶函数理论分析了法贝尔多项式的极值性质；另请参见 [ML21，第 2]节。我们只会通过以下结果运用这一理论。

Imported Theorem7.3 (单叶函数的一致逼近， [AR94，引理 4 和 6])。 考虑一族单叶函数 $\{f_z \colon \mathcal{D} \to \mathbb{C}\}$，由一个数 $z \in \mathcal{S}$ 参数化，且其取值属于集合 $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{C}$。此外，假设对于每个 $z \in \mathcal{S}(0) = 0$，f_z。那么，对于每个 $\zeta \in \mathcal{D}$，都存在 $m \lesssim (1 - |\zeta|)^{-1}$ 个系数$\beta_1, \ldots, \beta_m \in \mathbb{C}$，使得对于所有 $z \in \mathcal{S}$，以下界成立：

$$\left| \sum_{j=1}^{m} \beta_j a_j(z) - f_z(\zeta) \right| \le \frac{1}{9} \min_{s \notin f_z(\mathcal{D})} |f_z(\zeta) - s|, \tag{7.2}$$

其中 $a_j(z)$ de 注意幂级数展开 $f_z(u) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j(z) u_j$ 中的系数，对每个 $z \in \mathcal{S}$.

这一结果的结论很有力。对于给定的 m 和 ζ，同一组系数 β_j 能够同时对该族中的每一个单叶函数实现方程 (7.2) 的近似保证。利用这一结果，我们证明引理 7.2。

引理7.2的证明。 设 χ 是从 $\mathcal{Q} := \widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{S}$ 到单位圆盘外部 $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{D}$ 的归一化共形映射。则 $\psi(u) := \chi^{-1}(1/u)$ 定义了一个从 $\mathcal{D}$ 到 $\mathcal{Q}$ 的共形映射。选取 $\zeta \in \mathcal{D}$ 使得 $\psi(\zeta) = w$。对于每个 $z \in \mathcal{S}$，在单位圆盘上定义如下单叶函数：

$$f_z(u) := \frac{1}{z - \psi(u)}, \quad \text{so that } f_z(0) = 0 \text{ and } f_z(\zeta) = \frac{1}{z - w}.$$

设置示意图见图 9。

我们将利用单叶函数族 $\{f_z\}_{z \in \mathcal{S}}$ 中各函数的幂级数系数来构造多项式逼近 $(z - w)^{-1}$。具体而言，由于每个函数 f_z 都是解析的，并满足 $f_z(0) = 0$，因此可以将其展开为幂级数 $f_z(u) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j(z) u_j$。注意，系数 $a_j(z)$ 本身是

次数至多为j的多项式。事实上，由于 χ 是归一化共形映射，有 $\psi(0) = \chi^{-1}(\infty) = \infty$，并且

$$\lim_{u\to 0} u\psi(u) = \lim_{u\to\infty} u/\chi(u) = \alpha \quad \text{for some real } \alpha > 0.$$

换句话说， ψ 在 0 处有一个简单极点，因此我们可以将其分解为

$$\psi(u) = \frac{\alpha}{u} + h(u) \quad \text{for some analytic function } h.$$

因此，我们可以将h展开为幂级数$h(u) = \sum_{\ell=0}^{\infty} c_\ell u^\ell$，并写成

$$f_z(u) = \frac{1}{z - \frac{\alpha}{u} - h(u)} = -\frac{u}{\alpha}\frac{1}{1 - \frac{u}{\alpha}(z - h(u))} = -\frac{u}{\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{u}{\alpha}(z - h(u))\Big)^k.$$

因此，如果将h 的幂级数代入此表达式并合并各项，就会发现，u_j前面的系数$a_j(z)$是一个关于z的次数至多为j的多项式。

为了构造多项式逼近，我们应用Imported Theorem 7.3，得到系数$\beta_1, \dots, \beta_m$，对于某个 $m \lesssim (1-|\zeta|)^{-1}$。我们有多项式

$$p(z) := \sum_{j=1}^{m} \beta_j a_j(z)$$

满足

$$\Big|p(z) - \frac{1}{z-w}\Big| \le \frac{1}{9}\Big|\frac{1}{z-w} - s\Big| \quad \text{for all } z \in \mathcal{S} \text{ and } s \notin f_z(\mathcal{D}). \tag{7.3}$$

由于 $|\zeta| = e^{-G_{\mathcal{S}}(w)}$，该多项式的次数为$m \lesssim (1-|\zeta|)^{-1} \lesssim 1 + 1/G_{\mathcal{S}}(w)$。

现在令 $v \in \mathcal{S}$。根据构造，$s = (z-v)^{-1} \notin f_z(\mathcal{D})$，因此 方程 (7.3) 给出

$$\Big|p(z) - \frac{1}{z-w}\Big| \le \frac{1}{9}\Big|\frac{1}{z-w} - \frac{1}{z-v}\Big| = \frac{1}{9}\Big|\frac{v-w}{z-v}\Big| \cdot \Big|\frac{1}{z-w}\Big|.$$

通过对 v 取最小值，完成证明。 □

有了 引理 7.2 的帮助，现在完成 定理 7.1 的证明就很直接了。

定理 7.1 的证明。任取一点 $|w| \le \varepsilon R/2$，使得 $G_{\mathcal{S}}(w) \ge \frac{1}{2}\max_{|z|\le \varepsilon R/2} G_{\mathcal{S}}(z)$，并令 $f(z) := (z-w)^{-1}$。引理 7.2 给出了一个次数为 $t_b \lesssim 1 + 1/G_{\mathcal{S}}(w)$ 的多项式，使得

$$\big|p(z) - f(z)\big| \le \frac{1}{9} \cdot \min_{v\in\mathcal{S}}\Big|\frac{w-v}{z-v}\Big| \cdot \big|f(z)\big| \quad \text{for all } z \in \mathcal{S}. \tag{7.4}$$

取 $v = 0$ 并整理可得

$$|z||p(z) - f(z)| \le \frac{1}{9}|w||f(z)| \quad \text{for all } z \in \mathcal{S}.$$

此外，当 $|z| \ge R/2$ 时取 $v = 0$，而当 $|z| \le R/2$ 时取 $|v| = R$，可得

$$\big|p(z) - f(z)\big| \le \frac{1}{3}\big|f(z)\big| \quad \text{for all } z \in \mathcal{S}.$$

利用恒等式 $(z-w)f(z) = 1$，我们得出

$$\Big|z - \frac{1}{p(z)}\Big| = \frac{|zp(z) - 1|}{|p(z)|} = \frac{|z(p(z) - f(z)) + wf(z)|}{|p(z)|} \le \frac{\frac{10}{9}|w||f(z)|}{\frac{2}{3}|f(z)|} \le \frac{5}{6}\varepsilon R < \varepsilon \|z\|_{\mathcal{S}}.$$ □

7.2 界定新的格林函数

在根据格林函数给出了近似次数的上界 t_{b} 之后（见第 7.1 节），我们现在的目标是明确给出格林函数的上界。幸运的是，我们在第 4 节 用于给出格林函数下界的方法，可以直接得到圆扇形的结果。

定理 7.4 （圆扇形的格林函数下界）。 设 $\theta \in (0, 2\pi]$ 且 $\varepsilon \in (0,1)$。那么，圆扇形 $\mathcal{T}_\theta$ 的格林函数满足 $G^{\mathcal{T}_\theta}(-\varepsilon) \geq (\pi \mathrm{e})^{-1} \theta \varepsilon^{\pi/\theta}$。

证明。 在 $z = -\varepsilon$ 处应用定理 4.6 ，得到 $G^{\mathcal{T}_\theta}(-\varepsilon) \geq \frac{1}{\pi}\, \mathrm{e}\, \theta \varepsilon^{\pi/\theta}$。 □

结合 起来，定理 7.1 和 7.4 证明了定理 1.12中的后向误差上界 .

人工智能方法论

无论是否使用任何人工智能工具，作者都对这一研究问题产生了兴趣，并提出了一项证明，表明 GMRES 的渐近收敛速率为 $\exp(-\Theta(\kappa)^{\pi/\theta})$。之后，作者使用 Gemini 3 Pro、4 Argon 以及 ChatGPT 5.6、6.0 和 6.1 模型，将这一证明概要进一步完善为带有明确常数的非渐近结果。本文几乎所有最终结果都因人工智能的使用而得到改进；几何函数论中的工具对作者而言是全新的，也是作者在与人工智能系统协作过程中发现的。本文由作者撰写。作者还使用人工智能工具来发现并纠正错误、编辑文字以及生成图表。作者已核实所有内容（包括参考文献）的正确性和原创性，并对本文内容承担全部责任。

致谢

我们感谢 Chris Camaño、Michał Derezi ´nski 和 Anne Greenbaum 的宝贵交流。我们尤其感谢 Nick Trefethen 提供了一份非常好的说明，解释了 GMRES 对圆弧上特征值的 $\Theta(\theta^{-2})$ 复杂度。CC 获得美国国家科学基金会研究生研究奖学金资助（项目编号 2146752）。ENWE 获得加州大学伯克利分校米勒基础科学研究所的资助。MWM 和 RAM 感谢 DARPA DIAL 和 DARPA AIQ 项目为本研究提供部分支持。RAM 和 ENWE 的研究还部分得益于通过 ChatGPT 学术研究者计划获得的 OpenAI 模型访问权限资助。JU 感谢 Alex Cohen 就对数势理论、调和函数以及一个粗略得多的 定理 1.9版本与其进行了多次交流。本材料基于美国国家科学基金会资助的研究成果（项目编号 DMS-2513687）。

参考文献

[ABD95] V. V. Andrievskii、V. I. Belyi 和 V. K. Dzjadyk。《复变函数构造理论中的共形不变量》，数学科学与工程高级丛书第 1 卷。世界联邦出版社，佐治亚州亚特兰大，1995 年。（引用于第 19 页。）[ABW01] S. Axler、P. Bourdon 和 R. Wade。《调和函数理论》，数学研究生教材第 137 卷。施普林格，纽约，第二版，2001 年。（引用于第 8、16 和 17 页。）[And04a] V. V. Andrievskii。论实轴集合上的构造函数理论问题中的共形不变量。《乌克兰数学通报》，1(1):21–46，2004 年。译自 Ukraïns'ki ˘ı Matematychny ˘ı Visnyk。（引用于第 19 页。）[And04b] V. V. Andrievskii。论有限个实区间补集的格林函数。《Constructive Approximation》，20:565–583，2004 年。（引用于第 19 和 21 页。）[And06a] V. V. Andrievskii。论康托尔型集合补集的格林函数的最优光滑性。《Constructive Approximation》，24:113–122，2006 年。（引用于第 19 页。）[And06b] V. V. Andrievskii。通过位势理论和几何函数理论研究复平面集合上的构造函数理论。《Surveys in Approximation Theory》，2:1–52，2006 年。（引用于第 19 页。）

[AR94] V. V. Andrievskii 和 S. Ruscheweyh。单位圆盘中单叶函数的最大多项式从属。《Constructive Approximation》，10(1):131–144，1994 年。（引用于第 19 和 29 页。）[AR07] V. V. Andrievskii 和 S. Ruscheweyh。复平面中的 Remez 型不等式。《Constructive Approximation》，25(2):221–237，2007 年。（引用于第 19 页。）[Arn51] W. E. Arnoldi。矩阵特征值问题求解中的最小化迭代原理。《Quarterly of Applied Mathematics》，9(1):17–29，1951 年。（引用于第 12 页。）[AST20] F. G. Abdullayev、V. V. Savchuk 和 T. Tunç。法贝尔多项式及法贝尔算子范数的精确估计。《Complex Variables and Elliptic Equations》，65(2):293–305，2020 年。（引用于第 29 页。）[Bak59] N. S. Bakhvalov。重积分的近似计算。《Vestnik Moskovskogo Universiteta, Seriya Matematiki, Mekhaniki, Astronomii, Fiziki, Khimii》，4:3–18，1959 年。俄文。英文译文发表于《J. Complexity》，31(4):502–516，2015 年。（引用于第 1 页。）[BCW22] A. Bakshi、K. L. Clarkson 和 D. P. Woodruff。使用 $1/\varepsilon^{1/3}$ 矩阵向量乘积的低秩近似。载于第 54 届 ACM计算理论研讨会论文集，第 1130–1143 页，2022 年。（引用于第 4 页。）[Bel20] D. Beliaev。《Conformal Maps and Geometry》。世界科学出版社，2020 年。（引用于第 8、9、14、21 和 23 页。）[Bet98] D. Betsakos。固定内半径单连通域上的调和测度。《Arkiv för Matematik》，36(2):275–306，1998 年。（引用于第 21 页。）[BGL05] M. Benzi、G. H. Golub 和 J. Liesen。鞍点问题的数值解。《Acta Numerica》，14:1–137，2005 年。（引用于第 4 页。）[BGT05] B. Beckermann、S. A. Goreinov 和 E. E. Tyrtyshnikov。关于 GMRES 的 Elman估计的若干注记。《SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications》，27(3):772–778，2005 年。（引用于第 13 页。）[BHOT24] N. Boullé、D. Halikias、S. E. Otto 和 A. Townsend。不使用伴随算子的算子学习。《机器学习研究杂志》，25(364):1–54，2024 年。（引用于第 4 页。）[BHSW20] M. Braverman、E. Hazan、M. Simchowitz 和 B. Woodworth。线性回归的梯度复杂度。载于第 33 届 Learning Theory 会议论文集，第 627–647 页，2020 年。（引用于第 4 页。）[BJH+25] O. Balabanov、C. Ju、K. He、A. Jeendgar 和 M. W. Mahoney。通过随机范围消去进行预条件（RandRAND）。arXiv 预印本 arXiv:2509.19747v1，2025 年。（引用于第 4 页。） [BKM22] V. Braverman 、 A. Krishnan 和 C. Musco。亚线性时间谱密度估计。载于第 54 届 ACM计算理论研讨会论文集，第 1144–1157 页，2022 年。（引用于第 4 页。）[BN23] A. Bakshi 和 S. Narayanan。对于低秩近似，Krylov方法几乎是最优的。载于第 64 届 IEEE计算机科学基础研讨会论文集，第 2093–2101 页，2023 年。（引用于第 4 和 25 页。）[BSS10] M. Bellalij、Y. Saad 和 H. Sadok。特征值问题中 Arnoldi过程的进一步分析。《SIAM Journal on Numerical Analysis》，48(2):393–407，2010 年。（引用于第 13 页。）[CDDPL+24] S. Chewi、J. De Dios Pont、J. Li、C. Lu 和 S. Narayanan。对数凹采样的查询下界。《Journal of the ACM》，71(4):1–42，2024 年。（引用于第 9 和 25 页。）[CEM+26] T. Chen、E. N. Epperly、R. A. Meyer、C. Musco 和 A. Rao。随机块Krylov低秩近似中的块大小是否重要？载于第三十七届 ACM-SIAM 离散算法研讨会论文集，第 1026–1046 页，2026 年。（引用于第 2 和 13 页。）[CFG14] E. J. Candès 和 C. Fernandez-Granda。迈向超分辨率的数学理论。《Communications on Pure and Applied Mathematics》，67(6):906–956，2014 年。（引用于第 2 页。）[CG15] D. Choi 和 A. Greenbaum。矩阵根在 GMRES 收敛性和 Crouzeix猜想研究中的应用。《SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications》，36(1):289–301，2015 年。（引用于第 3 页。）[Che24] T. Chen。矩阵函数的 Lanczos 算法：科学家手册。arXiv 预印本 arXiv:2410.11090v2，2024 年。（引用于第 4 页。）[CKH+25] T. Chen、F. D. Keles、D. Halikias、C. Musco、C. Musco 和 D. Persson。通过矩阵向量乘积获得近乎最优的层次矩阵近似。载于第三十六届 ACM-SIAM 离散算法研讨会论文集，第 2656–2692 页，2025 年。（引用于第 4 页。）[CM95] J. P. Coleman 和 N. J. Myers。环形扇区的法贝尔多项式。《Mathematics of Computation》，64(209):181–203，1995 年。（引用于第 13 和 15 页。）[CR12] E. Candès 和 B. Recht。通过凸优化实现精确矩阵补全。《《ACM 通讯》》，55(6):111–119，2012 年。（引用于第 2 页。）[Cro07] M. Crouzeix。Hilbert空间中的数值域与函数演算。《Journal of Functional Analysis》，244(2):668–690，2007 年。（引用于第 13 页。）[DEM26] M. Derezi´nski、E. N. Epperly 和 R. A. Meyer。Ax =b 的矩阵向量复杂度。载于第 39 届 Learning Theory 会议论文集，2026 年。（引用于第 2、3、4、8、9 和 25 页。）[DMMM26] M. Derezi´nski、M. W. Mahoney、R. A. Meyer 和 C. Musco。从平滑分析到后向误差：自适应扰动的力量，2026 年。即将出版。（引用于第 8 和 12 页。）[DNR26] M. Derezi´nski、Y. Nakatsukasa 和 E. Rebrova。迈向线性系统求解器中后向误差的普适收敛。arXiv 预印本 arXiv:2604.16075v2，2026 年。（引用于第 7、11 和 27 页。）

[DTT98] T. A. Driscoll、K.-C. Toh 和 L. N. Trefethen。从位势理论到矩阵迭代：六个步骤。SIAM Review，40(3):547–578，1998。（引文见第 2、4、8、9 和 13 页。）[EG83] S. W. Ellacott 和 M. H. Gutknecht。Jordan 区域的多项式 Carathéodory–Fejér 逼近法。IMA Journal of Numerical Analysis，3(2):207–220，1983。（引文见第 10 和 15 页。）[EGN26] E. N. Epperly、A. Greenbaum 和 Y. Nakatsukasa。通过预条件正规方程求解一般线性系统的稳定算法。Numerische Mathematik，2026。（引文见第 13 页。）[Eie89] M. Eiermann。关于由法贝尔多项式生成的半迭代法。Numerische Mathematik，56(2):139–156，1989。（引文见第 3、13 和 15 页。）[Eie93] M. Eiermann。数值域与迭代法。Linear Algebra and its Applications，180:167–197，1993。（引文见第 13 页。）[ELV89] M. Eiermann、X. Li 和 R. S. Varga。关于混合半迭代法。SIAM Journal on Numerical Analysis，26(1):152–168，1989。（引文见第 13 页。）[Emb22] M. Embree。GMRES 收敛界的描述能力如何？arXiv 预印本 arXiv:2209.01231v1，2022。（引文见第 4 和 13 页。）[EN83] M. Eiermann 和 W. Niethammer。关于半迭代法的构造。SIAM Journal on Numerical Analysis，20(6):1153–1160，1983。（引文见第 13 页。）[ENV85] M. Eiermann、W. Niethammer 和 R. S. Varga。非对称线性方程组半迭代法的研究。Numerische Mathematik，47(4):505–533，1985。（引文见第 13 页。）[ETW24] E. N. Epperly、J. A. Tropp 和 R. J. Webber。XTrace：充分利用随机迹估计中的每个样本。SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications，45(1):1–23，2024。（引文见第 4 页。）[EVO06] Y. A. Erlangga、C. Vuik 和 C. W. Oosterlee。非齐次亥姆霍兹方程的多重网格与不完全 LU 移位拉普拉斯预条件子的比较。Applied Numerical Mathematics，56(5):648–666，2006。（引文见第 4 页。）[Gai87] D. Gaier。《复逼近讲义》。Birkhäuser，波士顿，马萨诸塞州，1987。（引文见第 14 页。）[GG94] A. Greenbaum 和 L. Gurvits。矩阵因子范数的极大–极小性质。SIAM Journal on Scientific Computing，15(2):348–358，1994。（引文见第 13 页。）[Gir87] D. Girard。用于大规模问题广义交叉验证的一种简单快速算法。技术报告 RR 665-M，IMAG，法国格勒诺布尔，1987。（引文见第 4 页。）[GJV10] S. Gratton、P. Jiránek 和 X. Vasseur。利用共轭梯度法在能量范数下最小化后向误差。技术报告 TR/PA/10/45，CERFACS，法国图卢兹，2010。（引文见第 27 页。）[GM05] J. B. Garnett 和 D. E. Marshall。《调和测度》，《New Mathematical Monographs》第 2 卷。剑桥大学出版社，剑桥，2005。（引文见第 17 页。）[GPS96] A. Greenbaum、V. Pták 和 Z. Strakoš。GMRES 可以实现任意非递增收敛曲线。SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications，17(3):465–469，1996。（引文见第 13 页。）[Gre97] A. Greenbaum。《求解线性系统的迭代法》，《Frontiers in Applied Mathematics》第 17 卷。工业与应用数学学会，费城，宾夕法尼亚州，1997。（引文见第 2、4、8、9 和 13 页。）[HG18] E. Hallman 和 M. Gu。LSMB：最小化最小二乘问题的后向误差。SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications，39(3):1295–1317，2018。（引文见第 27 页。）[HHT26] D. Halikias、M. E. Hochstenbach 和 A. Townsend。无转置线性代数。arXiv 预印本 arXiv:2606.01335v1，2026。（引文见第 4 和 5 页。）[HS52] M. R. Hestenes 和 E. Stiefel。求解线性系统的共轭梯度法。美国国家标准局研究杂志，49(6):409–436，1952。（引文见第 4 页。）[Hut89] M. F. Hutchinson。用于拉普拉斯平滑样条影响矩阵迹的随机估计量。Communications in Statistics – Simulation and Computation，18(3):1059–1076，1989。（引文见第 4 页。）[JS01] Z. Jia 和 G. W. Stewart。关于逼近特征子空间的 Rayleigh–Ritz 方法的分析。Mathematics of Computation，70(234):637–647，2001。（引文见第 13 页。）[Kan66] S. Kaniel。线性代数中若干计算技术的估计。Mathematics of Computation，20(95):369–378，1966。（引文见第 4 页。）[Kas95] E. M. Kasenally。GMBACK：非对称线性系统的广义最小后向误差算法。SIAM Journal on Scientific Computing，16(3):698–719，1995。（引文见第 11 和 27 页。）[KL00] T. Koch 和 J. Liesen。共形“Bratwurst”映射及其相关法贝尔多项式。Numerische Mathematik，86(1):173–191，2000。（引文见第 13 页。）[KP10] A. Kroó 和 A. Pinkus。强唯一性。Surveys in Approximation Theory，5:1–91，2010。（引文见第 9 和 26 页。）[KS97] E. M. Kasenally 和 V. Simoncini。非对称线性系统最小扰动算法的分析。SIAM Journal on Numerical Analysis，34(1):48–66，1997。（引文见第 11 和 27 页。）[KW92] J. Kuczy´nski 和 H. Wo´zniakowski。利用随机初始向量的幂算法和 Lanczos 算法估计最大特征值。SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications，13(4):1094–1122，1992。（引文见第 2 和 4 页。）[Lan50] C. Lanczos。求解线性微分算子和积分算子特征值问题的迭代法。美国国家标准局研究杂志，45(4):255–282，1950。（引文见第 4 页。）

[LM00] B. Laurent 和 P. Massart。通过模型选择对二次泛函进行自适应估计。《统计年刊》，28(5):1302–1338，2000。（引文见第 26 页。）[Mei63] G. Meinardus。关于 L. V. Kantorowitsch 不等式的一种推广。Numerische Mathematik，5(1):14–23，1963。（引文见第 4 页。）[ML21] O. Mattei 和 M. Lim。任意形状刚性夹杂在任意远场载荷作用下平面弹性静力学问题的显式解析解。《弹性力学杂志》，144(1):81–105，2021。（引文见第 29 页。）[MM15] C. Musco 和 C. Musco。用于更强、更快速近似奇异值分解的随机分块 Krylov 方法。载于《神经信息处理系统进展》，第 28 卷，第 1396–1404 页，2015。（引文见第 13 页。）[MMM24] R. A. Meyer、C. Musco 和 C. Musco。低秩逼近中单向量 Krylov 方法非同寻常的有效性。载于第三十五届 ACM-SIAM 离散算法研讨会论文集，第 811–845 页，2024。（引文见第 2 和 13 页。）[MMMW21] R. A. Meyer、C. Musco、C. Musco 和 D. P. Woodruff。Hutch++：最优随机迹估计。载于 2021 年算法简约性研讨会论文集，第 142–155 页，2021。（引文见第 4 页。）[MO95] J. Modersitzki 和 G. Opfer。环形扇区上的法贝尔多项式与最小多项式之比较。载于 R. M. Ali、S. Ruscheweyh 和 E. B. Saff（编），《计算方法与函数论 1994》（槟城），《逼近与分解丛书》第 5 卷，第 243–265 页。世界科学出版社，新泽西州 River Edge，1995。（引文见第 13 页。）[NRT92] N. M. Nachtigal、S. C. Reddy 和 L. N. Trefethen。非对称矩阵迭代的速度有多快？SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications，13(3):778–795，1992。（引文见第 4 和 13 页。）[NY83] A. S. Nemirovsky 和 D. B. Yudin。《优化中的问题复杂度与方法效率》。《Wiley-Interscience 离散数学丛书》。Wiley，奇切斯特，1983。E. R. Dawson 译。（引文见第 4 页。）[PCK22] D. Persson、A. Cortinovis 和 D. Kressner。用于迹估计的 Hutch++算法改进变体。SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications，43(3):1162–1185，2022。（引文见第 4 页。）[PS75] C. C. Paige 和 M. A. Saunders。稀疏不定线性方程组的解。SIAM Journal on Numerical Analysis，12(4):617–629，1975。（引文见第 4 页。）[PV24] R. Peng 和 S. S. Vempala。比矩阵乘法更快地求解稀疏线性系统。《ACM 通讯》，67(7):79–86，2024。（引文见第 2 页。）[Ran95] T. Ransford。《复平面势理论》，《伦敦数学会学生教材》第 28 卷。剑桥大学出版社，剑桥，1995。（引文见第 18 页。）[Rec11] B. Recht。矩阵补全的一种更简单方法。《机器学习研究杂志》，12:3413–3430，2011。（引文见第 2 页。）[Saa80] Y. Saad。用于计算大型非对称矩阵特征元的 Arnoldi 方法变体。Linear Algebra and its Applications，34:269–295，1980。（引文见第 12 和 13 页。）[Saa03] Y. Saad。《稀疏线性系统迭代方法》，《应用数学其他著作》第 82 卷。工业与应用数学学会，费城，宾夕法尼亚州，第二版，2003。（引文见第 4 和 9 页。）[Saa11] Y. Saad。《大型特征值问题的数值方法》，《应用数学经典著作》第 66 卷。工业与应用数学学会，费城，宾夕法尼亚州，修订版，2011。（引文见第 2、4、9 和 13 页。）[Saf10] E. B. Saff。带有逼近理论应用的对数势理论。Surveys in Approximation Theory，5:165–200，2010。（引文见第 8、9、10 和 15 页。）[Sha49] C. E. Shannon。噪声环境中的通信。《IRE 论文集》，37(1):10–21，1949。（引文见第 2 页。）[Sha26] O. Shamir。求解 Ax =b 的一个简单复杂度下界。arXiv 预印本 arXiv:2609.10874v1，2026。（引文见第 3、8、9、25 和 26 页。）[Sid03] A. Sidi。一类不定线性系统的零成本预条件。《WSEAS 数学汇刊》，2:142–150，2003。（引文见第 4 页。）[SS86] Y. Saad 和 M. H. Schultz。GMRES：求解非对称线性系统的广义最小残量算法。SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing，7(3):856–869，1986。（引文见第 4、5 和 9 页。）[TLD+10] J. A. Tropp、J. N. Laska、M. F. Duarte、J. K. Romberg 和 R. G. Baraniuk。超越奈奎斯特：稀疏带限信号的高效采样。《IEEE 信息论汇刊》，56(1):520–544，2010。（引文见第 2 页。）[Tre90] L. N. Trefethen。逼近理论与数值线性代数。载于《逼近算法 II》，第 336–360 页。施普林格，1990。（引文见第 13 页。）[Tre19] L. N. Trefethen。《逼近理论与实践》。工业与应用数学学会，费城，宾夕法尼亚州，增补版，2019。（引文见第 2 页。）[Tur48] A. M. Turing。矩阵过程中的舍入误差。《理论力学与应用数学季刊》，1(1):287–308，1948。（引文见第 7 页。）[TW23] J. A. Tropp 和 R. J. Webber。低秩矩阵逼近的随机化算法：设计、分析与应用。arXiv 预印本 arXiv:2306.12418，2023。（引文见第 13 页。）[TWW88] J. F. Traub、G. W. Wasilkowski 和 H. Wo´zniakowski。《基于信息的复杂性》。《计算机科学与科学计算》。学术出版社，波士顿，马萨诸塞州，1988。A. G. Werschulz 和 T. Boult 参与撰写。（引文见第 1 和 4 页。）

[vNG47] J. von Neumann 和 H. H. Goldstine。 高阶矩阵的数值求逆。 《美国数学会通报》，53(11):1021–1099，1947。（引用见第 7页。）[Vuo88] M. Vuorinen。 共形几何与拟正则映射，《数学讲义》第1319卷。施普林格，柏林，1988年。（引用见第 8 页和第21页。）[Wat22] A. Wathen。 关于正规方程和最小二乘预条件的一些评论。 *SIAM Review*，64(3):640– 649，2022年。（引用见第13页。）