arXiv:2611.31961v1 [physics.gen-ph] 24 Nov 2026

卡当软破缺的物理选择：破缺的 $SU(3)$ 杨–米尔斯模型

M. M. Amaral*[1] 和 V. E. R. Lemes†[2]

[1] *Gauge Freedom, Inc., Los Angeles, CA, USA*[2] *Instituto de Física, Universidade do Estado do Rio de Janeiro,Rua São Francisco Xavier 524, Maracanã, Rio de Janeiro - RJ, 20550-013, Brazil*

2026年11月25日

摘要

我们重新考察带有软二次破缺的破缺-$SU(3)$ 杨–米尔斯模型，该破缺由二维算符 $d^{abc}A^b_\mu A^c_\mu$诱导，此前研究的是物理源沿颜色 3 方向对齐的情形。我们将这一构造推广到一般的 Cartan值源，并确定相应的二次传播子及其相关的 i 粒子结构。我们证明，对角 (3、8) 扇区总是重组为一对共轭复模，因此支持一个具有 K¨all´en–Lehmann 谱表示的物理单圈复合通道。相比之下，由 (4、5) 和 (6、7) 扇区构成的复制子型非对角通道，只有在 Cartan 平面中的一条特殊轨迹上，才仍是可接受的物理通道。从这个意义上说，原有的颜色-3模型并非仅仅是一个便于说明的例子：由于中性非对角物理通道与对角通道同时存续，它在动力学上被特别选定。由此得到的图景更清晰地揭示了软色破缺、受禁闭启发的传播子，以及在禁闭规范理论中构造具有物理意义的复合算符之间的关系。此外，我们证明，这种独特的软破缺结构可以通过一种 BRST不变的自发对称性破缺机制在动力学上生成，同时保持理论严格的代数可重整化性。

1 引言

胶子禁闭问题仍然是强耦合规范理论研究中的核心问题之一。从基本传播子的角度来看，分析和

*mramaciel@gmail.com
†verlemes@gmail.com

数值研究共同揭示的重要结论是，胶子场的红外行为与普通粒子激发的红外行为存在显著差异。特别是，Gribov 型传播子呈现复极点并违反正定性，从而阻碍了对基本规范场的粒子诠释 [1, 2, 3, 4]。与此同时，适当的局域复合算符仍可能具有带正谱密度的 K¨all´en–Lehmann 表示，因此，在中性可观测量的层面，具有物理意义的通道仍然可以保留下来 [5, 6]。

在先前的工作中， [7], 我们研究了朗道规范下的一个破缺-SU(3)杨–米尔斯模型，其中，与 $d^{abc}A^b_\mu A^c_\mu$成正比的软二阶破缺在不引入辅助场的情况下诱导出一种类副本结构。对于沿颜色 3 方向排列的物理源，二次理论以一种非凡的方式自行组织起来：两个混合的 SU(2)子扇区通过类似镜像的 i-粒子结构相互关联，而对角的 (3,8) 扇区则产生了第二个复模共轭对。在这一框架下，可以构造中性厄米双线性算符，其单圈二点函数呈现出具有正谱密度的 K¨all´en–Lehmann 谱表示。因此，原始构造明确展示了一种机制，使软颜色破缺和受禁闭启发的传播子能够与具有物理意义的复合通道共存。最近，在 BRST 框架下，人们进一步研究了破缺或复化规范理论中物理可观测量的定义等相关问题，结果表明，可允许的可观测扇区高度依赖于对称性破缺实现 [8, 9]。

一个自然的问题是，选择颜色3是否仅仅是在更广泛的等价 Cartan 破缺族中选取的一个方便代表，还是说，它实际上是由物理复合算符本身的存在所选定的一个特殊轨迹。这正是我们在本文中要探讨的问题。

为此，我们将物理源从特殊的颜色3选择推广到 SU(3)代数中的一般 Cartan值源。这是对原始模型的最小形变，但它已经导致红外理论发生非平凡的重构。正如我们将要看到的，不同颜色扇区对这种形变的响应在性质上截然不同。

我们的主要结果是，对角的 (3，8) 扇区在完整的 Cartan 形变下具有鲁棒性：其二次型总能对角化为一对共轭复模，相应的中性双线性算符则继续定义一个自然的物理单圈通道。相比之下，由 (4，5) 和 (6，7) 扇区构成的非对角复制子型通道则严格得多。对于一般 Cartan 源，这些扇区不再以标准 i-粒子构造所要求的结构组织成共轭对。因此，原始模型中允许存在的中性厄米双线性算符，仅在 Cartan 平面中的一个特殊轨迹上得以保留。

这一结果为以往的构造提供了新的诠释。最初的颜色-3模型并非只是众多等价软破缺中的一种代表。相反，它在卡当空间中占据着一个特殊的位置：它恰好是复制子型非对角通道与对角物理通道共存的轨迹。从这个意义上说，复合算符的可容许性为卡当

子代数中软源的取向提供了一种物理选择原理。

本文结构如下。第 2 节回顾原始的颜色 3 模型，并提取将要推广的要素。第 3 节确定一般 Cartan值源对应的二次传播子。第 4 节分析中性复合算符，并确立物理通道的存活判据。第 5 节描述 Cartan 平面中的相应相结构。第 6 节给出结论。最后，在附录A中，我们提出一种 BRST不变的自发对称性破缺机制，该机制可动态生成 Cartan软源，并确立模型完整的代数可重整化性。

2 原始颜色 3 模型再探

我们首先回顾 [7]，中研究的特殊情形，即物理源沿颜色 3 方向排列：

$$\langle J^a \rangle = m^2 \delta^{a3}, \qquad m^2 > 0. \tag{1}$$

在二次阶，规范场扇区为

$$S_{\rm quad} = \frac{1}{2}\int d^4x\, A^a_\mu(-\partial^2)A^a_\mu + \frac{i}{2}\int d^4x\, \langle J^a\rangle d^{abc} A^b_\mu A^c_\mu. \tag{2}$$

使用相关的对称系数

$$d^{338} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad d^{344} = d^{355} = \frac{1}{2}, \qquad d^{366} = d^{377} = -\frac{1}{2}, \tag{3}$$

二次作用量可分解为三个不同的扇区。我们将.....记为

$$\theta_{\mu\nu}(k) = \delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \tag{4}$$

动量空间中的横向投影算符。

(1，2) 扇区仍为无质量，

$$\langle A^1_\mu(k)A^1_\nu(-k)\rangle = \langle A^2_\mu(k)A^2_\nu(-k)\rangle = \frac{1}{k^2}\,\theta_{\mu\nu}(k), \tag{5}$$

而 (4，5) 和 (6，7) 扇区获得相反的虚质量位移，

$$\langle A^4_\mu(k)A^4_\nu(-k)\rangle = \langle A^5_\mu(k)A^5_\nu(-k)\rangle = \frac{1}{k^2 + i\,m^2/2}\,\theta_{\mu\nu}(k), \tag{6}$$

$$\langle A^6_\mu(k)A^6_\nu(-k)\rangle = \langle A^7_\mu(k)A^7_\nu(-k)\rangle = \frac{1}{k^2 - i\,m^2/2}\,\theta_{\mu\nu}(k). \tag{7}$$

因此，这两个混合的非对角子扇区构成了一个标准i-粒子类型的共轭对。

对角（3，8）扇区在二次阶就已经发生混合。其作用量为

$$S_{(3,8)} = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} A_\mu^3 (-\partial^2) A_\mu^3 + \frac{1}{2} A_\mu^8 (-\partial^2) A_\mu^8 + i \frac{m^2}{\sqrt{3}} A_\mu^3 A_\mu^8 \right\}, \tag{8}$$

由此得到

$$\langle A_\mu^3(k) A_\nu^3(-k) \rangle = \langle A_\mu^8(k) A_\nu^8(-k) \rangle = \frac{k^2}{k^4 + m^4/3} \, \theta_{\mu\nu}(k), \tag{9}$$

$$\langle A_\mu^3(k) A_\nu^8(-k) \rangle = \langle A_\mu^8(k) A_\nu^3(-k) \rangle = -\, i \, \frac{m^2/\sqrt{3}}{k^4 + m^4/3} \, \theta_{\mu\nu}(k). \tag{10}$$

引入旋转场

$$U_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} (A_\mu^3 + A_\mu^8), \qquad V_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} (-A_\mu^3 + A_\mu^8), \tag{11}$$

对角块的形式为

$$S_{(3,8)} = \frac{1}{2} \int d^4x \left[U_\mu \left(-\partial^2 + i \frac{m^2}{\sqrt{3}} \right) U_\mu + V_\mu \left(-\partial^2 - i \frac{m^2}{\sqrt{3}} \right) V_\mu \right]. \tag{12}$$

因此，（3，8）扇区也重组为一对共轭的 i 粒子，其能隙为 $m^2/\sqrt{3}$。

重要的是，颜色-3模型具有两个不同的中性单圈道，且其解析性质良好。对于非对角扇区，我们定义

$$E_{\mu\nu}^{3\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(F_{\mu\nu}^4 \pm i F_{\mu\nu}^5 \right), \qquad E_{\mu\nu}^{2\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(F_{\mu\nu}^6 \pm i F_{\mu\nu}^7 \right). \tag{13}$$

在剩余生成元 $h_1 = \lambda^3$ 作用下，它们满足

$$[h_1, E^{2\pm}] = \mp \frac{1}{2} E^{2\pm}, \qquad [h_1, E^{3\pm}] = \pm \frac{1}{2} E^{3\pm}, \tag{14}$$

使得该双线性量

$$\phi = E_{\mu\nu}^{2+} E_{\mu\nu}^{3+} + E_{\mu\nu}^{3-} E_{\mu\nu}^{2-} = F_{\mu\nu}^4 F_{\mu\nu}^6 - F_{\mu\nu}^5 F_{\mu\nu}^7 \tag{15}$$

是中性的且为厄米的。由于它由（4，5）和（6，7）传播子所携带的共轭对构成，其单圈二点函数可采用标准的 K¨all´en–Lehmann 构造 [5, 6]。

第二个通道来自对角化后的（3，8）扇区，其描述式为

$$\chi = (\partial_\mu U_\nu - \partial_\nu U_\mu)(\partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu). \tag{16}$$

由于 U_μ 和 V_μ 也构成一个共轭对，相应的单圈关联函数同样具有标准的 i粒子结构。

因此，两个物理通道的单圈阈值为

$$\tau_\phi = m^2, \qquad \tau_\chi = \frac{2m^2}{\sqrt{3}}. \tag{17}$$

因此，原始颜色-3模型的特征是类副本非对角物理通道与对角物理通道同时存在。这是基准构型；现在我们允许源在整个 Cartan 平面内移动，以此对其进行变形。

3 一般 Cartan值源的二次传播子

现在，我们将上一节中特殊的色荷3源变形为一般的 Cartan值源，

$$\langle J^a \rangle = \alpha\, \delta^{a3} + \beta\, \delta^{a8}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \tag{18}$$

在二次阶，规范场扇区为

$$S_{\rm quad} = \frac{1}{2} \int d^4x\, A^a_\mu (-\partial^2) A^a_\mu + \frac{i}{2} \int d^4x\, \langle J^a \rangle d^{abc} A^b_\mu A^c_\mu. \tag{19}$$

要确定传播子，只需使用非零的对称系数

$$d^{118} = d^{228} = d^{338} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad d^{888} = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \tag{20}$$

$$d^{448} = d^{558} = d^{668} = d^{778} = -\frac{1}{2\sqrt{3}}, \tag{21}$$

$$d^{344} = d^{355} = -d^{366} = -d^{377} = \frac{1}{2}, \tag{22}$$

以及 d^{abc}的完全对称性。

逐个扇区讨论二次型部分是很方便的。对于 (1,2) 子扇区，可得

$$S_{(1,2)} = \frac{1}{2} \int d^4x \left[A^1_\mu \left(-\partial^2 + i\frac{\beta}{\sqrt{3}} \right) A^1_\mu + A^2_\mu \left(-\partial^2 + i\frac{\beta}{\sqrt{3}} \right) A^2_\mu \right]. \tag{23}$$

因此，相应的横向传播子为

$$\langle A^1_\mu(k) A^1_\nu(-k) \rangle = \langle A^2_\mu(k) A^2_\nu(-k) \rangle = \frac{1}{k^2 + i\beta/\sqrt{3}}\, \theta_{\mu\nu}(k). \tag{24}$$

特别地，(1,2) 扇区仅在特殊直线 $\beta = 0$ 上是无质量的。

对于 (4，5) 子扇区，可得

$$S_{(4,5)} = \frac{1}{2} \int d^4x \left[A^4_\mu \left(-\partial^2 + i\mu_+^2 \right) A^4_\mu + A^5_\mu \left(-\partial^2 + i\mu_+^2 \right) A^5_\mu \right], \tag{25}$$

其中

$$\mu_+^2 = \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2\sqrt{3}}. \tag{26}$$

因此

$$\langle A_\mu^4(k) A_\nu^4(-k)\rangle = \langle A_\mu^5(k) A_\nu^5(-k)\rangle = \frac{1}{k^2 + i\mu_+^2}\,\theta_{\mu\nu}(k). \tag{27}$$

类似地，对于 (6,7) 子扇区，可得

$$S_{(6,7)} = \frac{1}{2}\int d^4x \left[A_\mu^6\left(-\partial^2 - i\mu_-^2\right) A_\mu^6 + A_\mu^7\left(-\partial^2 - i\mu_-^2\right) A_\mu^7\right], \tag{28}$$

with

$$\mu_-^2 = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2\sqrt{3}}. \tag{29}$$

因此

$$\langle A_\mu^6(k) A_\nu^6(-k)\rangle = \langle A_\mu^7(k) A_\nu^7(-k)\rangle = \frac{1}{k^2 - i\mu_-^2}\,\theta_{\mu\nu}(k). \tag{30}$$

此时，与原始颜色-3模型的一个重要差异已然显现。在特殊情形 $\beta = 0$ 下，有 $\mu_+^2 = \mu_-^2 = \alpha/2$，因此 (4, 5) 和 (6,7) 扇区构成一对标准 i 粒子类型的共轭对。然而，对于一般的 $\beta \neq 0$,

$$\mu_+^2 \neq \mu_-^2, \tag{31}$$

两个非对角子扇区的复制子式镜像结构不复存在。

剩下的非平凡块是 (3,8) 扇区。在这种情况下，二次作用量为

$$S_{(3,8)} = \int d^4x \left\{\frac{1}{2}A_\mu^3\left(-\partial^2 + i\frac{\beta}{\sqrt{3}}\right) A_\mu^3 + \frac{1}{2}A_\mu^8\left(-\partial^2 - i\frac{\beta}{\sqrt{3}}\right) A_\mu^8 + i\frac{\alpha}{\sqrt{3}}A_\mu^3 A_\mu^8\right\}. \tag{32}$$

在动量空间中，相应的二次型为

$$\mathcal{M}_{(3,8)}(k) = \begin{pmatrix} k^2 + i\beta/\sqrt{3} & i\alpha/\sqrt{3} \\ i\alpha/\sqrt{3} & k^2 - i\beta/\sqrt{3}\end{pmatrix}. \tag{33}$$

其行列式为

$$\det \mathcal{M}_{(3,8)}(k) = k^4 + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{3}. \tag{34}$$

因此，原始基底中的传播子为

$$\langle A_\mu^3(k) A_\nu^3(-k)\rangle = \frac{k^2 - i\beta/\sqrt{3}}{k^4 + \frac{\alpha^2+\beta^2}{3}}\,\theta_{\mu\nu}(k), \tag{35}$$

$$\langle A_\mu^8(k) A_\nu^8(-k)\rangle = \frac{k^2 + i\beta/\sqrt{3}}{k^4 + \frac{\alpha^2+\beta^2}{3}}\,\theta_{\mu\nu}(k), \tag{36}$$

$$\langle A^3_\mu(k)A^8_\nu(-k)\rangle = \langle A^8_\mu(k)A^3_\nu(-k)\rangle = -\,i\,\frac{\alpha/\sqrt{3}}{k^4+\frac{\alpha^2+\beta^2}{3}}\,\theta_{\mu\nu}(k). \tag{37}$$

矩阵 (33) 通过实正交旋转对角化。令

$$\begin{pmatrix} U_\mu \\ V_\mu \end{pmatrix} = R(\vartheta)\begin{pmatrix} A^3_\mu \\ A^8_\mu \end{pmatrix}, \qquad R(\vartheta) = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}, \tag{38}$$

角度由下式确定

$$\cos(2\vartheta) = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}, \qquad \sin(2\vartheta) = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}, \tag{39}$$

对角扇区变为

$$S_{(3,8)} = \frac{1}{2}\int d^4x\left[U_\mu\left(-\partial^2+i\mu_\chi^2\right)U_\mu + V_\mu\left(-\partial^2-i\mu_\chi^2\right)V_\mu\right], \tag{40}$$

其中

$$\mu_\chi^2 = \sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2}{3}}. \tag{41}$$

因此，无论源在 Cartan 平面中的方向如何，(3,8) 块总会重新组织为一对共轭的 i 粒子。

综合以上结果，一般的 Cartan 形变在二次阶有着非常简单的解释。对角 (3,8) 扇区在整个 Cartan 平面上始终保持其共轭i粒子结构，而非对角扇区 (4, 5) 和 (6,7) 仅在特殊直线 $\beta = 0$ 上形成一对共轭粒子。因此，源

$$\langle J^a\rangle = m^2\delta^{a3} \tag{42}$$

并非只是 Cartan 族的一个方便代表。它是一个特殊轨迹，在此轨迹上，非对角子扇区的类副本配对得以保留。

下一节我们将考察这一事实如何决定中性厄米复合算符的存在性，以及它们的一圈关联函数是否保留物理 K¨all´en–Lehmann 结构。

4 中性复合算符与物理通道的存续

现在我们转向复合扇区。主要问题是：当源变形至 Cartan 平面上的一般点时，原始颜色-3模型中所识别出的中性物理通道能否存续。

与未变形的情形一样，我们引入复场强组合

$$X^\pm_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(F^4_{\mu\nu} \pm iF^5_{\mu\nu}\right), \qquad Y^\pm_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(F^6_{\mu\nu} \pm iF^7_{\mu\nu}\right). \tag{43}$$

在剩余生成元 $h_1 = \lambda^3$ 作用下，它们满足

$$[h_1, X^{\pm}] = \pm\frac{1}{2}X^{\pm}, \qquad [h_1, Y^{\pm}] = \mp\frac{1}{2}Y^{\pm}. \tag{44}$$

因此，四个自然局域厄米双线性项为

$$\Phi_1 = X^+Y^+ + X^-Y^-, \qquad \Phi_2 = X^+Y^- + X^-Y^+, \tag{45}$$

$$\Phi_3 = i(X^+Y^+ - X^-Y^-), \qquad \Phi_4 = i(X^+Y^- - X^-Y^+). \tag{46}$$

其中，双线性量 Φ_1 和 Φ_3 在 h_1下是中性的，而 Φ_2 和 Φ_4在 h_1下并不中性。特别是,

$$\Phi_1 = F^4_{\mu\nu}F^6_{\mu\nu} - F^5_{\mu\nu}F^7_{\mu\nu}, \tag{47}$$

这正是原始颜色-3模型 [7]中所特别指出的非对角中性可观测量。

然而，中性仅仅是必要条件。若要使单圈二点函数具有标准的 K¨all´en–Lehmann 对 i粒子型的解释，两个组成扇区必须构成真正的共轭对。在本例中，第 3 节得到的二次传播子为

$$\langle A^4_\mu(k)A^4_\nu(-k)\rangle = \langle A^5_\mu(k)A^5_\nu(-k)\rangle = \frac{1}{k^2 + i\mu^2_+}\,\theta_{\mu\nu}(k), \tag{48}$$

$$\langle A^6_\mu(k)A^6_\nu(-k)\rangle = \langle A^7_\mu(k)A^7_\nu(-k)\rangle = \frac{1}{k^2 - i\mu^2_-}\,\theta_{\mu\nu}(k), \tag{49}$$

with

$$\mu^2_+ = \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2\sqrt{3}}, \qquad \mu^2_- = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2\sqrt{3}}. \tag{50}$$

关键在于，单圈泡图的解析结构由其分支点的位置决定。在标准的 i粒子构造中，我们将非对角讨论限制在两个参数 μ^2_+ 和 μ^2_- 均为正的区域，即

$$\mu^2_+ > 0, \qquad \mu^2_- > 0, \tag{51}$$

或者等价地

$$\alpha > \frac{|\beta|}{\sqrt{3}}. \tag{52}$$

在此区域，对于一对复质量平方参数 $i\mu^2_+$ 和 $-i\mu^2_-$，相应的阈值为

$$\tau_{\rm off} = \left(\sqrt{i\mu^2_+} + \sqrt{-i\mu^2_-}\right)^2 = 2\sqrt{\mu^2_+\mu^2_-} + i\left(\mu^2_+ - \mu^2_-\right), \tag{53}$$

其中根均取主值。标准的物理 K¨all´en–Lehmann 表示要求阈值位于正实轴上。因此，

$$\Im\tau_{\rm off} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mu_+^2 = \mu_-^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \beta = 0. \tag{54}$$

因此，非对角复制子型物理通道存续，当且仅当源位于色荷 3 线上。

当 $\beta = 0$ 时，有

$$\mu_+^2 = \mu_-^2 = \frac{\alpha}{2}, \tag{55}$$

因此分支点变为

$$\tau_{\rm off} = \alpha. \tag{56}$$

将 $\alpha = m^2$ 代入后，这重现了原始模型的阈值。从这个意义上说，旧可观测量 $\phi = \Phi_1$ 恰好在两个非对角子扇区仍保持为共轭对的同一轨迹上存续。

现在让我们将这一行为与对角通道进行比较。根据第 3 节，(3,8) 块总能对角化为两个正则模 U_μ 和 V_μ，其传播子为

$$\langle U_\mu(k)U_\nu(-k)\rangle = \frac{1}{k^2 + i\mu_\chi^2}\,\theta_{\mu\nu}(k), \qquad \langle V_\mu(k)V_\nu(-k)\rangle = \frac{1}{k^2 - i\mu_\chi^2}\,\theta_{\mu\nu}(k), \tag{57}$$

其中

$$\mu_\chi^2 = \sqrt{\frac{\alpha^2 + \beta^2}{3}}. \tag{58}$$

因此，双线性量

$$\chi = (\partial_\mu U_\nu - \partial_\nu U_\mu)(\partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu) \tag{59}$$

始终由一对真正的共轭 i粒子构成。其单圈阈值为

$$\tau_\chi = \left(\sqrt{i\mu_\chi^2} + \sqrt{-i\mu_\chi^2}\right)^2 = 2\mu_\chi^2 = 2\sqrt{\frac{\alpha^2 + \beta^2}{3}}, \tag{60}$$

它在整个 Cartan 平面上都为实数且为正。

我们可以将情况概括如下。对角物理通道χ 在源发生任意 Cartan 形变时都保持稳健。相比之下，复制子型非对角通道仅在特殊直线 $\beta = 0$上存续。因此，两个物理通道并存并非普遍现象，而是原始颜色-3模型的一种特殊性质。

这一观察为软源的取向提供了首个真正基于物理的选择判据。关键不只是二次谱会随着在 Cartan 平面中的移动而改变，中性复合算符的可容许空间也会随之改变。特别是，沿色荷 3 方向的原始源，恰好对应于这样一条轨迹：在标准的 i 粒子构造中，对角通道与非对角复制子型通道并存。

5 Cartan 平面中的相结构

一旦要求物理通道得以保留，Cartan 源空间便不再是齐次的。前几节的结果使我们能够用 Cartan 平面中的简单相结构来描述该模型，其参数由源分量 (α, β) 给出。尽管对于任意实数 α 和 β，二次作用量都有良好定义，但复合扇区的物理内容会显著依赖于源的方向。

在二次阶下，非对角子扇区由有效参数控制

$$\mu_+^2 = \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2\sqrt{3}}, \qquad \mu_-^2 = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2\sqrt{3}}, \tag{61}$$

而对角（3,8）块则由下式控制

$$\mu_\chi^2 = \sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2}{3}}. \tag{62}$$

因此，只要（α, β）$\neq$（0,0），对角通道 χ 就会存在，因为（3,8）扇区总是重组为一对 i 粒子模式的共轭对。相比之下，非对角复制子型通道仅在下列条件下存在

$$\mu_+^2 = \mu_-^2, \tag{63}$$

这等价于

$$\beta = 0. \tag{64}$$

由此得到三条性质上不同的轨迹。

1. 一般 Cartan 区域：只有对角物理通道得以保留

对于 Cartan 平面上的一般点，

$$\beta \neq 0, \qquad (\alpha, \beta) \neq (0, 0), \tag{65}$$

非对角子扇区 (4,5) 和 (6,7) 不再互为共轭，因为一般情况下 $\mu_+^2 \neq \mu_-^2$。正如第 4 节所示，本应出现的非对角中性双线性算符随后会产生一个复阈值，

$$\tau_{\text{off}} = 2\sqrt{\mu_+^2 \mu_-^2} + i(\mu_+^2 - \mu_-^2), \tag{66}$$

而类副本通道的标准 K¨all´en–Lehmann 解释也不复成立。在此区域中，唯一保留下来的 i 粒子型物理通道是对角通道，

$$\chi = (\partial_\mu U_\nu - \partial_\nu U_\mu)(\partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu), \tag{67}$$

其阈值为

$$\tau_\chi = 2\mu_\chi^2 = 2\sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2}{3}}. \tag{68}$$

因此，一般的 Cartan 形变保留了一个物理通道，但不保留原始模型中的复制子型共存。

2. 特征线 $\beta = 0$：两个物理通道的共存

在特殊直线上

$$\beta = 0, \qquad \alpha > 0, \tag{69}$$

有

$$\mu_+^2 = \mu_-^2 = \frac{\alpha}{2}, \qquad \mu_\chi^2 = \frac{|\alpha|}{\sqrt{3}}. \tag{70}$$

此时，非对角扇区构成一对真正的共轭对，而中性双线性算符

$$\phi = \Phi_1 = X^+Y^+ + X^-Y^-, \tag{71}$$

重新获得标准物理阈值

$$\tau_\phi = \alpha, \tag{72}$$

而对角通道仍然存在，其

$$\tau_\chi = \frac{2|\alpha|}{\sqrt{3}}. \tag{73}$$

因此，直线 $\beta = 0$ 被特别标记为模型同时呈现两种物理通道的轨迹：对角通道和类似复制的非对角通道。这正是原始色荷3源所实现的情形。

从这个意义上说，颜色-3模型并不只是更大族群中的一个便利示例。它是 Cartan 平面中唯一一个能够使复合扇区保留副本解释的单参数子族。

3. 简并 locus 与未变形点

还存在一些特殊 locus，在这些位置，某个非对角质量参数会消失，

$$\mu_+^2 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha = \frac{\beta}{\sqrt{3}}, \tag{74}$$

and

$$\mu_-^2 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha = -\frac{\beta}{\sqrt{3}}. \tag{75}$$

沿着这些线，其中一个非对角子扇区变为无质量，而另一个仍然是非平凡的。标准的非对角 i-粒子构造在此处发生简并，类副本解释也再次缺失。这不应被解释为类副本结构或完整嵌入SU(2)对称性的恢复；相反，这反映了卡当源变得与某个非对角根方向正交，因此相应的复移位在二次阶处消失。

最后，在原点处

$$\alpha = \beta = 0, \tag{76}$$

软破缺消失，二次型化为普通的朗道规范杨–米尔斯形式，且不存在 i 粒子分裂。在此极限下，不应认为上述任何一个通道是由当前机制隔离出来的。

4. 几何解释

因此，相结构可以用几何方式概括如下：

- 对于远离原点的一般情形（α，β），模型仅具有对角物理通道 χ；
- 在特征线 $\beta = 0$上，非对角复制子型通道 ϕ重新出现，并与 χ共存；
- 在线 $\alpha = \pm\beta/\sqrt{3}$上，其中一个非对角扇区变得简并；
- 在原点处，软破缺机制被关闭。

主要结论是，可容许的物理复合算符空间并非在整个 Cartan 平面上保持不变。源的取向不仅仅会使极点位置发生形变：它还决定了哪些中性通道能够保留物理谱解释。这正是 Cartan 平面在二次传播和单圈复合算符层面便已呈现出真正相结构的含义。

6 结论

在本文中，我们重新考察了 $SU(3)$ Yang–Mills 模型。该模型由 [7] 引入，我们将其从特殊的色荷3源推广到了一个一般的卡尔坦值软源。我们的目的不仅是对旧构造进行代数上的形变，更是要理解：当源能够探索整个 Cartan 平面时，其中哪些具有物理意义的特征仍然保留。

第一个结果是，对于一般源（α，β），二次理论具有一种自然且透明的描述。非对角扇区（4，5）和（6，7）获得了不同的复质量参数，其由 α 和 β 的不同线性组合控制，而（ 3，8 ）块仍可对角化为一对 i 粒子模式的共轭对。从这个意义上说，一般 Cartan 形变保留了类禁闭型的复极点结构，但其实现方式不再对两个非对角子扇区保持对称。

第二个、也更重要的结果涉及复合扇区。我们表明，若要使中性复合算符保有标准的 K¨all´en– Lehmann 解释，就必须满足比单纯的代数中性或厄米性强得多的约束。由 (3,8) 块的正则模构成的对角通道，除了未变形原点之外，在其他位置均能存续。相比之下，非对角复制子型通道仅在特殊轨迹 ¨ 上存续，

在该轨迹上，(4, 5) 和 (6,7) 扇区仍构成真正的共轭对。因此，原始的颜色-3模型在动力学上于 Cartan 平面中脱颖而出：只有在这条轨迹上，两个物理通道才会共存。

这为原始构造赋予了新的诠释。色荷3源并非众多可能的 Cartan 方 向中仅仅一种便利的选择。相反，它是唯一的单参数方向，使得类复制物理通道在单圈下与标准 i-粒子机制相容。换言之，一旦要求物理复合扇区得以保留，Cartan 平面便呈现出非平凡的相结构。

由此形成的图景如下。对于一般的 Cartan 变形，模型保留一个对角物理通道，但失去非对角类复制通道。在特征线 $\beta = 0$ 上，两个通道均存在。这为软源取向提供了一个简单的物理选择原理，并表明，可容许复合扇区携带着仅凭极点结构无法显现的信息。

这一独特的物理相自然引出了关于其动力学起源的问题。在附录A中，我们通过提出一种生成 Cartan软源的 BRST不变自发对称性破缺机制来回答这一问题。该表述不仅为正文所研究的变形提供了自然的动力学实现，而且还证明了该理论严格的代数可重整性和 Ward恒等式结构。

尽管二次理论及其单圈复合扇区如今在代数和动力学上都已得到明确界定，但仍有一些问题尚待解决。特别是，研究此处所识别的相结构是否在二次阶之外依然存在，以及它如何与更为现实的类胶球算符和禁闭规范理论中更广泛的解析性问题相衔接，将会十分有意义。

我们的结果表明，对显式软破缺的研究不应仅围绕哪些传播子表现出复极点来组织，还应关注哪些中性复合通道仍保有物理谱意义。从这一角度看，Cartan 平面提供了一个天然的实验室，可在统一框架下研究受禁闭启发的传播子结构、剩余对称性和算符解析性。

研究中性复合相关函数的非微扰研究（例如受格点启发的分析）是否能够识别出这一卡当相结构的痕迹，将会很有意义。从这一角度看，本文结果表明，可容许类胶球扇区的出现可能不仅取决于基本传播子的正定性，还取决于软破缺在卡当空间中的有效取向。

Cartan软源的自发实现与代数重整化

在正文中，卡当值源 $\langle J^a\rangle = \alpha\,\delta^{a3} + \beta\,\delta^{a8}$ 被视为一种物理软插入。自然会产生这样的问题：这种源是否能够从一个BRST不变扇区中动态产生，而无需依赖显式破缺，以及这一构造在代数上是否可重整化。在本附录中，我们给出这一源的自发实现，并为其紫外稳定性提供完整的泛函设定。

A.1 自发机制

我们引入一个伴随表示BRST双重态（ϵ^a，φ^a），其变换为

$$s\,\epsilon^a = \varphi^a, \qquad s\,\varphi^a = 0, \tag{77}$$

其中，ϵ^a 是Grassmann奇变量，而 φ^a 是Grassmann偶变量。我们利用这一双重态引入二维算符 $d^{abc}A^b_\mu A^c_\mu$，但不是通过外部源，而是将其与一个能够通过自发对称性破缺获得质量的场耦合。

我们定义BRST恰当辅助作用量

$$S_{\rm aux} = s\int d^4x\left[a_1 M\,\epsilon^a\,\partial_\mu A^a_\mu + \frac{aM}{2}\,\epsilon^a d^{abc}A^b_\mu A^c_\mu\right], \tag{78}$$

其中，a和 a_1 是无量纲参数，M 是辅助质量标度。第一项为 ϵ^a 场提供了必要的类动能结构。应用幂零BRST算子 s，结合 $sA^a_\mu = -(D_\mu c)^a$，并遵循分次莱布尼茨法则 $s(\epsilon^a X) = \varphi^a X - \epsilon^a(sX)$，展开得到：

$$\begin{aligned} S_{\rm aux} = \int d^4x\Big[& a_1 M\,\varphi^a\,\partial_\mu A^a_\mu + a_1 M\,\epsilon^a\,\partial_\mu (D_\mu c)^a \\ & + \frac{aM}{2}\,\varphi^a d^{abc}A^b_\mu A^c_\mu + aM\,\epsilon^a d^{abc}A^b_\mu (D_\mu c)^c\Big]. \end{aligned} \tag{79}$$

为实现自发对称性破缺，我们在作用量中加入一个可重整化实标量扇区，

$$S_\varphi = \int d^4x\left[\frac{1}{2}\,\partial_\mu\varphi^a\,\partial_\mu\varphi^a - \frac{M^2}{2}\,\varphi^a\varphi^a + \frac{\lambda}{4}\,(\varphi^a\varphi^a)^2\right]. \tag{80}$$

势能在以下位置取得最小值

$$\langle\varphi^a\varphi^a\rangle = \nu^2, \qquad \nu^2 = \frac{M^2}{\lambda}. \tag{81}$$

因此，我们可以围绕选定的真空方向 u^a（满足 $u^a u^a = 1$）平移标量场：

$$\varphi^a = \widetilde{\varphi}^a + \nu\,u^a. \tag{82}$$

将 (82) 代入 (79) 的第三项后，它可分解为

$$\frac{aM}{2}\,\widetilde{\varphi}^a d^{abc} A^b_\mu A^c_\mu + \frac{aM\nu}{2}\,u^a d^{abc} A^b_\mu A^c_\mu. \tag{83}$$

真空会动态地产生一个有效源 $\langle J^a\rangle = aM\nu u^a$。通过将 u^a 定向于 Cartan 平面，我们无需任何显式对称性破缺，即可恢复正文中研究的精确双参数变形（α, β）。

A.2 与量子作用量原理相容的对称性

为了确立作用量在紫外下的稳定性，我们必须分析那些能够以符合量子作用量原理（QAP）的泛函形式表示的对称性。我们引入外部源扇区，以便对非阿贝尔对称性进行恰当的量子化：

$$S_{\rm ext} = \int d^4x \left\{ -\Omega^a_\mu (D_\mu c)^a + \frac{g}{2} f^{abc} L^a c^b c^c \right\}. \tag{84}$$

完整作用量定义为 $\Sigma = S_{\rm YM} + S_{\rm gf} + S_{\rm aux} + S_\varphi + S_{\rm ext}$。

该作用量满足朗道规范固定方程和反鬼场方程：

$$\begin{aligned} \frac{\delta\Sigma}{\delta b^a} &= i\partial_\mu A^a_\mu \\ \bar{G}^a(\Sigma) &= \partial_\mu \frac{\delta\Sigma}{\delta\Omega^a_\mu} + \frac{\delta\Sigma}{\delta\bar{c}^a} = 0. \end{aligned} \tag{85}$$

它满足 Slavnov-Taylor 恒等式：

$$\mathcal{S}(\Sigma) = \int d^4x \left\{ \frac{\delta\Sigma}{\delta A^a_\mu}\frac{\delta\Sigma}{\delta\Omega^a_\mu} + \frac{\delta\Sigma}{\delta c^a}\frac{\delta\Sigma}{\delta L^a} + \varphi^a \frac{\delta\Sigma}{\delta\epsilon^a} + ib^a \frac{\delta\Sigma}{\delta\bar{c}^a} \right\} = 0, \tag{86}$$

以及鬼场方程（其具有朗道规范典型的线性破缺）：

$$\begin{aligned} G^a(\Sigma) &= \int d^4x \left\{ \frac{\delta\Sigma}{\delta c^a} - igf^{abc}(\bar{c}^b + a_1 M\epsilon^b)\frac{\delta\Sigma}{\delta b^c} \right\} \\ &= \int d^4x\, g f^{abc} \left\{ \Omega^b_\mu A^c_\mu - L^b c^c \right\}. \end{aligned} \tag{87}$$

d^{abc} 算子的存在要求特定的泛函恒等式。我们确定了以下约束：

$$E^a(\Sigma) = \int d^4x \left\{ \frac{\delta\Sigma}{\delta\epsilon^a} - 2iaMd^{abc}c^b\frac{\delta\Sigma}{\delta b^c} \right\} = 0, \tag{88}$$

$$W^a(\Sigma) = \int d^4x \left\{ gf^{abc}\theta^b\frac{\delta\Sigma}{\delta\theta^c} - iga_1 M f^{abc}\varphi^b\frac{\delta\Sigma}{\delta b^c} \right\} = 0, \tag{89}$$

其中， θ^a 表示除所引入的双重态之外的所有场和源。最后，我们还有两个进一步的关系：

$$R(\Sigma) = \int d^4x \left\{ c^a \frac{\delta\Sigma}{\delta\bar{c}^a} - i\frac{\delta\Sigma}{\delta L^a}\frac{\delta\Sigma}{\delta b^a} \right\} = 0, \tag{90}$$

$$R^a(\Sigma) = \int d^4x\, d^{abc} \left\{ c^b \frac{\delta\Sigma}{\delta\bar{c}^c} - i\frac{\delta\Sigma}{\delta L^b}\frac{\delta\Sigma}{\delta b^c} \right\} = 0. \tag{91}$$

第一个方程是一个标准的刚性恒等式，与朗道规范下鬼扇区的 $SL(2,\ \mathbb{R})$ 对称性有关；第二个方程则是一项新颖、特定于模型的约束。它完全源于自发破缺机制的完全对称d^{abc} 耦合，并在将允许的反项限制为精确的 Cartan 取向方面发挥关键作用。

A.3 重整化与必要关系

为构造反项作用量，我们引入幂零的线性化 Slavnov-Taylor 算子 $\mathcal{B}_\Sigma$ （其中 $\mathcal{B}_\Sigma^2 = 0$），它将 BRST 对称性扩展至各个源：

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_\Sigma = \int d^4x \Bigg\{ & \frac{\delta\Sigma}{\delta A^a_\mu}\frac{\delta}{\delta\Omega^a_\mu} + \frac{\delta\Sigma}{\delta\Omega^a_\mu}\frac{\delta}{\delta A^a_\mu} + \frac{\delta\Sigma}{\delta c^a}\frac{\delta}{\delta L^a} \\ & + \frac{\delta\Sigma}{\delta L^a}\frac{\delta}{\delta c^a} + \varphi^a\frac{\delta}{\delta\epsilon^a} + ib^a\frac{\delta}{\delta\bar{c}^a} \Bigg\}.\end{aligned} \tag{92}$$

与泛函算子的对易关系定义了代数框架的一致性：

$$\left[\frac{\delta}{\delta b^a}, \mathcal{B}_\Sigma\right] = i\bar{G}^a, \qquad \{G^a, \mathcal{B}_\Sigma\} = W^a, \qquad \{E^a, \mathcal{B}_\Sigma\} = 2aM\mathcal{R}^a, \tag{93}$$

其中 G^a， W^a， E^a 和 $\mathcal{R}^a$ 表示对应于上一节各恒等式的线性泛函算子。

给定乘法重整化，量子作用量 $\Gamma = \Sigma + \hbar\Gamma^c$必须满足 $\mathcal{B}_\Sigma\Gamma^c = 0$。反项作用量可分解为 $\Gamma^c = \Gamma^0 + \mathcal{B}_\Sigma\Gamma^{-1}$，其中 Γ^0 是上同调扇区，而 Γ^{-1} 是一个维数为 4、鬼数为 -1的泛函。施加所有对称性后，可得最一般的泛函：

$$\begin{aligned}\Gamma^{-1} = \int d^4x \Big\{ & y_1(\partial_\mu\bar{c}^a + \Omega^a_\mu)A^a_\mu + y_1\frac{aM}{2}d^{abc}\epsilon^a A^b_\mu A^c_\mu + y_2\partial_\mu\epsilon^a\partial_\mu\varphi^a \\ & + y_3M^2\epsilon^a\varphi^a + y_4\lambda\epsilon^a\varphi^a(\varphi^b\varphi^b) + y_5\epsilon^a\partial_\mu A^a_\mu \Big\}.\end{aligned} \tag{94}$$

作用于 $\mathcal{B}_\Sigma$ 算符后，我们得到完整的反项作用量：

$$\begin{aligned}\Gamma^c &= \int d^4x\Big\{\frac{y_0}{4}F^a_{\mu\nu}F^a_{\mu\nu} - y_1 A^a_\mu (D_\nu F_{\nu\mu})^a + y_1(\partial_\mu \bar{c}^a + \Omega^a_\mu)\partial_\mu c^a \\ &\quad + y_1 a M d^{abc}(\varphi^a A^b_\mu A^c_\mu + \epsilon^a A^b_\mu \partial_\mu c^c) + y_2 \partial_\mu \varphi^a \partial_\mu \varphi^a \\ &\quad + y_3 M^2 \varphi^a \varphi^a + y_4 \lambda(\varphi^a\varphi^a)^2\Big\}. \end{aligned} \tag{95}$$

我们将场和参数的乘法重整化定义为 $\Phi' \to (1+\hbar z_\Phi)\Phi$。匹配 $\Sigma(\Phi') = \Sigma(\Phi) + \hbar\Gamma^c(\Phi)$ 可完全确定以独立系数 y_i 表示的重整化常数：

$$\begin{aligned} z_A &= y_0 + 2y_1, \qquad z_g = -\frac{y_0}{2}, \qquad z_\varphi = \frac{y_2}{2}, \qquad z_\epsilon = y_1 + \frac{y_2}{2} \\ z_m &= y_3 - \frac{y_2}{2}, \qquad z_\lambda = y_4 - 2y_2, \qquad z_a = -\left(\frac{y_0}{2} + y_3\right), \qquad z_{a_1} = -y_3 \\ z_L &= -2z_c, \qquad z_\Omega = z_{\bar{c}} = 0. \end{aligned} \tag{96}$$

Z-因子的完全闭合表明，产生卡当源的自发对称性破缺机制完全一致，且在代数上可重整化。

参考文献

[1] V. N. Gribov, 《非阿贝尔规范理论的量子化》, 《核物理B》**139**, 1 (1978年)。[2] D. Zwanziger, 《格点规范理论的临界极限》, 《核物理B》**378**, 525 (1992年)。[3] D. Zwanziger, 《BRS 不变性下格点规范理论临界极限的可重整性》, 《核物理B》**399**, 477 (1993年)。[4] D. Dudal、J. A. Gracey、S. P. Sorella、N. Vandersickel 和 H. Verschelde, 《朗道规范下 Gribov-Zwanziger 方法的改进：与格点结果相符的红外传播子》, 《物理评论D》**78**, 065047 (2008年) [arXiv:0806.4348 [高能物理理论]].[5] L. Baulieu、D. Dudal、M. S. Guimaraes、M. Q. Huber、S. P. Sorella、N. Vandersickel 和 D. Zwanziger, 《Gribov 地平线与 i粒子：关于一个玩具模型及物理算符的构造》, 《物理评论D》**82**, 025021 (2010年) [arXiv:0912.5153 [高能物理理论]].[6] S. P. Sorella, 《胶子禁闭、i粒子与 BRST 软破缺》, 《物理学杂志A》**44**, 135403 (2011年) [arXiv:1006.4500 [高能物理理论]].[7] M. M. Amaral、M. A. L. Capri、Y. E. Chifarelli 和 V. E. R. Lemes, 《通过显式破缺 SU(3) 群构建不含辅助场的朗道禁闭复制模型》, 《国际现代物理学杂志A》**28**, 1350163 (2013年)。

[8] R. L. P. G. Amaral、V. E. R. Lemes、O. S. Ventura 和 L. C. Q. Vilar，《通过复规范理论禁闭胶子和费米子的路径》，《物理评论D》**101**, 第9期, 094002 (2020年) [arXiv:2002.07222 [高能物理理论]]。

[9] R. L. P. G. Amaral、V. E. R. Lemes、O. S. Ventura 和 L. C. Q. Vilar，《禁闭复理论中破缺相观测量的 BRST 刻画》，《物理评论D》**107**，第11期, 115015（2023年） [arXiv:2304.04560[高能物理理论]]。