arXiv:2611.31963v1 [math.CO] 24 Nov 2026

低秩系数线性符号矩阵非交换秩的膨胀大小

Yuni Iwamasa*

2026年11月25日

摘要

线性符号矩阵 $A = A_0x_0 + A_1x_1 + \cdots + A_mx_m$ 的非交换秩（nc-rank）是 A 的 k 次膨胀 $\sum_i A_i \otimes X_i$ 的秩乘以 $1/k$ 后所得值的上确界，其中 X_i 是由互不相同的变量构成的 $k \times k$ 矩阵。本文证明，达到非交换秩所需的膨胀大小受系数矩阵的秩所界定。更确切地说，若 A_1、……、A_m 的秩至多为 r，而对 A_0 不作限制，则对任意 $k \geq r$，k 次膨胀都能达到非交换秩。这一结论适用于任意域上的矩形矩阵，并统一和推广了已有结果：对于秩一系数，$k = 1$ 足够（Lov´asz，1989年；Ivanyos、Karpinski 和 Saxena，2010年）；对于秩为二的斜对称系数，$k = 2$ 足够（Oki 和 Soma，2025年）。我们给出两项应用。首先，若 r 是常数，则可通过随机算法在足够大的域上，用 $O(mn^2 + n^\omega)$ 次算术运算计算 $n \times n$ 线性符号矩阵的非交换秩，其中 ω 为矩阵乘法指数。其次，Hirai（2026年）引入的多面体层级收敛于非交换独立集多面体，并在第 r 层稳定；这一结论基于我们主要结果的一个对应版本，该版本涉及 Dieudonn´e 行列式的次数。

关键词：非交换秩、线性符号矩阵、膨胀、随机算法、Dieudonn´e 行列式。

1 引言

设 $\mathbb{F}$ 为一个域，并设

$$A := A_0x_0 + A_1x_1 + \cdots + A_mx_m \tag{1.1}$$

为 $\mathbb{F}$上的线性符号矩阵，其中 A_0、A_1、……、$A_m \in \mathbb{F}^{a\times b}$和 x_0、x_1、……、x_m为变量。若变量可交换，则 A 的秩是在有理函数域 $\mathbb{F}(x_0$、x_1、……、$x_m)$上考察的，计算该秩被称为Edmonds问题 [6]。Edmonds问题涵盖组合优化中的一些基本问题作为特例，例如二分图匹配、线性拟阵交和线性拟阵奇偶问题 [6, 22]。当 $\mathbb{F}$ 足够大时，通过为变量代入随机取值，可以在随机多项式时间内解决该问题 [22], ；而确定性多项式时间算法是否存在，则是理论计算机科学中的一个重要开放问题，与电路下界有关 [21,定理 4.12]；另见 [8, 19]。若变量两两不可交换，则秩 of A 被视为定义在自由斜域上 [1, 2], 称为 A 的非交换秩 （非交换秩），记作 nc-rank A；计算它被称为非交换

*日本神户657-8501，神户大学理学研究科数学系。电子邮箱：iwamasa@math.kobe-u.ac.jp

*Edmonds*问题 [19]。非交换秩是交换秩的上界；与交换秩不同的是，已知可以在确定性多项式时间内计算非交换秩 [8, 11, 20]。非交换埃德蒙兹问题出现在不变理论、量子信息理论和优化等多个领域 [3, 8, 10, 11, 19], ，并促成了代数组合优化 [14]框架。

非交换秩可通过膨胀来刻画。对于正整数 k， A 的第 k次膨胀是矩阵

$$A^{(k)} := \sum_{i=0}^{m} A_i \otimes X_i^{(k)},$$

其中， $X_0^{(k)}$、 $X_1^{(k)}$、……、 $X_m^{(k)}$是 $k \times k$ 个矩阵，其元素是彼此不同的交换变量。于是，非交换秩 A 等于对所有 $k \geq 1$ [19, 14]取 (rank $A^{(k)}$)$/k$ 的上确界，其中 $A^{(k)}$ 的秩是在有理函数域 $\mathbb{F}(\mathbf{X}^{(k)})$ 上取的，该有理函数域由$X_0^{(k)}$、……、 $X_m^{(k)}$的元素生成。

一个自然的问题是， k 必须多大，才能使第 k 次膨胀达到非交换秩，即非交换秩 A = (rank $A^{(k)}$)$/k$。Derksen 和 Makam [3, 定理 1.8] 证明，对于$n \times n$ 线性符号矩阵，任意 $k \geq n-1$ 都足够（另见 [4, 推论 3.2]）。对于特殊类别的系数矩阵，更小的膨胀就足够了。如果 A_1、……、 A_m 的秩都为一（而 A_0 任意），则 $k = 1$ 就足够，即交换秩与非交换秩相等 [22, 18]。如果所有系数都是秩为二的斜对称矩阵，则 k = 2就足够 [23, 定理 4.8]。

在这两个特殊情形中，达到非交换秩的膨胀大小受系数矩阵的秩所界定，且与线性符号矩阵的大小无关。在本文中，我们证明，一般而言，膨胀大小也可以由系数矩阵的秩来界定。

定理 1.1。 设 $\mathbb{F}$ 为一个域， r 为一个正整数。设 $A = A_0 x_0 + \sum_{i=1}^{m} A_i x_i$ 为一个线性符号矩阵，其中 A_0、 A_1、……、 $A_m \in \mathbb{F}^{a \times b}$满足：对所有 i = 1、……、 m，均有秩 $A_i \leq r$；矩阵 A_0 任意。则对于每个整数 $k \geq r$，我们有

$$\text{nc-rank}\, A = \frac{1}{k} \operatorname{rank} A^{(k)}. \tag{1.2}$$

特别地， r阶膨胀达到非交换秩。令 $A_0 = 0$ 即可得到所有系数的秩至多为 r的情形；令 $r = k = 1$ 则可恢复交换秩与非交换秩相等这一结论，即系数为秩一系数且常数项任意时 [18]。注意，(1.2)右端的秩是 $\mathbb{F}(\mathbf{X}^{(k)})$上的一般秩；如果 $\mathbb{F}$ 是一个较小的有限域，则不一定能通过将矩阵代入 $\mathbb{F}$ 来取得该秩，其中 $X_0^{(k)}$、 $X_1^{(k)}$、……、 $X_m^{(k)}$。

由矩阵空间张成，该空间由以下矩阵的系数构成： A 是 $\mathbb{F}$的子空间，由 $\mathbb{F}^{a \times b}$ 张成A_0, A_1, ……, A_m。已知 [7, 推论 1 和引理 1]，每个膨胀的秩，因此非交换秩，只取决于该矩阵空间；另见引理3.11。因此，只要某些张成同一矩阵空间的矩阵满足定理1.1中的秩条件即可。

推论 *1.2.* 设 $\mathbb{F}$ 为一个域， r 为一个正整数。设 A 为域$\mathbb{F}$ 上的一个形如 *(1.1)* 的线性符号矩阵。假设由 A_0、 A_1、……、 A_m 张成的矩阵空间，也由某些矩阵 B_0、 B_1、……、 $B_{m'} \in \mathbb{F}^{a \times b}$ 张成，且对于所有 j = 1、……、 m'，秩 $B_j \leq r$；矩阵B_0 任意。则对于每个整数 $k \geq r$， *(1.2)* 均成立。

定理 1.1 还给出了 Derksen 和 Makam 上述界限的另一种证明，形式如下（另见 [16, 第 2 节。1]）：对于每个线性符号矩阵 A,

在不对系数的秩作任何假设的情况下，对于每个正整数 k，第 $k \geq$ 个膨胀 $A-1$均可达到非交换秩；特别地，对于每个 $k \geq n-1$，如果 A 的大小为$n \times n$ （推论 3.12）。

我们给出定理 1.1 的两个应用。首先，在推论 1.2 的假设下，它给出了一种简单的随机算法，用于计算非交换秩，且无需给出矩阵B_0、B_1、……、$B_{m'}$。对于一个 $n \times n$线性符号矩阵和一个常数 r，当 $\mathbb{F}$ 足够大时，该算法以至少 $1/2$ 的概率，在 $O(mn^2+n^\omega)$次算术运算内输出非交换秩，其中 $2 \leq \omega \leq 3$ 是矩阵乘法指数（定理 4.1）；对于矩阵空间存在由秩为二的斜对称矩阵构成的基的情形，已有一种运行时间相同的随机算法 [23]。其次，我们在定理 4.3 中证明，在定理 1.1 的假设下，Hirai [13], 引入的多面体层级会在第 r层稳定：其中第 k个多胞体由第 k次膨胀的子式中出现的单项式的指数向量定义。这将 Hirai [13, 定理 3.13]的结果推广到了系数为秩二斜对称矩阵的情形。证明依赖于命题 4.5；该命题是定理 1.1 关于 Dieudonn´e 行列式 [5, 12] 的次数的对应结果，或许本身也具有独立的研究价值。

组织结构。本文其余部分的安排如下。在第 2 节中，我们介绍符号、非交换秩的已知刻画，以及所使用的除代数工具。第 3 节专门用于证明定理1.1、推论1.2，以及一般线性符号矩阵的一个推论。在第 4 节中，我们介绍定理 1.1 的两个应用：非交换秩的快速随机化计算，以及收敛到非交换独立集多面体的多面体层级的稳定化。

2 预备知识

对于正整数 m，令 $[m] \coloneqq \{1,2,\ldots,m\}$ 和 $[0,m] \coloneqq \{0,1,\ldots,m\}$。所有域都是交换的，而斜域 是一个（不一定交换的）除环。对于域上的向量空间 W'（分别地，斜域上的右向量空间 W'），我们用 $W \leq W'$表示 W 是 W' 的子空间（分别地，为右子空间）。我们约定，零维空间具有空基，并且大小为 0 的方阵是非奇异的，其行列式为 1。

域 $\mathbb{F}$上的矩阵通常也被视为扩域 $\mathbb{F}$ 上的矩阵，或视为包含 $\mathbb{F}$的斜域上的矩阵；同样，域 $\mathbb{F}$ 的扩域上的向量空间也是$\mathbb{F}$上的向量空间。我们使用下标来指定所考虑对象所处的域或斜域。对于域 $\mathbb{F}$，我们分别用 $\operatorname{rank}_{\mathbb{F}} B$、$\ker_{\mathbb{F}} B$ 和 $\operatorname{im}_{\mathbb{F}} B$ 表示将矩阵 B视为 $\mathbb{F}$上的矩阵时的秩、核和像，用 $\dim_{\mathbb{F}} W$ 表示 W 作为 $\mathbb{F}$-向量空间时的维数，并用 $\operatorname{span}_{\mathbb{F}} S$ 表示向量集合 S 的 $\mathbb{F}$-线性张成。对于斜域 $\mathcal{D}$，我们也使用相同的记号，其精确定义见第 2.2 节。如果上下文清楚，我们会省略下标；例如，对于 $\mathbb{F}$ 上的矩阵 B，$\operatorname{rank} B$ 表示 $\operatorname{rank}_{\mathbb{F}} B$，除非另有说明。

2.1 非交换秩与膨胀

设 $\mathbb{F}$ 为一个域，A 为 $\mathbb{F}$ 上的形如（1.1）的线性符号矩阵，其中 A_0、A_1、……、$A_m \in \mathbb{F}^{a\times b}$。我们将 $\mathbb{F}(x_0、x_1、\ldots\ldots、x_m)$ 记为 $\mathbb{F}$ 上关于交换变量x_0、x_1、……、x_m的有理函数域；A 在 $\mathbb{F}(x_0、x_1、\ldots\ldots、x_m)$ 上的秩称为A的交换秩。我们将 $\mathbb{F}\langle x_0、x_1、\ldots\ldots、x_m\rangle$ 记为由两两非交换变量 $x_0、x_1、\ldots\ldots、x_m$生成的自由代数，并将 $\mathbb{F}(\langle x_0、x_1、\ldots\ldots、x_m\rangle)$ 记为其自由斜域 [1, 2]。非交换秩（或

非交换秩）定义为 A 在 $\mathbb{F}(\langle x_0、\ x_1、\ \ldots\ldots、\ x_m\rangle)$ 上的 A，即

$$\text{nc-rank}_{\mathbb{F}} A := \text{rank}_{\mathbb{F}(\langle x_0,x_1,\ldots,x_m\rangle)} A.$$

若上下文清楚，我们省略下标 $\mathbb{F}$ 。如果 $a = 0$ 或 $b = 0$，那么本文中考虑的所有秩均为 0，定理 1.1 显然成立；因此在下文中假设 $a,\ b \geq 1$ 。

对于正整数 k 和 $i \in [0, m]$，令 $X_i^{(k)}$ 为一个 $k \times k$ 矩阵，其元素为变量，其中全部 $(m + 1)k^2$ 个变量彼此不同且相互交换。我们将这些矩阵记为$\mathbf{X}^{(k)} := (X_0^{(k)},\ X_1^{(k)},\ \ldots\ldots,\ X_m^{(k)})$，即由这些矩阵组成的元组；将 $\mathbb{F}[\mathbf{X}^{(k)}]$ 记为在 $\mathbb{F}$ 上由$\mathbf{X}^{(k)}$中各矩阵的元素生成的多项式环，并将其分式域记为 $\mathbb{F}(\mathbf{X}^{(k)})$。 k-阶膨胀 of$A$是矩阵

$$A^{(k)} := \sum_{i=0}^{m} A_i \otimes X_i^{(k)} \in \mathbb{F}[\mathbf{X}^{(k)}]^{ak\times bk},$$

也就是说，这是一个 $a \times b$ 块矩阵，其 $(j,\ \ell)$-阶块为 $k \times k$ 矩阵 $\sum_{i=0}^{m}(A_i)_{j\ell}X_i^{(k)}$ 。对于$k = 1$，将 1×1矩阵 $X_i^{(1)}$与变量 x_i对应起来，我们有 $A^{(1)} = A$ 和 $\mathbb{F}(\mathbf{X}^{(1)})$ $=\mathbb{F}(x_0,\ x_1,\ \ldots\ldots,\ x_m)$；因此，第一次膨胀的秩正好是 A 的交换秩。当我们考虑 $\mathbb{F}$ 的扩域 $\mathbb{F}'$ 时，我们始终还假设$\mathbf{X}^{(k)}$中各矩阵的元素在 $\mathbb{F}'$ 上代数独立，并继续使用相同的记号 $\mathbb{F}'[\mathbf{X}^{(k)}]$ 和 $\mathbb{F}'(\mathbf{X}^{(k)})$。

我们使用以下两个已知的非交换秩刻画。

定理 2.1 ([19]；另见 [15, 命题 7。3]和 [14, 定理 2。1])。 对于域 $\mathbb{F}$上的线性符号矩阵 A ，有

$$\text{nc-rank}_{\mathbb{F}} A = \sup_{k\geq 1} \frac{1}{k} \text{rank}_{\mathbb{F}(\mathbf{X}^{(k)})} A^{(k)}.$$

定理 2.2 ([7, 定理 1])。 对于域 $\mathbb{F}$ 上的线性符号矩阵 A 形式为 (1.1)的矩阵，有

$$\text{nc-rank}_{\mathbb{F}} A = \min\{b - \dim_{\mathbb{F}} U + \dim_{\mathbb{F}} V\},$$

其中，最小值是在所有满足$A_iU \leq V$对所有 $i \in [0, m]$均成立的子空间 $U \leq \mathbb{F}^b$ 和 $V \leq \mathbb{F}^a$ 的有序对(U, V) 上取得的。

2.2 斜域上的线性代数

设 $\mathcal{D}$ 是一个斜域。 $\mathcal{D}$ 的中心 为 $Z(\mathcal{D}) := \{z \in \mathcal{D} \mid pz = zp$ 对所有 $p \in \mathcal{D}\}$均成立，它是 $\mathcal{D}$的一个子域。对于非负整数 h，我们将 $\mathcal{D}^h$ 视为由列向量构成的右 $\mathcal{D}$-向量空间。对于 $w \in \mathcal{D}^h$ 和 $p \in \mathcal{D}$，我们分别用 wp和 pw 表示由 w 的每个元素从右侧和左侧乘以 p 所得的向量。矩阵 $B \in \mathcal{D}^{h_1\times h_2}$被视为右 $\mathcal{D}$-线性映射 $\mathcal{D}^{h_2} \to \mathcal{D}^{h_1}$ ，其定义为 $w \mapsto Bw$。我们分别用 $\ker_{\mathcal{D}} B$和 $\text{im}_{\mathcal{D}} B$ 表示其核和像，并定义 $\text{rank}_{\mathcal{D}} B := \dim_{\mathcal{D}} \text{im}_{\mathcal{D}} B$，其中 $\dim_{\mathcal{D}}$表示作为右 $\mathcal{D}$-向量空间的维数。令 $\text{GL}_h(\mathcal{D})$表示 $\mathcal{D}$上由非奇异 $h \times h$矩阵构成的群，其中若一个方阵存在逆矩阵，则称其为非奇异 。对于 $\mathcal{D}^h$的子集，令 $\text{span}_{\mathcal{D}}$ 表示其右 $\mathcal{D}$-线性张成空间。

右 $\mathcal{D}$-线性映射一般不保持左乘。不过，如果 $C \in \mathcal{D}^{h_1\times h_2}$ 的所有元素都属于 $Z(\mathcal{D})$，那么对于所有 $p \in \mathcal{D}$ 和 $w \in \mathcal{D}^{h_2}$， $C(pw) = p(Cw)$；我们会反复用到这一事实。

设 $\mathbb{K}$ 是 $Z(\mathcal{D})$ 的子域。由于 $\mathbb{K}$ 的每个元素都与 $\mathcal{D}$ 的所有元素交换，乘以 $\mathbb{K}$ 的左乘和右乘相同。因此， $\mathcal{D}$ 是 $\mathbb{K}$ 上的向量空间，其乘法是 $\mathbb{K}$-双线性的；也就是说， $\mathcal{D}$ 是一个 $\mathbb{K}$-代数。更一般地， $\mathcal{D}^h$ 也视为 $\mathbb{K}$ 上的向量空间；我们用 $\dim_{\mathbb{K}}$ 表示其作为 $\mathbb{K}$-向量空间的维数，并称映射关于这一结构是 $\mathbb{K}$-线性的，当且仅当它是线性的。

下面的引理比较了在 $\mathbb{K}$ 上和在 $\mathcal{D}$ 上的线性代数。它由一些标准事实组成；为使本文自洽，我们给出证明。

引理 2.3。 设 $\mathcal{D}$ 是一个斜域， $\mathbb{K} \subseteq Z(\mathcal{D})$ 是一个子域，且 h 是一个非负整数。

（1） $\xi_1, \dots, \xi_s \in \mathbb{K}^h$ 在 $\mathbb{K}$ 上线性无关，当且仅当它们在 $\mathcal{D}^h$ 中关于 $\mathcal{D}$ 右线性无关。（2）对于 $W_0 \leq \mathbb{K}^h$，由 $\xi \otimes p \mapsto \xi p$ 定义的映射 $W_0 \otimes_{\mathbb{K}} \mathcal{D} \to$ 张成空间$_{\mathcal{D}} W_0$ 是右 $\mathcal{D}$-向量空间之间的同构。特别地，维数$_{\mathcal{D}}$ 张成空间$_{\mathcal{D}} W_0 =$ 维数$_{\mathbb{K}} W_0$。（3）对于矩阵 $C \in \mathbb{K}^{h\times s}$，有秩$_{\mathcal{D}} C =$ 秩$_{\mathbb{K}} C$，且核$_{\mathcal{D}} C =$ 张成空间$_{\mathcal{D}}$ 核$_{\mathbb{K}} C$。

证明。 （1）。充分性部分显然。对于必要性部分，设 $\xi_1, \dots, \xi_s$ 在 $\mathbb{K}$ 上线性无关，并且 $\sum_{\ell=1}^{s} \xi_\ell p_\ell = 0$ 满足 $p_\ell \in \mathcal{D}$。取 $\mathbb{K}$ 中 $p_1, \dots, p_s$ 的 $\mathcal{D}$-线性张成空间的一组 $\mathbb{K}$-基 $e_1, \dots, e_{s'}$，并将 $p_\ell = \sum_{\alpha=1}^{s'} \kappa_{\ell\alpha} e_\alpha$ 写成 $\kappa_{\ell\alpha} \in \mathbb{K}$。于是，我们有

$$0 = \sum_{\ell=1}^{s} \xi_\ell \left(\sum_{\alpha=1}^{s'} \kappa_{\ell\alpha} e_\alpha \right) = \sum_{\alpha=1}^{s'} \left(\sum_{\ell=1}^{s} \xi_\ell \kappa_{\ell\alpha} \right) e_\alpha .$$

最右侧表达式括号中的每个向量都属于 $\mathbb{K}^h$。因此，由于 $e_1, \dots, e_{s'}$在 $\mathbb{K}$ 上线性无关，我们对每个 α 都有 $\sum_{\ell=1}^{s} \xi_\ell \kappa_{\ell\alpha} = 0$ 。此外，由 $\xi_1, \dots, \xi_s$在 $\mathbb{K}$ 上的线性无关性可得，对于所有 ℓ 和 α，都有 $\kappa_{\ell\alpha} = 0$。因此，对所有 ℓ，都有 $p_\ell = 0$。

（2）。设 $\xi_1, \dots, \xi_s$ 是 W_0 的一个 $\mathbb{K}$-基。根据断言（1），它是 $\operatorname{span}_{\mathcal{D}} W_0$ 的一个右 $\mathcal{D}$-基。该映射显然是满射。 $W_0 \otimes_{\mathbb{K}} \mathcal{D}$ 中的每个元素都可写成 $\sum_\ell \xi_\ell \otimes p_\ell$；如果其像 $\sum_\ell \xi_\ell p_\ell$ 为零，则根据 $\xi_1, \dots, \xi_s$ 在 $\mathcal{D}$ 上的右线性无关性，对所有 ℓ 都有 $p_\ell = 0$。因此，该映射是单射。

(3). 根据断言 (1)，秩相等成立，因为秩是（右）线性无关列的最大数量。显然，$\operatorname{span}_{\mathcal{D}} \ker_{\mathbb{K}} C \leq \ker_{\mathcal{D}} C$，并且根据断言 (2) 和秩相等，两边的右维数均为 $s - \operatorname{rank}_{\mathbb{K}} C$ 。因此，$\ker_{\mathcal{D}} C = \operatorname{span}_{\mathcal{D}} \ker_{\mathbb{K}} C$ 成立。

□

2.3 双边乘法与中心下降

在本小节中，我们假设 $\mathcal{D}$ 是一个斜域，使得 $Z(\mathcal{D}) = \mathbb{K}$ 且 $N := \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{D} < \infty$。令 $\mathcal{D}^{\mathrm{op}}$ 表示 $\mathcal{D}$ 的相反代数；与 $z \in \mathcal{D}$ 对应的 $\mathcal{D}^{\mathrm{op}}$ 中的元素记为 z^{op}，从而 $y^{\mathrm{op}} z^{\mathrm{op}} = (zy)^{\mathrm{op}}$。令 $\operatorname{End}_{\mathbb{K}}(\mathcal{D})$ 表示从 $\mathcal{D}$ 到其自身的 $\mathbb{K}$-线性映射所构成的 $\mathbb{K}$-代数。下面是中心单代数标准同构在斜域情形下的特例；为使本文自洽，我们给出证明。

引理 2.4 （例如参见 [9, 命题 2.4 的证明。8] 以及 [26, Tag 074I]）。 该 $\mathbb{K}$-线性映射Φ: $\mathcal{D} \otimes_{\mathbb{K}} \mathcal{D}^{\mathrm{op}} \to \operatorname{End}_{\mathbb{K}}(\mathcal{D})$ 定义为 $\Phi(y \otimes z^{\mathrm{op}})(p) := ypz$ 对 $p \in \mathcal{D}$ 是一个同构。

证明。 我们首先证明单射性。反设 Φ不是单射，并取 Φ 的核中的一个非零元素 $\sum_{\ell=1}^{s} y_\ell \otimes z_\ell^{\mathrm{op}}$，使其项数 s 最少。因此，对所有 $p \in \mathcal{D}$都有 $\sum_{\ell=1}^{s} y_\ell p z_\ell = 0$ 。由 s的极小性，族$y_1, \dots, y_s$和 $z_1, \dots, z_s$在 $\mathbb{K}$上都是线性无关的；否则，我们可以通过将其中一个元素表示为其他元素的-线性组合来减少

项数。特别地， $y_1 \neq 0$。将所有 y_ℓ 从左侧乘以 y_1^{-1}后，我们不妨设 $y_1 = 1$；这一操作保持元素属于核、元素非零以及极小性。对于任意t、 $p \in \mathcal{D}$，都有 $\sum_{\ell=1}^{s} y_\ell t p z_\ell = 0$ 和 $\sum_{\ell=1}^{s} t y_\ell p z_\ell = 0$。由于 $y_1 = 1$，用前式减去后式得到 $\sum_{\ell=2}^{s} (y_\ell t - t y_\ell) p z_\ell = 0$。因此，对每个 $t \in \mathcal{D}$，核中都包含$\sum_{\ell=2}^{s} (y_\ell t - t y_\ell) \otimes z_\ell^{\mathrm{op}}$，其至多含有 $s-1$ 项，因而根据 s的极小性必为零。由于 z_2、……、 z_s 在 $\mathbb{K}$上是线性无关的，对于所有 ℓ和所有 $t \in \mathcal{D}$，都有 $y_\ell t = t y_\ell$，即对所有 ℓ 都有 $y_\ell \in Z(\mathcal{D}) = \mathbb{K}$。由于当 $p = 1$时 $\sum_{\ell=1}^{s} y_\ell p z_\ell = 0$，我们得到 $\sum_{\ell=1}^{s} y_\ell z_\ell = 0$，其中 $y_\ell \in \mathbb{K}$且 $y_1 = 1$，这与 z_1、……、 z_s 在 $\mathbb{K}$上的线性无关性相矛盾。因此， Φ是单射的。

由于 Φ 的定义域和陪域都具有 $\mathbb{K}$-维数 N^2，因此映射 Φ 也是满射。

□

根据引理2.4，每个 $\mathbb{K}$-线性映射 $\mathcal{D}$ 都是双边乘法的有限和 $p \mapsto ypz$。对于一个 $\mathbb{K}$-线性映射 $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{D}$，令秩$_{\mathbb{K}} G$ 表示其像的 $\mathbb{K}$-维数。下一个引理将项数与像的维数联系起来。

引理 2.5。 设 $G \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathcal{D})$ 是一个形如以下形式的映射

$$G(p) = \sum_{\ell=1}^{s} y_\ell p z_\ell \qquad (p \in \mathcal{D})$$

其中 s 为某个非负整数，且 $y_\ell, z_\ell \in \mathcal{D}$。如果 $N > s$秩$_{\mathbb{K}} G$，则 $G = 0$。

证明。 我们证明其逆否命题：如果 $G \neq 0$，则 $N \leq s$秩$_{\mathbb{K}} G$。设 $G \neq 0$。只需考虑这样的情形： s 是 G的此类表达式中项数最少的情形。于是，元素 z_1、……、 z_s 在 $\mathbb{K}$上是线性无关的，并且对所有 ℓ都有 $y_\ell \neq 0$，否则我们可以减少项数。令 $z := (z_1, z_2, \ldots, z_s)^\top \in \mathcal{D}^s$ 为 $\mathcal{D}$ 上的列向量。

我们首先断言，张成空间$_{\mathcal{D}}\{pz \mid p \in \mathcal{D}\}$ 是整个空间 $\mathcal{D}^s$。反设不然，则存在一个非零行向量（y_1'， y_2'，……， y_s'） $\in \mathcal{D}^{1\times s}$，其系数取自 $\mathcal{D}$，使得 $\sum_{\ell=1}^{s} y_\ell' p z_\ell = 0$ 对所有 $p \in \mathcal{D}$都成立。由引理2.4中的单射性可知， $\sum_\ell y_\ell' \otimes z_\ell^{\mathrm{op}} = 0$。由于 z_1， z_2，……， z_s 在 $\mathbb{K}$上线性无关，因此得到 $y_\ell' = 0$ 对所有 ℓ都成立，矛盾。

根据上述断言，存在 p_1，……， $p_s \in \mathcal{D}$，使得 $p_1 z$， $p_2 z$，……， $p_s z$构成 $\mathcal{D}$ 的右 $\mathcal{D}^s$-基，也就是说，矩阵 $B \in \mathcal{D}^{s\times s}$ （其第（ ℓ， j）个元素为 $p_j z_\ell$ ）属于一般线性群 $_s(\mathcal{D})$。设 t_1， t_2，……， $t_s \in \mathcal{D}$ 为其逆矩阵 B^{-1} 第一列的元素。由于 $BB^{-1} = I_s$，对于 $\ell = 1$，有 $\sum_{j=1}^{s} p_j z_\ell t_j = 1$，而对于 $\ell \neq 1$，结果为 0。因此，对于所有 $p \in \mathcal{D}$，有

$$\sum_{j=1}^{s} G(pp_j) t_j = \sum_{j=1}^{s} \left(\sum_{\ell=1}^{s} y_\ell p p_j z_\ell \right) t_j = \sum_{\ell=1}^{s} y_\ell p \left(\sum_{j=1}^{s} p_j z_\ell t_j \right) = y_1 p.$$

这意味着 $\mathbb{K}$-线性映射 $p \mapsto y_1 p$ 和 $p \mapsto \sum_{j=1}^{s} G(pp_j) t_j$ 相同，因此它们在 $\mathbb{K}$ 上具有相同的秩。由于 $y_1 \neq 0$，映射 $p \mapsto y_1 p$ 是双射，这意味着其在 $\mathbb{K}$ 上的秩为 N。另一方面，对于每个 j，映射 $p \mapsto G(pp_j) t_j$ 是 G 与关于 p_j 和 t_j 的右乘的复合。因此，其在 $\mathbb{K}$ 上的秩至多为 rank$_{\mathbb{K}} G$，这意味着和 $\sum_{j=1}^{s} G(pp_j) t_j$ 在 $\mathbb{K}$ 上的秩至多为 $s$rank$_{\mathbb{K}} G$。因此，我们得到 $N \leq s$ rank$_{\mathbb{K}} G$。

□

若子空间 $W \leq \mathcal{D}^h$ 满足：对于所有 $p \in \mathcal{D}$， $pW \leq W$，则称其为双侧子空间。下一个工具表明，双侧子空间是在中心上定义的；这是 [26, Tag 074B] 的推论。

引理 2.6。 设 $W \leq \mathcal{D}^h$ 是双边的，且 $W_0 := W \cap \mathbb{K}^h$。那么由 $\xi \otimes p \mapsto \xi p$ 定义的映射 $W_0 \otimes_{\mathbb{K}} \mathcal{D} \to W$ 是右 $\mathcal{D}$-向量空间之间的同构。特别地， $W =$ 张成空间$_{\mathcal{D}} W_0$，且 维数$_{\mathbb{K}} W_0 =$ 维数$_{\mathcal{D}} W$。

证明。我们先证明 $W =$ 张成空间$_{\mathcal{D}} W_0$。由于张成空间$_{\mathcal{D}} W_0 \leq W$ 显然成立，我们证明反向包含关系。取 $\mathcal{D}$ 的一个 $\mathbb{K}$-基 e_1，……， e_N，并将 $w \in W$ 展开为 $w = \sum_{\alpha=1}^{N} \xi_\alpha e_\alpha$，其中 $\xi_\alpha \in \mathbb{K}^h$。对于每个 α，令 e_α^*: $\mathcal{D} \to \mathcal{D}$ 为由 $e_\alpha^*(\sum_{\alpha'} \kappa_{\alpha'} e_{\alpha'}) := \kappa_\alpha$ （对 $\kappa_{\alpha'} \in \mathbb{K}$）定义的 $\mathbb{K}$-线性映射。由引理 2.4 中的满射性，存在有限多个元素 $y_{\alpha\ell}$、 $z_{\alpha\ell} \in \mathcal{D}$ ，使得对于所有 $p \in \mathcal{D}$， $e_\alpha^*(p) = \sum_\ell y_{\alpha\ell} p z_{\alpha\ell}$。将 e_α^* 应用于 w 的每个元素，可得 $\xi_\alpha = \sum_\ell y_{\alpha\ell} w z_{\alpha\ell}$。由于 W 是双侧子空间，右侧的每一项都属于 W。因此，对于所有 α， $\xi_\alpha \in W \cap \mathbb{K}^h = W_0$ 均成立，从而 $w \in$ 张成空间$_{\mathcal{D}} W_0$。

该断言现在由引理 2.3 (2)得出。 □

下文中，对于双侧子空间 $W \leq \mathcal{D}^h$，记作 $W_0 := W \cap \mathbb{K}^h$ 以及 $W = W_0 \otimes_{\mathbb{K}} \mathcal{D}$，其中后者是通过引理2.6中的同一认定得到的。

在双侧子空间上与两侧乘法相容的映射也定义在中心上。

引理 2.7。 设 $W \leq \mathcal{D}^h$ 是双边的，并设 g: $W \to \mathcal{D}^{h'}$ 是一个保持左乘的右 $\mathcal{D}$-线性映射，也就是说，对于所有 $t \in \mathcal{D}$ 和 $w \in W$，都有 $g(tw) = tg(w)$。那么存在一个矩阵 $C \in \mathbb{K}^{h' \times h}$ ，使得对于所有 $w \in W$，都有 $g(w) = Cw$ 。

证明。设 $\xi \in W_0$。那么，对于所有 $t \in \mathcal{D}$，我们有 $tg(\xi) = g(t\xi) = g(\xi t) = g(\xi)t$，其中，第一个等号由 g 保持左乘这一事实得出，第二个等号由 $t\xi = \xi t$ 得出；由于 $\xi \in W_0 \leq \mathbb{K}^h$，该结论成立；第三个等号则由 g 的右 $\mathcal{D}$-线性得出。因此， $g(\xi)$ 的每个元素都属于 $Z(\mathcal{D}) = \mathbb{K}$。于是， g 将 W_0 映射到 $\mathbb{K}^{h'}$，且其限制 $g|_{W_0}$: $W_0 \to \mathbb{K}^{h'}$ 是 $\mathbb{K}$- 线性的，因为 g 是右 $\mathcal{D}$- 线性的。我们通过将 W_0 的一组基扩充为 $\mathbb{K}^h$ 的一组基，并将新增的基向量映射为零，将其扩张为一个 $\mathbb{K}$- 线性映射 $\mathbb{K}^h \to \mathbb{K}^{h'}$ ；设 $C \in \mathbb{K}^{h' \times h}$ 为其矩阵表示。于是， C 也定义了一个右 $\mathcal{D}$-线性映射 $\mathcal{D}^h \ni w \mapsto Cw \in \mathcal{D}^{h'}$，根据构造，它在 W_0 上与 g 一致。由于这两个映射都是右 $\mathcal{D}$-线性的，且由引理 2.6 可知 $W =$ 张成$_{\mathcal{D}} W_0$，因此它们在 W 上一致。 □

2.4 指定次数的除环

我们的证明 使用一个关于其中心有限维、且维数预先指定的斜域 n.

命题 2.8 ([20, 引理 3.3 和命题 4。2])。 设 $\mathbb{F}$ 是一个域， d 是一个正整数。那么存在域扩张 $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{K} \subseteq \mathbb{E}$ 和一个斜域 $\mathcal{D}$ ，使得 $|\mathbb{K}| = \infty$, $Z(\mathcal{D}) = \mathbb{K}$,维$_{\mathbb{K}} \mathcal{D} = d^2$，并且存在一个 $\mathbb{E}$-代数同构 Φ_{sp}: $\mathcal{D} \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{E} \to M_d(\mathbb{E})$，其中 $M_d(\mathbb{E})$表示 $d \times d$ 阶矩阵在 $\mathbb{E}$上的代数。

所引用的结果 [20, 引理 3.3 和命题 4.2] 为命题 2.8 提供了一个构造性证明；由于 [20, 引理 3.3] 假设基域包含某个单位根，我们在将 $\mathbb{F}$ 替换为添加该单位根所得到的扩域后应用它。若只需证明存在性，可以取 $\mathcal{D}$ 为次数为 d [4, 定理 2.5]的泛除代数，定义在 $\mathbb{F}$ 上（若 $\mathbb{F}$ 是有限域，则定义在有理函数域 $\mathbb{F}(t)$ 上）；它是一个维数为 d^2、中心为无限域且包含 $\mathbb{F}$的中心单代数。由于此时 $\mathcal{D}$ 是其中心上的中心单代数，根据分裂域定理 [9, 定理 2.2.1]，存在一个域 $\mathbb{E}$，使得所需的同构 Φ_{sp} 成立。

令 $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{K} \subseteq \mathbb{E}$、 $\mathcal{D}$ 和 Φ_{sp} 如命题 2.8 所述。我们定义嵌入 ι: $\mathcal{D} \to M_d(\mathbb{E}) \to \iota(p)$，其定义为 $= \Phi_{\mathrm{sp}}(p \otimes 1)$，其中 $p \in \mathcal{D}$。由于 $p \mapsto p \otimes 1$ 是 $\mathbb{K}$-代数的单射同态，因此 ι 也是如此。此外，由于对 $\kappa \in \mathbb{K}$，$\kappa \otimes 1 = 1 \otimes \kappa$ 是 $\mathbb{E}$-线性的，且 $\Phi_{\mathrm{sp}}(1 \otimes 1) = I_d$，我们有

$\iota(\kappa) = \kappa I_d$ 对所有 $\kappa \in \mathbb{K}$ 成立。对于矩阵 $B = (B_{j\ell}) \in \mathcal{D}^{h_1 \times h_2}$，我们将 $\iota(B) \in \mathbb{E}^{dh_1 \times dh_2}$ 记为如下 $h_1 \times h_2$ 分块矩阵：其第 (j,ℓ) 个块是矩阵 $d \times d$ $\iota(B_{j\ell})$。那么，只要乘积 BB' 有定义，就有 $\iota(BB') = \iota(B)\iota(B')$。对于将斜域嵌入矩阵代数的一般情形，以下秩比较见 [14, 第 2.1 节 1]；我们针对本文情形给出证明。

引理 2.9. 对于每个 $B \in \mathcal{D}^{h_1 \times h_2}$，都有 $\text{秩}_{\mathbb{E}}\, \iota(B) = d\text{秩}_{\mathcal{D}}\, B$。

证明。设 $\ell := \text{秩}_{\mathcal{D}}\, B$。存在非奇异矩阵 $Y_1 \in \mathrm{GL}_{h_1}(\mathcal{D})$ 和 $Y_2 \in \mathrm{GL}_{h_2}(\mathcal{D})$，使得

$$Y_1 B Y_2 = \begin{pmatrix} I_\ell & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

由于 ι 保持乘积和恒等式，$\iota(Y_1)$ 和 $\iota(Y_2)$ 在 $\mathbb{E}$ 上都是非奇异的，并且

$$\iota(Y_1)\iota(B)\iota(Y_2) = \iota(Y_1 B Y_2) = \begin{pmatrix} I_{d\ell} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

因此，我们得到 $\text{秩}_{\mathbb{E}}\, \iota(B) = d\ell$。 □

我们还要用到以下原理：若沿某个方向扰动矩阵从不增加其秩，则该方向会将核映入像。域上的相应结论是 [18, 引理 2.2]。我们通过转到分裂域 $\mathbb{E}$ 来证明斜域 $\mathcal{D}$ 上的结论，其中扰动参数取自中心 $\mathbb{K}$；这里用到了 $\mathbb{K}$ 的无限性。

引理 2.10. 设 $B, B' \in \mathcal{D}^{h_1 \times h_2}$。若对所有 $\lambda \in \mathbb{K}$，都有 $\text{秩}_{\mathcal{D}}(B + \lambda B') \leq \text{秩}_{\mathcal{D}}\, B$，则 $B'\text{核}_{\mathcal{D}}\, B \leq \text{像}_{\mathcal{D}}\, B$。

证明。令 $\ell := \text{秩}_{\mathcal{D}}\, B$。取 $Y_1 \in \mathrm{GL}_{h_1}(\mathcal{D})$ 和 $Y_2 \in \mathrm{GL}_{h_2}(\mathcal{D})$，使得

$$Y_1 B Y_2 = \begin{pmatrix} I_\ell & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Y_1 B' Y_2 = \begin{pmatrix} B'_{11} & B'_{12} \\ B'_{21} & B'_{22} \end{pmatrix},$$

其中 B'_{11} 的大小为 $\ell \times \ell$，而 B'_{22} 的大小为 $(h_1 - \ell) \times (h_2 - \ell)$。$Y_1 B Y_2$ 的核由支撑在最后 $h_2 - \ell$ 个坐标上的向量构成，其像由支撑在前 ℓ 个坐标上的向量构成。因此，所需的包含关系等价于 $B'_{22} = 0$。

反设 $B'_{22} \neq 0$。由于 ι 是 $\mathbb{K}$-线性的且具有乘法性，对于 $\lambda \in \mathbb{K}$，有

$$\iota(Y_1)\, \iota(B + \lambda B')\, \iota(Y_2) = \begin{pmatrix} I_{d\ell} + \lambda\iota(B'_{11}) & \lambda\iota(B'_{12}) \\ \lambda\iota(B'_{21}) & \lambda\iota(B'_{22}) \end{pmatrix}.$$

由于 ι 是单射，我们有 $\iota(B'_{22}) \neq 0$；我们固定 $\iota(B'_{22})$的一个非零元素。考虑上方矩阵中取前 $d\ell$ 行和列，并连同该元素所在的行和列构成的子式。它具有如下形式

$$f(\lambda) := \det \begin{pmatrix} I_{d\ell} + \lambda\iota(B'_{11}) & \lambda * \\ \lambda * & \lambda\gamma \end{pmatrix},$$

其中，$\gamma \in \mathbb{E}$ 表示固定的非零元素，而符号 $*$ 分别表示 $\mathbb{E}^{d\ell}$ 中的某个列向量和 $\mathbb{E}^{1 \times d\ell}$中的某个行向量。我们将 f 视为 $\mathbb{E}$上的关于 λ的多项式。由于~上述矩阵的最后一行的每个元素都是 λ的倍数，因此有 $f(\lambda) = \lambda f(\lambda)$，其中-$f(\lambda)$是将最后一行（$\lambda *$ $\lambda\gamma$）替换为（$*$ γ）后所得矩阵的行列式。

˜代入 $\lambda = 0$，我们得到 f（0） $= \gamma$，因为所得矩阵是分块下三角矩阵，其对角块为 $I_{d\ell}$ 和 γ。因此， λ 在 f 中的系数为 $\gamma \neq 0$，并且 f 是一个非零多项式，在 $\mathbb{E}$中只有有限个根。由于 $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{E}$ 是无限的，存在 $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ 使得 f（λ_0） $\neq 0$。然后，根据引理2.9，我们得到

$$d \operatorname{rank}_{\mathcal{D}}(B + \lambda_0 B') = \operatorname{rank}_{\mathbb{E}} \iota(B + \lambda_0 B') \geq d\ell + 1 > d\ell = d \operatorname{rank}_{\mathcal{D}} B,$$

也就是说，秩$_{\mathcal{D}}$($B + \lambda_0 B'$) $>$ 秩$_{\mathcal{D}}$ B，这与假设相矛盾。 □

3 主要定理及其推论的证明

本节致力于证明定理 1.1。令 $\mathbb{F}$、 r和 $A = A_0 x_0 + \sum_{i=1}^{m} A_i x_i$ 如定理 1.1所述。我们固定任意整数 $d \geq r$ ，并证明定理 1.1 对 $k = d$成立。

3.1 设置

根据命题 2.8，取域扩张 $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{K} \subseteq \mathbb{E}$、斜域 $\mathcal{D}$以及同构 Φ_{sp}，使得

$$|\mathbb{K}| = \infty, \qquad Z(\mathcal{D}) = \mathbb{K}, \qquad N \coloneqq \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{D} = d^2, \qquad \Phi_{\mathrm{sp}} \colon \mathcal{D} \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{E} \to M_d(\mathbb{E}).$$

令 ι: $\mathcal{D} \to M_d$（$\mathbb{E}$）为第 2.4节中定义的嵌入。由于 $d \geq r$，我们有

$$N = d^2 > r(r-1). \tag{3.1}$$

我们也将 A_0、 A_1、……、 A_m 视为定义在 $\mathbb{K}$和 $\mathcal{D}$上的矩阵。每个 A_i 的秩与其取在 $\mathbb{F}$、 $\mathbb{K}$还是 $\mathcal{D}$ 上无关（引理 2.3 (3)）；特别地，对于$_{\mathbb{K}}$ $A_i \leq r$ ，秩为$i \in [m]$。

对于 $W \leq \mathcal{D}^b$，我们定义

$$\mathcal{A}(W) \coloneqq \sum_{i=1}^{m} A_i \mathcal{D} W = \operatorname{span}_{\mathcal{D}}\{A_i(pw) \mid i \in [m],\ p \in \mathcal{D},\ w \in W\} \leq \mathcal{D}^a. \tag{3.2}$$

注意， A_0 未参与 $\mathcal{A}$ 的定义。此外， $\mathcal{A}(W)$ 是双边的：由于 A_i 的元素属于中心，因此对于所有 t、p、 $p' \in \mathcal{D}$和 $w \in W$，有 $t(A_i(pw)p') = A_i((tp)w)p' \in \mathcal{A}(W)$。

对于元组 $q = (q_1$、……、 $q_m) \in \mathcal{D}^m$，我们考虑矩阵

$$A(q) \coloneqq A_0 + \sum_{i=1}^{m} A_i q_i \in \mathcal{D}^{a \times b}$$

连同子空间 V和 U ，以及由下式定义的整数 ρ和 τ

$$\begin{aligned} V &\coloneqq \mathcal{A}(\ker_{\mathcal{D}} A(q)) \leq \mathcal{D}^a, & U &\coloneqq A(q)^{-1}(V) = \{u \in \mathcal{D}^b \mid A(q)u \in V\} \leq \mathcal{D}^b, \\ \rho &\coloneqq \operatorname{rank}_{\mathcal{D}} A(q), & \tau &\coloneqq \dim_{\mathcal{D}} V. \end{aligned} \tag{3.3}$$

这里， q_1，…， q_m不是形式变量，而是斜域 $\mathcal{D}$ 中的实际元素；也就是说， $A(q)$ 是将每个 $i \in [m]$中的 x_0 替换为 1、将 x_i 替换为 q_i 后，从 A 得到的 $\mathcal{D}$ 上的矩阵。若元组 $q \in \mathcal{D}^m$ 满足： ρ 在 $\mathcal{D}^m$ 的所有元组中取最大值，且在此条件下 τ 取最大值，则称其为字典序最大。由于 ρ 和 τ 是有界的非负整数，因此字典序最大元组必然存在。

我们有 $\ker_{\mathcal{D}} A(q) \leq U$，因此 $V = \mathcal{A}(\ker_{\mathcal{D}} A(q)) \leq \mathcal{A}(U)$。由于 V是双边的，引理2.6 推出

$$V = V_0 \otimes_{\mathbb{K}} \mathcal{D}, \qquad \dim_{\mathbb{K}} V_0 = \tau, \tag{3.4}$$

其中 $V_0 := V \cap \mathbb{K}^a$。对象 V、 U、 V_0、 ρ 和 τ 取决于元组 q，尽管我们在记号中省略了这一点。

证明如下。在第 3.2 节中，我们证明：如果某个元组 q 满足包含关系 $V \leq \operatorname{im}_{\mathcal{D}} A(q)$ 和稳定性 $\mathcal{A}(U) = V$（命题 3.2），则定理 1.1 成立；并指出每个字典序最大元组都满足这两个条件（命题 3.3）。接下来的两个小节专门用于证明命题 3.3。在第 3.3 节中，我们证明包含关系 $V \leq \operatorname{im}_{\mathcal{D}} A(q)$。在第 3.4 节中，我们将稳定性 $\mathcal{A}(U) = V$ 改述为某些向量的消失，并予以证明。最后，在第 3.5 节中，我们由定理 1.1 推导出推论 1.2 以及一般线性符号矩阵的一个已知界。

3.2 化简为关于一个元组的两个条件

我们首先建立 d 次膨胀的秩关于 ρ 的下界，该结论对任意元组都成立。

引理 3.1。 设 $q \in \mathcal{D}^m$ 为任意元组，并设 $\rho = \text{秩}_{\mathcal{D}} A(q)$ 如(3.3)中所示。则秩$_{\mathbb{F}(\mathbf{x}^{(d)})} A^{(d)} \geq d\rho$。

证明。 由于 $A_0, A_1, \ldots, A_m$的元素属于 $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{K}$和 $\iota(\kappa) = \kappa I_d$，其中 $\kappa \in \mathbb{K}$，因此我们有

$$\iota(A(q)) = A_0 \otimes I_d + \sum_{i=1}^{m} A_i \otimes \iota(q_i) \in \mathbb{E}^{da \times db},$$

也就是说， $\iota(A(q))$ 是通过将 I_d 代入 $A^{(d)}$ 中的 $X_0^{(d)}$，并对每个 $i \in [m]$ 将 $\iota(q_i) \in M_d(\mathbb{E})$ 代入 $X_i^{(d)}$ 而得到的。根据引理 2.9，我们有 $\operatorname{rank}_{\mathbb{E}} \iota(A(q)) = d\rho$。因此， $\iota(A(q))$ 存在一个大小为 $d\rho$ 的非零子式。考虑 $A^{(d)}$ 中具有相同行和列的子式 $f \in \mathbb{F}[\mathbf{X}^{(d)}]$。上述代入定义了一个环同态 $\mathbb{F}[\mathbf{X}^{(d)}] \to \mathbb{E}$，它将 f 映射为 $\iota(A(q))$ 的这个非零子式。因此， f 是一个非零多项式，并且 $A^{(d)}$ 在$\mathbb{F}(\mathbf{X}^{(d)})$ 上有一个大小为 $d\rho$ 的非零子式。 □

下一个命题表明，如果该元组满足以下两个条件，那么引理 3.1 中的下界是紧的，并且 ρ等于 A 的非交换秩。

命题 3.2。 设 $q \in \mathcal{D}^m$ 为任意元组，并设 V、 U和 ρ 如 (3.3)中所述。假设

$$V \leq \operatorname{im}_{\mathcal{D}} A(q) \qquad \textit{and} \qquad \mathcal{A}(U) = V. \tag{3.5}$$

则 非交换-秩$_{\mathbb{F}} A = \rho$，且 (1.2) 对 $k = d$成立。

证明。 只需证明非交换秩$_{\mathbb{K}} A \leq \rho$。事实上，由于矩阵的秩在域扩张下不变（引理 2.3 (3)），我们有秩$_{\mathbb{F}(\mathbf{X}^{(k)})} A^{(k)} =$ 秩$_{\mathbb{K}(\mathbf{X}^{(k)})} A^{(k)}$ 对每个$k \geq 1$均成立，因此非交换秩$_{\mathbb{F}} A =$ 非交换秩$_{\mathbb{K}} A$ 由定理 2.1可得。于是，根据引理 3.1 和定理2.1，我们得到

$$d\rho \leq \operatorname{rank}_{\mathbb{F}(\mathbf{X}^{(d)})} A^{(d)} \leq d \operatorname{nc-rank}_{\mathbb{F}} A = d \operatorname{nc-rank}_{\mathbb{K}} A \leq d\rho,$$

这意味着非交换秩$_{\mathbb{F}} A = \rho$ 以及（1.2）对于 $k = d$。

为证明非交换秩$_{\mathbb{K}}$ $A \le \rho$，我们将定理2.2 应用于 A，将其视为定义在 $\mathbb{K}$ 上的线性符号矩阵，并取对（U_0，V_0），其中 $U_0 := U \cap \mathbb{K}^b$ 且 $V_0 = V \cap \mathbb{K}^a$。为此，我们证明$A_i U_0 \le V_0$ 对所有 $i \in [0, m]$ 均成立，并且 $\dim_{\mathbb{K}} U_0 - \dim_{\mathbb{K}} V_0 = b - \rho$；于是定理2.2 给出非交换秩$_{\mathbb{K}}$ $A \le b - \dim_{\mathbb{K}} U_0 + \dim_{\mathbb{K}} V_0 = \rho$。

我们首先证明对所有 $A_i U \le V$ $i \in [0, m]$。令 $u \in U$。由 (3.2) 以及假设 $\mathcal{A}(U) = V$，可得对所有 $i \in [m]$，$A_i u \in V$ 且 $A_i(q_i u) \in V$。根据 U 的定义 (3.3)，由于 $A(q)u \in V$，我们得到 $A_0 u = A(q)u - \sum_{i=1}^{m} A_i(q_i u) \in V$。因此，对所有 $i \in [0, m]$，$A_i U \le V$成立。由于 A_i 的元素属于 $\mathbb{K}$，这意味着对所有 $i \in [0, m]$，$A_i U_0 \le V \cap \mathbb{K}^a = V_0$。

接下来我们证明 U 是双边的。令 $u \in U$ 且 $t \in \mathcal{D}$。由于 A_0 的元素属于中心，我们有 $A_0(tu) = t(A_0 u)$，从而 $A(q)(tu) = t(A_0 u) + \sum_{i=1}^{m} A_i((q_i t)u)$。第一项属于 V，因为如上所示 $A_0 u \in V$，且 V 是双边的。根据 (3.2)，每个 $A_i((q_i t)u)$ 都属于 $\mathcal{A}(U) = V$。因此 $A(q)(tu) \in V$，即 $tu \in U$。于是 U 是双边的，并且根据引理 2.6，我们有 $U = U_0 \otimes_{\mathbb{K}} \mathcal{D}$。另外，根据 (3.4) 还可知 $V = V_0 \otimes_{\mathbb{K}} \mathcal{D}$。

最后，由假设 $V \le \mathrm{im}_{\mathcal{D}} A(q)$，限制映射 $A(q)|_U \colon U \to V$ 是满射，其核为 $\ker_{\mathcal{D}} A(q)$。因此

$$\dim_{\mathbb{K}} U_0 - \dim_{\mathbb{K}} V_0 = \dim_{\mathcal{D}} U - \dim_{\mathcal{D}} V = \dim_{\mathcal{D}} \ker_{\mathcal{D}} A(q) = b - \rho,$$

其中，第一个等号由引理 2.6 得出，最后一个等号则由 $\mathcal{D}$上的秩-零化度定理得出。证明完毕。□

命题（3.5）中的两个条件在命题3.2 的每个字典序最大元组上都成立。

命题 3.3。设 $q \in \mathcal{D}^m$ 是一个字典序最大元组，且 V 和 U 是 (3.3)中定义的子空间。那么以下结论成立。

(1) $V \le \mathrm{im}_{\mathcal{D}} A(q)$。

(2) $\mathcal{A}(U) = V$。

我们在第 3.3 节和第 3.4 节中证明命题 3.3。在此之前，我们通过假设命题 3.3 来完成定理 1.1 的证明。

*定理 1.1 的证明。*取一个字典序最大元组 $q \in \mathcal{D}^m$。根据命题 3.3，该元组满足（3.5）中的两个条件。因此，定理 1.1 对于 $k = d$ 由命题 3.2得出。由于 $d \ge r$ 是任意的，该定理对所有 $k \ge r$均成立。□

注 3.4。子空间 V 和 U 以及 (3.5) 中的两个条件，与 Ivanyos、Karpinski、Qiao 和 Santha [17] 的第二 Wong 序列类似。对于域 $\mathcal{M}$ 上矩阵空间中的矩阵 B，他们的第二 Wong 序列是如下定义的子空间序列：$W_0 := \{0\}$ 以及 $W_{i+1} := \mathcal{M}(B^{-1}(W_i))$，其中 $i \ge 0$；$B^{-1}(W)$ 表示 W 在 B 下的原像，而 $\mathcal{M}(W)$ 表示由 W 在 $\mathcal{M}$ 中各矩阵作用下所得像张成的子空间。该序列的极限包含于 B 的像中，当且仅当存在如定理 2.2 [17, 引理 9] 中的一对子空间，证明 B 的秩等于非交换秩。以 $A(q)$ 和 $\mathcal{A}$ 分别替代 B 和 $\mathcal{M}$ 后，该序列的前两项为 $V = \mathcal{A}(\ker_{\mathcal{D}} A(q))$ 和 $\mathcal{A}(U)$，而这两个条件表明 V 包含于 $A(q)$ 的像中，并且该序列在 V 处稳定。■

3.3 字典序最大的元组的包含关系

在本小节中，我们推导字典序极大性的推论，并证明命题 3.3 (1)。为了将引理 2.10应用于字典序极大性，我们将以下两个量结合起来，得到如下的单个矩阵的 ρ秩和 τ。

固定一个整数 c，使得 $c > a$ 和 $c > mN$，设 $c \coloneqq mN + a + 1$。固定一个 $\mathbb{K}$-基 $e_1, e_2, \ldots, e_N$，它属于 $\mathcal{D}$，并按如下方式定义矩阵 $L_1, \ldots, L_c \in \mathcal{D}^{a\times b}$：$L_1, \ldots, L_{mN}$ 是 $(j, \alpha) \in [m] \times [N]$ 对应的矩阵，按固定顺序排列；而 $L_k \coloneqq 0$，其中 $mN < k \le c$。这些矩阵不依赖于元组 q。对于每个 $W \le \mathcal{D}^b$，我们有

$$\mathcal{A}(W) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{\alpha=1}^{N} A_j e_\alpha W = \sum_{k=1}^{c} L_k W, \tag{3.6}$$

因为每个 $p \in \mathcal{D}$ 都可以表示为一个 $\mathbb{K}$-线性组合 $p = \sum_\alpha \kappa_\alpha e_\alpha$，并且 $A_j(pw) = \sum_\alpha A_j e_\alpha(w\kappa_\alpha)$，其中对所有 $j \in [m]$ 和 $w \in W$ 都有 $w\kappa_\alpha \in W$。

对于矩阵 $M \in \mathcal{D}^{a\times b}$，我们定义分块矩阵

$$P(M) \coloneqq \begin{pmatrix} M & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & M \\ L_1 & L_2 & \cdots & L_c \end{pmatrix} \in \mathcal{D}^{(ca+a)\times cb},$$

其中，对角部分由 c 个 M 的副本组成。下文中，我们用 $(w_1, w_2、\ldots\ldots、w_c)$ 表示按此顺序将列向量 $w_1、w_2、\ldots\ldots、w_c$ 竖直拼接所得的列向量，并将 w_k 称为其第 k 个块。对于 $w_1、w_2、\ldots\ldots、w_c \in \mathcal{D}^b$，矩阵 $P(M)$ 将向量 $(w_1, w_2、\ldots\ldots、w_c) \in \mathcal{D}^{cb}$ 映射为向量 $(Mw_1, Mw_2、\ldots\ldots、Mw_c, \sum_{k=1}^{c} L_k w_k) \in \mathcal{D}^{ca+a}$。

引理 3.5。 设 $q \in \mathcal{D}^m$ 为字典序最大元组。那么，对于每个 $q' \in \mathcal{D}^m$，我们有

$$\operatorname{rank}_{\mathcal{D}} P(A(q')) \le \operatorname{rank}_{\mathcal{D}} P(A(q)).$$

证明。我们首先证明，对于每个 $M \in \mathcal{D}^{a\times b}$，

$$\operatorname{rank}_{\mathcal{D}} P(M) = c \operatorname{rank}_{\mathcal{D}} M + \dim_{\mathcal{D}} \mathcal{A}(\ker_{\mathcal{D}} M). \tag{3.7}$$

考虑将 $\operatorname{im}_{\mathcal{D}} P(M)$ 投影到前 c 个块，即映射

$$\operatorname{im}_{\mathcal{D}} P(M) \ni \left(Mw_1, \ldots, Mw_c, \sum_{k=1}^{c} L_k w_k\right) \mapsto (Mw_1, \ldots, Mw_c) \in \mathcal{D}^{ca},$$

其中 $w_1, \ldots, w_c \in \mathcal{D}^b$。其像为 $(\operatorname{im}_{\mathcal{D}} M)^c$，其维数为 c秩$_{\mathcal{D}} M$。其核可与向量集合 $\sum_{k=1}^{c} L_k w_k$（满足 $w_1, \ldots, w_c \in \ker_{\mathcal{D}} M$）等同$\sum_{k=1}^{c} L_k \ker_{\mathcal{D}} M = \mathcal{A}(\ker_{\mathcal{D}} M)$，根据 (3.6)。因此，由 3.7)，以及在$\mathcal{D}$上的秩-零化度定理，我们得到 (

令 $\rho' \coloneqq \operatorname{rank}_{\mathcal{D}} A(q')$ 且 $\tau' \coloneqq \dim_{\mathcal{D}} \mathcal{A}(\ker_{\mathcal{D}} A(q'))$。由 (3.7)，我们有 $\operatorname{rank}_{\mathcal{D}} P(A(q')) = c\rho' + \tau'$ 且 $\operatorname{rank}_{\mathcal{D}} P(A(q)) = c\rho + \tau$。由字典序最大性可知，$\rho' \le \rho$，并且$\tau' \le \tau$当 $\rho' = \rho$ 时成立。若 $\rho' < \rho$，则由 $\tau' \le a < c$ 可得 $c\rho' + \tau' \le c(\rho - 1) + a < c\rho \le c\rho + \tau$。若$\rho' = \rho$，则 $c\rho' + \tau' = c\rho + \tau' \le c\rho + \tau$。因此，在这两种情况下，$\operatorname{rank}_{\mathcal{D}} P(A(q')) \le \operatorname{rank}_{\mathcal{D}} P(A(q))$ 均成立。 □

对于矩阵 $B \in \mathcal{D}^{a\times b}$，令 $\Delta_B \in \mathcal{D}^{(ca+a)\times cb}$ 为由 $P(B)$ 将最后一个块行 $(L_1\ L_2\ \cdots\ L_c)$ 替换为零后得到的分块矩阵，即

$$\Delta_B \coloneqq \begin{pmatrix} B & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

则对所有 $\lambda \in \mathbb{K}$， $P(M) + \lambda\Delta_B = P(M + \lambda B)$。

引理 3.6。 设 $q \in \mathcal{D}^m$ 是一个字典序最大元组。则对于任意 $i \in [m]$ 和 $p \in \mathcal{D}$，都有 $\Delta_{A_i p}$ 核$_{\mathcal{D}} P$（A（q）） $\leq$像$_{\mathcal{D}} P$（A（q）。

证明。对于任意 $\lambda \in \mathbb{K}$，都有 $A(q) + \lambda A_i p = A(q')$，其中 $q' \in \mathcal{D}^m$ 是由 q 将 q_i 替换为 $q_i + \lambda p$ 后得到的元组。因此，根据引理 3.5，有 $\operatorname{rank}_{\mathcal{D}}(P(A(q)) + \lambda\Delta_{A_i p}) = \operatorname{rank}_{\mathcal{D}} P(A(q) + \lambda A_i p) \leq \operatorname{rank}_{\mathcal{D}} P(A(q))$。于是，该断言由引理 2.10 得证。 □

我们现在可以证明 $V \leq$ 像$_{\mathcal{D}} A$（q）（命题 3.3 （1））。

命题 3.3（1）的证明。设 $q \in \mathcal{D}^m$ 是一个字典序最大元组。令 $i \in [m]$,$p \in \mathcal{D}$ 和 $u \in \ker_{\mathcal{D}} A(q)$。取一个指标 k_0，使得 $mN < k_0 \leq c$，从而 $L_{k_0} = 0$。令 $w \in \mathcal{D}^{cb}$ 为一个向量，其第 k_0 个块为 u，其余块均为零。于是 $w \in \ker_{\mathcal{D}} P(A(q))$。根据引理 3.6，存在一个向量 $w' \in \mathcal{D}^{cb}$，使得 $P(A(q))$ $w' = \Delta_{A_i p} w$。比较第 k_0 个块，得到 $A(q)w'_{k_0} = A_i(pu)$，其中 w'_{k_0} 表示 w' 的第 k_0 个块。因此 $A_i(pu) \in \operatorname{im}_{\mathcal{D}} A(q)$。由于根据 (3.2)， $V = \mathcal{A}(\ker_{\mathcal{D}} A(q))$ 由这样的向量张成，因此得到 $V \leq \operatorname{im}_{\mathcal{D}} A(q)$。 □

3.4 词典序最大元组的稳定性

在本小节中，我们证明命题3.3 (2)。我们首先将稳定性重新表述为某些向量的消失；对于任意满足包含关系 q 的元组，这种重新表述都是有效的 $V \leq \operatorname{im}_{\mathcal{D}} A(q)$。

设 $q \in \mathcal{D}^m$ 为任意元组。我们引入一个用于检验属于 V的矩阵。回顾式（3.4），有 $V_0 = V \cap \mathbb{K}^a$ 且 $\dim_{\mathbb{K}} V_0 = \tau$。设 $Q \in \mathbb{K}^{(a-\tau)\times a}$ 为 $\mathbb{K}$上的矩阵，使得 $\ker_{\mathbb{K}} Q = V_0$；例如，可以取表示商映射的矩阵 $\mathbb{K}^a \to \mathbb{K}^a/V_0 \simeq \mathbb{K}^{a-\tau}$。由引理 2.3 (3) 和（3.4），我们有

$$\ker_{\mathcal{D}} Q = V. \tag{3.8}$$

也就是说，向量 $w \in \mathcal{D}^a$ 属于 V 当且仅当 $Qw = 0$。

假设 $V \leq \operatorname{im}_{\mathcal{D}} A(q)$。则存在一个右 $\mathcal{D}$-线性映射 $H\colon \mathcal{D}^a \to \mathcal{D}^b$ 使得

$$A(q)Hv = v \qquad (v \in V). \tag{3.9}$$

事实上，取 V 的一个右 $\mathcal{D}$-基，对每个基向量选取其在 $A(q)$ 下的一个原像，将 V 的基扩展为 $\mathcal{D}^a$ 的基，并将新增的基向量映射为零。我们将 H 视为 $\mathcal{D}^{b\times a}$ 中的一个矩阵。注意， H 通常不保持左乘。

下面的引理重新表述了稳定性 $\mathcal{A}(U) = V$。

引理 *3.7.* 设 $q \in \mathcal{D}^m$ 为任意元组， V和 U 为 *(3.3)* 中定义的子空间。假设 $V \leq \mathit{im}_{\mathcal{D}} A(q)$，并设 Q 为满足 *(3.8)* 的 $\mathbb{K}$ 上的矩阵， H 为满足 *(3.9)* 的右 $\mathcal{D}$-线性映射。那么 $\mathcal{A}(U) = V$ 当且仅当

$$QA_j H A_i(pu) = 0 \qquad (i, j \in [m],\ p \in \mathcal{D},\ u \in \ker_{\mathcal{D}} A(q)). \tag{3.10}$$

证明. 我们首先证明 $U = \ker_{\mathcal{D}} A(q) + HV$。对于 $u' \in \ker_{\mathcal{D}} A(q)$ 和 $v \in V$，由 (3.9) 可得 $A(q)(u' + Hv) = v \in V$，因此 $u' + Hv \in U$。反之，对于 $u \in U$，令 $v := A(q)u \in V$；则由 (3.9) 可得 $A(q)(u - Hv) = v - v = 0$，因此 $u = (u - Hv) + Hv \in \ker_{\mathcal{D}} A(q) + HV$。

由于根据 (3.2)，对于 $W_1, W_2 \leq \mathcal{D}^b$，有 $\mathcal{A}(W_1 + W_2) = \mathcal{A}(W_1) + \mathcal{A}(W_2)$，且 $\mathcal{A}(\ker_{\mathcal{D}} A(q)) = V$，我们得到 $\mathcal{A}(U) = V + \mathcal{A}(HV)$。因此，$\mathcal{A}(U) = V$ 等价于 $\mathcal{A}(HV) \leq V$。根据 (3.2) 和 (3.8)，这等价于对所有 $j \in [m], t \in \mathcal{D}$ 和 $v \in V$，都有 $QA_j(tHv) = 0$。由于 A_j 和 Q 的元素属于中心，我们有 $QA_j(tHv) = tQA_jHv$；因此，该条件等价于对所有 $j \in [m]$ 和 $v \in V$，都有 $QA_jHv = 0$。由于 QA_jH 是右 $\mathcal{D}$-线性的，且 V 由向量 $A_i(pu)$（其中 $i \in [m], p \in \mathcal{D}$）张成，并且根据 (3.2)，$u \in \ker_{\mathcal{D}} A(q)$，因此这进一步等价于 (3.10)。 □

对于字典序最大的元组 $q \in \mathcal{D}^m$，由命题 $V \leq \operatorname{im}_{\mathcal{D}} A(q)$ 可知 3.3 (1)，这已在第3.3节中证明；因此存在一个右 $\mathcal{D}$-线性映射 H 满足（3.9）。下文还将使用第 L_1*3.3*节中定义的矩阵 L_c、……、 $P(A(q))$，其中 3.3 中固定的块数为 c。

以下恒等式是字典序最大性的关键推论：向量$QA_jHA_i(pu)$（其中 $u \in \ker_{\mathcal{D}} A(q)$）可由一个中心上的矩阵乘以 A_ju 得到；该矩阵既不依赖于 j，也不依赖于 u。

引理 3.8。设 $q \in \mathcal{D}^m$ 是一个字典序最大元组，Q 是一个满足（3.8）的 $\mathbb{K}$ 上的矩阵，H 是一个满足（3.9）的右 $\mathcal{D}$-线性映射。那么，对于每个 $i \in [m]$ 和 $p \in \mathcal{D}$，存在一个矩阵 $Q_{i,p} \in \mathbb{K}^{(a-\tau)\times a}$，使得

$$Q_{i,p}A_ju = QA_jHA_i(pu) \qquad (j \in [m],\ u \in \ker_{\mathcal{D}} A(q)).$$

证明。固定 $i \in [m]$ 和 $p \in \mathcal{D}$，并令 $B := A_ip \in \mathcal{D}^{a\times b}$。注意，对于所有 $Bu = A_i(pu) \in V$，$u \in \ker_{\mathcal{D}} A(q)$，由（3.2）可知。

回顾（3.6）可知，$V = \mathcal{A}(\ker_{\mathcal{D}} A(q)) = \sum_{k=1}^{c} L_k \ker_{\mathcal{D}} A(q$。我们定义映射 $g\colon V \to \mathcal{D}^{a-\tau}$ 如下：

$$g\left(\sum_{k=1}^{c} L_ku_k\right) := \sum_{k=1}^{c} QL_kHBu_k \qquad (u_1, \ldots, u_c \in \ker_{\mathcal{D}} A(q)).$$

只需证明 g 定义良好、是右 $\mathcal{D}$-线性的，并且保持左乘，且

$$g(A_j(p'u)) = QA_j(p'HBu) \tag{3.11}$$

对所有 $j \in [m]$、$p' \in \mathcal{D}$和 $u \in \ker_{\mathcal{D}} A(q$均成立。事实上，由于 V是双边的，引理 2.7 便给出一个矩阵 $Q_{i,\ p} \in \mathbb{K}^{(a-\tau)\times a}$ 使得 $g(v) = Q_{i,\ p}v$ 对所有 $v \in V$，并且（3.11）结合 $p' = 1$可得

$$Q_{i,p}A_ju = g(A_ju) = QA_jHBu = QA_jHA_i(pu)$$

对于所有的 $j \in [m]$ 和 $u \in \ker_{\mathcal{D}} A(q)$，如要求所述。下面我们将逐一证明这些性质。

我们首先证明 g 是良定义的，也就是说，右侧只取决于向量$\sum_k L_ku_k \in V$，而与表示它的 $u_1, \ldots, u_c \in \ker_{\mathcal{D}} A(q)$的选取无关。假设$\sum_k L_ku_k = \sum_k L_k\tilde{u}_k$ 对于 $u_k, \tilde{u}_k \in \ker_{\mathcal{D}} A(q)$成立。那么 $u_k - \tilde{u}_k \in \ker_{\mathcal{D}} A(q)$ 且 $\sum_k L_k(u_k - \tilde{u}_k) = 0$，右侧两个值之差为 $\sum_k QL_kHB(u_k - \tilde{u}_k)$。因此，良定义性归结为以下问题：若 $\sum_k L_ku_k = 0$ 对于 $u_1, \ldots, u_c \in \ker_{\mathcal{D}} A(q)$成立，则 $\sum_k QL_kHBu_k = 0$。

假设 $\sum_k L_k u_k = 0$ 对于 $u_1, \ldots, u_c \in \ker_{\mathcal{D}} A(q)$。那么向量 $(u_1, \ldots, u_c) \in \mathcal{D}^{cb}$ 属于 $\ker_{\mathcal{D}} P(A(q))$。由引理 3.6，存在 $w_1, \ldots, w_c \in \mathcal{D}^b$ 使得

$$A(q)w_k = Bu_k \quad (k = 1, \ldots, c), \tag{3.12}$$

$$\sum_{k=1}^{c} L_k w_k = 0. \tag{3.13}$$

由于 $Bu_k \in V$，我们有 $A(q)HBu_k = Bu_k$ 由（3.9）可得，这意味着 $0 = Bu_k - A(q)HBu_k = A(q)(w_k - HBu_k)$ 由（3.12）可得。因此，我们得到 $u'_k := w_k - HBu_k \in \ker_{\mathcal{D}} A(q)$。因此，

$$\sum_{k=1}^{c} L_k HBu_k = \sum_{k=1}^{c} L_k w_k - \sum_{k=1}^{c} L_k u'_k = -\sum_{k=1}^{c} L_k u'_k \in \sum_{k=1}^{c} L_k \ker_{\mathcal{D}} A(q) = V$$

成立，其中第二个等式由（3.13）得出。因此，$\sum_k Q L_k HBu_k = 0$ 由（3.8）可得，证毕。

g 的右 $\mathcal{D}$-线性由 H、B、L_k 和 Q 的右线性推出，因为对于所有 u_k，$\tilde{u}_k \in \ker_{\mathcal{D}} A(q)$ 和 $t \in \mathcal{D}$，$u_k + \tilde{u}_k$ 和 $u_k t$ 都属于 $\ker_{\mathcal{D}} A(q)$。

接下来证明（3.11）。令 $j \in [m]$、$p' \in \mathcal{D}$ 和 $u \in$ 属于 $\ker_{\mathcal{D}} A(q)$，并将 $p' = \sum_\alpha \kappa_\alpha e_\alpha$ 写成 $\kappa_\alpha \in \mathbb{K}$。则 $A_j(p'u) = \sum_\alpha (A_j e_\alpha)(u\kappa_\alpha)$，其中 $u\kappa_\alpha \in$ 属于 $\ker_{\mathcal{D}} A(q)$。根据 g 的定义、H 和 B 的右线性，以及 κ_α 的中心性，我们有

$$g(A_j(p'u)) = \sum_\alpha Q A_j e_\alpha HB(u\kappa_\alpha) = \sum_\alpha Q A_j e_\alpha (HBu)\kappa_\alpha = Q A_j (p' HBu).$$

最后，我们证明 g 保持左乘。对于任意 $t \in \mathcal{D}$，由于 A_j 和 Q 的元素均属于中心，式（3.11）推出

$$g(tA_j(p'u)) = g(A_j((tp')u)) = Q A_j((tp')HBu) = t\, Q A_j(p' HBu) = t g(A_j(p'u)).$$

由于 V 由向量 $\mathcal{D}$-向量空间右张成 $A_j(p'u)$，由式（3.2）可知，且 g 是右 $\mathcal{D}$-线性映射，因此对于所有 $g(tv) = tg(v)$，我们有 $t \in \mathcal{D}$ 和 $v \in V$。 □

现在我们可以证明稳定性 $\mathcal{A}(U) = V$ 了。

命题 3.3（2）的证明。设 $q \in \mathcal{D}^m$ 为字典序最大元组。由命题 3.3（1），有 $V \le \mathrm{im}_{\mathcal{D}} A(q)$；设 Q 为一个满足（3.8）的 $\mathbb{K}$ 上的矩阵，并设 H 为一个满足（3.9）的右 $\mathcal{D}$-线性映射。固定 i、$j \in [m]$ 和 $u \in \ker_{\mathcal{D}} A(q)$。由引理 3.7，只需证明对于所有 $p \in \mathcal{D}$，$Q A_j H A_i(pu) = 0$。

若 $\mathrm{im}_{\mathcal{D}} A_j \le V$，那么 $QA_j = 0$ 由（3.8）可知，结论显然成立。

下文中，我们假设 $\mathrm{im}_{\mathcal{D}} A_j \not\le V$。令 $r_i := \mathrm{秩}_{\mathbb{K}} A_i$ 且 $r_j := \mathrm{秩}_{\mathbb{K}} A_j$；二者都至多为 r。由（3.3）可知 $\tau = \mathrm{维数}_{\mathcal{D}} V$。若 $a - \tau = 0$，则 $V = \mathcal{D}^a$，这与假设矛盾；因此 $a - \tau \ge 1$。

任取 $k \in [a - \tau]$，并定义映射 $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{D}$，使得

$$G(p) := (QA_j H A_i(pu))_k = (Q_{i,p} A_j u)_k, \tag{3.14}$$

其中 $(w)_k$ 表示向量 $w \in \mathcal{D}^{a-\tau}$ 的第 k 个元素，最后一个等式由引理 3.8 得出。映射 G 是 $\mathbb{K}$-线性的，因为映射 $p \mapsto pu$ 以及复合中的每个右 $\mathcal{D}$-线性映射 $QA_j H A_i$ 都是如此。

我们的目标是证明 $G = 0$。为此，我们通过使用 G 来界定 A_j（断言 3.9），并通过使用 A_i（断言 3.10）来界定 G 作为双边乘法之和时的项数，如下所示。

断言 3.9。秩$_{\mathbb{K}} G \leq r_j - 1$。

命题 3.9 的证明。令 $V_j \coloneqq$ 张成空间$_{\mathcal{D}}\{A_j(pu') \mid p \in \mathcal{D},\quad u' \in \ker_{\mathcal{D}} A(q)\}$。与 V 的情形一样，子空间 $V_j \leq \mathcal{D}^a$ 是双边的。此外，我们有 $V_j \leq V \cap \operatorname{im}_{\mathcal{D}} A_j \lneq \operatorname{im}_{\mathcal{D}} A_j$，其中最后一个严格包含关系由假设 $\operatorname{im}_{\mathcal{D}} A_j \not\leq V$ 得出。由于根据引理 2.3 (3)，$\dim_{\mathcal{D}} \operatorname{im}_{\mathcal{D}} A_j = r_j$，引理 2.6 蕴含 $V_j = (V_j \cap \mathbb{K}^a) \otimes_{\mathbb{K}} \mathcal{D}$ 以及 $\tau_j \coloneqq \dim_{\mathbb{K}}(V_j \cap \mathbb{K}^a) = \dim_{\mathcal{D}} V_j \leq r_j - 1$。

取一个 $\mathbb{K}$-基 $\eta_1, \ldots, \eta_{\tau_j}$ 属于 $V_j \cap \mathbb{K}^a$；根据引理 $\mathcal{D}$-基于 V_j 也是一个右 2.3 (1) 和引理 2.6。由于 $A_j u \in V_j$，存在 $t_1, \ldots, t_{\tau_j} \in \mathcal{D}$ 使得 $A_j u = \sum_{\ell=1}^{\tau_j} \eta_\ell t_\ell$。对于每个$p \in \mathcal{D}$，根据（3.14），我们有

$$G(p) = (Q_{i,p} A_j u)_k = \sum_{\ell=1}^{\tau_j} (Q_{i,p}\eta_\ell)_k t_\ell.$$

由于 $Q_{i,\ p}$ 和 η_ℓ 的元素属于 $\mathbb{K}$，因此每个系数 $(Q_{i,\ p}\eta_\ell)_{\ k}$ 都属于 $\mathbb{K}$。所以，G的像包含于由 $\mathbb{K}$ 线性张成的 t_1、……、t_{τ_j}中，而该线性张成空间与 p无关。因此，我们得到秩$_{\mathbb{K}} G \leq \tau_j \leq r_j - 1$。 □

断言 3.10。映射 G 可以表示为至多 r_i 个双边乘法之和，即对于所有 $p \in \mathcal{D}$，存在 y_1、……、y_{r_i}、z_1、……、$z_{r_i} \in \mathcal{D}$，均成立 $G(p) = \sum_{\ell=1}^{r_i} y_\ell p z_\ell$。

断言 *3.10*的证明。取一个秩分解 $A_i = \sum_{\ell=1}^{r_i} \xi_\ell \zeta_\ell$，其所在域为 $\mathbb{K}$，其中 $\xi_\ell \in \mathbb{K}^a$ 是一个列向量，而 $\zeta_\ell \in \mathbb{K}^{1\times b}$ 是一个行向量。令 $z_\ell := \zeta_\ell u \in \mathcal{D}$。由于 ζ_ℓ 的元素属于中心，我们有 $\zeta_\ell(pu) = p\zeta_\ell u = pz_\ell$。因此，对于每个 $p \in \mathcal{D}$，我们得到 $A_i(pu) = \sum_{\ell=1}^{r_i} \xi_\ell p z_\ell$。由 $\mathcal{D}$的右 QA_jH -线性以及（3.14），

$$G(p) = (QA_jHA_i(pu))_k = \sum_{\ell=1}^{r_i} (QA_jH\xi_\ell)_k p z_\ell$$

对 $p \in \mathcal{D}$ 成立。令 $y_\ell \coloneqq (QA_jH\xi_\ell)_k \in \mathcal{D}$ 对于 $\ell \in [r_i]$，我们得到所需的表达式$G(p) = \sum_{\ell=1}^{r_i} y_\ell p z_\ell$。 □

现在我们证明 $G = 0$。由（3.1）和断言3.9，可得

$$r_i \operatorname{rank}_{\mathbb{K}} G \leq r_i(r_j - 1) \leq r(r-1) < N.$$

因此，引理2.5 和断言3.10 推出 $G = 0$。 □

3.5 推论

我们首先由定理1.2推出推论1.1。回顾一下，矩阵空间是一个 $\mathbb{F}$-子空间 $\mathbb{F}^{a\times b}$。对于矩阵空间 $\mathcal{M} \leq \mathbb{F}^{a\times b}$ 和正整数 k，其 k阶张量扩张是矩阵空间 $\mathcal{M} \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{F}^{k\times k} \leq \mathbb{F}^{ak\times bk}$ [20, 定义 1。2]（另见 [4, 定义 1。5]），即由矩阵 $B \otimes T$ 张成的子空间 $B \in \mathcal{M}$ 且 $T \in \mathbb{F}^{k\times k}$。线性符号矩阵的 k阶膨胀（其系数张成 $\mathcal{M}$）是 k阶张量扩张中的一般矩阵 $\mathcal{M}$。

膨胀的秩和非交换秩仅取决于由系数张成的矩阵空间。这是一个标准事实 [7, 推论 1 和引理 1]（另见 [4, 引理 1.4]），Oki 和 Soma [23, 第 6.3 节5]在处理隐藏分式线性拟阵奇偶问题时也使用了这一事实。我们针对任意域，用有理函数域上的秩来表述这一事实，并附上证明以求完整。

引理 3.11。 设 $A=\sum_{i=0}^{m} A_i x_i$ 和 $B=\sum_{j=0}^{m'} B_j x_j$ 是域$\mathbb{F}$ 上的线性符号矩阵，满足 A_i, $B_j \in \mathbb{F}^{a\times b}$。若 A_0, A_1、…、 A_m 与 B_0, B_1、…、 $B_{m'}$ 张成相同的矩阵空间，则对于每个 $k\geq 1$， $A^{(k)}$ 和 $B^{(k)}$ 的秩相同，并且 非交换-秩$_{\mathbb{F}}$ A = 非交换-秩$_{\mathbb{F}}$ B。这里，$B^{(k)}=\sum_{j=0}^{m'} B_j\otimes X_j^{(k)}$ 的秩取在由 $\mathbb{F}$ 中 $X_0^{(k)}, X_1^{(k)}$、…、 $X_{m'}^{(k)}$ 的条目所生成的有理函数域上。

证明。设 $\mathbb{F}'$ 是 $\mathbb{F}$的一个无限扩域，并设 $k\geq 1$。由于矩阵的秩在扩域下不变，且域 $\mathbb{F}'$ 上的多项式非零，当且仅当它在某个点不为零，因此 $A^{(k)}$ 的秩等于对所有 $T_0, T_1, \ldots, T_m \in (\mathbb{F}')^{k\times k}$取值时 $\sum_{i=0}^{m} A_i\otimes T_i$ 的最大秩；将此结论应用于 $A^{(k)}$的子式。形如 $\sum_{i=0}^{m} A_i\otimes T_i$ 的矩阵所构成的集合，是由 $A_0, A_1, \ldots, A_m$在 $\mathbb{F}'$ 上张成的矩阵空间的第 k 次张量扩张。因此，它只取决于这个矩阵空间，且 $A^{(k)}$ 与 $B^{(k)}$的秩相同。由定理 2.1 可得 nc-rank$_{\mathbb{F}}$ A = nc-rank$_{\mathbb{F}}$ B。 □

推论 1.2 的证明。令 $B:=\sum_{j=0}^{m'} B_j x_j$ 和 $k\geq r$。将定理 1.1 应用于 B，可知 B 的第 k 次膨胀达到非交换秩 B。由于 $A_0, A_1, \ldots, A_m$ 和 $B_0, B_1, \ldots, B_{m'}$ 张成相同的矩阵空间， $A^{(k)}$ 和 $B^{(k)}$ 的秩相同，并且根据引理 3.11，非交换秩 A = 非交换秩 B。因此， A 的第 k 次膨胀达到非交换秩 A，也就是说，(1.2) 成立。 □

如第 1 节所述，定理 1.1 还可导出 Derksen 和 Makam 界的另一种证明形式，该形式不需要对系数的秩作任何假设。

推论 3.12 (参见 [3, 定理 1.8] 和 [16, 第 2 节。1])。 令 A 为域 $\mathbb{F}$ 上的线性符号矩阵，其形式为 (1.1)。那么，对于每个正整数 $k\geq$ 非交换-秩 $A-1$， A 的第 k次膨胀达到非交换秩，也就是说，

$$\text{nc-rank}\, A=\frac{1}{k}\,\text{rank}_{\mathbb{F}(\mathbf{X}^{(k)})}\, A^{(k)}.$$

特别地，这对每个正整数 $k\geq \min\{a,b\}-1$ 都成立。

证明。对于每个 $i\in[0,m]$ 和 $k\geq 1$，我们有 rank $A_i\leq$(rank$_{\mathbb{F}(\mathbf{X}^{(k)})}$ $A^{(k)}$)$/k\leq$非交换秩 A，其中第一个不等式是通过用 I_k 替换 $X_i^{(k)}$ 并将其他项替换为零矩阵得到的，第二个不等式则由定理 2.1 得出。如果对于某个 i，rank A_i = 非交换秩 A，那么对于每个 $k\geq 1$，第 k 次膨胀都能达到非交换秩。否则，对于所有 i，都有 rank $A_i\leq$ 非交换秩 $A-1$。于是非交换秩 $A\geq 2$，因为否则所有 A_i 都为零，从而非交换秩 $A=0=$rank A_0，这就产生了矛盾。因此，对于每个 $k\geq$ 非交换秩 $A-1$，第 k 次膨胀都能达到非交换秩；这是将定理 1.1 应用于 $r=$ 非交换秩 $A-1$ 得出的。最后一个结论由非交换秩 $A\leq\min\{a,b\}$ 得出。 □

4 应用

在本节中，我们给出定理 1.1 的两个应用。在第 4.1 节中，我们介绍一种用于计算非交换秩的快速随机算法。在第 4.2 节中，我们证明 Hirai [13] 的多面体层级在第 r 层稳定。

4.1 非交换秩的快速随机计算

设 A是域 $\mathbb{F}$ 上的形如（1.1）的线性符号矩阵，满足 A_0、A_1、……、$A_m\in\mathbb{F}^{a\times b}$，且满足推论1.2对正整数 r的假设。那么， r阶膨胀为

算法 1 非交换秩的随机算法

输入： 线性符号矩阵 $A = A_0x_0 + A_1x_1 + \cdots + A_mx_m$，其中有 A_0，A_1，…，$A_m \in \mathbb{F}^{a\times b}$，一个正整数 r，以及一个有限子集 $S \subseteq \mathbb{F}$，其中 $|S| \geq 2r\min\{a,b\}$。**输出：** 一个不超过 $_{\mathbb{F}}A$ 的非交换秩的整数。1: 从 S中独立且均匀随机地选取矩阵 $r\times r$ T_0，T_1，…，T_m的所有元素。2: 构造矩阵 $A(\mathbf{T}) = \sum_{i=0}^{m} A_i \otimes T_i \in \mathbb{F}^{ar\times br}$。3: 计算 $_{\mathbb{F}}A(\mathbf{T})$ 的秩，并输出 $\lceil$(秩$_{\mathbb{F}}A(\mathbf{T}))/r\rceil$。

A 达到非交换秩，即，非交换秩$_{\mathbb{F}}A =$ (秩$_{\mathbb{F}(\mathbf{X}^{(r)})}A^{(r)}$)$/r$。通过将变量替换为来自足够大的有限子集$S \subseteq \mathbb{F}$ 的随机元素，可以以恒定概率达到 $A^{(r)}$ 的秩。由此得到算法 1 中描述的用于计算非交换秩的简单随机算法：它将 $r\times r$ 矩阵 T_0、T_1、…、T_m 中的元素替换为从 S中随机选取的元素，以替换 $A^{(r)}$中的$X_0^{(r)}$、$X_1^{(r)}$、…、$X_m^{(r)}$；计算所得矩阵 $A(\mathbf{T}) := \sum_{i=0}^{m} A_i \otimes T_i \in \mathbb{F}^{ar\times br}$ 在 $\mathbb{F}$ 上的秩，并输出该秩除以 r 后向上取整的结果。

下面的定理说明了算法1的正确性和运行时间。

定理 *4.1.* 设 A 是域 $\mathbb{F}$ 上的线性符号矩阵，该域满足推论 *1.2* 针对正整数 r 的假设，并设 $|\mathbb{F}| \geq 2r\,min\{a,b\}$。则算法 *1* 以至少 $1/2$ 的概率，在 $O(mabr^2 + (nr)^\omega)$ 次算术运算内计算出 *nc*-秩$_{\mathbb{F}}A$，其中 $\mathbb{F}$，$n := max\{a,b\}$，且 $2 \leq \omega \leq 3$ 是矩阵乘法指数。

证明。令 $\rho :=$ nc-秩$_{\mathbb{F}}A$。根据推论 1.2 及 $k = r$，有 rank$_{\mathbb{F}(\mathbf{X}^{(r)})}A^{(r)} = r\rho$。由于 $A(\mathbf{T})$ 是通过代换 $A^{(r)}$ 得到的，因此有 rank$_{\mathbb{F}}A(\mathbf{T}) \leq r\rho$，从而对于 $\mathbf{T}$ 的任意取值，输出至多为 ρ。此外，$A^{(r)}$ 有一个大小为 $r\rho$ 的非零子式 f，它是 $\mathbf{X}^{(r)}$ 中矩阵元素的总次数为 $r\rho$ 的多项式。若 f 在 $\mathbf{T}$ 处不为零，则 rank$_{\mathbb{F}}A(\mathbf{T}) = r\rho$，且输出为 ρ。根据 Schwartz–Zippel 引理 [24, 推论 1]（另见 [28]），在域中，一个总次数为 ℓ 的非零多项式，在其坐标从该域的有限子集 S 中独立且均匀地随机选取的点处取零的概率至多为 $\ell/|S|$。因此，f 在 $\mathbf{T}$ 处取零的概率至多为$r\rho/|S| \leq r\min\{a,b\}/|S| \leq 1/2$。

矩阵 $A(\mathbf{T})$ 通过 $O(mabr^2)$ 次算术运算构造，其秩通过 $O((nr)^\omega)$ 次算术运算计算得出，方法是将其视为一个大小为 nr 的方阵，并在后面补上零行或零列。 □

如果 r 是常数，那么定理 4.1 中的算术运算次数为 $O(mn^2 + n^\omega)$。也就是说，计算非交换秩所需的时间，等于输入规模加上计算一个 $n \times n$ 矩阵在 $\mathbb{F}$ 上的秩所需的时间。

有理数域上的比特复杂度。 对于情形 $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$，算法1 中出现的数的比特长度有一个关于输入规模的多项式上界；关于分数线性拟阵奇偶问题的类似分析见 [23,第 6.3 节。3]。

对于一个在 $\mathbb{Q}$ 上的矩阵 B，令 $\langle B\rangle$ 表示其比特复杂度，即其元素分子和分母的比特长度之和，并令 $\langle A\rangle := \max\{\langle A_i\rangle \mid i \in [0,m]\}$。

命题 4.2。 设 A 如定理 *4.1* 中所述，且 $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$。则算法 *1* 结合 $S = [0, 2r\min\{a,b\} - 1]$ 以至少 $1/2$的概率计算 非交换-秩$_{\mathbb{Q}}A$，并且可以实现为使得计算中出现的每个数都是比特长度为 O（nr（$\langle A\rangle + \log(mnr)$））的整数。

证明。将每个 A_i 乘以其元素的分母之积后，不妨设 A_0、A_1、……、A_m 的元素都是比特长度至多为 $\langle A\rangle$ 的整数。根据定理 4.1，输出以至少 $1/2$ 的概率为非交换秩$_{\mathbb{Q}}$ A。A(T) 的每个元素都是 $m+1$ 个 A_i 中的一个元素与 T_i中的一个元素的乘积之和，因此是比特长度为 $\beta = O(\langle A\rangle + \log(mnr))$ 的整数。我们通过 Edmonds 提出的高斯消元变体来计算 A(T) 的秩，该变体中计算过程中出现的每个数都是 A(T)的一个子式 [6, 第 7], 节中的 [6, 定理 2]。大小为 k 的子式是 $k!$ 个带符号乘积之和，这些乘积由 k 个元素构成，因此是比特长度至多为 $k(\beta + \log k) + 1$ 的整数。由于 $k \le nr$，这就是 $O(nr(\langle A\rangle + \log(mnr)))$。 □

扩展到小有限域。算法 1 要求 $\mathbb{F}$ 至少有 $2r\min\{a,b\}$ 个元素。即使 $\mathbb{F}$ 是一个具有 $|\mathbb{F}| < 2r\min\{a,b\}$的有限域，仍然可以通过随机算法计算非交换秩：我们在 $\mathbb{F}$的一个扩域上应用算法 1。取 $\mathbb{F}$ 的一个扩域 $\mathbb{F}'$，使其具有 $|\mathbb{F}'| \ge 2r\min\{a,b\}$。根据引理 2.3 (3)，将域 $\mathbb{F}'(\mathbf{X}^{(r)})$及其子域 $\mathbb{F}(\mathbf{X}^{(r)})$代入可知，矩阵在 $\mathbb{F}(\mathbf{X}^{(r)})$上的秩若视为在 $\mathbb{F}'(\mathbf{X}^{(r)})$上的矩阵，其秩不变；因此我们也有 $\operatorname{rank}_{\mathbb{F}'(\mathbf{X}^{(r)})} A^{(r)} = r$非交换秩$_{\mathbb{F}}$ A。由于定理 4.1 的证明只使用了这一等式和 Schwartz–Zippel 引理，因此，将 S 从$\mathbb{F}'$ 中取出而不是从 $\mathbb{F}$ 中取出，并在 $\mathbb{F}'$ 上计算 A(T) 的秩的算法 1，以至少 $1/2$的概率输出非交换秩$_{\mathbb{F}}$ A 。

具体而言，我们可以如下构造 $\mathbb{F}'$。令 h 为满足$|\mathbb{F}|^h \ge 2r\min\{a,b\}$的最小正整数。取一个次数为 h的首一不可约多项式 $g \in \mathbb{F}[z]$，并令$\mathbb{F}' := \mathbb{F}[z]/(g)$，$\theta := z$ 模 g。根据 Shoup [25, 定理 5.1], 中的随机算法，可以找到这样的多项式 g；该算法在 $\mathbb{F}$中所需算术运算的期望次数有界于关于 h 和 $\log|\mathbb{F}|$的多项式。由于 $h = O(\log(nr))$且 $|\mathbb{F}| < 2r\min\{a,b\}$，该次数为 $(\log(nr))^{O(1)}$。于是 $\mathbb{F}'$ 是一个含有 $|\mathbb{F}|^h$ 个元素的域，我们取 $S := \mathbb{F}'$。我们用相对于基 $1, \theta, \ldots, \theta^{h-1}$ （在 $\mathbb{F}$ 上）的系数向量表示 $\mathbb{F}'$ 的每个元素。在 $\mathbb{F}'$ 中进行一次加法需要在 $\mathbb{F}$ 中进行 $O(h)$ 次算术运算。一次乘法需要在 $\mathbb{F}$中进行 $O(h^2)$ 次算术运算，具体做法是将表示对应的多项式相乘，再对g取模化简乘积。利用扩展欧几里得算法，对表示该元素的多项式与 g [27, 应用该算法，可求出非零元素的逆矩阵，所需算术运算次数为 $O(h^2)$，运算在 $\mathbb{F}$中进行（推论 4.6]）。从 h 个相互独立且均匀随机选取的 $\mathbb{F}$ 元素中取其系数，即可得到 $\mathbb{F}'$ 中的一个均匀随机元素。因此，除寻找 g之外，算法 1 使用 $h(m+1)r^2$ 个相互独立的 $\mathbb{F}$ 随机元素，并在 $\mathbb{F}$中进行 $O(h^2(mabr^2 + (nr)^\omega))$ 次算术运算。由于 $h = O(\log(nr))$，这相当于 $O((mabr^2 + (nr)^\omega)\log^2(nr))$，其数量级超过了寻找 g所需的期望算术运算次数。

4.2 非交换独立集多面体的层级

Hirai [13] 提出了与线性符号矩阵相关的多面体层级，其极限是子式牛顿多胞体的非交换对应物。

设 A 是域 $\mathbb{F}$ 上形如 (1.1) 的线性符号矩阵，其中 A_0、A_1、……、$A_m \in \mathbb{F}^{a\times b}$。对于满足 $|I| = |J|$的 $I \subseteq [a]$ 和 $J \subseteq [b]$，我们用 $A[I,J] := \sum_{i=0}^m A_i[I,J]x_i$ 表示从 A 中取出行 I 和列 J 所得到的线性符号矩阵，其中 $A_i[I,J]$ 是 A_i 中对应的子矩阵。对于正整数 k，第 k 次膨胀 $A[I,J]^{(k)}$ 是 $A^{(k)}$ 中由索引为 $I\times J$ 的块组成的子矩阵。我们将 $\mathbf{X}^{(k)}$ 中矩阵元素里的单项式的指数向量视为一个向量 $\alpha = (\alpha_{i,j\ell})$，其分量是由 $(i,j,\ell) \in [0,m]\times[k]\times[k]$ 索引的非负整数，其中 $\alpha_{i,j\ell}$ 是 $X_i^{(k)}$ 中第 (j,ℓ) 个元素的指数。令 $\operatorname{proj}_k(\alpha) \in \mathbb{R}^{m+1}$ 为一个坐标由 $[0,m]$ 索引的向量，其坐标定义为

$$\operatorname{proj}_k(\alpha)_i := \frac{1}{k}\sum_{j,\ell\in[k]} \alpha_{i,j\ell} \qquad (i \in [0,m]).$$

对于多项式 $f \in \mathbb{F}[\mathbf{X}^{(k)}]$，我们用 $\operatorname{supp} f$ 表示 f 中系数非零的单项式的指数向量集合，即 $\operatorname{supp} f := \{\alpha \mid f_\alpha \neq 0\}$，其中 $f_\alpha \in \mathbb{F}$ 表示单项式 $\prod_{i\in[0,m]} \prod_{j \text{ 的系数}, \ \ell\in[k]} (X_i^{(k)})_{j\ell}^{\alpha_{i\,j\ell}}$ 位于 f。根据 Hirai [13, (2.7) 和 (3.1)], , 我们定义

$$\mathcal{P}^k(A) := \operatorname{conv} \bigcup_{\substack{I\subseteq[a],\, J\subseteq[b]\\ |I|=|J|}} \operatorname{proj}_k\Big(\operatorname{supp} \det A[I,J]^{(k)}\Big),$$

$$\mathcal{P}^{\leq k}(A) := \operatorname{conv} \bigcup_{k'=1}^{k} \mathcal{P}^{k'}(A), \qquad \mathcal{Q}(A) := \operatorname{conv} \bigcup_{k'\geq 1} \mathcal{P}^{k'}(A),$$

其中，第一个并集包含对 $I = J = \emptyset$ （回顾一下，空矩阵的行列式为 1），而 conv 表示在 $\mathbb{R}^{m+1}$ 中的凸包。多胞体 $\mathcal{Q}(A)$称为 A [14, 第 3.2 节4]的*nc*-独立集多胞体。注意， $\mathcal{P}^k(A)$ 和 $\mathcal{P}^{\leq k}(A)$ 是多胞体，而 $\mathcal{Q}(A)$ 定义为无限并集的凸包； [14, 定理 3.17 (2)] 证明了它是一个整多胞体。多胞体 $\mathcal{P}^1(A)$ 记作 $\mathcal{P}(A)$，称为 A 在 [14, 第 3.2 节4], 中的独立集多胞体，它是将 A 视为交换变量中的矩阵 x_0， x_1，……， x_m时，其所有子式的牛顿多胞体的并集的凸包。

根据定义，这些多胞体构成层级 $\mathcal{P}^1(A) = \mathcal{P}^{\leq 1}(A) \subseteq \mathcal{P}^{\leq 2}(A) \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{Q}(A)$。下面的定理表明，在定理 1.1 的假设下，该层级在第 r 层稳定。

定理 4.3。 设 $\mathbb{F}$、 r和 A 如定理 *1.1*中所述。则对于每个整数 $k \geq r$，我们有

$$\mathcal{P}^k(A) = \mathcal{P}^{\leq k}(A) = \mathcal{Q}(A).$$

特别地，我们有 $\mathcal{Q}(A) = \mathcal{P}^r(A)$。对于 $r = 1$，非交换独立集多面体 $\mathcal{Q}(A)$ 与独立集多胞体 $\mathcal{P}^1(A)$ 重合。

为证明定理 4.3，我们使用 [14] 关于线性符号矩阵的 Dieudonn´e 行列式次数的结果，其中该矩阵的系数是另一个变量 t 的有理函数。对于非零 $f \in \mathbb{F}(t)$，写作 $f = f_1/f_2$，其中多项式为 f_1、 $f_2 \in \mathbb{F}[t]$，令 $\deg f := \deg f_1 - \deg f_2$，并令 $\deg 0 := -\infty$。对于系数属于 $\mathbb{F}(t)$ 的交换变量多项式 f，令 $\deg f$ 表示系数 c 中 f 的 $\deg c$ 的最大值。也就是说，在本小节中，次数始终相对于 t 而取。令 $\mathcal{O}_\infty := \{f \in \mathbb{F}(t) \mid \deg f \leq 0\}$，这是 $\mathbb{F}(t)$ 的子环。对于满足 $\deg f_1 \leq \deg f_2$ 的 $f = f_1/f_2 \in \mathcal{O}_\infty$，令 $f(\infty) \in \mathbb{F}$ 表示 $t^{\deg f_2}$ 在 f_1 和 f_2 中的系数之比。则 $f \mapsto f(\infty)$ 是一个环同态 $\mathcal{O}_\infty \to \mathbb{F}$。对于 $\mathcal{O}_\infty$ 上的矩阵 R，我们用 $R(\infty)$ 表示通过对每个元素 R 应用该同态而得到的同阶 $\mathbb{F}$ 上的矩阵。

令 ℓ 为正整数，并令 $B = \sum_{i=0}^m B_i x_i$ 为定义在 $\mathbb{F}(t)$ 上的线性符号矩阵，其中 B_0、 B_1、……、 $B_m \in \mathbb{F}(t)^{\ell\times\ell}$。我们将 $B \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ 的次数记为 ´行列式 [5]的次数，其中将 B 视为关于 t 的有理函数域、定义在自由斜域 $\mathbb{F}(\langle x_0, x_1, \ldots\ldots, x_m\rangle)$ 上的矩阵；若 B 在该斜域上奇异，则记 $\deg \operatorname{Det} B := -\infty$；定义见 [12, 第 2 节2] 及 [14, 第 2 节2] 。若矩阵对 (Y_1, Y_2) 属于 $\mathrm{GL}_\ell(\mathbb{F}(t))$，则称其对 B 是可行的，即对于所有 $i \in [0, m]$ 都有 $Y_1 B_i Y_2 \in \mathcal{O}_\infty^{\ell\times\ell}$。对于可行对 (Y_1, Y_2)，我们将所得的、定义在 $\mathbb{F}$ 上的线性符号矩阵记为 $(Y_1 B Y_2)(\infty) := \sum_{i=0}^m (Y_1 B_i Y_2)(\infty) x_i$。

命题 4.4 （[14, 定理 2.4、引理 2.5 和命题 2。6]）。 设 B 是定义在 $\mathbb{F}(t)$ 上的线性符号矩阵，其具有上述的 $\ell \times \ell$ 系数。

（1）deg Det B 是所有满足 B的可行对 (Y_1, Y_2) 上的 $-\deg\det Y_1 - \deg\det Y_2$ 的下确界。此外，可行对 (Y_1, Y_2) 达到该下确界，当且仅当 nc-秩$_{\mathbb{F}}(Y_1 B Y_2)(\infty) = \ell$。

(2) 如果可行对 (Y_1, Y_2) 对于 B满足 秩$_{\mathbb{F}(x_0,x_1,\ldots,x_m)}(Y_1 B Y_2)(\infty) = \ell$，则 次数 行列式 B = – 次数 行列式 Y_1 – 次数 行列式 Y_2。(3) 次数 Det B = 最大值$_{k\geq 1}$(次数 行列式 $B^{(k)}$)$/k$。

以下命题是定理 1.1关于 Dieudonn´e 行列式的次数的对应结果：命题 4.4 (3) 中的最大值在每个 $k \geq r$ 上都能取得，只要除一个系数外的所有系数的秩至多为 r。

命题 4.5。设 ℓ 和 r 为正整数，并设 $B = \sum_{i=0}^{m} B_i x_i$ 为定义在 $\mathbb{F}(t)$ 上的线性符号矩阵，其中 B_0、B_1、…、$B_m \in \mathbb{F}(t)^{\ell\times\ell}$ 满足：对于所有 $i \in [m]$，秩$_{\mathbb{F}(t)} B_i \leq r$；矩阵 B_0 任意。于是，对于每个整数 $k \geq r$， B 的第 k 次膨胀都能达到 *Dieudonn´e* 行列式的次数，即

$$\deg \mathrm{Det}\, B = \frac{1}{k} \deg\det B^{(k)}.$$

证明。令 $k \geq r$ 为一个整数。若 deg Det $B = -\infty$，则由命题 4.4 (3) 可得 deg det $B^{(k)} = -\infty$。假设 deg Det $B > -\infty$。由于对于每个可行对， $-\deg\det Y_1 - \deg\det Y_2$ 均为整数，因此命题 4.4 (1) 中的下确界由某个可行对 (Y_1, Y_2) 在 B 处取得。对于 $i \in [0, m]$，令 $C_i := (Y_1 B_i Y_2)(\infty) \in \mathbb{F}^{\ell\times\ell}$，并令 $C := \sum_{i=0}^{m} C_i x_i = (Y_1 B Y_2)(\infty)$。于是由命题 4.4 (1)，非交换秩$_{\mathbb{F}} C = \ell$。

接下来证明对于所有 $i \in [m]$，秩$_{\mathbb{F}} C_i \leq r$。令 $i \in [m]$。由于 Y_1 和 Y_2 均非奇异，因此我们有秩$_{\mathbb{F}(t)} Y_1 B_i Y_2 =$ 秩$_{\mathbb{F}(t)} B_i \leq r$，从而 $Y_1 B_i Y_2$ 的每个阶数大于r 的子式均为零。由于 $f \mapsto f(\infty)$ 是一个环同态， C_i 的每个子式都是将该映射作用于 $Y_1 B_i Y_2$ 中对应子式所得。因此， C_i 的每个阶数大于 r 的子式均为零，且秩$_{\mathbb{F}} C_i \leq r$。

由定理 1.1 应用于 C，我们有 rank$_{\mathbb{F}(\mathbf{X}^{(k)})} C^{(k)} = k\ell$。我们将 $B^{(k)}$ 视为定义在 $\mathbb{F}(t)$ 上的线性符号矩阵，其变量是 $\mathbf{X}^{(k)}$ 中矩阵的元素； $X_i^{(k)}$ 的第 (j, j') 个元素的系数为 $B_i \otimes E_{jj'}$，其中 $E_{jj'}$ 表示第 (j, j') 个元素为 1 、其他元素均为 0 的 $k \times k$ 矩阵。由于 $(Y_1 \otimes I_k)(B_i \otimes E_{jj'})(Y_2 \otimes I_k) = (Y_1 B_i Y_2) \otimes E_{jj'}$，因此数对 $(Y_1 \otimes I_k, Y_2 \otimes I_k)$ 对 $B^{(k)}$是可行的，并且 $((Y_1 \otimes I_k) B^{(k)}(Y_2 \otimes I_k))(\infty) = C^{(k)}$。因此，由命题 4.4 (2) 应用于 $B^{(k)}$，且对 $Y \in \mathrm{GL}_\ell(\mathbb{F}(t))$，$\det(Y \otimes I_k) = (\det Y)^k$，我们得到 deg det $B^{(k)} = -k$ deg det $Y_1 - k$ deg det $Y_2 = k$ deg Det B。 □

现在我们可以证明定理 4.3。

定理 *4.3*的证明。由于 $\mathcal{P}^k(A) \subseteq \mathcal{P}^{\leq k}(A) \subseteq \mathcal{Q}(A)$ 根据定义对每个正整数 k 都成立，因此只需证明 $\mathcal{Q}(A) \subseteq \mathcal{P}^k(A)$ 对每个整数 $k \geq r$都成立。为此，我们比较这些多胞体在整数向量上的支撑函数。

令 $\sigma \in \mathbb{Z}^{m+1}$，其坐标由 $[0, m]$ 索引。对于 $I \subseteq [a]$ 和 $J \subseteq [b]$，其中 $|I| = |J| \geq 1$，令 $B_{I,J} := \sum_{i=0}^{m} t^{\sigma_i} A_i[I, J] x_i$，这是一个定义在 $\mathbb{F}(t)$ 上的线性符号矩阵。对于每个正整数 k，多项式 det $B_{I,J}^{(k)}$ 可由 det $A[I, J]^{(k)}$ 通过对每个 $i \in [0, m]$ 将 $t^{\sigma_i} X_i^{(k)}$ 代入 $X_i^{(k)}$ 得到；经过这一替换，指数向量为 α 的单项式将乘以 $t^{k\sigma^\top \mathrm{proj}_k(\alpha)}$。因此，正如 [14, (3.14)], 中所观察到的

$$\frac{1}{k} \deg\det B_{I,J}^{(k)} = \max\left\{ \sigma^\top \mathrm{proj}_k(\alpha) \;\middle|\; \alpha \in \mathrm{supp}\det A[I, J]^{(k)} \right\},$$

其中空集的最大值为 $-\infty$。对于 $I = J = \emptyset$，我们令 $\deg\det B^{(k)}_{\emptyset,\emptyset} := 0$，以及 $\deg \mathrm{Det} B_{\emptyset,\emptyset} := 0$；则上述等式同样成立。因此，根据 $\mathcal{P}^k(A)$ 和 $\mathcal{Q}(A)$ 的定义，并由命题 4.4(3)，我们有

$$\max_{v\in\mathcal{P}^k(A)} \sigma^\top v = \max_{I,J} \frac{1}{k} \deg\det B^{(k)}_{I,J}, \qquad \max_{v\in\mathcal{Q}(A)} \sigma^\top v = \max_{I,J} \deg \mathrm{Det}\, B_{I,J} \tag{4.1}$$

对于每个正整数 k，其中最大值取自定义 $\mathcal{P}^k(A)$ 时所用的相同数对 (I, J)；关于后者，另见 [14, 定理 3.17 (1)]。

现在令 $k \geq r$ 为一个整数。对于满足 $|I| = |J| \geq 1$ 的每一对 (I, J) 以及每个 $i \in [m]$，系数 $t^{\sigma_i} A_i[I, J]$ of $B_{I,J}$ 在 $\mathbb{F}(t)$ 上的秩至多为 $\mathrm{rank}_{\mathbb{F}} A_i \leq r$。因此，$\deg\det B^{(k)}_I$, $\deg \mathrm{Det}$ 根据命题 4.5；这对 $I = J = \emptyset$ 也成立。因此，由 (4.1)，我们有 $\max_{v\in\mathcal{Q}(A)} \sigma^\top v = \max_{v\in\mathcal{P}^k(A)} \sigma^\top v$，对每个 $\sigma \in \mathbb{Z}^{m+1}$ 均成立。由于 $\mathcal{Q}(A)$ 和 $\mathcal{P}^k(A)$ 是多胞体，根据 [13, 引理 2.2]，这意味着 $\mathcal{Q}(A) \subseteq \mathcal{P}^k(A)$。 □

致谢

本研究获得了 JSPS KAKENHI 资助项目编号 JP22K17854、JP24K21315 和 JP24K02901（日本）的支持。

关于使用生成式人工智能工具的声明

作者使用 ChatGPT-6.1 Sol 和 Claude Fable 5.2 进行讨论、起草和校对。作者已仔细审阅并核实整篇稿件，并对其全部内容承担责任。

参考文献

[1] S. A. Amitsur. 有理恒等式及其在代数与几何中的应用。*Journal ofAlgebra*，3(3):304–359，1966年。[2] P. M. Cohn. 斜域：一般除环理论，*Encyclopedia ofMathematics and its Applications*第57卷。剑桥大学出版社，剑桥，1995年。[3] H. Derksen and V. Makam. 矩阵半不变量的多项式次数界。*Advancesin Mathematics*，310:44–63，2017年。[4] H. Derksen and V. Makam. 关于非交换秩与张量秩。*Linear and Multi-linear Algebra*，66(6):1069–1084，2018年。[5]J. Dieudonn´e. 非交换域上的行列式。*Bulletin de la Soci´et´eMath´ematique de France*，71:27–45，1943年。[6] J. Edmonds. 不同代表系与线性代数。*Journal of Research ofthe National Bureau of Standards*，71B(4):241–245，1967年。[7] M. Fortin and C. Reutenauer. 线性矩阵的交换秩/非交换秩与低秩矩阵子空间。*S´eminaire Lotharingien de Combinatoire*，52:B52f，2004年。[8] A. Garg, L. Gurvits, R. Oliveira, and A. Wigderson. 算子缩放：理论与应用。*Foundations of Computational Mathematics*，20:223–290，2020年。

[9] P. Gille and T. Szamuely. 中心单代数与伽罗瓦上同调。剑桥大学出版社，剑桥，2006年。[10] L. Gurvits. 经典复杂性与量子纠缠。计算机与系统科学杂志，69(3):448–484，2004年。[11] M. Hamada and H. Hirai. 在CAT(0)空间上通过离散凸优化计算非交换秩。SIAM应用代数与几何杂志，5(3):455–478，2021年。[12] H. Hirai. 在欧氏建筑上通过离散凸优化计算行列式的次数。SIAM应用代数与几何杂志，3(3):523–557，2019年。[13] H. Hirai. 关于与Edmonds问题相关的整多胞体。arXiv:2609.19703v1，2026年。[14] H. Hirai, Y. Iwamasa, T. Oki, and T. Soma. 关于非交换符号矩阵行列式次数的代数组合优化。数学规划，213:941–984，2025年。[15] P. Hrubeˇs and A. Wigderson. 带除法的非交换算术电路。计算理论，11(14):357–393，2015年。[16]A. Huszar. 箭图表示的非交换秩与半稳定性。arXiv:2111.00039v1，2021年。[17] G. Ivanyos, M. Karpinski, Y. Qiao, and M. Santha. 广义Wong序列及其在Edmonds问题中的应用。计算机与系统科学杂志，81(7):1373–1386，2015年。[18] G. Ivanyos, M. Karpinski, and N. Saxena. 矩阵补全问题的确定性多项式时间算法。SIAM Journal on Computing，39(8):3736–3751，2010年。[19] G. Ivanyos, Y. Qiao, and K. V. Subrahmanyam. 非交换Edmonds问题与矩阵半不变量。计算复杂性，26:717–763，2017年。[20] G. Ivanyos, Y. Qiao, and K. V. Subrahmanyam. 构造性非交换秩计算属于确定性多项式时间。计算复杂性，27:561–593，2018年。[21] V. Kabanets and R. Impagliazzo. 多项式恒等式测试去随机化意味着证明电路下界。计算复杂性，13:1–46，2004年。[22] L. Lov´asz. 矩阵的奇异空间及其在组合学中的应用。Boletim da Sociedade Brasileira de Matem´atica，20:87–99，1989年。[23] T. Oki and T. Soma. 通过非交换秩实现分数线性拟阵配对的代数算法。SIAM Journal on Computing，54(1):134–162，2025年。[24] J. T. Schwartz. 用于多项式恒等式验证的快速概率算法。Journal of the ACM，27(4):701–717，1980年。[25] V. Shoup. 有限域上不可约多项式的快速构造。Journal of Symbolic Computation，17(5):371–391，1994年。[26] Stacks Project作者。Stacks项目。https://stacks.math.columbia.edu，2026年。

[27] J. von zur Gathen 和 J.Gerhard。《现代计算机代数》。剑桥大学出版社，剑桥，第三版，2013年。

[28] R. Zippel。稀疏多项式的概率算法。载于 E. W. Ng 编，《符号与代数计算》，《计算机科学讲义》第72卷，第216–226页，柏林、海德堡，1979年。施普林格。