arXiv:2611.31965v1 [physics.flu-dyn] 24 Nov 2026

均匀磁场下磁性微气泡的有限振幅形状振荡

Arun Krishna B. J. 和 Ganesh Tamadapu†
印度理工学院马德拉斯分校应用力学与生物医学工程系，金奈，600036，印度。

（收稿日期：xx；修回日期：xx；接受日期：xx）

本研究提出了一个理论模型，用于描述含有磁性颗粒并置于均匀磁场中的脂质包覆气泡的非球形振荡。由于外加磁场是均匀的，其梯度为零，因此现有的弱磁性膜理论不再适用。为克服这一局限，本文建立了一种同时考虑气泡壳薄壁特性和弱磁性的新公式。利用该公式，计算了球形气泡的感应磁场，并将其纳入拉格朗日框架，以描述非球形振荡。随后推导出径向模态和形状模态的控制方程。分析表明，随着外加磁场的增强，形状模态的固有频率和指数稳定性均有所提高。随着外加磁场增强，形状模态的频率响应向更高频率移动，这与其固有频率的升高一致。此外，有限振幅振荡呈现出倍周期序列，并随着磁场强度增加逐渐过渡到混沌行为。

关键词：

---

1. 引言

近年来，靶向递送策略在提高多种药物制剂疗效的同时，最大限度地减少不良副作用方面展现出显著潜力。因此，这些策略正逐渐成为具有更佳安全性的新一代疗法的关键组成部分。磁性微气泡（MMBs）是由磁性纳米颗粒（NPs）包覆的微泡（MBs）。除保留传统微泡的声学特性外，磁性微气泡还可作为磁共振成像（MRI）的有效造影剂 Stride 等 （2009）；Sciallero 等 （2016）；Chertok& Langer（2018）。这种双模态能力使磁性微气泡在广泛的生物医学应用中极具吸引力，包括靶向性和局部药物/基因递送。在包覆层中加入磁性纳米颗粒还具有三个关键的附加特性，使其

其具有吸引人的生物医学应用潜力：可在磁共振成像下显影Sun等(2008），可借助磁场梯度定位于靶位点Pankhurst等(2003），并且在交变磁场作用下产生局部热量，用于热疗和/或促进药物递送Durán 等(2008）；Thiesen 和 Jordan (2008）。此外，Duan 等 (2015) 报道称，提高.....

† 通讯邮箱：gt@iitm.ac.in

附着于微泡上的磁性纳米颗粒浓度增加，可提高其在磁共振成像中的显影效果，同时延长超声信号的持续时间。Owen 等(2015) 将磁性气泡视为刚性粒子，研究了它们在泊肃叶流中的动力学，并考察了使其保持在血管壁附近所需的磁场条件。然而，开发能够同时满足诊断和治疗目标的磁性微气泡仍是一项重大挑战。尤其是，目前对于将磁性纳米颗粒掺入微泡壳后如何改变其在超声辅助成像和药物递送中的力学响应与动力学行为，仍缺乏充分认识。

解决这些困难对于开发高效的磁性微泡至关重要。对包封磁性微泡振荡行为进行建模面临着重大的理论挑战，因为磁单极子的缺失导致其固有地表现为轴对称振荡。因此，非球形模态直接源于施加的磁场，而不是作为球形模态的参数不稳定性产生。气泡的非球形动力学已通过理论和实验研究得到广泛探讨，相关研究包括 Hao &Prosperetti (1999);Guédra 等 (2016);Guédra &Inserra (2018); Shaw (2006、2009、2017)。 Shaw (2006) 的数值研究以及 Guédra等 (2016) 的实验观测表明，非线性模态耦合在抑制不稳定性方面发挥着关键作用。

针对包覆气泡非球形振荡的研究仍相对有限。 Tsiglifis & Pelekasis (2011) 研究了包覆气泡的参数稳定性和动态屈曲行为，而 Liu 等 (2012) 考察了其表面不稳定性，并分析了膜表面性质对气泡壳固有频率的影响。他们的结果进一步表明，包覆气泡的参数共振特性与自由气泡相似，膜的影响对稳定性的作用很小。然而，这些模型受限于其对线性形状模态振荡的假设。为克服这一局限，Dash& Tamadapu (2024) 将非线性模态耦合和界面能效应纳入模型，证明非线性和界面效应在抑制包覆气泡的不稳定性方面同样发挥着关键作用。

关于磁性微气泡建模的研究寥寥无几。 Zhao 等人 （2022）研究了在外加磁场中发生径向振荡的包覆气泡，而 Du 等人 （2024）在径向运动之外，进一步考虑了沿 x 和 y 方向的平移动力学。近期，BJ & Tamadapu （2026）基于 Barham 等人 （2007、2012）提出的理论，建立了置于载流线圈和磁偶极子下方的气泡非球形振荡方程，其中仅考虑外加磁场产生的驱动力。尽管 BJ& Tamadapu（2026）的模型成功描述了非均匀磁场中的振荡，但无法捕捉均匀磁场下的动力学，因为磁场梯度消失后，磁力驱动效应也随之消失。

磁共振成像系统中的磁场均匀性对于实现良好的成像性能和高图像质量至关重要 Moser 等 (2009)。因此，研究均匀磁场下的气泡振荡也十分重要。然而，在均匀磁场下，外加磁场的梯度为零，因此必须评估膜内的感应磁场及其相关梯度，才能确定磁力驱动。本文借鉴Gu等人(2011)； Gu 和 He (2011）提出的方法，推导出一种用于计算感应磁场的简化公式。随后利用这些表达式计算磁场分布及由此产生的磁力。将该磁场产生的能量加入膜能量中，并将其引入Shaw (2006)给出的拉格朗日能量密度表达式中。由此得到控制方程

径向模态和形状模态的控制方程，其中仅考虑径向形状模态。分析中仅考虑形状模态之间的二次相互作用。利用这些方程，分析磁场对气泡振荡的影响。

本文组织如下。第2 节给出了问题的数学表述，包括用于计算感应磁场的修正理论、气泡表面的运动学描述，以及模态方程的拉格朗日表述。第3节讨论静态磁场对固有频率、稳定性图、频率响应和有限振幅时序振荡的影响。最后，第4 节给出了总结和结论。

2. 数学表述

2.1. 薄磁性界面中感应磁场的理论

我们研究置于均匀磁场和声压下流体中的充气磁性微气泡。通常，对于有限变形的三维物体，解析计算感应磁场极具挑战性。因此，本节建立了一种用于评估薄膜中感应磁场的简化理论。随后，将该理论应用于薄微气泡包覆层，以计算变形气泡中的感应磁场。

2.1.1. 不可变形界面

感应磁场的计算理论首先针对刚性薄膜进行推导，随后推广至可变形界面。磁场的三维麦克斯韦方程组为：

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{b}=\mathbf{0}, \tag{2.1a}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{h}=\mathbf{0}, \tag{2.1b}$$

其中， $\boldsymbol{b}$ 为磁通量，其法向分量在穿过某一表面时保持连续； $\boldsymbol{h}$ 为磁场，其切向分量在穿过某一表面时保持连续。由于膜的厚度（T）与其其他尺寸相比极小，因此如图 1 所示，将三相构型替换为等效的两相构型。为了确保这种替换在物理上保持一致，按照 Gu 等（2011）和 Gu 和 He（2011）所采用的方法，两种构型中跨越界面 Γ_1 和 Γ_2 的势及其梯度的跳跃必须在 $\mathcal{O}(T^2)$ 阶项以内保持一致。设 ϕ^0、ϕ^1 和 ϕ^2 分别为图 1 所示膜（Ω_0）、气体（Ω_1）和流体（Ω_2）区域中的势。沿法向展开膜内的势，中间表面（Γ_0）处的势为：

$$\begin{aligned}\phi^0|_{\Gamma_0}&=\phi^0|_{\Gamma_1}+\frac{T}{2}\left(\nabla_n\phi^0\right)|_{\Gamma_1}+\mathcal{O}(T^2),\\ \phi^0|_{\Gamma_0}&=\phi^0|_{\Gamma_2}-\frac{T}{2}\left(\nabla_n\phi^0\right)|_{\Gamma_2}+\mathcal{O}(T^2).\end{aligned} \tag{2.2}$$

利用界面 Γ_1 和 Γ_2处势 $(\phi^i|_{\Gamma_i}=\phi^0|_{\Gamma_i})$ 的连续性，膜厚度方向上的电势跃变可表示为

$$\phi^2|_{\Gamma_2}-\phi^1|_{\Gamma_1}=\frac{T}{2}\left(\left(\nabla_n\phi^0\right)|_{\Gamma_2}+\left(\nabla_n\phi^0\right)|_{\Gamma_1}\right)+\mathcal{O}(T^2). \tag{2.3}$$

其中 $\nabla_n=\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{\nabla}$ 为梯度算子， $\boldsymbol{n}$ 为中间表面处的法线。将三相构型替换为两相构型（Ω^-）- 界面相

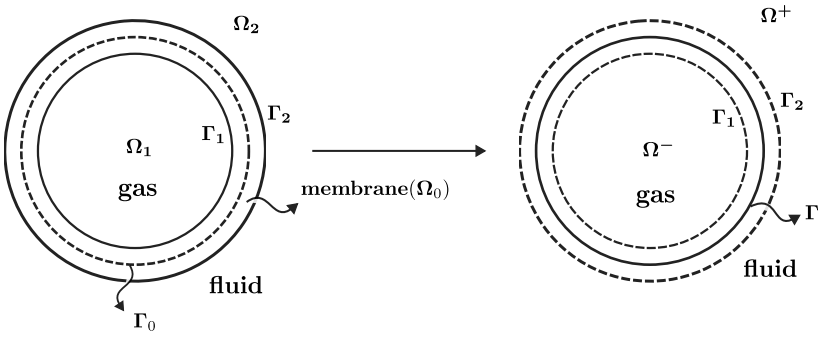

图 1：三相构型（左）：气体（Ω_1）- 膜（Ω_0）- 流体（Ω_2）被替换为等效两相构型（右）：气体（Ω^-）- 界面（Γ）- 流体（Ω^+）。

(Γ)- 流体 (Ω^+) (见图 1右侧）， Γ_2 和 Γ_1 之间的电势差为：

$$\phi^+|_{\Gamma_2} = \phi^+|_\Gamma + \frac{T}{2}\left(\nabla_n\phi^+\right)|_\Gamma + \mathcal{O}(T^2) \tag{2.4a}$$

$$\phi^+|_{\Gamma_1} = \phi^-|_\Gamma - \frac{T}{2}\left(\nabla_n\phi^-\right)|_\Gamma + \mathcal{O}(T^2) \tag{2.4b}$$

$$\phi^+|_{\Gamma_2} - \phi^-|_{\Gamma_1} = \phi^+|_\Gamma - \phi^-|_\Gamma + \frac{T}{2}\left(\left(\nabla_n\phi^+\right)|_\Gamma + \left(\nabla_n\phi^-\right)|_\Gamma\right) + \mathcal{O}(T^2). \tag{2.4c}$$

其中， ϕ^+ 和 ϕ^- 分别是替换后的气体区域 Ω^- 和替换后的流体区域 Ω^+中的势，如图 1所示。类似地，两相构型中界面 Γ_1和 Γ_2 处的磁通量法向分量为，

$$\begin{aligned} B_n^2|_{\Gamma_2} &= B_n^+|_\Gamma + \mathcal{O}(T), \\ B_n^1|_{\Gamma_1} &= B_n^-|_\Gamma + \mathcal{O}(T). \end{aligned} \tag{2.5}$$

势沿法向的梯度可用法向磁通量（B_n）、膜磁导率 μ_m 和真空磁导率 μ_0 表示为，

$$\begin{aligned} \left(\nabla_n\phi^+\right)|_\Gamma &= -\frac{B_n^+|_\Gamma}{\mu_0}, \\ \left(\nabla_n\phi^-\right)|_\Gamma &= -\frac{B_n^-|_\Gamma}{\mu_0}, \\ \left(\nabla_n\phi^0\right)|_{\Gamma_2} &= -\frac{B_n^2|_{\Gamma_2}}{\mu_m} = -\frac{B_n^+|_\Gamma}{\mu_m} + \mathcal{O}(T), \\ \left(\nabla_n\phi^0\right)|_{\Gamma_1} &= -\frac{B_n^1|_{\Gamma_1}}{\mu_m} = -\frac{B_n^-|_\Gamma}{\mu_m} + \mathcal{O}(T). \end{aligned} \tag{2.6}$$

将这些代入（2.4c），可得两相构型中界面两侧的电势跃变为，

$$[\phi] = \phi^+ - \phi^- = \frac{T}{2}\left(\frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu_m}\right)\left(B_n^+|_\Gamma + B_n^-|_\Gamma\right) + \mathcal{O}(T^2). \tag{2.7}$$

对两相构型中磁场法向分量 B_n 进行相同处理，界面两侧的磁通量跃变 Γ_1 和 Γ_2 可表示为，

$$B_n^2|_{\Gamma_2} - B_n^1|_{\Gamma_1} = \left[B_n\right] + \frac{T}{2}\left(\nabla_n B_n^+|_\Gamma + \nabla_n B_n^-|_\Gamma\right) + \mathcal{O}(T^2). \tag{2.8}$$

磁通量法向分量沿法向的梯度可表示为,

$$\begin{aligned}\nabla_n B_n &= \boldsymbol{\nabla} B_n \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{n} = -\boldsymbol{\nabla}_s \cdot \boldsymbol{B} \\ &= \mu \boldsymbol{\nabla}_s \cdot \boldsymbol{\nabla}_s \phi - \boldsymbol{\nabla}_s \cdot (B_n \boldsymbol{n}).\end{aligned} \tag{2.9}$$

其中， $\boldsymbol{\nabla}_s = \boldsymbol{\nabla} - (\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}$ 为曲面微分算子。上述方程具有一般形式，可用于任意界面。在三相构型中，跨越 Γ_1 和 Γ_2 的磁通量跃变为,

$$\begin{aligned}B_n^2|_{\Gamma_2} - B_n^1|_{\Gamma_1} &= \frac{T}{2}\left(\nabla_n B_n^2 + \nabla_n B_n^1\right) \\ &= \frac{T}{2}(\mu_m \boldsymbol{\nabla}_s \cdot \boldsymbol{\nabla}_s(\phi^+|_\Gamma + \phi^-|_\Gamma) - \boldsymbol{\nabla}_s \cdot ((B_n^+|_\Gamma + B_n^-|_\Gamma)\boldsymbol{n}) + \mathcal{O}(T^2),\end{aligned} \tag{2.10}$$

将（2.5）、（2.9）和（2.10）代入方程（2.8），两相构型中磁通量法向分量的跃变为,

$$[B_n] = B_n^+|_\Gamma - B_n^-|_\Gamma = \frac{T}{2}\left(\mu_m - \mu_0\right)\left(\boldsymbol{\nabla}_s \cdot (\boldsymbol{\nabla}_s(\phi^+|_\Gamma + \phi^-|_\Gamma)\right) + \mathcal{O}(T^2) \tag{2.11}$$

2.1.2. 可变形界面

设 $\boldsymbol{X}$ 为参考构型（未变形气泡）中某点的位置，该点映射至当前构型（变形气泡）中的位置 $\boldsymbol{x}$ 。变形梯度$\mathbf{F}$ 表示为

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{X}}. \tag{2.12}$$

当前构型与参考构型中的面积向量（$\mathrm{d}\boldsymbol{a}$,$\mathrm{d}\boldsymbol{A}$）和长度向量（$\mathrm{d}\boldsymbol{l}, \mathrm{d}\boldsymbol{L}$）之间的关系为,

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{a} &= J\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} \\ \mathrm{d}\boldsymbol{l} &= \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}.\end{aligned} \tag{2.13}$$

其中 $J = \det(\mathbf{F})$。对当前体积 $\mathrm{d}v$上的控制方程（2.1a）以及当前面积$\mathrm{d}\boldsymbol{a}$上的（2.1b），进行积分,

$$\begin{aligned}\int_v \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{b}\,\mathrm{d}v = \int_a \boldsymbol{b} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} = \int_A J\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{b} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} = \int_V \boldsymbol{\nabla}_r \cdot \boldsymbol{B}\,\mathrm{d}V = 0, \\ \int_a \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{h} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} = \int_l \boldsymbol{h} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_L \mathbf{F}^T\boldsymbol{h} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = \int_A \boldsymbol{\nabla}_r \times \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} = 0,\end{aligned} \tag{2.14}$$

其中， $\boldsymbol{\nabla}_r$ 是参考构型中的梯度算子。这给出了磁场 $\boldsymbol{h}$ 和磁通量 $\boldsymbol{b}$的拉回形式:

$$\boldsymbol{B} = J\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{b}, \tag{2.15a}$$

$$\boldsymbol{H} = \mathbf{F}^T\boldsymbol{h}, \tag{2.15b}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu\, J\mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{H}, \tag{2.15c}$$

其中，$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{F}$ 是右柯西-格林变形张量。在我们的研究中，仅考虑不可压缩膜，其厚度仅在参考构型中保持恒定，在该构型中可产生电势跃变和磁通量

as,

$$
\begin{aligned}
[\phi] &= \phi^+|_\Gamma - \phi^-|_\Gamma = \frac{T}{2}\left(1 - \frac{\mu_0}{\mu_m}\right)\left(H_n^+|_\Gamma + H_n^-|_\Gamma\right) + \mathcal{O}(T^2), \\
[B_n] &= B_n^+|_\Gamma - B_n^-|_\Gamma = \frac{T}{2}\left(\mu_m - \mu_0\right)\left(\boldsymbol{\nabla}_s \cdot \mathbf{C}_s^{-1}(\boldsymbol{\nabla}_s(\phi^+|_\Gamma + \phi^-|_\Gamma)\right) + \mathcal{O}(T^2).
\end{aligned}
\tag{2.16}
$$

ˆ ˆ 这里，$\mathbf{C}_s = \mathbf{I}\mathbf{C}$，其中$\mathbf{I} = \mathbf{I} - \boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{n}$ 是表面投影算子。

2.2. 气泡变形运动学

气泡在其参考构型中被视为球形，因此，本文分析采用球坐标系。在气泡的未变形构形中，r, θ, ϕ分别表示径向坐标、子午坐标和环向坐标。相应的单位切向量三元组表示为（$\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_\phi$）。 变形气泡表面的位置通过球体的模态形状描述为

$$
\rho(\theta, t) = R(t) + \sum_{n=2}^{\infty} a_n(t) P_n(\cos\theta), \tag{2.17}
$$

其中， P_n 为勒让德多项式， $R(t)$为变形半径， $a_n(t)$为径向模态形状的振幅。包覆层的变形中面和未变形中面为

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x} &= \rho(\theta, t)\, \boldsymbol{e}_r, \\
\boldsymbol{X} &= R_0\, \boldsymbol{e}_r.
\end{aligned}
\tag{2.18}
$$

由此可计算变形梯度（$\mathbf{F}$）和右柯西伸长张量（$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{F}$）

$$
\begin{aligned}
\mathbf{F} &= \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{X}} = \boldsymbol{g}_\alpha \otimes \boldsymbol{G}^\alpha + \lambda_3(\boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{N}), \\
\mathbf{C} &= g_{\alpha\beta}(\boldsymbol{G}^\alpha \otimes \boldsymbol{G}^\beta) + \lambda_3^2(\boldsymbol{N} \otimes \boldsymbol{N}),
\end{aligned}
\tag{2.19}
$$

这里，希腊指标（α, β）取值为 1 和 2，分别对应子午坐标（θ）和环向坐标（ϕ）。 $\boldsymbol{g}_\alpha$ ($\boldsymbol{G}^\alpha$)表示变形（未变形）膜中面中的协变（逆变）切向量，其中 $g_{\alpha\beta} = \boldsymbol{g}_\alpha \cdot \boldsymbol{g}_\beta$； λ_3 是膜的变形厚度与未变形厚度之比； $\boldsymbol{N}$ 和 $\boldsymbol{n}$ 分别为未变形中面和变形中面的法向量。协变切向量 $\boldsymbol{g}_1$ 和 $\boldsymbol{g}_2$ 表示为

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{g}_1 &= \boldsymbol{x}_{,\theta} = \rho_{,\theta}\, \boldsymbol{e}_r + \rho\, \boldsymbol{e}_\theta, \\
\boldsymbol{g}_2 &= \boldsymbol{x}_{,\phi} = \rho\, \sin\theta\, \boldsymbol{e}_\phi,
\end{aligned}
\tag{2.20}
$$

并且， $\boldsymbol{G}^1$ 和 $\boldsymbol{G}^2$ 分别为

$$
\boldsymbol{G}^1 = \frac{\boldsymbol{e}_\theta}{R_0}, \boldsymbol{G}^2 = \frac{\boldsymbol{e}_\phi}{R_0 \sin\theta}. \tag{2.21}
$$

由此得到的右柯西-格林变形张量$\mathbf{C}$ 张量为，

$$
\begin{aligned}
\mathbf{C} &= \frac{\rho^2 + \rho_{,\theta}^2}{R_0^2}(\boldsymbol{e}_\theta \otimes \boldsymbol{e}_\theta) + \frac{\rho^2}{R_0^2}(\boldsymbol{e}_\phi \otimes \boldsymbol{e}_\phi) + \lambda_3^2(\boldsymbol{e}_r \otimes \boldsymbol{e}_r), \\
&= \lambda_1^2(\boldsymbol{e}_\theta \otimes \boldsymbol{e}_\theta) + \lambda_2^2(\boldsymbol{e}_\phi \otimes \boldsymbol{e}_\phi) + \lambda_3^2(\boldsymbol{e}_r \otimes \boldsymbol{e}_r).
\end{aligned}
\tag{2.22}
$$

通过比较基张量的系数并利用不可压缩约束 $\det \mathbf{C} = 1$，得到主伸长（$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$），即

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{\rho^2 + \rho_{,\theta}^2}}{R_0}, \quad \lambda_2 = \frac{\rho}{R_0} \quad \text{and} \quad \lambda_3 = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2}. \tag{2.23}$$

代入 ρ 由（2.17）可得忽略二次项后的主伸长表达式：

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{R(t)}{R_0} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n(t)}{R_0} P_n(\cos\theta) + \mathcal{O}(a_n(t)^2), \\ \lambda_2 &= \frac{R(t)}{R_0} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n(t)}{R_0} P_n(\cos\theta) + \mathcal{O}(a_n(t)^2). \end{aligned} \tag{2.24}$$

2.3. 膜中感生的磁场

为方便起见，在以下讨论中省略 $P_n(\cos\theta)$中的 $\cos\ \theta$ 项。将未变形气泡的外部和内部区域分别视为 $+$ 和 $-$，界面（Γ）处相应的磁势为

$$\begin{aligned} \phi^+|_\Gamma &= -\frac{\delta A_0}{R_0} - \left(\frac{\delta A_1}{R_0^2} + H_0 R_0\right) P_1 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\delta A_n P_n}{R_0^{n+1}}, \\ \phi^-|_\Gamma &= -\delta B_0 - (\delta B_1 R_0 + H_0 R_0)\, P_1 - \sum_{n=2}^{\infty} \delta B_n R_0^n P_n. \end{aligned} \tag{2.25}$$

此外，磁场在法向上的相应分量 is

$$\begin{aligned} H_n^+|_\Gamma &= -\frac{\delta A_0}{R_0^2} + \left(H_0 - \frac{2\delta A_1}{R_0^3}\right) P_1 - \sum_{n=2}^{\infty} (n+1) \frac{\delta A_n P_n}{R_0^{n+2}}, \\ H_n^-|_\Gamma &= (\delta B_1 + H_0)\, P_1 + \sum_{n=2}^{\infty} k \delta B_n R_0^{n-1} P_n. \end{aligned} \tag{2.26}$$

此处引入记账参数 δ，它不影响最终结果，用于表征弱磁界面；该界面的存在只会对外加磁场产生轻微扰动。因此，形状模态振幅按如下方式重新缩放：$a_k = \delta \bar{a}_k$。利用（2.15c），即可计算相应的磁通量。

$$B_n = \mu \lambda_1^2 \lambda_2^2 H_n = \mu \left(\frac{R^4}{R_0^4} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{4R^3}{R_0^3} \delta \bar{a}_n P_n\right) H_n. \tag{2.27}$$

由此可得，势和磁通量的跃变为：

$$\begin{aligned} [\phi] &= \delta \left(B_0 - \frac{A_0}{R_0}\right) + \delta \left(B_1 R_0 - \frac{A_1}{R_0^2}\right) P_1 + \delta \sum_{n=2}^{\infty} \left(B_n R_0^n - \frac{A_n}{R_0^{n+1}}\right) P_n, \\ [B_n] &= \mu_0 \frac{R^4}{R_0^4} \left[-\delta \left(\frac{A_0}{R_0^2}\right) - \delta \left(B_1 + \frac{2A_1}{R_0^3}\right) - \delta \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{(n+1)A_n}{R_0^{n+2}} + n B_n R_0^{n-1}\right)\right]. \end{aligned} \tag{2.28}$$

上述方程截断为 $\mathcal{O}(\delta)$。将其代入（2.16）后，考虑 $\mathcal{O}(\delta^2)$ 、 $T \sim \mathcal{O}(\delta^2)$ 和 $H_0 \sim \mathcal{O}(1/\delta)$，可将右侧各项截断为

可将其简化为：

$$
\begin{aligned}
[\phi] &= \frac{T}{2}\left(\frac{1}{\mu_0}-\frac{1}{\mu_m}\right)(2\mu_0 H_0 P_1),\\
[B_n] &= -4\frac{T}{2}\left(\mu_m-\mu_0\right)\frac{H_0 R_0 P_1}{R^2}.
\end{aligned}
\tag{2.29}
$$

在上述方程右侧，仅存在 P_1 项，这使得除 A_1 和 B_1 外，所有 A_i 和B_i 均为 $\mathcal{O}(\delta^2)$阶的零，其方程为

$$
\begin{aligned}
\delta B_1 - \delta\frac{A_1}{R_0^3} - 2q_1\frac{H_0}{R_0} &= 0,\\
\delta B_1 + 2\delta\frac{A_1}{R_0^3} + 4q_2\frac{H_0 R_0^5}{R^6} &= 0,
\end{aligned}
\tag{2.30}
$$

其中 $q_1 = \frac{T}{2}\left(1-\frac{\mu_0}{\mu_m}\right)$ 和 $q_2 = \frac{T}{2}\left(\frac{\mu_m}{\mu_0}-1\right)$。解这些方程，可计算出系数：

$$
\begin{aligned}
\delta A_1 &= -\frac{2R_0^2(q_1 R^6 + 2q_2 R_0^6)}{3R^6}H_0,\\
\delta B_1 &= \frac{4(q_1 R^6 - q_2 R_0^6)}{3R_0 R^6}H_0.
\end{aligned}
\tag{2.31}
$$

利用表达式（2.25），原始气泡表面顶部和底部的势变为：

$$
\phi^0|_{\Gamma_2} = \phi^+ + \frac{T}{2}\frac{\partial\phi^+}{\partial r}, \qquad \phi^0|_{\Gamma_1} = \phi^- - \frac{T}{2}\frac{\partial\phi^-}{\partial r}. \tag{2.32}
$$

由此可得中间表面的磁场为：

$$
H_r^0 = -\frac{\phi^0|_{\Gamma_2} - \phi^0|_{\Gamma_1}}{T} = h_1\cos\theta, \qquad H_\theta^0 = -\frac{1}{2R_0}\frac{\partial(\phi^0|_{\Gamma_2} + \phi^0|_{\Gamma_1})}{\partial\theta} = h_2\sin\theta. \tag{2.33}
$$

其中 h_1 和 h_2 的表达式如下所示

$$
h_1 = \left(1 - \frac{2q_1}{T} + \frac{4q_1}{3R_0} + \frac{2q_2 R_0^5}{3R(t)^6}\right)H_0, \quad h_2 = \left(-1 - \frac{q_1}{3R_0} + \frac{4q_2 R_0^5}{3R(t)^6}\right)H_0. \tag{2.34}
$$

2.4. 径向模态和形状模态的控制方程

采用 Shaw (2006) 使用的拉格朗日能量密度方法，对磁性气泡的非球形振荡进行建模。拉格朗日量的表达式为

$$
\mathcal{L}^* = \mathcal{C} - \mathcal{T} - \mathcal{K}, \tag{2.35}
$$

其中（$\mathcal{C}, \mathcal{T}, \mathcal{K}$）分别对应约束、势能和动能，其表达式为，

$$
\begin{aligned}
\mathcal{C} &= -2\pi\rho_f\int_0^{2\pi}\psi\rho\frac{\partial\rho}{\partial t}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta,\\
\mathcal{T} &= \sigma|S| - V\left[\frac{p_{go}}{1-k}\left(\frac{V_0}{V}\right)^k - p_\infty\right],\\
\mathcal{K} &= \int_{V_f}\frac{1}{2}\rho_f|\boldsymbol{\nabla}\psi|^2\,\mathrm{d}V_f,
\end{aligned}
\tag{2.36}
$$

其中， ρ_f 为周围流体的密度， σ 为气泡的表面张力，ψ 为周围流体的速度势， p_{go} 为未变形状态下气泡内部的气体压力， p_∞ 为无穷远处压力，即环境压力与施加压力之和，k 为气体的比热容比， S 为变形气泡的表面积， V 为变形气泡所围成的体积。对 V_f 的积分在周围流体区域内进行。周围流体中的速度势 ψ 满足拉普拉斯方程，其在球坐标下的解为

$$\psi = -\frac{b_0(t)}{r} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_n(t)}{r^{n+1}} P_n(\cos\theta). \tag{2.37}$$

系数 b_n 可由以下条件根据Shaw （2006）；Dash 与 Tamadapu （2024）

$$\frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial b_n} = 0 \tag{2.38}$$

存在　　包覆层中的磁性纳米颗粒会将拉格朗日量修改为

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^* - \mathcal{U} + \mathcal{M}. \tag{2.39}$$

其中， $\mathcal{U}$ 表示弹性能， $\mathcal{M}$ 表示磁能，分别为

$$\mathcal{U} = T \int_{S_m} \Psi_s(\mathbf{C})\, \mathrm{d}S_m = T R_0^2 \int_0^\pi \Psi_s(\mathbf{C}) \sin\theta \, \mathrm{d}\theta, \tag{2.40a}$$

$$\mathcal{M} = \frac{T\mu_0\chi}{2} \int_{S_m} \mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{H} \, \mathrm{d}S_m \tag{2.40b}$$

$$= \frac{T\mu_0\chi R_0^2}{2} \int_0^\pi \mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{H} \sin\theta \, \mathrm{d}\theta. \tag{2.40c}$$

其中， S_m 表示参考构型的中间表面， χ 表示磁化率， ψ_s（$\mathbf{C}$）表示超弹性应变能密度。由此得到的公式给出了径向模态和形状模态的控制方程，如下所示

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{R}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R} = 0, \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{a}_n}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_n} = 0. \end{aligned} \tag{2.41}$$

在我们的分析中采用新胡克应变能，即

$$\Psi_s(\mathbf{C}) = \frac{\mu_s}{2}(\mathrm{tr}(\mathbf{C}) - 3) = \frac{\mu_s}{2}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3). \tag{2.42}$$

代入 λ_1、 λ_2和 λ_3 （2.23），并将（2.42）中的 $\boldsymbol{H}$（2.33）的表达式代入（2.40c），将所得表达式展开至 $\mathcal{O}$（a_n^4）。对所得表达式中的 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{M}$ 积分，得到相应的势能和磁能。将这些表达式代入（2.41），得到以下控制方程

径向模态和非球形模态的方程为

$$
\begin{aligned}
&R\ddot{R}+\frac{3}{2}\dot{R}^2-\frac{1}{\rho_f}\left[p_{go}\left(\frac{R}{R_0}\right)^{3k}-p_\infty\right]+\frac{2\sigma}{\rho_f R}+4\eta\frac{\dot{R}}{R}+\frac{2\mu_s T}{\rho_f R}\left[1-\frac{R_0^6}{R^6}\right]\\
&+\frac{1}{R}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)(n+1)}\left[(n+\frac{3}{2})\dot{a}_n^2+(n+3)a_n\ddot{a}_n-(n-3)\left(\frac{\ddot{R}}{R}a_n^2\right.\right.\\
&\left.\left.+\frac{1}{2}\frac{\dot{R}^2}{R^2}a_n^2+2\frac{\dot{R}}{R}a_n\dot{a}_n\right)\right]+\frac{1}{\rho_f R^2}\left[p_\infty-p_{go}(1-3k)\left(\frac{R_0}{R}\right)^{3k}\right]\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a_n^2}{2n+1}\\
&+\frac{3\mu_s T R_0^6}{\rho_f R^9}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n+1)-10}{2n+1}a_n^2-\frac{1}{2\rho_f R^2}\frac{\partial\mathcal{M}}{\partial R}=0,
\end{aligned}
\tag{2.43}
$$

$$
\begin{aligned}
&R\ddot{a}_n+\left(3\ddot{R}+\eta(n+2)(2n+1)\frac{2}{R}\right)\dot{a}_n+(n+1)(n-1)(n+2)\frac{\sigma}{\rho_f R^2}a_n\\
&+(n-1)\left((n+2)\eta\frac{2\dot{R}}{R^3}-\ddot{R}\right)a_n+(n+1)\frac{\mu_s T}{\rho_f R^2}\left(\frac{R_0^6(10-n(n+1))}{R^6}+n^2+n+2\right)a_n\\
&+\frac{(2n+1)(n+1)}{4R}\sum_{i=2}^{\infty}\sum_{j=2}^{\infty}\left[\frac{\ddot{R}}{R}a_ia_jG_{d_{ijn}}+\frac{\dot{R}^2}{R^2}a_ia_jM_{a_{nij}}+\frac{\dot{R}}{R}a_i\dot{a}_jM_{b_{nij}}\right.\\
&\left.+a_i\ddot{a}_jM_{c_{nij}}+\dot{a}_i\dot{a}_jM_{d_{nij}}\right]+\frac{(2n+1)(n+1)}{2\rho_f R^2}\left[p_\infty-p_{go}\left(\frac{R}{R_0}\right)^{3k}\right]\sum_{i=2}^{\infty}\sum_{j=2}^{\infty}a_ia_jI_{a_{nij}}\\
&-\frac{3\mu_s T(2n+1)(n+1)R_0^6}{\rho_f R^9}\sum_{i=2}^{\infty}\sum_{j=2}^{\infty}\left(5I_{a_{nij}}+\frac{1}{2}I_{c_{nij}}+I_{c_{ijn}}\right)a_ia_j\\
&-\frac{(n+1)(2n+1)}{2\rho_f R^2}\frac{\partial\mathcal{M}}{\partial a_n}=0,
\end{aligned}
\tag{2.44}
$$

其中，η 为周围流体的黏度，黏性项根据Shaw (2009)加入，并截断至 $\mathcal{O}(a_n^2)$阶。各系数 I, G, M可参见Shaw(2006)。此外，附录 $\mathcal{M}$ 给出了以半径和模态振幅 a_n 表示的表达式，见附录A。

2.5. 固有频率计算

径向模态和形状模态的固有频率可通过将$R\ (t) = R_0 + x\ (t)$ 代入（2.43）和（2.44），然后对所得方程关于 $x\ (t)$ 和 $a_n\ (t)$ 进行线性化得到。保留线性项并提取 $x\ (t)$ 和 $a_n\ (t)$ 的相应系数，可得到以下固有频率表达式。

$$
\omega_r^2=3k\frac{p_{go}}{\rho_f R_0^2}+\frac{12\mu_s T}{\rho_f R_0^3}-\frac{2\sigma}{\rho_f R_0^3}+\frac{8H_0^2\mu_0\chi q_1}{3\rho_f R_0^3},
\tag{2.45}
$$

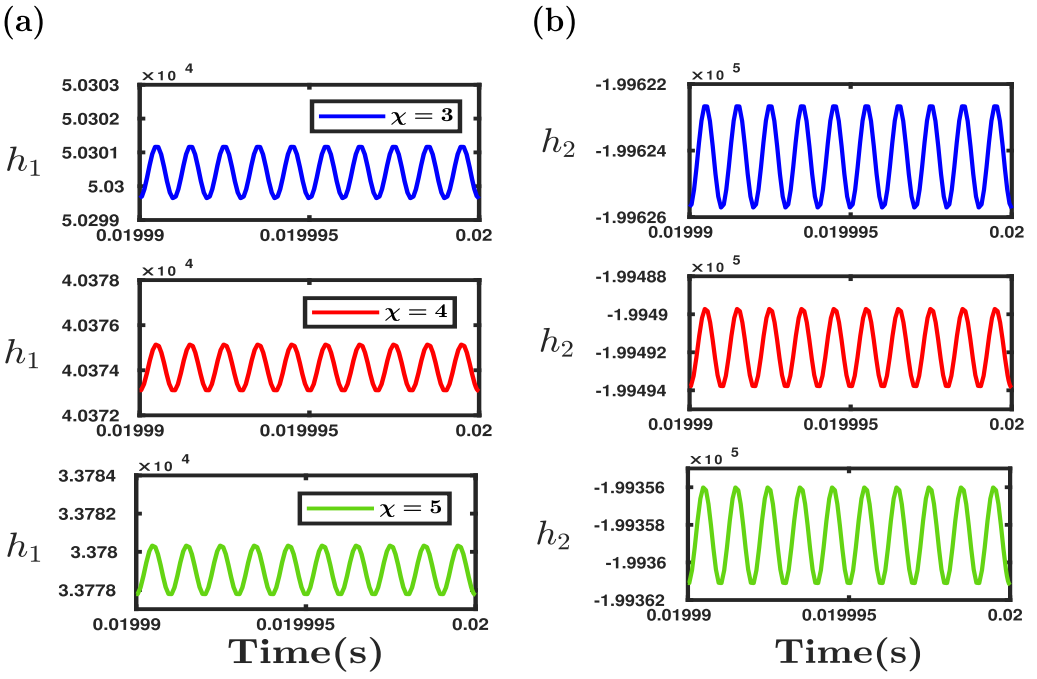

图2：初始半径为 $R_0 = 20\,\mu$m、表面剪切模量为 $\mu_S T = 0.1\text{Nm}^{-1}$ 的气泡在驱动频率为 $f_d = 1\,$MHz、驱动压力为$p_A = 100$kPa时，不同磁化率 χ下 h_1 和 h_2 的时间序列。

$$\begin{aligned}\omega_k^2 = {} & (n+1)(n-1)(n+2)\frac{\sigma}{\rho_f R_0^3} + (n+1)\frac{12T\mu_s}{\rho_f R_0^3} \\ & - \mu_0\chi T\frac{(n+1)(2n+1)(28n^3+40n^2-3n-9)h_1^2}{(8n^3+12n^2-2n-3)\rho_f R_0^3} \\ & + \mu_0\chi T\frac{(n+1)(2n+1)(4n^3+6n^2-13n+6)h_2^2}{(4n^2-1)\rho_f R_0^3},\end{aligned} \tag{2.46}$$

其中， h_1 和 h_2 在 $R\,(t) = R_0$处求值。

3. 结果与讨论

3.1. 感应磁场

本节介绍参考构型中感应的磁场，即拉格朗日磁场 $\boldsymbol{H}$。压力和磁场施加如下，

$$p_\infty = p_0 + p_a\cos 2\pi f_d t, \qquad H = H_0. \tag{3.1}$$

此处， $p_0 = 10^3$kPa 为环境压力， p_a 为时变压力的振幅， H_0 为无穷远处的外加磁场， f_d 为驱动频率。随着感应磁场法向分量和切向分量的振幅 h_1 和 h_2随变形半径变化，气泡在 $f_d = 1\,$MHz、 $p_a = 100$kA 和 $H_0 = 200\,$kA/m 的驱动频率下受到激励，此时气泡的初始半径为 $R_0 = 20\,\mu$m。从 $\chi = 3$ 图2 的情形可以看出，感应拉格朗日磁场的法向分量显著减小，而

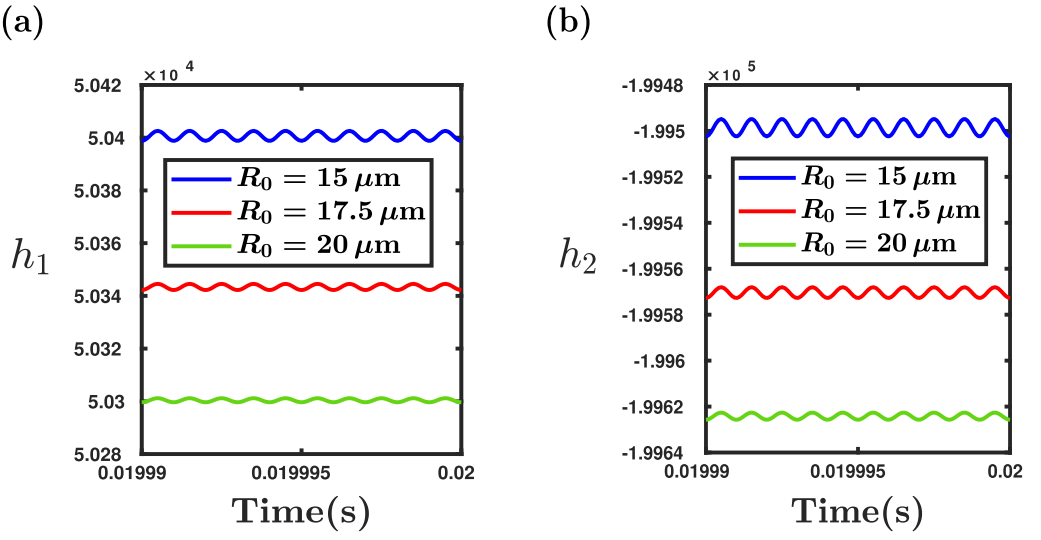

图3：对于磁化率为 $\chi = 3$、表面剪切模量为 $\mu_S T = 0.1\text{Nm}^{-1}$ 的气泡，在驱动频率为 $f_d = 1\,\text{MHz}$、驱动压力为 $p_A = 100\text{kPa}$ 时，不同初始半径 R_0 下 h_1 和 h_2 的时间序列。

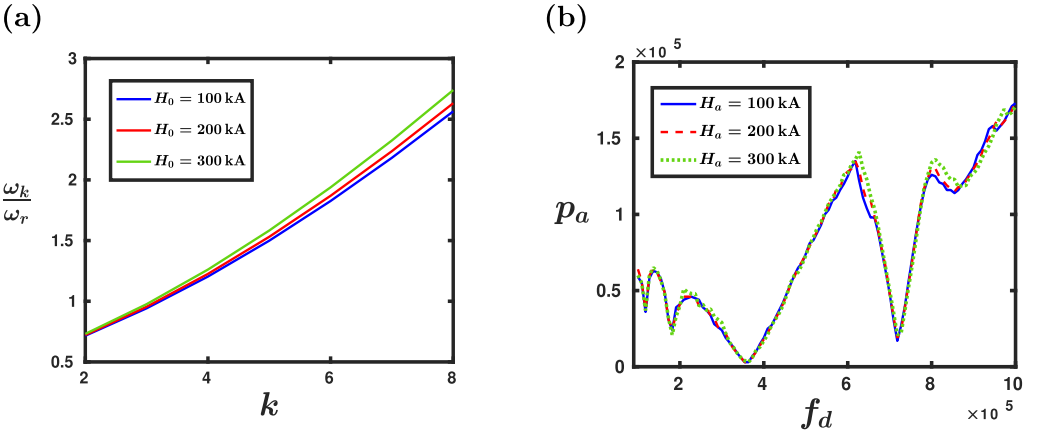

图4：（a）固有频率随模态数 ω_k/ω_r 变化与 k 的关系；（b）对于初始半径为 $R_0 = 10\,\mu\text{m}$、磁化率为 $\chi = 3$、表面剪切模量为 $\mu_s T = 0.1\,\text{Nm}^{-1}$ 的气泡，在 p_a 与 f_d 平面中，临界压力随驱动频率的变化，展示了不同外加磁场值下的结果。

切向分量仅略有减小。增大气泡尺寸会使感应磁场的值略微增大，因为感应磁场与未变形气泡半径成反比。此外，增大包覆层的磁化率会显著减小 h_1 并略微增大 h_2，这与式（2.34）一致。从图2 和3中可以观察到这些行为。

3.2. 外加磁场对固有频率和稳定性图的影响

在上一节中可以观察到 $|h_2| > |h_1|$，并且根据式（2.46） $\omega_k^2 \propto h_2^2 - h_1^2$。因此，磁场增强会提高各模态形状的固有频率。此外，

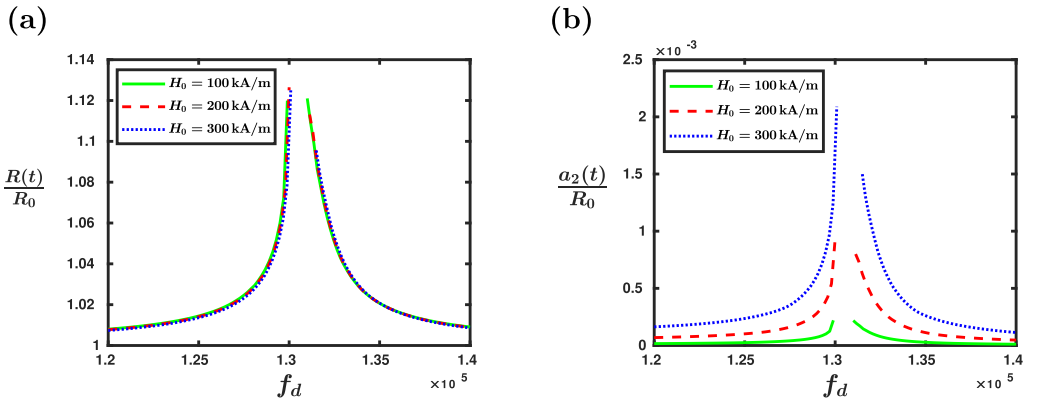

图5：未变形半径为$R_0 = 25\,\mu$m、磁化率为 $\chi = 3$、表面剪切模量为 $\mu_s T = 0.1\,\mathrm{Nm}^{-1}$ 的气泡在不同外加磁场值下的径向和 a_2 模态频率响应。

从图 4a 可以看出，随着模态数增加，外加磁场的影响变得更加显著。本文研究指数行为，即稳定的正弦振荡以指数形式发散时施加压力的临界值 p_a。数值模拟针对初始半径为 $R_0 = 10\,\mu$m、表面剪切模量为 $\mu_s T = 0.1\mathrm{Nm}^{-1}$、磁化率为 $\chi = 3$的气泡进行。图 4b 表明，增大外加磁场会使稳定性曲线略微右移，并略微提高稳定性。这是因为式（2.44）的线性化形式具有与马蒂厄方程 $\beta+$（$\Delta+\epsilon\cos\omega_d t$）$\beta = 0$ 类似的结构，其中 Δ 会随着 H_0 增大而增大，而 ϵ 受 p_a的影响。增大 Δ 需要更高的 p_a 才能使系统失稳。

3.3. 磁场对频率响应和有限振幅振荡的影响

由于模型考虑了二次形状模态相互作用，当气泡在共振频率附近受到激励时，可以观察到持续有限振幅形状振荡。首先，在径向模态的主共振附近对气泡施加激励。本文分析考虑了初始半径为 $R_0 = 25\,\mu$m、磁化率为 $\chi = 3$、表面剪切模量为 $\mu_s T = 0.1$ Nm^{-1}的气泡。根据（2.45），增大外加磁场会使径向共振频率略微升高，从而使径向频率响应曲线向右移动，如图5a所示。此外， a_2 模态受到磁场和径向振荡的直接强迫。因此，在径向振荡的共振区域附近增大磁场，会显著提高 a_2 振荡幅度，如图5b所示。形状模态受到径向模态的参数激励。在本研究中，仅考虑第一参数共振，即 $\omega_d \approx 2\omega_k$；当达到阈值压力时，某一特定模态的有限振荡幅度会高于其他模态。所考虑的驱动频率和外加磁场分别为 f_d =0.5 MHz和 $H_0 = 200\,\mathrm{kA}$。于是，对于半径为 $R_0 = 12.5\,\mu$m的气泡，前三个形状模态的固有频率为 $2f_k = [0.487, 0.6445, 0.8271]$ MHz。如果 $p_a/p_0 = 0.7$，则在图6a中可以看到第二模态的持续有限振幅振荡。类似地，对于半径为 $R_0 = 15\,\mu$m的气泡，前三个形状模态的固有频率为$2f_k = [0.3705, 0.4903, 0.6292]$ MHz，且第三模态的第一参数共振接近驱动频率。如果 $p_a/p_0 = 0.7$，则可以观察到持续有限振幅振荡

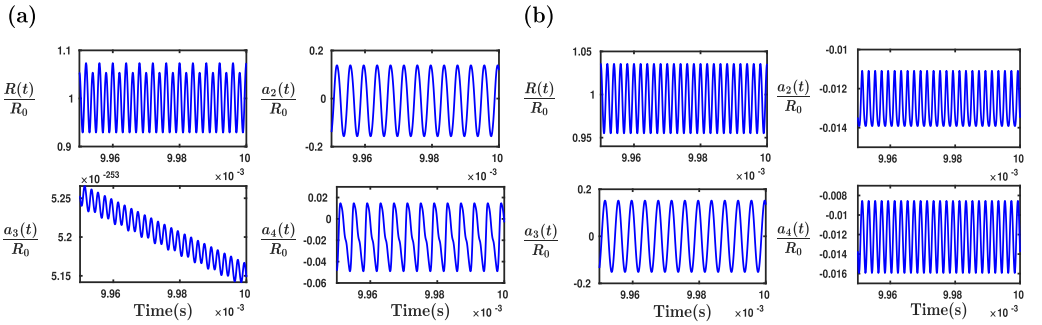

图6：驱动压力频率为 0.5 MHz、磁化率为 $\chi = 3$、表面剪切模量为 $\mu_s T$ =0.1 Nm^{-1}、初始半径分别为 (a) $R_0 = 12.5\,\mu$ m 和 (b) $R_0 = 15\,\mu$ m 时，气泡的径向模态及前三阶形状模态的时间序列。

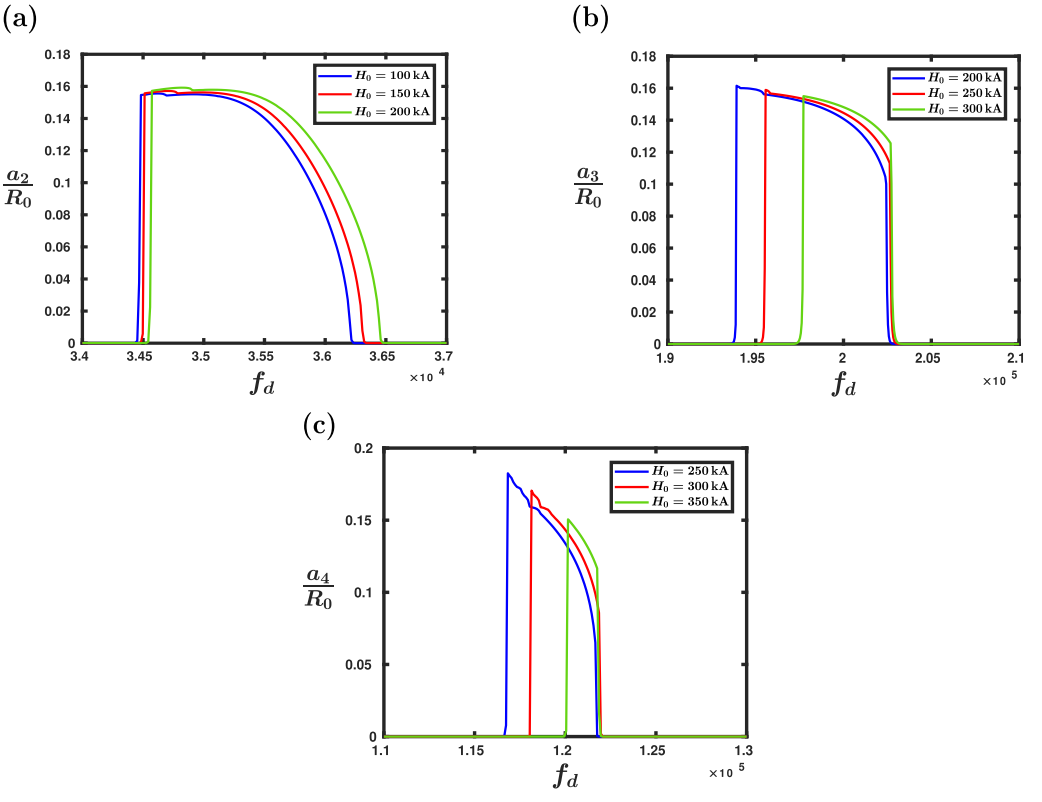

图7：在驱动压力分别为 (a) $p_a = 0.4$ kPa、(b) $p_a = 20$ kPa 和 (c) $p_a = 12.8$ kPa 下，磁化率为 $\chi = 3$、表面剪切模量为 $\mu_s T = 0.1\,\mathrm{Nm}^{-1}$、初始半径分别为 (a) $R_0 = 72\,\mu$ m、(b) $R_0 = 27\,\mu$ m 和 (c) $R_0 = 44.8\,\mu$ m 的气泡在不同外加磁场下的频率响应。

第三模态的振荡如图6b所示。阈值压力通常并不相同，而在本例中二者相同。

为了解磁场对有限振幅振荡的影响，图中展示了不同外加磁7 场取值下的频率响应曲线

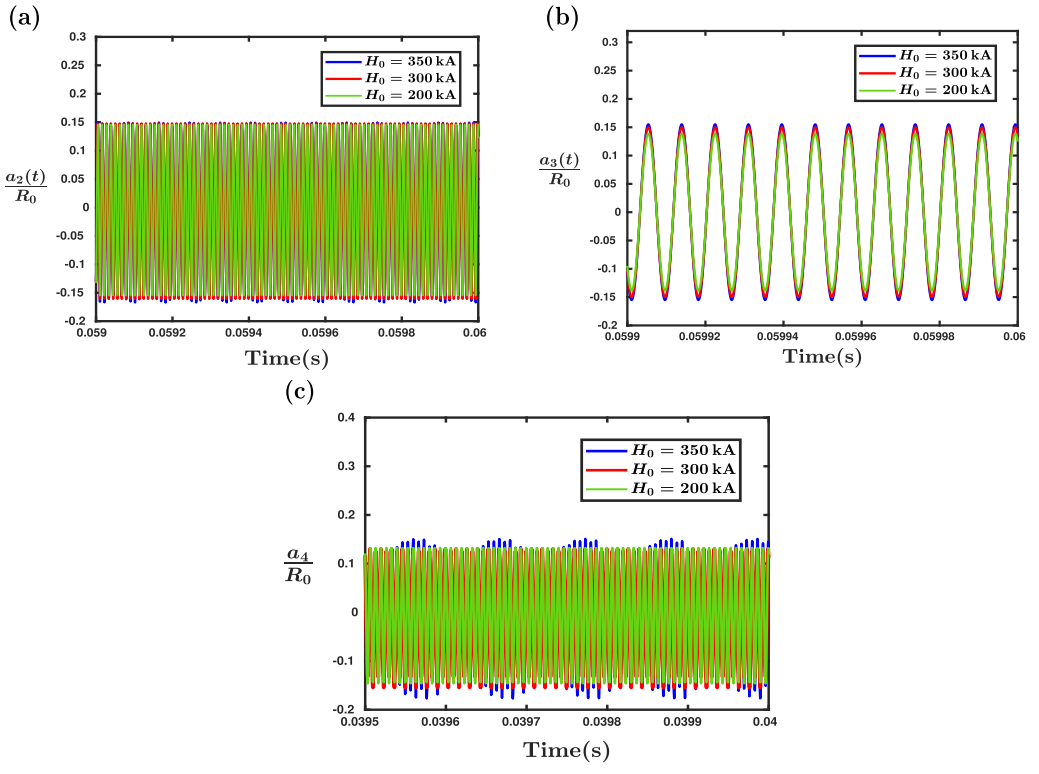

图8：初始半径为$R_0 = 25\,\mu$m、磁化率为 $\chi = 3$、表面剪切模量为 $\mu_s T = 0.1\,\mathrm{Nm}^{-1}$的气泡，其第二、第三和第四模态的时间序列：(a) f_d =175 kHz、$p_a = 15$ kPa，(b) $f_d = 234$ kHz、$p_a = 30$ kPa，以及(c) $f_d = 300$ kHz、$p_a = 48$kPa。

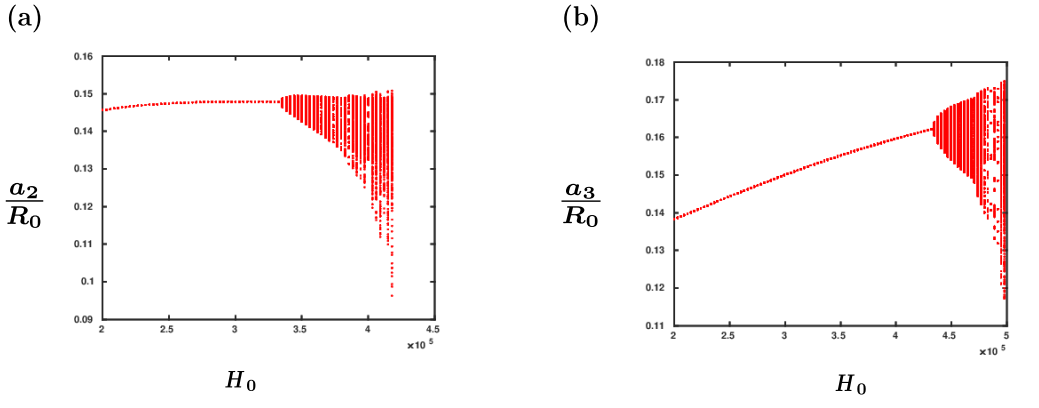

图9： H_0条件下的分岔图：(a) a_2 模态和(b) a_3 模态。

场。初始半径为 $R_0 = 72\,\mu$m、磁化率为 $\chi = 3$、表面剪切模量为$\mu_s T = 0.1\,\mathrm{Nm}^{-1}$的气泡，在 $p_a = 0.4$kPa 下，以驱动频率 $f_d = 0.34$ –0.37MHz 范围内受到激励，该频率约为第二模态固有频率的两倍 $2f_2 \approx 35$ kHz。从图7a可以观察到，随着外加磁场从$H_0 = 100$kA 增加到 $H_0 = 200$kA，频率响应曲线向右移动，这与图4a中的频率图一致，其中固有频率随着

(a) (b)

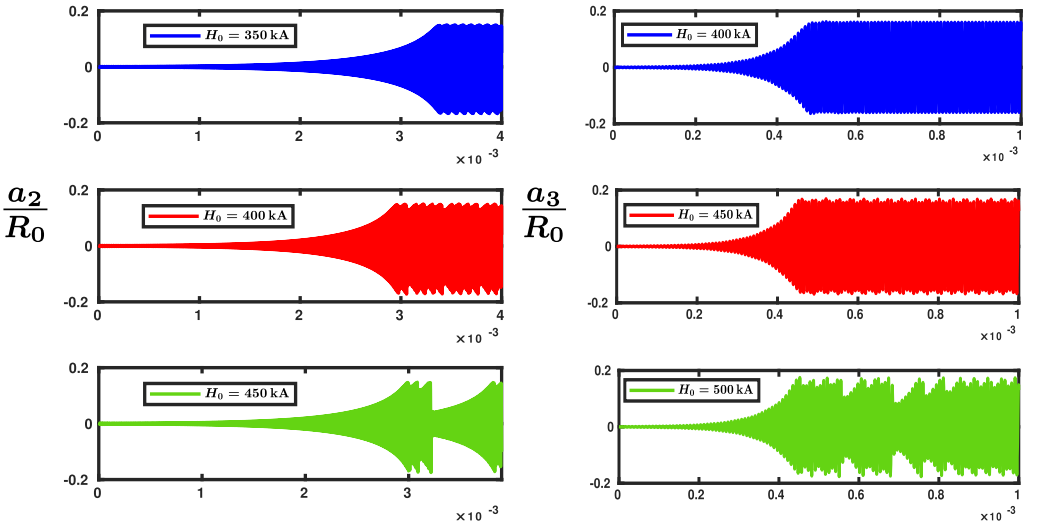

图10：随着外加磁场增强，振荡从稳定周期振荡转变为高度混沌振荡，并呈指数级发散。

随着外加磁场增强。在 a_3 模态中也观察到类似的模式，如图7b所示。对于半径为 $R_0 = 27\,\mu$m的气泡，磁场范围为$H_0 = 200$，kA 至 $H_0 = 300$kA。类似地，对于 a_4 模态，如图7c所示，半径为 $R_0 = 44.8\,\mu$m的气泡在磁场范围 $H_0 = 250$kA 至 $H_0 = 350$ kA内也呈现相同的模式；当分别在第三和第四模态的固有频率附近 $2f_3 \approx 200$kHz 和 $2f_4 \approx 120$ kHz激励时，均观察到这一现象。所选磁场强度范围和气泡半径确保在次谐波频率范围内不会出现不稳定响应。外加磁场对时间序列响应的影响并不一致，而是取决于外加磁场、施加压力和驱动频率。

根据气泡参数和外部激励的不同，振荡幅度可能随磁场增强而增大或减小。然而，在有限振幅振荡重叠的区域，增强外加磁场通常会增大模态振荡的最大振幅。为了了解外加磁场增强时重叠区域内模态形状的时间序列变化，在不同 $R_0 = 25\,\mu$m 值下，对半径为 p_a的气泡进行激励，使其第二、第三和第四模态在第一参数共振附近振荡，因为不同模态出现有限振幅振荡所需的阈值压力各不相同。在近共振区域内有限振幅振荡重叠的 a_2 模态的驱动频率为 $f_d \approx 175$kHz。第二模态的阈值压力为$p_a = 15$kPa，其时间序列如图8a所示。第三和第四模态在近共振驱动频率下的阈值压力分别为 $f_d = 234$ kHz 时的 $p_a = 30$ kPa 和$f_d = 300$kHz 时的 $p_a = 48$kPa，其时间序列分别见图8b和8c。从这些图中可以看出，在重叠区域内，增强外加磁场会增大振荡的最大振幅，并显著影响其相位和周期。此外，随着外加磁场增强，有限振幅振荡会逐渐变得更加复杂并呈现混沌行为。为研究这一行为，通过取 H_0 作为

分岔参数，并跟踪第二和第三模态的峰值振幅。如图9a和9b所示，增强外加磁场会使振荡经历倍周期序列，从二周期振荡转变为四周期振荡，随后发生进一步的倍周期分岔，最终出现混沌行为，见图10。外加磁场进一步增强时，振荡幅度迅速增大，最终导致气泡失效。

4. 总结与结论

本研究提出了一种用于计算薄型可变形磁弹性膜中感应磁场的修正理论框架。利用该框架，获得了感应磁场的首阶项。随后，将所得的应变能和磁能纳入拉格朗日表述的势能中，从而推导出径向模态和形状模态（包括二次相互作用）的控制方程。通过对模态形状方程进行线性化，进一步获得了形状模态的固有频率，并发现其会随着外加磁场的增强而升高。磁性气泡的指数稳定性也会随着外加磁场的增强而提高。当气泡在主径向频率附近受到激励时，外加磁场仅使径向频率响应发生轻微偏移，却会显著增大 a_2 振荡的振幅。对于第一参数共振附近的激励，随着外加磁场增强，频率响应向更高频率偏移，这与形状模态固有频率的升高相一致。此外，当气泡发生有限振幅振荡时，外加磁场会显著影响振荡的相位和周期。以外加磁场为分岔参数的分岔分析表明，随着磁场增强，气泡动力学逐渐变得更加复杂并趋于混沌，最终导致指数爆炸。

尽管本研究成功展示了外加磁场对有限振幅振荡和频率响应的影响，但该模型未考虑包覆气泡中存在的切向形变。建立一个纳入这些形变的模型颇具挑战，因为这需要以强形式求解控制方程。在强形式表述中考虑形状模态间的二次相互作用，会带来额外的复杂性。此外，以强形式计算磁力需要磁场梯度。然而，当磁势和磁通量的跃变截断至 $\mathcal{O}(T^2)$ 阶时，该梯度会消失，因此必须纳入高阶项。

在若干情况下，频率响应分析揭示了一个驱动频率范围，在该范围内系统会变得不稳定。对于此类频率范围，由于控制方程中的强非线性，很难确定系统是具有频率响应的不稳定分支，还是不存在周期解。数值模拟还表明，在二次阶截断形状模态方程中的径向项，无法充分近似原始系统，尤其是在共振区域内。与原始系统相比，截断系统需要显著更高的施加压力才能触发有限振幅振荡。因此，要更准确地表示该系统，就需要在控制方程中保留三次相互作用。将模型发展到三次阶，并随后寻求适当的简化方法，将为分析磁性气泡的非线性动力学和频率响应提供更可靠的框架。

尽管存在这些局限性，本研究仍为利用非理想界面理论计算均匀磁场作用下薄封装气泡中的感应磁场，并将所得磁能纳入拉格朗日表述以获得形状模态方程，奠定了基础。该框架为进一步开发更全面的模型提供了依据，使其能够考虑额外的非线性相互作用和切向变形。

致谢。 AKB 谨向 Shaik Nadeem Karim 致谢，感谢他提供的宝贵讨论。AKB 和 GT 感谢印度政府教育部（MoE）提供研究支持。

经费支持。 本研究得到印度政府科学技术部科学与工程研究委员会的资助，项目编号为 CRG/2022/005775。

利益声明。 作者声明不存在利益冲突。

附录 A. 磁能表达式 $\mathcal{M}$

$$\begin{aligned}\mathcal{M} = {} & \frac{\mu_0\chi R^4}{3R_0^2}h_1^2 + \frac{2\mu_0\chi R_0^4}{3R^2}h_2^2 + \frac{8\mu_0\chi R^3}{15R_0^2}h_1^2a_2 + \frac{4\mu_0\chi R_0^4}{15R_0^2}h_2^2a_2 + \frac{\mu_0\chi R^2}{R_0^4}h_1^2\sum_{i=2}^{\infty}\sum_{j=2}^{\infty}a_ia_jH_{ij}^a \\ & + \frac{6\mu_0\chi R^2}{R_0^4}h_1^2\sum_{i=2}^{\infty}\sum_{j=2}^{\infty}a_ia_jH_{ij}^b + \frac{3\mu_0\chi R_0^2}{R^4}h_2^2\sum_{i=2}^{\infty}\sum_{j=2}^{\infty}a_ia_jH_{ij}^c - \frac{\mu_0\chi R_0^4}{R^4}h_2^2\sum_{i=2}^{\infty}\sum_{j=2}^{\infty}a_ia_jH_{ij}^d \\ & + \frac{2\mu_0\chi R}{R_0^4}h_1^2\sum_{i=2}^{\infty}\sum_{j=2}^{\infty}\sum_{k=2}^{\infty}a_ia_ja_k\mathcal{H}_{ijk}^a + \frac{4\mu_0\chi R}{R_0^4}h_1^2\sum_{i=2}^{\infty}\sum_{j=2}^{\infty}\sum_{k=2}^{\infty}a_ia_ja_k\mathcal{H}_{ijk}^b \\ & + \frac{4\mu_0\chi R_0^2}{R^5}h_2^2\sum_{i=2}^{\infty}\sum_{j=2}^{\infty}\sum_{k=2}^{\infty}a_ia_ja_k\mathcal{H}_{ijk}^c - \frac{4\mu_0\chi R_0^2}{R^5}h_2^2\sum_{i=2}^{\infty}\sum_{j=2}^{\infty}\sum_{k=2}^{\infty}a_ia_ja_k\mathcal{H}_{ijk}^d\end{aligned} \tag{A 1}$$

$$\begin{aligned}H_{ij}^a &= \int_{-1}^{1}x^2P_i^1(x)P_j^1(x)dx & H_{ij}^b &= \int_{-1}^{1}x^2P_i(x)P_j(x)dx \\ H_{ij}^c &= \int_{-1}^{1}(1-x^2)P_i(x)P_j(x)dx & H_{ij}^d &= \int_{-1}^{1}(1-x^2)P_i^1P_j^1dx\end{aligned} \tag{A 2}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{ijk}^a &= \int_{-1}^{1}x^2P_i(x)P_j^1(x)P_k^1(x)dx & \mathcal{H}_{ijk}^b &= \int_{-1}^{1}x^2P_i(x)P_j(x)P_k(x)dx \\ \mathcal{H}_{ijk}^c &= \int_{-1}^{1}(1-x^2)P_i(x)P_j^1(x)P_k^1(x)dx & \mathcal{H}_{ijk}^d &= \int_{-1}^{1}(1-x^2)P_i(x)P_j(x)P_k(x)dx\end{aligned} \tag{A 3}$$

参考文献

Barham, M., Steigmann, D.J., McElfresh, M. & Rudd, R.E. 2007 有限变形

静止偶极子场中受压磁弹性膜的有限变形。《力学学报》191 (1), 1–19. Barham, M., Steigmann, D.J. & White, D. 2012 高变形薄膜的磁弹性：理论与模拟。《国际非线性力学杂志》47 (2), 185–196. BJ, Arun Krishna & Tamadapu, Ganesh 2026 封装磁性微泡的非球形振荡。《流体力学杂志》1038, A27. Chertok, B. & Langer, R. 2018 通过超声引导磁靶向和超声对循环磁性微泡进行局部实时药物递送控制。《治疗诊断学》8 (2), 341. Dash, N. & Tamadapu, G. 2024 声场中具有界面能的封装微泡的非球形振荡。《美国声学学会杂志》155 (4), 2445–2459. Du, Z., Pan, R., Li, F., Mo, R. & Wang, C. 2024 通过磁场和脉冲超声局部控制磁性微泡的行为。《应用声学》216, 109792. Duan, L., Yang, F., Song, L., Fang, K., Tian, J., Liang, Y., Li, M., Xu, N., Chen, Z., Zhang, Y. & Gu, N. 2015 在微泡上可控组装磁性纳米颗粒以用于多模态成像。《软物质》11 (27), 5492–5500. Durán, J.D.G, Arias, J.L., Gallardo, V. & Delgado, A.V. 2008 磁性胶体作为药物载体。《药物科学杂志》97 (8), 2948–2983. Gu, ST & He, QC2841237 2011 耦合多场现象的界面不连续关系及其在薄界面相作为不完善界面建模中的应用。《固体力学与物理学杂志》59 (7), 1413–1426. Gu, ST, Monteiro, Eric & He, Qi-Chang 2011 复合材料热传导一般不完善界面模型的无坐标推导与弱形式。《复合材料科学与技术》71 (9), 1209–1216. Guédra, M. & Inserra, C. 2018 有限振幅气泡形状振荡。《流体力学杂志》857, 681–703. Guédra, M., Inserra, C., Mauger, C. & Gilles, B. 2016 微泡球形振荡与非球形振荡之间非线性模态耦合的实验证据。《物理评论E》94 (5), 053115. Hao, Y. & Prosperetti, A. 1999 黏度对振荡气泡球形稳定性的影响。《流体物理学》11 (6), 1309–1317. Liu, Y., Sugiyama, K., Takagi, S. & Matsumoto, Y. 2012 超声压力波诱发的封装气泡表面失稳。《流体力学杂志》691, 315–340. Moser, Ewald, Stadlbauer, Andreas, Windischberger, Christian, Quick, Harald H & Ladd, Mark E 2009 磁共振成像方法。《欧洲核医学与分子成像杂志》36 (Suppl 1), 30–41. Owen, J., Rademeyer, P., Chung, D., Cheng, Q., Holroyd, D., Coussios, C., Friend, P., Pankhurst, Q.A. & Stride, E. 2015 生理相关流动条件下的微泡磁靶向。《界面聚焦》5 (5), 20150001. Pankhurst, Q.A., Connolly, J., Jones, S.K. & Dobson, J. 2003 磁性纳米颗粒在生物医学中的应用。《D辑物理学杂志：应用物理》36 (13), R167. Sciallero, C., Balbi, L., Paradossi, G. & Trucco, A. 2016 负载氧化铁纳米颗粒的聚合物壳微泡的磁共振与超声造影成像。《英国皇家学会开放科学》3 (8), 160063. Shaw, S.J. 2006 轴对称变形下气泡的平移与振荡。《流体物理学》18 (7), 072104. Shaw, S.J. 2009 弱黏性液体中受声行波作用的气泡稳定性。《流体物理学》21 (2), 022104. Shaw, S.J. 2017 亚毫米气泡振荡：参数激励与非线性形状模态耦合。《流体物理学》29 (12). Stride, E., Porter, C., Prieto, A.G. & Pankhurst, Q. 2009 同时暴露于超声场和磁场增强微泡介导的基因递送。《医学与生物学中的超声》35 (5), 861–868.

Sun, C., Lee, J.S. 和 Zhang, M. 2008 磁性纳米颗粒在磁共振成像和药物递送中的应用。《高级药物递送评论》**60** (11), 1252–1265. Thiesen, B. 和 Jordan, A. 2008 磁性纳米颗粒在热疗中的临床应用。《国际热疗杂志》**24** (6), 467–474. Tsiglifis, K. 和 Pelekasis, N.A. 2011 受声学扰动作用的封装微泡的参数稳定性与动态屈曲。《流体物理学》**23** (1). Zhao, L., Shi, H., Bello, I., Hu, J., Wang, C. 和 Mo, R. 2022 声场和磁场作用下磁性微泡的非线性振荡特性。《中国物理*B*辑》**31** (3), 034302.