Gerstenhaber 命题 1的阐释：形式变形中的余边界消去

Rinkila Bhutia 和 Zuiner Jamir

数学系，锡金大学，甘托克，737102，锡金邦，印度

arXiv:2611.32003v1 [math.RA] 24 Nov 2026

摘要

Gerstenhaber 关于结合代数形式变形的奠基性工作，将变形的第一个非平凡项与第二 Hochschild 上同调群联系起来。在其 1964 年论文的命题 1 证明中，作为余边界的首个 Hochschild 2-余循环通过形式变量变换被连续消去。如果这一消去过程在有限步后终止，则无需进行极限论证；然而，余边界可能被无限期地持续消去，这一可能性在原始论述中基本上只是隐含提及。本阐释性论文针对固定结合 K- 代数 A 上的变形，充分明确地给出了这一极限论证 $K[[t]]$。我们在相关形式幂级数空间和形式自同态空间上使用 t-进拓扑，建立完备性以及复合、求逆和对形式乘法的作用的连续性，并证明一列无限的连续变量变换可以组合成一个单一且定义良好的形式等价。这为这一经典结果及其刚性结论给出了完整、自洽的证明。

关键词： 结合代数，形式变形，上同调， t-进拓扑**MSC 2020：** 主要分类号 16S80；次要分类号 16E40、16W60。

目录

1 引言 **2**

2 形式变形与等价性 3 2.1 形式单参数变形 . 3 2.2 形式变形的等价性 . 4 **3 t-进框架** 5 3.1 完备性 . 6 **4 形式自同态与无穷复合** 7 4.1 复合的连续性 . 8 4.2 求逆的连续性 . 9 4.3 乘法作用的连续性 . 11 4.4 初等变换的无穷复合. 13

5 无穷消去余边界与 Gerstenhaber 命题1 165.1 无穷情形.175.2 Gerstenhaber 命题 1 .18

1 引言

Gerstenhaber 提出的结合代数形式变形理论，为研究如何在保持结合律的同时改变代数的乘法提供了一种系统方法。该理论的核心特征之一是 Hochschild 上同调的出现。对于结合代数 A，形式变形的一阶项是一个 Hochschild 2-余循环，而通过形式变量变换改变变形时，该余循环会改变一个 Hochschild余边界。因此，其上同调类自然属于 $H^2(A,\ A)$ [6, 2]。

Gerstenhaber 1963年论文关于结合环上同调结构的研究，在 Hochschild 上同调中建立了重要的上同调结构。随后，他在 1964 年的论文中发展了环和代数的变形理论，并在之后的三篇论文中继续开展这项工作 [1, 2, 3, 4, 5]。

本文旨在详细阐述 Gerstenhaber 论文中命题1背后的论证 [2]。在下文所采用的记号中，形式的一参数变形具有如下形式

$$\mu_t = \mu + tF_1 + t^2F_2 + \cdots,$$

其中 μ 是原始乘法。Gerstenhaber 的命题指出，将变形替换为一个等价变形后，它可以写成如下形式

$$\mu_t = \mu + t^nF_n + t^{n+1}F_{n+1} + \cdots,$$

其中

$$F_n \in Z^2(A,A), \qquad [F_n] \neq 0 \in H^2(A,A).$$

特别是，第一个非零系数（无穷小）可以选取为非余边界。

以下是这一断言背后的思路。假设无穷小为 F_n，且

$$F_n = \delta q$$

是一个余边界。形如以下形式的形式变量变换

$$\phi_t = \mathrm{id}_A + t^nq$$

会消去 t^n的系数。因此，第一个非零项会被推到 t的严格更高次幂处。

如果该过程在有限步之后停止，论证便是直接的：最终会得到一个不是余边界的首项余循环。微妙之处在于，该过程可能会无限地持续下去：

$$\mu^{(0)} \sim \mu^{(1)} \sim \mu^{(2)} \sim \cdots,$$

在每个阶段都消去了一个余边界。在这种情况下，不存在某个有限阶段可以直接宣布过程结束。必须证明，这无穷多个初等等价变换能够合并为一个定义良好的形式等价。

本阐述的重点正是这一点。我们证明，连续变量变换分别从 t 的严格递增次幂开始。因此，它们的部分复合在 t-进拓扑中构成一个柯西序列。完备性随后给出一个极限形式自同构，而通过平行的论证可以得到其逆。复合的连续性以及作用于乘法的连续性，使我们能够取极限。

本文的组织安排体现了这一目的。第 2 节回顾形式变形与等价框架，并证明关于余边界的初等消去引理。第 3 节构建 t-进框架并确立完备性。第 4 节研究形式自同态、复合与求逆的连续性、对形式乘法的作用，以及初等变换的无限复合。第 5 节将这些结果应用于无限消去过程，并给出由此得到的 Gerstenhaber 命题 1 的证明，随后说明刚性结论。

2 形式变形与等价

设 A 是域 K 上的结合代数，其乘法为

$$\mu\colon A\otimes A\longrightarrow A,\qquad \mu(a,b)=ab.$$

我们用 $C^n(A,\ A)=\mathrm{Hom}_K(A^{\otimes n},\ A)$ 表示 Hochschild n-上链。

2.1 形式单参数变形

定义 2.1。 乘法 μ 的单参数形式变形是一个形式幂级数

$$\mu_t=\mu+tF_1+t^2F_2+\cdots,\qquad F_i\in C^2(A,A),$$

它在 $A[[t]]$ 上满足结合律。

结合律意味着

$$\mu_t(\mu_t(a,b),c)=\mu_t(a,\mu_t(b,c))$$

对于所有的 $a,\ b,\ c\in A$，作为关于 t 的形式幂级数恒等式成立。

我们采用以下约定来定义 Hochschild 微分

$$\begin{aligned}(\delta q)(a,b)&=aq(b)-q(ab)+q(a)b, && q\in C^1(A,A),\\ (\delta F)(a,b,c)&=aF(b,c)-F(ab,c)+F(a,bc)-F(a,b)c, && F\in C^2(A,A).\end{aligned}$$

比较结合律方程中 t 的系数，得到

$$\delta F_1=0.$$

Thus

$$F_1\in Z^2(A,A).$$

更一般地，假设

$$F_1=\cdots=F_{n-1}=0$$

且 F_n 是首个非零系数，我们将 F_n 称为无穷小。再次比较结合律方程中 t^n 的系数可得

$$\delta F_n=0.$$

因此，无穷小始终是一个 Hochschild 2-余循环。

2.2 形式变形的等价性

定义 2.2。 如果存在一个形式 $K[[t]]$-线性自同构，则称两个形式变形 μ_t 和 ν_t 是等价的

$$\phi_t = \mathrm{id}_A + t\phi_1 + t^2\phi_2 + \cdots$$

of $A[[t]]$ *such that*

$$\nu_t = \phi_t \, \mu_t \, (\phi_t^{-1} \otimes \phi_t^{-1}).$$

由于 ϕ_t 的常数项是 id_A，形式逆

$$\phi_t^{-1} = \mathrm{id}_A + t\psi_1 + t^2\psi_2 + \cdots$$

存在且唯一。
假设

$$\mu_t = \mu + tF_1 + t^2F_2 + \cdots$$

and

$$\nu_t = \mu + tG_1 + t^2G_2 + \cdots .$$

将等价关系展开到一阶，得到

$$G_1 = F_1 - \delta\phi_1.$$

因此,

$$[G_1] = [F_1] \in H^2(A, A).$$

因此，一阶项的 Hochschild 上同调类是该变形等价类的不变量。

如果 $F_1 = 0$，该变形仍可能是非平凡的，其第一个非零项出现在某个更高的阶。下面的引理表明，作为首项出现的余边界可以通过形式变量变换消去。

引理 2.3（消去引理）。 设

$$\mu_t = \mu + t^nF_n + t^{n+1}F_{n+1} + \cdots$$

并且

$$F_n = \delta q$$

对于某个 $q \in C^1$（A、 A）。定义

$$\phi_t = \mathrm{id}_A + t^nq.$$

那么，等价变形

$$\mu_t' = \phi_t\mu_t(\phi_t^{-1} \otimes \phi_t^{-1})$$

没有次数为 n的项；也就是说,

$$\mu_t' = \mu + O(t^{n+1}).$$

证明。 将 ϕ_t 的形式逆写成以下形式

$$\phi_t^{-1} = \mathrm{id}_A + t^1\psi_1 + t^2\psi_2 + \cdots$$

利用

$$\phi_t\phi_t^{-1} = \mathrm{id}_A$$

并比较 t^i 的系数，可得

$$\psi_i = 0 \ for \ i < n \ and \ q + \psi_n = 0.$$

因此

$$\phi_t^{-1} = \mathrm{id}_A - t^n q + O(t^{n+1}).$$

代入变换后的乘法，得到

$$\mu_t' = (\mathrm{id}_A + t^n q)\big(\mu + t^n F_n + O(t^{n+1})\big) \circ \big((\mathrm{id}_A - t^n q + O(t^{n+1})) \otimes (\mathrm{id}_A - t^n q + O(t^{n+1}))\big).$$

只有次数为 n 的项是相关的。对于 $a,\ b \in A,\ t^n$ 的系数为

$$F_n(a,b) + q(ab) - q(a)b - aq(b).$$

根据 Hochschild 微分的定义，

$$(\delta q)(a,b) = aq(b) - q(ab) + q(a)b,$$

因此

$$q(ab) - q(a)b - aq(b) = -\delta q(a,b).$$

因此， μ_t' 中 t^n 的系数为

$$F_n - \delta q = 0.$$

Thus

$$\mu_t' = \mu + O(t^{n+1}),$$

如所要求。 □

消去引理表明，适当的形式变量变换可以消去变形在指定阶上出现的余边界。为了连续应用这一思想，我们需要跟踪形式幂级数的阶，以及连续变量变换对其高阶项的影响。这自然引出了t-进观点。因此，在回到 Gerstenhaber 命题 1 之前，我们先介绍必要的 t-进框架。

3 t-进框架

设 V 是一个 K-向量空间。我们使用形式幂级数空间

$$V[[t]] = \left\{ \sum_{k\geq 0} v_k t^k : v_k \in V \right\}.$$

对于一个非零级数

$$x = \sum_{k \geq 0} v_k t^k,$$

定义

$$\operatorname{ord}(x) = \min\{k \geq 0 : v_k \neq 0\},$$

并令 $\operatorname{ord}(0) = +\infty$。定义

$$d(x, y) = 2^{-\operatorname{ord}(x-y)}.$$

引理 3.1. 函数 d 是 $V[[t]]$上的超度量。

证明。 唯一非平凡之处是强三角不等式。对于 $x, y, z \in V[[t]]$，我们有

$$x - z = (x - y) + (y - z).$$

因此，利用

$$\operatorname{ord}(u + v) \geq \min\{\operatorname{ord}(u), \operatorname{ord}(v)\}, \tag{1}$$

我们得到

$$\operatorname{ord}(x - z) \geq \min\{\operatorname{ord}(x - y), \operatorname{ord}(y - z)\}.$$

现在，如果 f 是递减函数，那么

$$f(\min\{a, b\}) = \max\{f(a), f(b)\}.$$

取 $f(r) = 2^{-r}$，它是递减的，因此我们有

$$\begin{aligned} d(x, z) &= 2^{-\operatorname{ord}(x-z)} \\ &\leq 2^{-\min\{\operatorname{ord}(x-y), \operatorname{ord}(y-z)\}} \\ &= \max\left\{2^{-\operatorname{ord}(x-y)}, 2^{-\operatorname{ord}(y-z)}\right\} \\ &= \max\{d(x, y), d(y, z)\}. \end{aligned}$$

其余的度量性质显而易见。因此， d 满足强三角不等式，因而是一个超度量。

□

3.1 完备性

命题 3.2。 度量空间 $(V[[t]], d)$ 是完备的。

证明。 设 (x_i) 是 $V[[t]]$ 中的柯西序列，其中

$$x_i = \sum_{k \geq 0} x_{i,k} t^k.$$

Fo对于每个 $N \geq 0$，由于 (x_i) 是柯西序列，存在 I_N，使得对于所有 $i,\ j \geq I_N$，

$$d(x_i, x_j) < 2^{-N}.$$

根据 d 的定义，这意味着

$$2^{-\operatorname{ord}(x_i-x_j)} < 2^{-N},$$

因此

$$\operatorname{ord}(x_i - x_j) > N.$$

由于阶取整数值，我们有

$$\operatorname{ord}(x_i - x_j) \geq N + 1.$$

因此，

$$x_i \equiv x_j \pmod{t^{N+1}}.$$

特别地， x_i和 x_j的系数在所有次数 0、1、.....、 N上都相同。因此，对每个固定的 k，系数$x_{i,\ k}$ 最终会保持不变。令其最终值为 v_k，并定义

$$x = \sum_{k\geq 0} v_k t^k \in V[[t]].$$

对任意 $N \geq 0$，当 i充分大时， x_i和 x的系数在次数 0、1、.....、 N上相同。因此

$$\operatorname{ord}(x_i - x) \geq N + 1,$$

从而

$$d(x_i, x) \leq 2^{-(N+1)}.$$

由于 N是任意的，因此可得

$$x_i \longrightarrow x.$$

因此，$(V[[t]],\ d)$ 是完备的。 □

4 形式自同态与无限复合

现在将把前述完备性结果应用于系数为线性自同态的形式幂级数。

Put

$$\mathcal{E} = \operatorname{Hom}_K(A, A)[[t]].$$

因此， $\mathcal{E}$ 的一个元素是形式级数 $\Phi = \sum_{r\geq 0} \Phi_r t^r,\quad \Phi_r \in \mathbf{Hom}_K(A,\ A)$

若 $p = \sum_{r\geq 0} p_r t^r$，且 $q = \sum_{s\geq 0} q_s t^s$，则在 $\mathcal{E}$ 上定义复合如下

$$p \circ q = \sum_{k\geq 0} \left(\sum_{r+s=k} p_r \circ q_s \right) t^k.$$

上一节引入的度量在 $\mathcal{E}$ 上赋予了一种自然的拓扑。我们首先记录控制复合的基本估计。

引理 4.1。对于 p， $q \in \mathcal{E}$，

$$\operatorname{ord}(p \circ q) \geq \operatorname{ord}(p) + \operatorname{ord}(q).$$

证明。 如果 $k < \mathbf{ord}(p) + \mathbf{ord}(q)$ 且 $r + s = k$，那么 $r < \mathbf{ord}(p)$ 或 $s < \mathbf{ord}(q)$。因此 $p_r = 0$ 或 $q_s = 0$。所以，次数小于 $\mathbf{ord}(p) + \mathbf{ord}(q)$ 的每个系数都为零。 □

我们还将反复使用初等不等式1

$$\operatorname{ord}(f + g) \geq \min\{\operatorname{ord}(f), \operatorname{ord}(g)\}.$$

特别地，如果 $\mathbf{ord}(f_i)$ 和 $\mathbf{ord}(g_i)$ 都趋于 $+\infty$，那么

$$\operatorname{ord}(f_i + g_i) \longrightarrow +\infty.$$

进一步根据张量积的逐系数定义，我们有

$$ord(\psi \otimes \psi') \geq ord(\psi) + ord(\psi').$$

4.1 复合的连续性

命题 4.2。如果 $p_i \to p$ 且 $q_i \to q$ 在 $\mathcal{E}$中，则

$$p_i \circ q_i \longrightarrow p \circ q.$$

证明。我们有

$$p_i \circ q_i - p \circ q = (p_i - p) \circ q_i + p \circ (q_i - q).$$

由于

$$p_i \to p,$$

我们有

$$\operatorname{ord}(p_i - p) \longrightarrow +\infty.$$

此外，由于 $q_i \in \mathcal{E} = \mathbf{Hom}_K(A,\ A)[[t]]$，我们有

$$\operatorname{ord}(q_i) \geq 0.$$

因此，由复合的阶估计，

$$\operatorname{ord}\big((p_i - p) \circ q_i\big) \geq \operatorname{ord}(p_i - p) + \operatorname{ord}(q_i) \geq \operatorname{ord}(p_i - p),$$

从而

$$\operatorname{ord}\big((p_i - p) \circ q_i\big) \longrightarrow +\infty.$$

同样地，

$$\operatorname{ord}(q_i - q) \longrightarrow +\infty,$$

并且由于 $\mathbf{ord}(p) \geq 0$，

$$\operatorname{ord}\big(p \circ (q_i - q)\big) \geq \operatorname{ord}(p) + \operatorname{ord}(q_i - q) \geq \operatorname{ord}(q_i - q).$$

Thus

$$\operatorname{ord}\big(p \circ (q_i - q)\big) \longrightarrow +\infty.$$

使用

$$\operatorname{ord}(f+g) \geq \min\{\operatorname{ord}(f), \operatorname{ord}(g)\},$$

我们得到

$$\operatorname{ord}\big(p_i \circ q_i - p \circ q\big) \longrightarrow +\infty.$$

因此

$$p_i \circ q_i \longrightarrow p \circ q.$$

□

4.2 求逆的连续性

命题 4.3。设

$$\Phi_i \longrightarrow \Phi$$

属于 $\mathcal{E}$，并设每个 Φ_i 都具有以下形式

$$\Phi_i = \mathrm{id}_A + O(t).$$

Then

$$\Phi_i^{-1} \longrightarrow \Phi^{-1}.$$

证明。记

$$\Phi = \mathrm{id}_A + \sum_{m \geq 1} \Phi_m t^m$$

and

$$\Phi^{-1} = \mathrm{id}_A + \sum_{m \geq 1} \Psi_m t^m.$$

由于

$$\Phi \circ \Phi^{-1} = \mathrm{id}_A,$$

我们有

$$\left(\mathrm{id}_A + \sum_{m \geq 1} \Phi_m t^m\right) \circ \left(\mathrm{id}_A + \sum_{m \geq 1} \Psi_m t^m\right) = \mathrm{id}_A\,.$$

比较 t^k 的系数，对于 $k \geq 1$，得到

$$\Psi_k + \sum_{r=1}^{k} \Phi_r \circ \Psi_{k-r} = 0.$$

因此

$$\Psi_k = -\sum_{r=1}^{k} \Phi_r \circ \Psi_{k-r}.$$

特别是,

$$\Psi_1 = -\Phi_1,$$

并且，更一般地说， Ψ_k 由以下递推确定

$$\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_k.$$

因此，如果

$$\Phi = \mathrm{id}_A + \sum_{m\geq 1} \Phi_m t^m$$

and

$$\widetilde{\Phi} = \mathrm{id}_A + \sum_{m\geq 1} \widetilde{\Phi}_m t^m$$

满足

$$\Phi_m = \widetilde{\Phi}_m \qquad \text{for } 1 \leq m \leq N,$$

那么它们的逆

$$\Phi^{-1} = \mathrm{id}_A + \sum_{m\geq 1} \Psi_m t^m$$

and

$$\widetilde{\Phi}^{-1} = \mathrm{id}_A + \sum_{m\geq 1} \widetilde{\Psi}_m t^m$$

满足

$$\Psi_m = \widetilde{\Psi}_m \qquad \text{for } 1 \leq m \leq N.$$

事实上，这可通过对 m 作归纳法得到。对于 $m = 1$,

$$\Psi_1 = -\Phi_1 = -\widetilde{\Phi}_1 = \widetilde{\Psi}_1.$$

假设

$$\Psi_j = \widetilde{\Psi}_j \qquad \text{for } 1 \leq j < m.$$

Then

$$\begin{aligned}\Psi_m &= -\sum_{r=1}^{m} \Phi_r \circ \Psi_{m-r} \\ &= -\sum_{r=1}^{m} \widetilde{\Phi}_r \circ \widetilde{\Psi}_{m-r} \\ &= \widetilde{\Psi}_m,\end{aligned}$$

~ ~，因为 $\Phi_r = \Phi_r$ 对于 $r \leq m$ 成立，并且根据归纳假设， $\Psi_{m-r} = \Psi_{m-r}$ 对于 $m-r < m$ 成立。

因此，如果

$$\Phi \equiv \widetilde{\Phi} \pmod{t^{N+1}},$$

then

$$\Phi^{-1} \equiv \widetilde{\Phi}^{-1} \pmod{t^{N+1}}.$$

现在将其应用于序列（Φ_i）。由于

$$\Phi_i \longrightarrow \Phi,$$

对于每个 $N \geq 0$，都存在 I_N，使得对于所有 $i \geq I_N$,

$$d(\Phi_i, \Phi) < 2^{-N}.$$

因此

$$\Phi_i \equiv \Phi \pmod{t^{N+1}}.$$

根据上述逐系数论证，

$$\Phi_i^{-1} \equiv \Phi^{-1} \pmod{t^{N+1}}.$$

因此

$$\operatorname{ord}(\Phi_i^{-1} - \Phi^{-1}) \geq N+1,$$

从而

$$d(\Phi_i^{-1}, \Phi^{-1}) \leq 2^{-(N+1)}.$$

由于 N 是任意的，因此可得

$$\Phi_i^{-1} \longrightarrow \Phi^{-1}.$$

□

4.3 作用于乘法的连续性

现在我们考察形式自同态对形式乘法的作用。虽然$\mathcal{E}$ 由 A的形式自同态组成，但乘法是从 $A \otimes A$ 到 A的双线性映射所构成的形式级数。因此，我们引入

$$\mathcal{M} = Hom_K(A \otimes A, A)[[t]].$$

因此，

$$\mu \in \mathcal{M}, \qquad \phi, \psi, \psi' \in \mathcal{E}.$$

$\mathcal{M}$配备了与上文相同的 t-进度量和阶。

For

$$\phi \in \mathcal{E}, \qquad \mu \in \mathcal{M}, \qquad \psi, \psi' \in \mathcal{E},$$

定义

$$T(\phi, \mu, \psi, \psi') = \phi \circ \mu \circ (\psi \otimes \psi').$$

等价地，对于 $a,\ b \in A$,

$$T(\phi, \mu, \psi, \psi')(a, b) = \phi\big(\mu(\psi(a), \psi'(b))\big).$$

命题4.4。设

$$\phi_i \to \phi, \qquad \mu_i \to \mu, \qquad \psi_i \to \psi, \qquad \psi_i' \to \psi'$$

分别在 $\mathcal{E}$、 $\mathcal{M}$、 $\mathcal{E}$和 $\mathcal{E}$中。则

$$T(\phi_i, \mu_i, \psi_i, \psi_i') \longrightarrow T(\phi, \mu, \psi, \psi').$$

证明。 为方便起见，记

$$T_i = T(\phi_i, \mu_i, \psi_i, \psi_i')$$

and

$$T = T(\phi, \mu, \psi, \psi').$$

We c通过每次改变一个因子来比较 T_i 和 T。我们得到分解式 n

$$T_i - T = T(\phi_i - \phi, \mu_i, \psi_i, \psi_i') + T(\phi, \mu_i - \mu, \psi_i, \psi_i') + T(\phi, \mu, \psi_i - \psi, \psi_i') + T(\phi, \mu, \psi, \psi_i' - \psi').$$

事实上，展开右侧可得

$$(\phi_i-\phi)\mu_i(\psi_i\otimes\psi_i')+\phi(\mu_i-\mu)(\psi_i\otimes\psi_i')+\phi\mu\big((\psi_i-\psi)\otimes\psi_i'\big)+\phi\mu\big(\psi\otimes(\psi_i'-\psi')\big),$$

中间项相互抵消，剩下

$$\phi_i\mu_i(\psi_i\otimes\psi_i')-\phi\mu(\psi\otimes\psi').$$

现在我们估计每一项的阶。根据复合和张量积的阶估计，我们有

$$\begin{aligned}\operatorname{ord}\big(T(\phi_i-\phi,\mu_i,\psi_i,\psi_i')\big)\geq\ &\operatorname{ord}(\phi_i-\phi)+\operatorname{ord}(\mu_i)\\&+\operatorname{ord}(\psi_i)+\operatorname{ord}(\psi_i').\end{aligned}$$

类似地，

$$\begin{aligned}\operatorname{ord}\big(T(\phi,\mu_i-\mu,\psi_i,\psi_i')\big)\geq\ &\operatorname{ord}(\phi)+\operatorname{ord}(\mu_i-\mu)\\&+\operatorname{ord}(\psi_i)+\operatorname{ord}(\psi_i'),\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}\operatorname{ord}\big(T(\phi,\mu,\psi_i-\psi,\psi_i')\big)\geq\ &\operatorname{ord}(\phi)+\operatorname{ord}(\mu)\\&+\operatorname{ord}(\psi_i-\psi)+\operatorname{ord}(\psi_i'),\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\operatorname{ord}\big(T(\phi,\mu,\psi,\psi_i'-\psi')\big)\geq\ &\operatorname{ord}(\phi)+\operatorname{ord}(\mu)\\&+\operatorname{ord}(\psi)+\operatorname{ord}(\psi_i'-\psi').\end{aligned}$$

由于

$$\phi_i\to\phi,\qquad\mu_i\to\mu,\qquad\psi_i\to\psi,\qquad\psi_i'\to\psi',$$

我们有

$$\begin{aligned}\operatorname{ord}(\phi_i-\phi)&\longrightarrow+\infty,\\\operatorname{ord}(\mu_i-\mu)&\longrightarrow+\infty,\\\operatorname{ord}(\psi_i-\psi)&\longrightarrow+\infty,\end{aligned}$$

and

$$\operatorname{ord}(\psi_i'-\psi')\longrightarrow+\infty.$$

此外，其余所有因子的阶均非负，因为它们是关于 t的非负次幂形式幂级数。因此，分解中的四项的阶都趋于 $+\infty$。

使用

$$\operatorname{ord}(f+g)\geq\min\{\operatorname{ord}(f),\operatorname{ord}(g)\},$$

我们得到

$$\operatorname{ord}(T_i-T)\longrightarrow+\infty.$$

因此，

$$T(\phi_i,\mu_i,\psi_i,\psi_i')\longrightarrow T(\phi,\mu,\psi,\psi').$$

□

4.4 初等变换的无限复合

前面的结果使我们能够理解一系列无限的初等形式变换。假设

$$\phi_i = id_A + q_i t^{m_i}, \qquad q_i \in Hom_K(A, A),$$

其中

$$1 \leq m_0 < m_1 < m_2 < \cdots .$$

将部分复合定义为

$$\Phi_0 = id_A, \qquad \Phi_i = \phi_{i-1} \circ \cdots \circ \phi_1 \circ \phi_0 \quad (i \geq 1).$$

严格递增的正指数 m_i 确保每次后续变换只影响 t 的逐渐更高次幂。下面的引理对此作出精确说明。

引理 4.5。 对于每个 $i \geq 1$，存在

$$f_0, f_1, \ldots, f_{i-1} \in Hom_K(A, A)$$

使得

$$\Phi_i = \mathrm{id}_A + \sum_{r=0}^{i-1} f_r t^{m_r} + E_i,$$

其中

$$\mathrm{ord}(E_i) > m_{i-1}.$$

证明。 我们对 i 进行归纳。

对于 $i = 1$，我们有

$$\Phi_1 = \phi_0 = \mathrm{id}_A + q_0 t^{m_0}.$$

因此，所需形式成立，其中

$$f_0 = q_0$$

and

$$E_1 = 0.$$

现在假设，对于某个 $i \geq 1$,

$$\Phi_i = \mathrm{id}_A + \sum_{r=0}^{i-1} f_r t^{m_r} + E_i,$$

其中

$$\mathrm{ord}(E_i) > m_{i-1}.$$

由于

$$\Phi_{i+1} = \phi_i \circ \Phi_i,$$

我们有

$$\Phi_{i+1} = (\mathrm{id}_A + q_i t^{m_i}) \circ \left(\mathrm{id}_A + \sum_{r=0}^{i-1} f_r t^{m_r} + E_i \right).$$

展开复合可得

$$\Phi_{i+1} = \mathrm{id}_A + \sum_{r=0}^{i-1} f_r t^{m_r} + q_i t^{m_i} + E_{i+1},$$

其中 E_{i+1} 包含所有其余项。

事实上，由.....产生的每一项

$$q_i t^{m_i} \circ f_r t^{m_r}$$

其阶为

$$m_i + m_r > m_i,$$

类似地

$$\mathrm{ord}(q_i t^{m_i} \circ E_i) > m_i.$$

再结合

$$\mathrm{ord}(E_i) > m_{i-1}$$

and

$$m_i > m_{i-1},$$

可得

$$\mathrm{ord}(E_{i+1}) > m_i.$$

Thus

$$\Phi_{i+1} = \mathrm{id}_A + \sum_{r=0}^{i} f_r t^{m_r} + E_{i+1},$$

with

$$f_i = q_i$$

and

$$\mathrm{ord}(E_{i+1}) > m_i.$$

归纳法至此完成。 □

引理 4.6。 序列 (Φ_i) 在 $\mathcal{E}$ 中是柯西序列。

证明。 设已给定 $N \geq 0$ 。由于

$$m_0 < m_1 < m_2 < \cdots$$

是一个严格递增的非负整数序列，因此有

$$m_i \longrightarrow +\infty.$$

选择 I 充分大，使得

$$m_{I-1} > N.$$

对于 $i,\ j \geq I$，前面的引理给出

$$\Phi_i = \mathrm{id}_A + \sum_{r=0}^{i-1} f_r t^{m_r} + E_i$$

with

$$\mathrm{ord}(E_i) > m_{i-1} \geq m_{I-1} > N,$$

同样地

$$\Phi_j = \mathrm{id}_A + \sum_{r=0}^{j-1} f_r t^{m_r} + E_j$$

with

$$\mathrm{ord}(E_j) > m_{j-1} \geq m_{I-1} > N.$$

由于 $i,\ j \geq I,\ \Phi_i$ 和 Φ_j 的次数不超过 N 的系数相同。因此

$$\Phi_i \equiv \Phi_j \pmod{t^{N+1}},$$

因此

$$\mathrm{ord}(\Phi_i - \Phi_j) > N.$$

由此可得

$$d(\Phi_i, \Phi_j) < 2^{-N}.$$

由于 N 是任意的，(Φ_i) 是 $\mathcal{E}$ 中的柯西序列。 □

命题 4.7。 存在唯一的形式自同态

$$\Phi \in \mathcal{E}$$

使得

$$\Phi_i \longrightarrow \Phi.$$

此外，

$$\Phi = \mathrm{id}_A + \sum_{r\geq 0} f_r t^{m_r},$$

并且 Φ 可逆，且满足

$$\Phi_i^{-1} \longrightarrow \Phi^{-1}.$$

证明。 根据前述命题，(Φ_i) 是一个柯西序列，位于

$$\mathcal{E} = Hom_K(A, A)[[t]].$$

此前建立的完备性结果表明，对于每个固定的幂 t^k，Φ_i 中 t^k 的系数最终保持不变。因此，这些稳定的系数定义了一个元素

$$\Phi \in \mathcal{E}$$

and

$$\Phi_i \longrightarrow \Phi.$$

更具体地说，根据前述引理，对于每个 i,

$$\Phi_i = \mathrm{id}_A + \sum_{r=0}^{i-1} f_r t^{m_r} + E_i, \qquad \mathrm{ord}(E_i) > m_{i-1}.$$

因此，对于每个固定的 r，t^{m_r} 的系数最终等于 f_r。因此，该极限具有如下形式

$$\Phi = \mathrm{id}_A + \sum_{r\geq 0} f_r t^{m_r}.$$

Φ的唯一性源于这样一个事实： d 是一个度量。

由于每个 Φ_i 都具有如下形式

$$\Phi_i = \mathrm{id}_A + O(t),$$

极限也具有如下形式

$$\Phi = \mathrm{id}_A + O(t).$$

根据形式逆引理， Φ 因此可逆。

最后，根据前一小节中所证明的求逆的连续性，

$$\Phi_i^{-1} \longrightarrow \Phi^{-1}.$$

□

5 余边界的无穷消去与 Gerstenhaber 的命题1

现在我们回到第2.3节中给出的形式变形的消去过程（2）。令

$$\mu^{(0)} = \mu + \sum_{k\geq 1} F_k t^k$$

是乘法 μ 的单参数形式变形。

假设在消去过程的某个阶段，我们有

$$\mu^{(r)} = \mu + t^{m_r} F_{m_r} + O(t^{m_r+1}),$$

其中， F_{m_r} 是首个非零系数。结合律意味着

$$F_{m_r} \in Z^2(A, A).$$

If

$$[F_{m_r}] \neq 0 \in H^2(A, A),$$

于是消去过程停止。该变形已被转化为一个等价变形，其首个非零系数表示一个非零上同调类。

因此，剩下的情形是

$$[F_{m_r}] = 0.$$

Then

$$F_{m_r} = \delta q_r$$

对于某个

$$q_r \in Hom_K(A, A).$$

定义初等形式变换

$$\phi_r = \mathrm{id}_A + q_r t^{m_r}.$$

消去引理给出

$$\mu^{(r+1)} = \phi_r \mu^{(r)} (\phi_r^{-1} \otimes \phi_r^{-1}) = \mu + O(t^{m_r+1}).$$

因此，下一个非零项的阶严格大于 m_r。将其阶记为 m_{r+1}，我们有

$$m_{r+1} > m_r.$$

因此，如果消去过程不终止，我们便得到

$$m_0 < m_1 < m_2 < \cdots$$

以及一列初等变换

$$\phi_r = \mathrm{id}_A + q_r t^{m_r}.$$

5.1 无穷情形

假设　　消去过程无限继续。回顾部分复合　　s

$$\Phi_0 = \mathrm{id}_A, \qquad \Phi_i = \phi_{i-1} \circ \cdots \circ \phi_1 \circ \phi_0 \qquad (i \geq 1).$$

我们已经看到 (Φ_i) 是柯西序列，而由此建立的完备性和按系数构造因此给出一个形式自同态

$$\Phi \in \mathcal{E}$$

使得

$$\Phi_i \longrightarrow \Phi.$$

此外，

$$\Phi_i^{-1} \longrightarrow \Phi^{-1}.$$

接下来，我们将部分变换与连续乘法联系起来。对 i 使用归纳法，

$$\mu^{(i)} = \Phi_i \mu^{(0)} (\Phi_i^{-1} \otimes \Phi_i^{-1}).$$

事实上，当 $i = 0$ 时这是显然的。如果对 i 成立，那么

$$\begin{aligned} \mu^{(i+1)} &= \phi_i \mu^{(i)} (\phi_i^{-1} \otimes \phi_i^{-1}) \\ &= \phi_i \Phi_i \mu^{(0)} (\Phi_i^{-1} \otimes \Phi_i^{-1})(\phi_i^{-1} \otimes \phi_i^{-1}) \\ &= \Phi_{i+1} \mu^{(0)} (\Phi_{i+1}^{-1} \otimes \Phi_{i+1}^{-1}), \end{aligned}$$

因为

$$\Phi_{i+1} = \phi_i \circ \Phi_i.$$

另一方面，消去构造给出

$$\mu^{(i)} = \mu + O(t^{m_i}).$$

由于

$$m_i \longrightarrow +\infty,$$

我们有

$$\mathrm{ord}(\mu^{(i)} - \mu) \longrightarrow +\infty.$$

因此

$$\mu^{(i)} \longrightarrow \mu.$$

现在应用上一节所确立的乘法作用的连续性。从

$$\Phi_i \longrightarrow \Phi, \qquad \mu^{(0)} \longrightarrow \mu^{(0)}, \qquad \Phi_i^{-1} \longrightarrow \Phi^{-1},$$

我们得到

$$\mu^{(i)} = \Phi_i \mu^{(0)}(\Phi_i^{-1} \otimes \Phi_i^{-1}) \longrightarrow \Phi \mu^{(0)}(\Phi^{-1} \otimes \Phi^{-1}).$$

但我们已经证明

$$\mu^{(i)} \longrightarrow \mu.$$

由于该度量空间是豪斯多夫空间，极限是唯一的。因此

$$\mu = \Phi \mu^{(0)}(\Phi^{-1} \otimes \Phi^{-1}).$$

Thus

$$\mu^{(0)} = \Phi^{-1} \mu(\Phi \otimes \Phi),$$

因此，原始变形 $\mu^{(0)}$ 等价于原始乘法 μ。

因此，我们已经证明，只有当变形等价于未变形乘法时，才可能发生无限次消去。

5.2 Gerstenhaber 的命题1

现在，我们可以陈述一个适用于上述消去过程的 Gerstenhaber 命题 1 表述。

命题 5.1（Gerstenhaber，命题 1）。 设

$$\mu^{(0)} = \mu + \sum_{k \geq 1} F_k t^k$$

是结合代数 （A、 μ）的单参数形式变形。如果 $\mu^{(0)}$ 不等价于原始乘法 μ，那么 $\mu^{(0)}$ 等价于如下形式的变形

$$\bar{\mu} = \mu + t^n F_n + t^{n+1} F_{n+1} + \cdots,$$

其中

$$F_n \in Z^2(A, A) \qquad and \qquad [F_n] \neq 0 \in H^2(A, A).$$

证明。 设 m_0 是 $\mu^{(0)} - \mu$ 的首个非零系数的阶。结合律意味着

$$F_{m_0} \in Z^2(A, A).$$

If

$$[F_{m_0}] \neq 0,$$

那么所要求的形式已经得到。

反之，假设

$$[F_{m_0}] = 0.$$

Then

$$F_{m_0} = \delta q_0$$

对于某个 $q_0 \in Hom_K(A,\ A)$，而消去引理给出了一个等价的变形 n

$$\mu^{(1)} = \mu + O(t^{m_0+1}).$$

如果 $\mu^{(1)} - \mu$ 的首个非零系数对应的上同调类非零，过程就会停止，从而得到所需的形式。

Ot否则，可以重复同样的论证。因此有两种可能。

第一，过程在有限步后终止。在最后阶段，首个非零系数是一个余循环，且其上同调类非零，从而得到所需的变形。

第二，过程无限继续。在这种情况下，各阶满足

$$m_0 < m_1 < m_2 < \cdots,$$

而前述无限消去论证表明，原变形 $\mu^{(0)}$ 等价于原始乘法 μ。

由于根据假设，$\mu^{(0)}$ 不等价于 μ，第二种情况是不可能的。因此，消去过程必须在有限步之后终止，所得的等价变形具有如下形式

$$\bar{\mu} = \mu + t^n F_n + t^{n+1} F_{n+1} + \cdots,$$

with

$$F_n \in Z^2(A,A) \qquad \text{and} \qquad [F_n] \neq 0 \in H^2(A,A).$$

□

推论 5.2。若

$$H^2(A,A) = 0,$$

那么每个单参数形式变形都等价于原始乘法。因此，A相对于单参数形式变形是刚性的。

证明。设 $\mu^{(0)}$ 是一个不等价于 μ的形式变形。根据 Gerstenhaber 命题 1，它等价于一个变形，其中其首个非零系数 F_n 满足

$$[F_n] \neq 0 \in H^2(A,A).$$

这与

$$H^2(A,A) = 0.$$

因此，每个形式变形都等价于原始乘法。 □

注 5.3。反之一般不成立：H^2（A, A）不为零本身并不意味着存在非平凡形式变形。非零的上同调类未必能够延拓为完整的变形。

参考文献

[1] M. Gerstenhaber，结合环的上同调结构，《数学年刊》78（1963），267–288。

[2] M. Gerstenhaber，环与代数的变形，《数学年刊》**79**（1964），59–103。[3] M. Gerstenhaber，环与代数的变形：II，《数学年刊》**84**（1966），1–19。[4] M. Gerstenhaber，环与代数的变形：III，《数学年刊》**88**（1968），1–34。[5] M. Gerstenhaber，环与代数的变形：IV，《数学年刊》**99**（1974），257–276。[6] G. Hochschild，结合代数的上同调群，《数学年刊》，第46卷，第1期，第58–67页，1945年。