arXiv:2611.32007v1 [math.FA] 24 Nov 2026

调和 Bergman 空间上 Toeplitz 算子乘积有限和的有限秩性与紧性

PUYU CUI 和 ZENGYONG HUANG*

Abstract. 在仅假设完整调和符号具有有界性的情况下，我们完整刻画了单位圆盘的调和 Bergman 空间上 Toeplitz 算子乘积有限和的有限秩性与紧性。对适当的符号进行反射，可将 Toeplitz 乘积和小 Hankel 算子乘积和化为 Toeplitz 乘积和。对于按任一顺序排列的混合 Toeplitz 算子乘积与小 Hankel 算子乘积的和，右乘一个固定的酉反射可实现相应的化归。这些化归保持秩与紧性不变。

在选取单变量有理函数域上的基后，所得系数多项式满足符号恒等式与三次整除条件；有限秩性可由此刻画。我们还得到了精确的秩公式。紧性可由对角符号和的边界消失，以及当双曲圆盘的中心趋近边界时，固定半径双曲圆盘上的中心化符号张量一致衰减来刻画。对于 $N \geq 1$乘积和，一个等价的紧性判据使用符号分量不超过 N 阶的加权导数。当 N 为偶数时， N阶的条件不可省略。有限秩的混合交换子必为零。对于非零有限秩的小 Hankel 交换子，我们用一个有界解析函数及其有界倒数来刻画，且二者都具有有理原函数。

1. Introduction

我们研究调和 Bergman 空间上具有有界调和符号的 Toeplitz 乘积的有限和。对于_$\mathbb{D}$ 上的函数 f，记 $(Uf)(z) = f(\bar{z})$ 为反射，记 $f(z) = f(z)$ 为逐点共轭。符号为α 的小 Hankel 算子是 $h_\alpha = T_\alpha U$ [16]。乘积分为两组： TT 和 hh 项的和，在对适当的符号进行反射后，是 Toeplitz 乘积和； Th和 hT 项的和，在右乘同一个酉 U后，变为 Toeplitz 乘积和。这两种约化都保持秩和紧性（注 3.5）。对于有界调和符号，我们的判据分别适用于这两组。它们无法对任意混合情形 $D_0 + D_1U$ 进行分类，其中 D_0, D_1 是 Toeplitz 乘积和。

在解析Bergman空间上，Luecking 定理 [21] 排除了具有有界函数符号的非零有限秩 Toeplitz 算子。Guo、Sun 和 Zheng[14] 建立了交换子和半交换子的有限秩刚性，其对象为有界调和符号，以及形如 $H_g^* H_f$ 的大 Hankel 算子乘积之和。Choe、Koo 和 Lee [7] 刻画了有限和何时

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号：47B35；次要分类号：47B07，30H20。
Key words and phrases. 调和 Bergman 空间，Toeplitz 算子，小 Hankel 算子，有限秩，紧性。*通讯作者。

解析Bergman空间上带有有界调和符号的 Toeplitz 乘积为零、具有有限秩或为紧。关于解析空间上的混合交换性，Wang、Zhang 和 Zhao [22] 研究了形如 $\bar{p}+\varphi$ 的 Toeplitz符号，其中 p 为多项式，φ 为有界解析函数，以及有界解析的小 Hankel符号。Axler 和 Zheng [1]证明，带有有界符号的有限个有限 Toeplitz 乘积之和为紧，当且仅当其 Berezin变换在边界处趋于零。

关于 Hardy 空间、Dirichlet 空间和 Fock空间的相关结果可见于 [18, 17,19, 2]。

调和 Bergman 空间同时包含解析函数和余解析函数。例如，表达式 $T_z^2-T_{z^2}T_1$ 在解析Bergman空间上为零。在调和 Bergman 空间上，它的秩为一，并将 $\bar{z}$ 映射到 $-z/6$，如 Dong and Zhou 的单项式族 [11]所示（见下文中的（2.14））。Guo 和 Zheng [16]利用解析与余解析分块分解研究了调和 Bergman 空间上的 Toeplitz 代数和汉克尔代数，并描述了符号在闭圆盘上连续时相应的商代数。Choe、Koo 和 Na [8]在边界正则性假设下，获得了实球上的调和 Bergman空间中 Toeplitz 乘积的有限秩刚性结果。

Guan 和 Lu [13] 研究了具有径向符号和拟齐次符号的 Toeplitz 算子与小 Hankel算子的乘积及其交换性。Dong and Zhou [11]对若干类拟齐次交换子和广义半交换子给出了有限秩分类及秩公式。拟齐次性限制了角向依赖，但允许调和类之外的径向因子；因此，这些假设与有界调和性一般不可比较。对于有界调和符号，Zhang 和 Zhao [23] 得到了混合交换性的必要条件和充分条件；当 Toeplitz 符号是解析的，或调和的 Hankel 符号具有实泰勒系数时，还给出了等价刻画。这些工作是第4节所研究的混合交换子的具体先行研究。

本文延续了 Cui、Huang、Lu和Zu [10], 对有界调和符号的研究；该文对有限秩Toeplitz交换子进行了分类，并通过加权导数条件刻画其紧性。我们使用其中的加权核恒等式和仿射缩放方法，并在相关证明中明确指出具体引用之处。本文新增的步骤涉及任意多个乘积项之间的抵消。引理 2.4 根据系数在有理函数域上计算组合核的秩。命题 3.1 通过完整符号张量的加性恒等式，刻画半平面上的一般零和。将其应用于边界极限，可得一个紧性判据，其中涉及每个符号分量最高至 N 阶的导数。注 3.6 表明，即使对于偶数 N，这一界也是尖锐的。

调和空间中的紧性需要特别谨慎。Choe 和 Nam [9]研究了调和 Bergman 半空间上的有限托普利兹乘积和，并解释了为什么仅凭 Berezin变换无法给出一般的紧性检验：它会湮灭 Toeplitz算子的每个交换子。Liu 和 Lin [20]构造了一个包含有界符号Toeplitz算子的弱局部化算子代数，并利用邻近点处的归一化核给出了一个紧性判据。这一局部判据为我们的边界分析提供了算子理论输入。

设 $dA = \pi^{-1} dx\, dy$ 在单位圆盘 $\mathbb{D}$上，并令 Q 为从$L^2(\mathbb{D}, dA)$到复调和Bergman空间 $b^2(\mathbb{D})$的正交投影。记 $A^2(\mathbb{D})$为解析Bergman空间，并将 $zA^2(\mathbb{D})$记为其中在原点处取零的函数所构成的子空间。令 P、 P_0、 $\bar{P}$和 $\bar{P}_0$分别为从 $L^2(\mathbb{D}, dA)$到$A^2(\mathbb{D})$、 $zA^2(\mathbb{D})$、 $A^2(\mathbb{D})$和 $zA^2(\mathbb{D})$的正交投影。由于 $E_0 u = \langle u, 1\rangle 1$，我们有

$$P = P_0 + E_0, \qquad \bar{P} = \bar{P}_0 + E_0, \qquad Q = P + \bar{P}_0.$$

解析Bergman核为 $K_w(z) = \frac{1}{(1 - z\bar{w})^2}$, $w \in \mathbb{D}$。

对于 $\alpha \in L^\infty(\mathbb{D}, dA)$，令

$$T_\alpha = Q M_\alpha|_{b^2(\mathbb{D})}, \mathsf{T}_\alpha = P M_\alpha|_{A^2(\mathbb{D})}$$

分别表示调和 Toeplitz 算子和解析 Toeplitz 算子。在全文中，我们用 M_α 表示符号为 α的乘法算子。令 $h^\infty(\mathbb{D})$ 表示有界复值调和函数空间。

对于一个整数 $N \geq 1$，考虑

$$D = \sum_{j=1}^{N} T_{\varphi_j} T_{\psi_j}, \qquad \varphi_j, \psi_j \in h^\infty(\mathbb{D}). \tag{1.1}$$

1.1. 有限秩刻画。 对于（1.1）中的 D 的符号，写出唯一的中心化分解

$$\begin{aligned} \varphi_j(z) &= \varphi_j(0) + f_j(z) + g_j(\bar{z}), \\ \psi_j(z) &= \psi_j(0) + p_j(z) + q_j(\bar{z}), \qquad 1 \leq j \leq N. \end{aligned} \tag{1.2}$$

四个解析分量在零点处均为零。完整调和符号的有界性意味着它们的解析分量属于 $H^2(\mathbb{D})$ [14, 第 3]节。

对于解析的 f，h，令 F_f，F_h，F_{fh}分别为 f，h，fh 的原函数，并规定它们在原点处的值为零。定义

$$\begin{aligned} \mathscr{R}_{f,h}(z,w) = (z-w) f(z) h(w) - f(z)\big(F_h(z) - F_h(w)\big) \\ - h(w)\big(F_f(z) - F_f(w)\big) + F_{fh}(z) - F_{fh}(w). \end{aligned} \tag{1.3}$$

此外，

$$\mathscr{R}_{f,h}(z,w) = \int_w^z \big(f(t) - f(z)\big)\big(h(t) - h(w)\big)\, dt, \tag{1.4}$$

因此 $\mathscr{R}_{f,\,h}(z,\ w)/(z-w)^3$ 可全纯地延拓到对角线两侧。

接下来，我们为任意有限分离表达式 $\mathcal{R}(z,\ w) = \sum_{\ell=1}^{N} \alpha_\ell(z)\gamma_\ell(w)$ 指定一个有限检验。在亚纯函数域中，分别选取其左因子和右因子在 $\mathbb{C}(z)$ 和 $\mathbb{C}(w)$ 上张成空间的基 $\xi_1, \ldots, \xi_r$和$\eta_1, \ldots, \eta_m$。记作

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(z,w) &= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{m} \mathcal{R}_{ij}(z,w)\xi_i(z)\eta_j(w), \\ \mathcal{R}_{ij}(z,w) &= \frac{P_{ij}(z,w)}{A(z)B(w)}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

此处 A, B 是公用的非零单变量多项式分母，且 $P_{ij} \in \mathbb{C}[z,w]$。有理性是指系数 $\mathcal{R}_{ij}$；式 (1.2) 中的基函数和解析分量不必是有理的。所需的检验条件是

$$(z-w)^3 \mid P_{ij}(z,w) \qquad \text{for every } i,j. \tag{RD3}$$

等价地，对于每个系数多项式，

$$P_{ij}(z,z)=0,\qquad (\partial_w P_{ij})(z,z)=0,\qquad (\partial_w^2 P_{ij})(z,z)=0.$$

零表达式满足此条件。引理 2.4 表明，该结果不取决于所选取的有限分离表达式、有理基或分母。一旦有理基确定，(RD3) 就是一个有限多项式检验。对于给定的解析族，找到这些有理基可能需要单独的论证。

若 (RD3) 成立，将其展开为

$$\frac{P_{ij}(z,w)}{(z-w)^3}=\sum_{s,t\ge 0} c_{is,jt}\,z^s w^t,$$

并令 $M_{\mathcal{R}}=(c_{is,\ jt})$ 为所得的有限系数矩阵，其中省略零行和零列。设秩为 $M_0=0$。

定理 1.1。 设 D 由(1.1)给出，其中心化分量如(1.2)所示。则当且仅当以下三个条件成立时，D 具有有限秩：

$$\text{(i)}\quad \sum_{j=1}^{N}\varphi_j(z)\psi_j(z)=0 \qquad (z\in\mathbb{D}), \tag{1.6}$$

$$\text{(ii)}\quad \sum_{j=1}^{N} f_j(z)q_j(w)=0 \qquad (z,w\in\mathbb{D}), \tag{1.7}$$

$$\text{(iii)}\quad \mathcal{R}_+=\textstyle\sum_{j=1}^{N}\mathscr{R}_{f_j,p_j},\quad \mathcal{R}_-=\sum_{j=1}^{N}\mathscr{R}_{g_j,q_j} \qquad \textit{both satisfy (RD3)}. \tag{1.8}$$

在这种情况下 $D1=0$，$D(zA^2(\mathbb{D})\subset zA^2(\mathbb{D})$ 以及 $D(zA^2(\mathbb{D})\subset zA^2(\mathbb{D})$。将$zA^2(\mathbb{D})$与 $zA^2(\mathbb{D})$通过 U对应起来，我们得到

$$\operatorname{rank} D=\operatorname{rank} M_{\mathcal{R}_+}+\operatorname{rank} M_{\mathcal{R}_-}, \tag{1.9}$$

$$D\simeq 0_{\mathbb{C}}\oplus\begin{pmatrix}0 & C_+\\ C_- & 0\end{pmatrix},\qquad \operatorname{rank} C_\pm=\operatorname{rank} M_{\mathcal{R}_\pm}. \tag{1.10}$$

连同零算子一起，*Dong and Zhou* 的单项式例子 [11]使两项和的秩可以取任意非负整数。

1.2. 紧性刻画。 对于 (1.1) 中的 Toeplitz 和 D，定义

$$\Phi(z,w)=\sum_{j=1}^{N}\varphi_j(z)\psi_j(w). \tag{1.11}$$

Set

$$\beta(z,w)=\operatorname{arctanh}\left|\frac{z-w}{1-\bar{w}z}\right|,\qquad D_\beta(a,R)=\{z:\beta(z,a)<R\},$$

并且对于固定的 $R>0$，定义

$$\omega_R(a)=\sup_{z,w\in D_\beta(a,R)}\left|\Phi(z,w)-\Phi(z,a)-\Phi(a,w)+\Phi(a,a)\right|. \tag{1.12}$$

选取 (1.1) 中有界调和符号的解析分解：

$$\varphi_j=F_j+\overline{G_j},\qquad \psi_j=H_j+\overline{K_j}. \tag{1.13}$$

这些大写字母分量用于紧致性判据；(1.2) 则使用中心反射分解。

定理 1.2. 对于(1.1)中的 *Toeplitz* 和 D，使用(1.11) 及分量(1.13)。以下陈述等价：

(i) D 是紧的；(ii)

对某个固定的 $R > 0$,

$$\Phi(a,a) \longrightarrow 0, \qquad \omega_R(a) \longrightarrow 0 \qquad (|a| \to 1); \tag{1.14}$$

(iii) (1.14) 对每个固定的 $R > 0$ 都成立；

(iv) 当 $|z| \to 1$ 时，以下所有边界极限均成立，且趋近方式不受限制：

$$\Phi(z,z) = \sum_{j=1}^{N} \varphi_j(z)\psi_j(z) \longrightarrow 0; \tag{1.15}$$

$$(1-|z|^2)^2 \sum_{j=1}^{N} F_j'(z)\overline{K_j'(z)} \longrightarrow 0; \tag{1.16}$$

并且，对每个 $i = 1$、...、N,

$$(1-|z|^2)^{i+1} \sum_{j=1}^{N} F_j^{(i)}(z)H_j'(z) \longrightarrow 0, \tag{1.17}$$

$$(1-|z|^2)^{i+1} \sum_{j=1}^{N} G_j^{(i)}(z)K_j'(z) \longrightarrow 0. \tag{1.18}$$

如果所有 φ_j, ψ_j 都连续延拓到 $\overline{\mathbb{D}}$，则紧性已由[16,定理 3.2]刻画：

$$D \text{ is compact} \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{N} \varphi_j\psi_j \Big|_{\partial\mathbb{D}} = 0.$$

事实上，其商映射将 T_α 映射到 $\alpha|_{\partial\mathbb{D}}$。在这种情况下，根据一致连续性，中心条件$\omega_R(a) \to 0$ 自动成立。定理 1.2 还涵盖有界调和符号，而无需假设边界值连续。

对于每个偶数 $N \geq 2$，定理 1.2 (iv) 中阶数为 N 的条件都不可省略；参见注 3.6。特别地，在该判据中，不存在一个与乘积项数量无关的固定导数截断可以满足要求。

2. Finite rank

本节使用 (1.2) 中的分量，证明 (1.1) 中 Toeplitz 和 D 的定理 1.1。我们首先引入以下记号。

对于在 z 中全纯且在 w中反全纯的核 $H(z,w)$，如果它具有有限分离秩，则称其为

$$H(z,w) = \sum_{j=1}^{n} A_j(z)\overline{B_j(w)}, \quad A_j, B_j \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}).$$

对于联合全纯核，有限分离秩意味着可表示为$H(z,\ w) = \sum_{j=1}^{N} A_j(z)B_j(w)$，其中包含全纯因子。我们采用适用于第二个变量中全纯性的约定。

注 2.1。 在定理 1.1 的条件 (i) 和 (ii) 下，第二个混合恒等式

$$\sum_{j=1}^{N} p_j(z)g_j(w) = 0 \qquad (z, w \in \mathbb{D}) \tag{2.1}$$

¯是自动成立的。将 $\partial\partial$ 应用于 (1.6) 得到

$$\sum_{j=1}^{N} \left[f_j'(z)q_j'(\bar{z}) + p_j'(z)g_j'(\bar{z})\right] = 0.$$

第一项和根据 (ii) 消失。对角线唯一性 [7, 引理 3.1] 给出$\sum_j p_j'(z)g_j'(w) = 0$。对两个变量都从 0 积分，并利用 $p_j(0) = g_j(0) = 0$，得到 (2.1)。交换两个混合恒等式后，同样的论证仍然成立。等价地，条件 (ii) 可以通过完整符号检验如下：

$$\sum_{j=1}^{N} (\partial_z\varphi_j)(z)(\partial_{\bar{z}}\psi_j)(z) = 0 \qquad (z \in \mathbb{D}). \tag{2.2}$$

为后文使用，我们回顾 [10, 引理 2.4 及命题 2.5]的证明所得到的一个推论。对于 $G = \sum_{\ell=1}^{L} \alpha_\ell\gamma_\ell$ 满足 $\alpha_\ell, \overline{\gamma}_\ell \in H^2(\mathbb{D})$，令

$$\mathcal{W}_G(z, w) = \int_{\mathbb{D}} \frac{G(\xi)}{(1 - z\bar{\xi})^2(1 - \bar{w}\xi)^2}\, dA(\xi).$$

Then

$$(1 - z\bar{w})^4\mathcal{W}_G(z, w) \text{ has finite separation rank} \quad \Longrightarrow \quad \partial_z\partial_{\bar{z}}G = 0. \tag{2.3}$$

事实上，所引用的加权恒等式和有限秩论证适用于这个有限和，并给出一个带有有界符号 $\rho(\xi) = |\xi|^2(1 - |\xi|^2)^4\partial_\xi\partial_{\bar{\xi}}G(\xi)$ 的有限秩解析 Toeplitz 算子；Luecking 定理 [21] 给出 $\rho = 0$，从而得到 $\partial_z\partial_{\bar{z}}G = 0$。

下面将用到命题 2.2 中论证的有限和版本；其中解析压缩的交叉项均予以明确保留。

命题 2.2。 对于 D 及其在 (1.1) 和 (1.2) 中的分量， D 的有限秩蕴含

$$\sum_{j=1}^{N} \varphi_j\psi_j = 0, \qquad \sum_{j=1}^{N} p_j'(z)g_j'(\bar{z}) = 0, \qquad \sum_{j=1}^{N} f_j'(z)q_j'(\bar{z}) = 0.$$

此外，

$$\sum_{j=1}^{N} p_j(z)g_j(w) = 0, \qquad \sum_{j=1}^{N} f_j(z)q_j(w) = 0 \qquad (z, w \in \mathbb{D}).$$

证明：解析分量属于 $H^2(\mathbb{D})$。D 的解析压缩具有核 $\mathcal{F}(z, w) = (PDK_w)(z)$，其具有有限分离秩。相对于

$b^2(\mathbb{D}) = A^2(\mathbb{D}) \oplus zA^2(\mathbb{D})$ 的块乘法给出

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(z,w) = \mathcal{W}_{\sum_j p_j g_j(\overline{\cdot})}(z,w) + \sum_{j=1}^{N} \big\langle \bar{P}_0\big(q_j(\overline{\cdot})K_w\big), \bar{P}_0(\overline{f_j}K_z)\big\rangle \\ + K_w(z)\sum_{j=1}^{N}\Big[(\varphi_j(0)+f_j(z))(\psi_j(0)+p_j(z)+q_j(\bar{w})) \\ + g_j(\bar{w})(\psi_j(0)+q_j(\bar{w}))\Big]. \end{aligned} \tag{2.4}$$

对于一般的有界调和符号，通过对完整符号进行公共径向膨胀即可得到这一恒等式。Toeplitz 因子一致有界并强收敛，其解析分量在 $H^2(\mathbb{D})$ 中收敛，由此定义 $\mathcal{W}$ 的乘积在 $L^1(\mathbb{D},\ dA)$ 中收敛，而与固定核对应的投影乘积在 $L^2(\mathbb{D},\ dA)$ 中收敛。因此，有界分量情形下的计算可通过取极限推广。

乘以 $(1-z\bar{w})^4$ 后，最后两行便成为有限分离和。根据 [10, 引理 2.3]，投影内积也具有同样的性质。因此，$(1-z\bar{w})^4\mathcal{W}_{\sum_{j=1}^N p_j g_j(\overline{\cdot})}$ 具有有限分离秩。应用 (2.3)，其中 $g_j(\bar{\xi}) = \widetilde{g}_j(\xi)$ 且 $\widetilde{g}_j(\xi) = g_j(\bar{\xi}) \in H^2(\mathbb{D})$，可得 $\sum_{j=1}^N p_j'(z)g_j'(\bar{z}) = 0$。由于调和 Bergman 投影与逐点复共轭可交换，对每个 $u \in b^2(\mathbb{D})$，我们有

$$\left(\sum_{j=1}^{N} T_{\overline{\varphi_j}} T_{\overline{\psi_j}}\right) u = \overline{D(\overline{u})}.$$

因此，该算子的值域为 $\{v:\ v \in \operatorname{Ran} D\}$，所以它与 D 具有相同的有限秩。将前述论证应用于共轭符号并取复共轭，可得 $\sum_{j=1}^N f_j'(z)q_j'(\bar{z}) = 0$。对角线唯一性 [7, 引理 3.1],随后对两个变量都从 0 积分，并将各分量中心化，得到两个二元恒等式。

这些恒等式抵消了解析压缩中的混合项。对于投影交叉项，固定 z，w 并写成

$$B_{z,w}(f,q) = \big\langle \bar{P}_0((Uq)K_w), \bar{P}_0(\overline{f}K_z)\big\rangle.$$

该形式 $B_{z,\ w}$ 关于 f，q 是复双线性的。在其张成空间的一组基中展开 f_j，恒等式 $\sum_j f_j \otimes q_j = 0$ 给出 $\sum_j B_{z,\ w}(f_j,\ q_j) = 0$。两个二元恒等式在公共径向膨胀下仍然成立，因此对于 $0 < r < 1$,

$$P\Big(\sum_{j=1}^{N} T_{\varphi_j(r\cdot)} T_{\psi_j(r\cdot)}\Big)\big|_{A^2(\mathbb{D})} = \mathsf{T}_{\sum_{j=1}^N \varphi_j(r\cdot)\psi_j(r\cdot)}.$$

两边都强收敛，因此 $PD|_{A^2\ (\mathbb{D})} = \mathsf{T}^{\sum_{j=1}^N \varphi_j\psi_j}$。其符号有界。将 Luecking 定理 [21] 应用于这个有限秩解析 Toeplitz 算子，可得 $\sum_{j=1}^N \varphi_j\psi_j = 0$ 几乎处处成立，从而根据连续性处处成立。□

对于有界算子 $S : zA^2(\mathbb{D}) \to \overline{A^2(\mathbb{D})}$，记

$$\ell_w(\zeta) = \frac{1}{(1-\bar{\zeta}w)^2} - 1, \qquad \mathscr{K}_S(z,w) = (S\ell_w)(z).$$

因此， ℓ_w 是 $zA^2(\mathbb{D})$ 的再生核，并且 $\overline{\mathscr{K}_S}$ 关于 z 和w都是全纯的。函数 ℓ_w、 $w \in \mathbb{D}$ 的线性张成在 $zA^2(\mathbb{D})$ 中稠密。

对于任意的 f， $h \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$，定义全纯核

$$\mathscr{K}_{f,h}(z,w) := \frac{2zw}{(z-w)^3}\mathscr{R}_{f,h}(z,w).$$

此处及下文中，商在对角线处作延拓：由 (1.4)， $\mathscr{R}_{f,\,h}(z,\,w)\,(z-w)^3$ 在 $\mathbb{D}^2$ 上全纯，且其对角线上的值为 $-f'(z)h'(z)/6$。此定义不预设 f， h 或与它们相关的单个半交换子的有界性。

当 f， $h \in H^\infty(\mathbb{D})$ 时，令 $[T_f,\ T_h] = T_fT_h - T_{fh}$。投影公式 [10,式 (2.30)], 结合定理 [10,2.8] 的证明中的反解析投影恒等式，可得对于 $\alpha \in \{f, h, fh\}$,

$$T_\alpha \ell_w = J_\alpha(\cdot, w) + \alpha(w)\ell_w, \tag{2.5}$$

$$J_\alpha(z,w) = \frac{z^2\alpha(z) + w^2\alpha(w)}{(z-w)^2} - \frac{2zw(F_\alpha(z) - F_\alpha(w))}{(z-w)^3} - \alpha(z). \tag{2.6}$$

因此，$[T_f,\ T_h]$ 在 $A^2(\mathbb{D})$ 上为零，其交叉核为

$$\begin{aligned} \mathscr{K}_{f,h}(z,w) &= ([T_f, T_h]\ell_w)(z) \\ &= f(z)J_h(z,w) + h(w)J_f(z,w) - J_{fh}(z,w) \\ &= \frac{2zw}{(z-w)^3}\mathscr{R}_{f,h}(z,w). \end{aligned} \tag{2.7}$$

因子 z 以及核张成空间的稠密性表明，$[T_f,\ T_h]$ 将 $zA^2(\mathbb{D})$ 映入$\overline{zA^2(\mathbb{D})}$。

引理 2.3。 对于 (1.1) 和 (1.2) 中的符号和分解，设

$$\sum_{j=1}^N \varphi_j(z)\psi_j(z) = 0 \qquad (z \in \mathbb{D})$$

and

$$\sum_{j=1}^N f_j(z)q_j(w) = 0, \qquad \sum_{j=1}^N p_j(z)g_j(w) = 0 \qquad (z, w \in \mathbb{D}).$$

存在有界算子 B_+、 B_- ： $zA^2(\mathbb{D}) \to \overline{zA^2(\mathbb{D})}$，并在 $A^2(\mathbb{D})$ 上延拓为零，使得

$$D = B_+ + UB_-U.$$

它们的交叉核为

$$\mathscr{K}_+(z,w) = \sum_{j=1}^N \mathscr{K}_{f_j,p_j}(z,w), \qquad \mathscr{K}_-(z,w) = \sum_{j=1}^N \mathscr{K}_{g_j,q_j}(z,w).$$

如果所有解析分量都是有界的，那么

$$B_+ = \sum_{j=1}^N (T_{f_j}, T_{p_j}], \qquad B_- = \sum_{j=1}^N (T_{g_j}, T_{q_j}].$$

一般而言，这些和表示通过公共径向膨胀得到的有界块的组合；它们并不意味着各个半交换子都有界。

算子 D 是有限秩的，当且仅当 $\mathscr{K}_+$ 和 $\mathscr{K}_-$ 的分离秩均为有限。在这种情况下，

$$\operatorname{rank} D = \operatorname{rank} B_+ + \operatorname{rank} B_-.$$

对于每个符号， $B_\pm$ 的秩等于 $\mathscr{K}_\pm$的分离表示中项数的最小值。

证明。 首先假设所有解析分量都是有界的。 [7, 定理 3.2] 证明中的常数基论证具有如下双线性形式：如果$\sum_{j=1}^N p_j(z)q_j(w) = 0$，那么对于两个有限生成空间上的每个双线性映射 $\mathcal{B}$，都有 $\sum_{j=1}^N \mathcal{B}(p_j,\ q_j) = 0$。事实上，将 $p_j = \sum_\nu a_{\nu j} p^{(\nu)}$ 写成一个基的形式，可得对每个 ν都有 $\sum_{j=1}^N a_{\nu j} q_j = 0$。

将这一观察应用于双线性映射 $(f,\ q) \mapsto T_f T_{Uq}$和 $(p,\ g) \mapsto T_{Ug} T_p$。根据假设，有

$$\sum_{j=1}^N T_{f_j} T_{Uq_j} = 0, \qquad \sum_{j=1}^N T_{Ug_j} T_{p_j} = 0.$$

通过取 $w = \bar{z}$，它们还给出 $\sum_{j=1}^N f_j(Uq_j) = \sum_{j=1}^N (Ug_j)p_j = 0$。因此，展开乘积并保留所有常数项，可得

$$\begin{aligned} D - \sum_{j=1}^N T_{\varphi_j\psi_j} = \sum_{j=1}^N (T_{f_j}, T_{p_j}] + U\left(\sum_{j=1}^N (T_{g_j}, T_{q_j}]\right) U \\ + \sum_{j=1}^N \big(T_{f_j} T_{Uq_j} - T_{f_j(Uq_j)}\big) \\ + \sum_{j=1}^N \big(T_{Ug_j} T_{p_j} - T_{(Ug_j)p_j}\big). \end{aligned}$$

后面两个和为零，并且 $\sum_{j=1}^N T_{\varphi_j\psi_j} = 0$。所断言的恒等式和核公式现在由(2.7)和 $UT_qU = T_{Uq}$推出。

对于任意有界调和符号，取$\varphi_{j,r}(z) = \varphi_j(rz)$以及$\psi_{j,r}(z) = \psi_j(rz)$，对所有符号使用同一个公共膨胀参数 $0 < r < 1$。三个消去恒等式均仍然成立，因此将有界分量情形应用于 $D_r = \sum_j T_{\varphi_{j,r}} T_{\psi_{j,r}}$可得$D_r = B_{+,r} + UB_{-,r}U$，其中

$$B_{+,r} = P_0 D_r \bar{P}_0, \qquad B_{-,r} = U\bar{P}_0 D_r P_0 U.$$

如同 [10, 命题2.5], 的证明，对有界完整符号应用控制收敛可得其Toeplitz算子的强收敛。它们的范数一致有界，因此 $D_r \to D$ 强收敛，并且 $\|D_r\| \le \sum_j \|\varphi_j\|_\infty \|\psi_j\|_\infty$。于是，固定的¯ ¯压缩算子强收敛到 $B_+ = P_0 D P_0$和 $B_- = UP_0 D P_0 U$，从而证明所断言的有界分解。解析分量及其原函数在局部一致收敛。对$B_{\pm,r}\ell_w$ 求值，并利用 $zA^2(\mathbb{D})$上点求值的连续性，可通过(2.7)将极限核确定为 $\mathscr{K}_\pm$。因此，只有组合块被断言为有界；没有将有界算子赋予单个无界解析分量。

最后，一个有界交叉算子 S 具有有限秩，当且仅当 $\mathscr{K}_S$ 具有有限分离秩。事实上，有限维值域通过选取该值域的一组基即可给出分离表示

通过选取该值域的一组基。反之，有限分离表示使所有向量 $S\ell_w$ 都位于一个固定的有限维空间中。它们的线性张成随后是闭的，而 ℓ_w 的张成的稠密性意味着，该空间包含 S的整个值域。这也证明了算子秩等于分离项的最少数量。在 D的分解中，两个块具有正交值域，并作用于不同的输入直和项。因此，它们的秩相加，从而证明最后的断言。□

下面所有关于有理函数域的张成均取在相应的亚纯函数域内。

引理 2.4。设 $N_0 \geq 1$ 为一个整数，并设

$$\mathcal{R}(z,w) = \sum_{\ell=1}^{N} \alpha_\ell(z)\gamma_\ell(w), \qquad \alpha_\ell, \gamma_\ell \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}).$$

假设函数

$$K(z,w) = \frac{\mathcal{R}(z,w)}{(z-w)^{N_0}}, \qquad z \neq w,$$

全纯地延拓至 $\mathbb{D}^2$。为下列空间分别选取基 ξ_1、……、ξ_r 和 η_1、……、η_m

$$\mathrm{span}_{\mathbb{C}(z)}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_N\}, \qquad \mathrm{span}_{\mathbb{C}(w)}\{\gamma_1, \ldots, \gamma_N\},$$

这些基可以从原来的函数族中选取；我们作此选择，使得所有基函数都是全纯的。消去有理系数后，写成

$$\mathcal{R}(z,w) = \frac{1}{A(z)B(w)} \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{m} P_{ij}(z,w)\xi_i(z)\eta_j(w), \tag{2.8}$$

其中 A、B是非零单变量多项式，且 $P_{ij} \in \mathbb{C}[z,w]$。当且仅当 K具有有限分离秩时，

$$(z-w)^{N_0} \mid P_{ij}(z,w) \qquad (1 \leq i \leq r,\ 1 \leq j \leq m). \tag{2.9}$$

当(2.9)成立时，令 $Q_{ij} = \frac{P_{ij}}{(z-w)^{N_0}}$，并展开

$$Q_{ij}(z,w) = \sum_{s,t\geq 0} c_{is,jt} z^s w^t. \tag{2.10}$$

令 $M = (c_{is,jt})_{(i,s),(j,t)}$ 为有限系数矩阵，对 s 和 t 使用共同的有限指标范围，并在必要处补入零系数。则

$$\mathrm{srank}\, K = \mathrm{rank}\, M. \tag{2.11}$$

整除判据及由此得到的秩均不依赖于 $\mathcal{R}$的有限分离表示、所选基以及公分母。

证明。我们首先证明，乘积 $\xi_i(z)\eta_j(w)$在$\mathbb{C}(z,w)$上是线性无关的。有理系数关系两边乘以公分母后，可得到多项式系数关系。展开其系数后，得到以下元素之间的有限关系

$$z^s\xi_i(z)\, w^t\eta_j(w).$$

任意有限个互不相同的函数 $z^s\xi_i(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上线性无关：它们之间的一个关系会导出 ξ_i 之间的多项式系数关系。

$w^t\eta_j(w)$ 也成立同样的结论。先固定 w，利用 z 中的线性无关性，再利用 w 中的线性无关性，可知展开后的关系中的每个系数都为零。这就证明了它们在 $\mathbb{C}(z, w)$ 上线性无关。此结论也涵盖零核情形：若 $K = 0$，则所有 P_{ij} 都为零，因而所有断言均成立。以下我们假设 $K \neq 0$。

设 $\operatorname{srank} K = n < \infty$。在最小表示中，左因子和右因子分别线性无关。它们的取值向量分别张成相应的坐标空间，因为任何消去所有取值向量的线性泛函都会给出因子之间的一个关系。选取 $w_1, \dots, w_n$，使切片 $\delta_\ell = K(\cdot, w_\ell)$、$1 \le \ell \le n$ 构成列空间的一组基。选取 $z_1, \dots, z_n$，使矩阵 $V = (K(z_i, w_j))_{i,j=1}^n$ 可逆。于是

$$K(z,w) = \sum_{\ell=1}^{n} \delta_\ell(z)\epsilon_\ell(w), \qquad \begin{pmatrix} \epsilon_1(w) \\ \vdots \\ \epsilon_n(w) \end{pmatrix} = V^{-1} \begin{pmatrix} K(z_1,w) \\ \vdots \\ K(z_n,w) \end{pmatrix}.$$

由于 $K = \mathcal{R}/(z-w)^{N_0}$ 和 $\mathcal{R} = \sum_k \alpha_k(z)\gamma_k(w)$，在 $w = w_\ell$ 处取值并除以 $(z-w_\ell)^{N_0}$，可知 δ_ℓ 属于 $\mathbb{C}(z)$所张成的 ξ_i空间。同理，每个行切片以及每个 ϵ_ℓ 都属于 $\mathbb{C}(w)$所张成的 η_j空间。将这两组函数分别按这些基展开后，K 中 $\xi_i(z)\eta_j(w)$的系数是若干单变量有理函数乘积的有限和。通分后得到公分母 $A_1(z)B_1(w)$。根据上文证明的线性无关性和 (2.8)，

$$\frac{P_{ij}(z,w)}{A(z)B(w)(z-w)^{N_0}} = \frac{N_{ij}(z,w)}{A_1(z)B_1(w)}, \qquad N_{ij} \in \mathbb{C}[z,w].$$

由于 $z-w$ 是素元，且既不整除 $A_1(z)$，也不整除 $B_1(w)$，交叉相乘可得（2.9）。

反之，假设（2.9）成立。由方程（2.8）和（2.10）可得

$$K(z,w) = \sum_{i,s,j,t} c_{is,jt} \frac{z^s \xi_i(z)}{A(z)} \frac{w^t \eta_j(w)}{B(w)}. \tag{2.12}$$

这是一个由亚纯因子构成的有限分离表示。选取非空开集 U，$V \subset \mathbb{D}$ 分别避开 A 和 B的零点。在这些集合上，（2.12）中的因子是全纯的，并且两组有限因子族中的每一组都是线性无关的。事实上，开集上的一个关系可延拓为亚纯恒等式，再乘以 A 或 B 即可将其化为证明开头所使用的线性无关性。

由此可知，$U \times V$上的分离秩为 $n =$秩 M。为明确说明下界，w 中因子的取值向量张成其完整的坐标空间。因此，它们在 M 下的像张成其值域。由 z中因子的线性无关性可知，列切片空间的维数为秩 M。通过对有限矩阵 M进行因式分解可得反向不等式。

为了恢复整个 $\mathbb{D}$ 上的全纯因子，选择 w_1、……、$w_n \in V$ 和 z_1、……、$z_n \in U$，使其为该秩为-n 的核给出一个可逆的取值矩阵。如上所述，令$\delta_\ell(z) = K(z, w_\ell)$，并将取值矩阵的逆应用于行切片的列向量 $(K(z_i, w))_{i=1}^n$，从而得到列向量 $(\epsilon_\ell(w))_{\ell=1}^n$。这些函数

在整个 $\mathbb{D}$ 上都是全纯的，因为 K 在 $\mathbb{D}^2$ 上是全纯的。所得恒等式

$$K(z,w)=\sum_{\ell=1}^{n}\delta_\ell(z)\epsilon_\ell(w)$$

在 $U\times V$ 上成立。依次对 z 和 w 应用单变量恒等定理，可将其扩展到 $\mathbb{D}^2$。因此，全局分离秩至多为 n，而限制到 $U\times V$ 则给出相反的不等式。这证明了充分性以及 (2.11)。最后，对于 $\mathcal{R}$ 的任何其他有限分离表示、有理基的选择或公分母的选择，都会得到相同的检验和相同的秩，因为二者都已被确定为 K 的内在性质。□

定理 *1.1* 的证明。 如果 D 的秩有限，则由命题 2.2 得到 (1.6) 和 (1.7)。在这两个恒等式成立的条件下，备注 2.1 给出 (2.1)，而引理 2.3 得到

$$D=B_+ + UB_-U,\qquad \mathscr{K}_\pm(z,w)=\frac{2zw}{(z-w)^3}\mathcal{R}_\pm(z,w).$$

对于有界解析分量，这些块为

$$B_+=\sum_{j=1}^{N}(T_{f_j},T_{p_j}],\qquad B_-=\sum_{j=1}^{N}(T_{g_j},T_{q_j}]. \tag{2.13}$$

对于一般的有界全符号，它们是引理 2.3 中通过公共径向膨胀得到的合并有界块。

每个块的分离秩等于其交叉核的分离秩。乘以非零单变量因子 $2z$ 和 w 可保持分离秩：先在它们的零点之外成立，再通过引理 2.4 中的全纯切片构造推广到整个圆盘。将该引理应用于 $N_0=3$，得到

$$B_\pm \text{ has finite rank}\quad\Longleftrightarrow\quad \mathcal{R}_\pm \text{ satisfies (RD3)},\qquad \operatorname{rank}B_\pm=\operatorname{rank}M_{\mathcal{R}_\pm}$$

每当这些条件成立时即可。由此证明了该刻画。两个交叉块的值域彼此正交，且作用于不同的输入直和项，因此它们的秩相加，得到 (1.9)。它们湮灭常数项，并交换零常数解析直和项与共解析直和项。结合 $C_\pm=B_\pm U|_{zA^2(\mathbb{D})}$，即可证明 (1.10)；等价地，$DU\simeq 0_{\mathbb{C}}\oplus C_+\oplus C_-$。

(2.14) 中的族通过 (2.15) 实现了每一个正整数秩，而零算子实现了秩零。□

注 2.5。 在满足 (1.6) 和 (1.7) 的条件下，可以消去组合分子中的所有乘积原函数。两个混合恒等式抵消了全符号和中的混合项。因此，其以中心为基准的解析部分和共解析部分给出

$$\sum_{j=1}^{N}\big[f_jp_j+\varphi_j(0)p_j+\psi_j(0)f_j\big]=0,$$
$$\sum_{j=1}^{N}\big[g_jq_j+\varphi_j(0)q_j+\psi_j(0)g_j\big]=0.$$

取在零点处为零的原函数，得到

$$\sum_{j=1}^{N} F_{f_j p_j} = -\sum_{j=1}^{N} \big[\varphi_j(0) F_{p_j} + \psi_j(0) F_{f_j}\big],$$
$$\sum_{j=1}^{N} F_{g_j q_j} = -\sum_{j=1}^{N} \big[\varphi_j(0) F_{q_j} + \psi_j(0) F_{g_j}\big].$$

因此，分子 $\mathcal{R}_+$ 和 $\mathcal{R}_-$ 可仅用各个解析分量的原函数表示。多项式整除条件 **(RD3)** 仍适用于这些组合表达式。

以下 Dong and Zhou 的单项式例子 [11, 定理 5.4 和推论 5.6(a)，arXiv 版本] 说明了定理 1.1 中的秩公式。对于$r \geq 1$，令

$$D_r = T_z T_{z^r} - T_{z^{r+1}} T_1. \tag{2.14}$$

取 $k_1 = 1$ 和 $k_2 = r$时，他们的秩公式给出 $\max\{0, r-1, r\} = r$。直接应用单项式投影公式 [11, 引理 3.1] 可得 $D_r|_{A^2(\mathbb{D})} = 0$ 以及 $D_r \bar{z}^k = -kz^{r+1-k}/[(r+1)(r+2)]$，其中 $1 \leq k \leq r$；而当 $k \geq r+1$时，$D_r \bar{z}^k = 0$。因此

$$\operatorname{Ran} D_r = \operatorname{span}\{z, \ldots, z^r\}, \qquad \operatorname{rank} D_r = r. \tag{2.15}$$

特别地，两项和会出现奇数秩，而 $b^2(\mathbb{D})$ 上的 Toeplitz 交换子不可能具有奇数秩 [5]。

为了解 **(RD3)** 如何区分紧性与有限秩，考虑 $D = T_z T_{e^z} - T_{z e^z} T_1$。其对角符号和为零。这里 $\mathcal{R}_- = 0$ 和 $\mathcal{R}_+ = \mathscr{R}_{z,\, e^z}$，因为常数项在 **(1.4)** 中相互抵消。在 **(1.3)** 中写入 $t = z - w$ 得

$$\mathcal{R}_+(z, w) = e^w(1 + t + t^2/2) - e^z.$$

商式 $\mathcal{R}_+/t^3$ 可全纯地延拓穿过对角线。然而，在有理基 $\{1, e^z\}$ 和 $\{1, e^w\}$ 中，$e^z \cdot 1$ 的系数为 -1，因此 **(RD3)** 不成立，且 D 具有无限秩。这个结论也可间接由 [10, 定理 2.8] 得出：交叉核的转置交换 $(T_z,\ T_{e^z}]$ 和 $(T_{e^z},\ T_z]$，因此前者的有限秩将意味着 $[T_z, T_{e^z}]$ 具有有限秩；但这与所引用的分类结果相矛盾，因为 1，z，e^z 线性无关，且 e^z 没有有理原函数。所有符号都可连续延拓到闭圆盘，因此根据连续符号 Toeplitz 代数定理 [16, 定理 3.2]，紧性已立即得到。由定理 1.2 (iv) 中的加权极限也可直接看出这一点，因为其中所有导数均有界。因此，该例说明了三次整除检验如何在紧的连续符号半交换子中检测无限秩。

3. Compactness

本节证明式 **(1.1)** 中的 Toeplitz 和 D 的定理 1.2。我们首先刻画半平面上趋于零的 Toeplitz 乘积的有限和，然后转向边界极限。

该判据保留了各个被加项之间的所有抵消项。**(1.12)** 中的中心化表达式为

$$\sum_{j=1}^{N} [\varphi_j(z) - \varphi_j(a)][\psi_j(w) - \psi_j(a)].$$

定理 1.2 (iv) 给出 $2N+2$ 个标量极限，并对每个符号分量至多求导 N 次。第二个混合条件

$$(1-|z|^2)^2\sum_{j=1}^{N}H_j'(z)\overline{G_j'(z)}\longrightarrow 0$$

这可由所列条件推出，证明将对此加以说明。

我们使用 Liu 和 Lin 的局部化定理 [20, 定理 1.1(2) 及推论 1.3]。对于有界符号Toeplitz算子的乘积之有限和 T，该定理给出

$$T \text{ is compact} \iff \exists R>0:\ \lim_{|a|\to 1}\sup_{b\in D_\beta(a,R)}|\langle Tr_b,r_a\rangle|=0, \tag{3.1}$$

其中 r_a 是归一化调和再生核。他们的定理针对实调和空间表述。我们采用其复化，具体说明见 [10, 第 3 节，在引理 3.4], 之前；方法是将实结果应用于算子多项式的实部和虚部。

3.1. 半平面上的 Toeplitz 乘积。 设 $\mathbb{H}=\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Re}z>0\}$。令$Q_{\mathbb{H}}$: $L^2(\mathbb{H},\ dA)\to b^2(\mathbb{H})$ 为正交投影。对于 $u\in L^\infty(\mathbb{H},\ dA)$，Toeplitz 算子定义为

$$T_u^{\mathbb{H}}=Q_{\mathbb{H}}M_u|_{b^2(\mathbb{H})}.$$

我们建立以下刻画 n.

命题 3.1. 设 $u_j,v_j\in h^\infty(\mathbb{H}),\ 1\le j\le N$. 则

$$\sum_{j=1}^{N}T_{u_j}^{\mathbb{H}}T_{v_j}^{\mathbb{H}}=0 \tag{3.2}$$

当且仅当存在 $\phi\in h^\infty(\mathbb{H})$ 使得

$$\sum_{j=1}^{N}u_j(z)v_j(w)=\phi(z)-\phi(w),\qquad z,w\in\mathbb{H}. \tag{3.3}$$

我们将 [10, 引理 3.2 及其证明] 应用于以下 $L^2(\mathbb{D},dA)$ 形式。对于$\delta,\epsilon\in L^2(\mathbb{D},dA)$, 令

$$\mathcal{C}_{\delta,\epsilon}(z,w)=\left\langle\bar{P}(\bar{\epsilon}K_w),\bar{P}(\bar{\delta}K_z)\right\rangle.$$

Then

$$(1-z\bar{w})^4\mathcal{C}_{\delta,\epsilon}(z,w)\quad\text{has finite separation rank,} \tag{3.4}$$

其具有一个与 δ,ϵ 无关的共同有限上界。对于有界的 δ,ϵ，完整的共解析投影只会在所引引理中的核上增加常数项:

$$\mathcal{C}_{\delta,\epsilon}(z,w)=(N_\delta N_\epsilon^*K_w)(z)+(P\delta)(z)\overline{(P\epsilon)(w)},\qquad N_\delta=PM_\delta|_{\overline{zA^2(\mathbb{D})}}.$$

为清晰起见，一个一致秩上界是 $n_0=35\cdot 5^4$。对于完整投影，常数项抵消了 [10, Eq. (3.3)], 中的减法，留下一个二重积分。 [10, Eq. (3.4)] 中的四次幂至多包含 $\binom{7}{3}=35$ 项。在每一项中，平方核分母会发生抵消。如果它是外部分母，则在 z 或 $\bar{w}$ 中展开后至多得到五个分离项。如果它是中间分母，则剩余分母会分离，而分子关于 z、$\bar{w}$、$\bar{\xi}$、η 中每个变量的次数至多为四次，因此至多包含 5^4 个单项式。对于 δ、$\epsilon\in L^2(\mathbb{D}$、$dA)$，用有界函数逼近

在 $L^2(\mathbb{D}、\ dA)$ 中的两者。由于对于固定的 $z、\ w,\ K_z、\ K_w$ 有界，核逐点收敛。每个 $(n_0+1)\times(n_0+1)$ 评价行列式在取极限之前和之后都为零，从而证明了 (3.4)。

存在一个正交分解

$$b^2(\mathbb{H}) = A^2(\mathbb{H}) \oplus \overline{A^2(\mathbb{H})}. \tag{3.5}$$

对于 $dA = \pi^{-1}dx\,dy,\quad A^2(\mathbb{H})$ 的解析再生核为

$$K_w^{\mathbb{H}}(z) = \frac{1}{(z+\bar{w})^2},\quad z,w\in\mathbb{H}. \tag{3.6}$$

令 $P_{\mathbb{H}}:\ L^2(\mathbb{H}) \to A^2(\mathbb{H})$ 为解析投影。对于 $v\in L^\infty(\mathbb{H},\ dA)$，定义 Toeplitz 算子

$$\mathsf{T}_v^{\mathbb{H}} = P_{\mathbb{H}} M_v|_{A^2(\mathbb{H})}.$$

令 $\bar{P}_{\mathbb{H}}$ 表示将 $L^2(\mathbb{H})$ 正交投影到 $A^2(\mathbb{H})$ 上的正交投影。对于 $\overline{\alpha}\in H^\infty(\mathbb{H})$，相对于 (3.5)，$T_\alpha^{\mathbb{H}}$ 的分块矩阵为

$$\begin{aligned} T_\alpha^{\mathbb{H}} &= \begin{pmatrix} M_\alpha|_{A^2(\mathbb{H})} & N_\alpha \\ 0 & L_\alpha \end{pmatrix}, \\ N_\alpha &= P_{\mathbb{H}} M_\alpha|_{\overline{A^2(\mathbb{H})}}, \qquad L_\alpha = \bar{P}_{\mathbb{H}} M_\alpha|_{\overline{A^2(\mathbb{H})}}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

由于乘以 $\bar{\alpha}$ 保持 $A^2(\mathbb{H})$ 不变，我们有 $\overline{L_\alpha^*} = M_{\bar{\alpha}}|_{A^2(\mathbb{H})}$。因此，对于 $\alpha,\ \gamma\in H^\infty(\mathbb{H})$，

$$(L_\alpha L_\gamma)^* = L_\gamma^* L_\alpha^* = M_{\overline{\alpha\gamma}}|_{\overline{A^2(\mathbb{H})}} = L_{\alpha\gamma}^*,$$

因此 $L_\alpha L_\gamma = L_{\alpha\gamma}$。

下一个公式是 [10,式 (2.30)] 中圆盘投影恒等式的半平面类比。

引理 3.2。设 $\alpha\in H^\infty(\mathbb{H})$ 且设 $A' = \alpha$。则

$$(N_\alpha \overline{K_w^{\mathbb{H}}})(z) = C_\alpha(z,w) = \frac{(z-w)[\alpha(z)+\alpha(w)] - 2[A(z)-A(w)]}{(z-w)^3}. \tag{3.8}$$

右侧在对角线上有一个可去奇点。

证明。对于 $\varepsilon>0$，令 $\alpha_\varepsilon(\xi) = \frac{\alpha(\xi)}{(1+\varepsilon\xi)^2}$。由于 $\operatorname{Re}\xi>0$，我们有 $|\alpha_\varepsilon|\le\|\alpha\|_\infty$，并且$\alpha_\varepsilon\in A^2(\mathbb{H})$。其交叉核为

$$\int_{\mathbb{H}} \frac{\alpha_\varepsilon(\xi)}{(\bar{\xi}+z)^2(\bar{\xi}+w)^2}\,dA(\xi). \tag{3.9}$$

对于 $z\ne w$，

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x+z)^2(x+w)^2} &= \frac{1}{(z-w)^2}\left(\frac{1}{(x+z)^2}+\frac{1}{(x+w)^2}\right) \\ &\quad + \frac{2}{(z-w)^3}\left(\frac{1}{x+z}-\frac{1}{x+w}\right). \end{aligned}$$

前两个积分由解析再生公式计算。定义

$$I_\varepsilon(z) = \int_{\mathbb{H}} \frac{\alpha_\varepsilon(\xi)}{\bar{\xi}+z}\,dA(\xi).$$

被积函数在无穷远处为 $O(|\xi|^{-3})$，且分母在有界区域上远离零。因此，该积分绝对收敛，并且可以

在紧参数集上求导。再生公式给出 $I_\varepsilon'(z) = -\alpha_\varepsilon(z)$，因此

$$I_\varepsilon(z) - I_\varepsilon(w) = -\int_w^z \alpha_\varepsilon(\xi)\, d\xi.$$

代入 (3.9) 即可证明 α_ε 的 (3.8)。

设 $\varepsilon \to 0$。(3.9) 中的被积函数被两个平方可积核函数的乘积乘以一个常数项所控制，而右侧的原函数差在局部一致收敛。因此，该公式对 α 成立。泰勒展开表明，其分子在 $z = w$ 处至少三阶消失，从而证明了可去性。□

命题 *3.1* 的证明。我们首先证明必要性。写成 $u_j = f_j + g_j$ 和 $v_j = h_j + k_j$。令 $\chi(\zeta) = \frac{1+\zeta}{1-\zeta}$ 为凯莱映射。正如 [10, 引理 3.3] 的证明中所做的那样，分别在解析空间和共解析空间上使用酉映射，

$$U_+ F = \chi'(F \circ \chi), \qquad U_- \overline{F} = \overline{\chi'}(\overline{F} \circ \chi). \tag{3.10}$$

令 $F_j = f_j \circ \chi$、$G_j = g_j \circ \chi$、$H_j = h_j \circ \chi$ 和 $K_j = k_j \circ \chi$。调整常数，使得 $G_j(0) = K_j(0) = 0$，则调和分解给出 F_j，G_j，H_j，$K_j \in H^2(\mathbb{D})$，因为拉回的完整符号有界且调和。

Let

$$\sigma(\zeta) = \frac{\chi'(\zeta)}{\overline{\chi'(\zeta)}}, \qquad |\sigma| = 1.$$

首先固定 $0 < r < 1$。对于每个圆盘分量 X，写作 $X_r(\zeta) = X(r\zeta)$，并通过 χ^{-1} 将相应的完整符号拉回半平面。四个膨胀后的解析分量均有界。因此，对于 $f_{j,r} = F_{j,r} \circ \chi^{-1}$，(3.10) 给出了有界的交叉块

$$U_+ N_{f_{j,r}} U_-^{-1} = P M_{\sigma F_{j,r}}|_{\overline{A^2(\mathbb{D})}}. \tag{3.11}$$

两个 Cayley 酉算子作用于彼此独立的空间，因此 *-核配对中的共解析投影就是完整的 P，包括常数项。现在通过块乘法和解析再生，可得到 (3.12) 右端，其中所有分量都经过了膨胀。

令 $r \to 1$。完整符号逐点收敛且具有共同的统一界，因此 Toeplitz 因子及其乘积强收敛。圆盘分量在 $H^2(\mathbb{D})$ 中收敛，因而也在 $L^2(\mathbb{D},\ dA)$ 中收敛。对于固定的 z，w，乘以 σ 以及乘以固定的伯格曼核都保持这种 $L^2(\mathbb{D},\ dA)$ 收敛。因此，投影后的核配对收敛，而乘积 $H_{j,r} G_{j,r}$ 则由柯西–施瓦茨不等式在 $L^1(\mathbb{D},\ dA)$ 中收敛。记 $\mathcal{D}$ 为由 U_+ 传输的 (3.2) 的解析压缩，我们得到

$$\begin{aligned}(\mathcal{D}K_w)(z) = {} & \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^N F_j(z) H_j(z) + \overline{\sum_{j=1}^N G_j(w) K_j(w)} + \sum_{j=1}^N F_j(z)\overline{K_j(w)}}{(1 - z\bar{w})^2} \\ & + \sum_{j=1}^N \mathcal{C}_{\sigma F_j, \sigma K_j}(z, w) + \mathcal{W}_{\sum_{j=1}^N H_j \overline{G_j}}(z, w).\end{aligned} \tag{3.12}$$

根据假设，$\mathcal{D} = 0$。将 (3.12) 乘以 $(1 - z\bar{w})^4$。第一行具有有限分离秩，而 (3.4) 处理交叉项。方程 (2.3) 得出 $\sum_{j=1}^N H_j' G_j' = 0$。

由于 χ' 没有零点，回到半平面可得

$$\sum_{j=1}^{N} h_j' \overline{g_j'} = 0. \tag{3.13}$$

由于调和 Bergman 投影与逐点复共轭可交换，(3.2) 中的 u_j 和 v_j 分别替换为 u_j 和 v_j 后仍然成立。将 (3.13) 应用于 $u_j = \overline{g_j} + f_j$ 和 $v_j = k_j + h_j$ 得到 $\sum_{j=1}^{N} k_j' \overline{f_j'} = 0$。取复共轭可得

$$\sum_{j=1}^{N} f_j' \overline{k_j'} = 0. \tag{3.14}$$

全纯–反全纯函数的对角线唯一性将这些恒等式扩展到独立变量：

$$\sum_{j=1}^{N} h_j'(z)\overline{g_j'(w)} = 0, \qquad \sum_{j=1}^{N} f_j'(z)\overline{k_j'(w)} = 0. \tag{3.15}$$

这一唯一性可直接由局部幂级数推出：对角恒等式的所有 $z - a^s(\overline{z-a})^t(s,\ t \geq 0)$ 系数均为零，随后分别进行解析延拓，便可将所得恒等式扩展到两个独立变量。

固定 $\lambda \in \mathbb{H}$ 并令

$$\Psi(z,w) = \sum_{j=1}^{N} u_j(z)v_j(w), \qquad \Psi_0(z,w) = \Psi(z,w) - \Psi(z,\lambda) - \Psi(\lambda,w) + \Psi(\lambda,\lambda).$$

分别对两个变量积分 (3.15)，即可消去 Ψ_0 的两个混合部分。因此，Ψ_0 是一个纯解析张量与一个纯余解析张量之和。对于这些剩余张量，我们可以如下选取有界解析因子。令 X_+ 和 X_- 分别为 $f_j - f_j(\lambda)$ 与 ~~$g_j - g_j$~~(λ) 的张成空间，并令 Y_+ 和 Y_- 分别为 $h_j - h_j(\lambda)$ 与 $k_j - k_j(\lambda)$ ~~的张成空间~~。这四个空间中的函数都在 λ 处为零，因此

$$X_+ \cap X_- = \{0\}, \qquad Y_+ \cap Y_- = \{0\}, \qquad \Psi_0 \in X_+ \otimes Y_+ + X_- \otimes Y_-.$$

选择 $Y_+ \oplus Y_-$ 的一个基，使其由两个直和项的基组成。有限多个点求值张成其对偶空间：否则，该空间中就会存在一个非零函数，被所有点求值湮灭。因此，这个基中的第一变量系数是有限个切片 $\Psi_0(z,\ w_i)$ 的常数线性组合。它们有界，并分别属于 X_+ 或 X_-。再次在每种类型的非零系数所张成的空间中选取基。对第一变量应用同样的求值论证可知，第二变量系数也有界，并且仍属于 Y_+ 或 Y_-。每个上确界范数都不超过 $\|\Psi_0\|_\infty$ 乘以求值系数绝对值的有限和。因此，在 $\mathbb{H}$ 上整体有界。

我们得到了有限族 $\alpha_\ell,\ \gamma_\ell,\ \delta_\ell,\ e_\ell \in H^\infty(\mathbb{H})$ 和 $\alpha,\ \gamma \in h^\infty(\mathbb{H})$，使得

$$\Psi(z,w) = \alpha(z) + \gamma(w) + \sum_{\ell} \alpha_\ell(z)\gamma_\ell(w) + \overline{\sum_{\ell} \delta_\ell(z)e_\ell(w)}. \tag{3.16}$$

加性项可取为 $\alpha(z) = \Psi(z,\ \lambda)$ 和 $\gamma(w) = \Psi(\lambda,\ w) - \Psi(\lambda,\ \lambda)$.

符号张量相等意味着相应的 Toeplitz 乘积的有限和相等。事实上，如果 $\sum_{j=1}^{N} p_j(z)q_j(w) = 0$，取 e_ℓ 作为 p_j 张成空间的一组基，并写成 $p_j = \sum_\ell c_{\ell j} e_\ell$。比较基系数可得$\sum_{j=1}^{N} c_{\ell j} q_j = 0$，因此由双线性可推出 $\sum_{j=1}^{N} T_{p_j} T_{q_j} = 0$。这证明了张量到算子映射定义良好。

令 $\pi(z) = \Psi(z, z)$。公式 (3.16) 表明，$\pi(z)$ 是有界的调和函数。根据分块公式 (3.7)，相应算子的解析对角压缩恰好是解析 Toeplitz 算子 $T^{\mathbb{H}}_{\pi(z)^\circ}$。因此 $T^{\mathbb{H}}_{\pi(z)} = 0$，从而

$$\pi(z) = 0. \tag{3.17}$$

这里仅需解析托普利茨映射的单射性。解析凯莱酉算子将该算子与符号为 $\pi \circ \chi$ 的圆盘托普利茨算子对应起来。其所有矩阵系数均为零，意味着该符号的每个混合矩均为零。z，$\bar{z}$ 中的多项式在 $L^2(\mathbb{D}, dA)$ 中稠密，因此具有此性质的有界符号必为零。

由 (3.16) 和 (3.17)，原算子等于

$$\sum_\ell (T^{\mathbb{H}}_{\alpha_\ell} T^{\mathbb{H}}_{\gamma_\ell} - T^{\mathbb{H}}_{\alpha_\ell \gamma_\ell}) + \sum_\ell (T^{\mathbb{H}}_{\bar{\delta}_\ell} T^{\mathbb{H}}_{\bar{e}_\ell} - T^{\mathbb{H}}_{\overline{\delta_\ell e_\ell}}).$$

由于 $M_\alpha M_\gamma = M_{\alpha\gamma}$ 和 $L_\alpha L_\gamma = L_{\alpha\gamma}$，第一个和式仅占据从共解析空间到解析空间的交叉块。第二个和式占据相反的交叉块。因此每个和式均为零。

考虑第一项和，并选取原函数 $A'_\ell = \alpha_\ell$ 和 $B'_\ell = \gamma_{\ell^\circ}$ 由于

$$L_\gamma \overline{K^{\mathbb{H}}_w} = \gamma(w) \overline{K^{\mathbb{H}}_w},$$

引理 3.2 给出了单个半交换子的交叉核：

$$\alpha(z) C_\gamma(z, w) + \gamma(w) C_\alpha(z, w) - C_{\alpha\gamma}(z, w).$$

展开并求和得到 $2H(z, w)/(z - w)^3$, 其中

$$H(z, w) = (z - w) \sum_\ell \alpha_\ell(z)\gamma_\ell(w) - \sum_\ell \alpha_\ell(z)[B_\ell(z) - B_\ell(w)]$$
$$- \sum_\ell \gamma_\ell(w)[A_\ell(z) - A_\ell(w)] + \int_w^z \sum_\ell \alpha_\ell(\xi)\gamma_\ell(\xi)\, d\xi.$$

先对 z 求导，未求导的项相互抵消，得到

$$H_z(z, w) = \sum_\ell \alpha'_\ell(z)[(z - w)\gamma_\ell(w) - B_\ell(z) + B_\ell(w)].$$

再对 w 求一次导得到

$$H_{zw}(z, w) = (z - w) \sum_\ell \alpha'_\ell(z)\gamma'_\ell(w). \tag{3.18}$$

交叉块为零，因此其所有核列均消失。因此 $H = 0$，并且

$$\sum_\ell \alpha'_\ell(z)\gamma'_\ell(w) = 0.$$

对每个变量从 λ 积分可得

$$\sum_\ell [\alpha_\ell(z) - \alpha_\ell(\lambda)][\gamma_\ell(w) - \gamma_\ell(\lambda)] = 0.$$

另一个交叉块的处理方式相同。因此 $\Psi_0 = 0$，并且 $\Psi(z,\ w) = \alpha_0(z) + \gamma_0(w)$。方程 (3.17) 给出 $\gamma_0 = -\alpha_0$。取 $\phi(z) = \Psi(z,\ \lambda)$ 可得到 $h^\infty(\mathbb{H})$ 中的一个函数，其中 $\phi(\lambda) = 0$，从而证明 (3.3)。

反过来，(3.3) 以及良定义的张量到算子映射推出

$$\sum_{j=1}^{N} T^{\mathbb{H}}_{u_j} T^{\mathbb{H}}_{v_j} = T^{\mathbb{H}}_{\phi} T^{\mathbb{H}}_{1} - T^{\mathbb{H}}_{1} T^{\mathbb{H}}_{\phi} = 0. \qquad \square$$

3.2. **边界极限**。我们使用张量 Φ 和解析分解 (1.13)，对 (1.1) 中的 Toeplitz 和 D 进行仿射重标度。我们不假设任何单独的解析分量有界。与下文定义的仿射映射复合后，在重标度后的域上仍保持调和性。由于这些域穷尽半平面，我们可以通过符号的重标度极限来研究其边界行为。

引理 3.3。对于任意满足 $r_n \to 1$ 和 $|\zeta_n| = 1$的序列 $a_n = r_n\zeta_n$，令(3.19)

$$\delta_n = 1 - r_n, \qquad L_n(z) = \zeta_n(1 - \delta_n z), \qquad \Omega_n = L_n^{-1}(\mathbb{D}) = \{z : 2\operatorname{Re} z > \delta_n |z|^2\}.$$

对于所有重标度符号均收敛的每个子序列，保留指标n 并记

$$\varphi_j \circ L_n \longrightarrow u_j, \qquad \psi_j \circ L_n \longrightarrow v_j \quad \text{in } C^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{H}), \tag{3.20}$$

并令 $D_\infty = \sum_{j=1}^{N} T^{\mathbb{H}}_{u_j} T^{\mathbb{H}}_{v_j}$。那么 D 是紧的，当且仅当

$$D_\infty = 0 \tag{3.21}$$

对于每个趋于边界的中心序列，以及该序列某个子序列上的每个同步符号极限。

证明。有界调和函数的内部估计表明，每个边界序列都有一个满足 (3.20) 的子序列。极限符号有界且调和。定义等距映射

$$U_n : L^2(\mathbb{D}, dA) \longrightarrow L^2(\mathbb{H}, dA), \qquad U_n f = \mathbf{1}_{\Omega_n} \delta_n (f \circ L_n), \tag{3.22}$$

并令 $Q_n = U_n Q U_n^*$。由于 L_n 将 Ω_n 映射到 $\mathbb{D}$ 且 $|L_n'| = \delta_n$，变量替换 $w = L_n(z)$ 给出

$$\|U_n f\|^2_{L^2(\mathbb{H}, dA)} = \delta_n^2 \int_{\Omega_n} |f(L_n(z))|^2 \, dA(z) = \int_{\mathbb{D}} |f(w)|^2 \, dA(w) = \|f\|^2_{L^2(\mathbb{D}, dA)}.$$

对于每个 $F \in L^2(\mathbb{H},\ dA)$，将引理 3.4] 的证明中的重标度论证应用于这些域和等距映射，可得

$$Q_n \longrightarrow Q_{\mathbb{H}} \quad \text{strongly on } L^2(\mathbb{H}, dA), \qquad U_n^* F \rightharpoonup 0 \quad \text{in } L^2(\mathbb{D}, dA), \tag{3.23}$$

以及归一化核收敛

$$U_n r_{a_n} \longrightarrow r_1^{\mathbb{H}} \quad \text{in } L^2(\mathbb{H}). \tag{3.24}$$

这里 $r_1^{\mathbb{H}}$是半平面上 1 处的归一化调和再生核。这些事实仅取决于重标度空间和核。我们将其应用于当前的有限和。

将每个重标度符号在 Ω_n 外延拓为零。一致有界性和控制收敛保证了其乘法算子的强收敛。有限

个一致有界强收敛算子的乘积也强收敛。因此，

$$U_n(DQ)U_n^* \longrightarrow D_\infty Q_{\mathbb{H}} \qquad \text{strongly.} \tag{3.25}$$

若 D 是紧的，则 (3.23) 中的弱收敛使左侧强收敛到零，因此 $D_\infty = 0$。

反过来，假设所有边界极限均为零。沿着具有同步符号极限的每个子序列，(3.24)、(3.25) 以及一致的算子范数界给出

$$\|Dr_{a_n}\|_2 = \|U_n(DQ)U_n^* U_n r_{a_n}\|_2 \longrightarrow 0.$$

通过子序列提取可得 $\|Dr_a\|_2 \to 0$，当 $|a| \to 1$ 时。对于固定的 R，$D_\beta(a,\ R)$ 中的点在 $|a| \to 1$ 时一致地趋近边界。因此，$|\langle Dr_b,\ r_a\rangle| \le \|Dr_b\|_2$ 和 (3.1) 证明了紧性。

后面将用到，若 $b_n \in D_\beta(a_n,\ R)$ 且 $w_n = L_n^{-1}(b_n)$，则令 $\rho = \tanh R < 1$，

$$|w_n - 1| < \rho|1 + (1-\delta_n)w_n|.$$

由三角不等式并展开平方不等式可得

$$|w_n| \le \frac{1+\rho}{1-\rho}, \qquad \operatorname{Re} w_n > \frac{1-\rho^2}{2(1+\rho^2)}.$$

因此，这些缩放后的点位于 $\mathbb{H}$ 的一个固定紧子集中。 □

下面这个经典朗斯基行列式定理的有限阶喷泉结论 [3] 将用于限制导数阶数。

引理 3.4. 设 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 是一个域，α_j, γ_j 在 Ω 上全纯，并令 $\mathcal{R}(z,w) = \sum_{j=1}^N \alpha_j(z)\gamma_j(w)$。若

$$(\partial_z^i \mathcal{R})(z,z) = 0, \qquad i = 0, \dots, N-1, \tag{3.26}$$

则 $\mathcal{R} = 0$。

证明。取 $A_1, \dots, A_r$ 作为 α_j 的常系数线性张成空间的一组基，其中 $r \le N$。则 $\mathcal{R} = \sum_{\ell=1}^r A_\ell(z)B_\ell(w)$。若 $r = 0$，结论显然成立。否则，(3.26) 中前 r 个恒等式给出

$$\begin{pmatrix} A_1 & \cdots & A_r \\ A_1' & \cdots & A_r' \\ \vdots & & \vdots \\ A_1^{(r-1)} & \cdots & A_r^{(r-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_r \end{pmatrix} = 0. \tag{3.27}$$

根据经典解析朗斯基行列式定理 [3，定理 1]，，$A_1, \dots, A_r$ 的朗斯基行列式不恒为零。因此，(3.27) 中的矩阵在某个非空开集上可逆。每个 B_ℓ 在该处均为零，因此由恒等定理，它们在整个 Ω 上都为零。□

定理 *1.2* 的证明。*(i)*–(iii) 的等价性。首先，假设 D 是紧的。根据引理 3.3 和命题 3.1，每个同时边界极限的符号张量都具有如下形式

$$\Psi(z,w) := \sum_{j=1}^N u_j(z)v_j(w) = \phi(z) - \phi(w). \tag{3.28}$$

特别地， $\Psi(z,\ z) = 0$ 以及

$$\Psi(z,w) - \Psi(z,1) - \Psi(1,w) + \Psi(1,1) = 0. \tag{3.29}$$

若 $\Phi(a,\ a) \not\to 0$，则选取一个与此极限矛盾的边界序列，再提取一个同步符号极限。由于 $L_n(1) = a_n$，我们得到 $\Phi(a_n,\ a_n) \to \Psi(1,\ 1) = 0$，这就产生了矛盾。

固定 $R > 0$。若 $\omega_R(a) \not\to 0$，则可选取 $a_n \to \partial\mathbb{D}$ 和 $z_n,\ w_n \in D_\beta(a_n,\ R)$，使中心化表达式的模具有一个正的下界。引理 3.3 证明中的估计表明，两个缩放后的点都落在 $\mathbb{H}$ 的一个固定紧子集中。取收敛子列，并利用符号的同步局部一致收敛。这与 (3.29) 矛盾。因此条件 (iii) 成立，而 (iii) 显然蕴含 (ii)。

最后，假设 (ii) 对某个 $R > 0$ 成立。任取一个同步边界极限 Ψ。对固定的 $z \in \mathbb{H}$，有 $|L_n(z)| \to 1$，因此

$$\Psi(z,z) = \lim_n \Phi(L_n(z), L_n(z)) = 0. \tag{3.30}$$

选取 1 的一个充分小的开邻域 $V \Subset \mathbb{H}$，使得对于所有足够大的 n，$L_n(V) \subset D_\beta(a_n,\ R)$。这样的邻域存在，是因为

$$\left| \frac{L_n(z) - a_n}{1 - \bar{a}_n L_n(z)} \right| = \frac{|z-1|}{|1 + (1-\delta_n)z|}$$

在 1 附近局部一致收敛。中心条件在 $V \times V$ 上给出 (3.29)。先固定 $w \in V$，并对第一个变量应用调和函数的唯一延拓。然后固定任意 $z \in \mathbb{H}$，并对第二个变量重复这一论证。该恒等式在整个 $\mathbb{H}^2$ 上成立。

因此，$\Psi(z,\ w) = \alpha(z) + \beta(w)$，其中 $\alpha,\ \beta$ 可以选为有界调和切片。方程 (3.30) 给出 $\beta = -\alpha$。命题 3.1 推出 $D_\infty = 0$，而引理 3.3 蕴含 D 是紧的。

(*i*) 与 (iv) 的等价性。使用引理 3.3 中的重标度，并写作$\lambda_n = -\delta_n\zeta_n$，从而 $L_n' = \lambda_n$。对于 $i \geq 1$，

$$\partial_z^i(\varphi_j \circ L_n) = \lambda_n^i F_j^{(i)} \circ L_n, \tag{3.31}$$

$$\partial_{\bar{z}}^i(\varphi_j \circ L_n) = \bar{\lambda}_n^i \overline{G_j^{(i)} \circ L_n}. \tag{3.32}$$

同样的公式对 ψ_j也成立。此外，

$$1 - |L_n(z)|^2 = \delta_n(2\operatorname{Re} z - \delta_n|z|^2). \tag{3.33}$$

在半平面的每个固定紧子集上，$1 - |L_n(z)|^2$ 因此与 δ_n可比。结合在 C^∞_{loc}中的收敛，这便将原始符号的加权边界极限转化为极限符号的精确导数恒等式。

首先，假设 D 是紧的。根据命题 3.1 和引理 3.3，每个极限张量都是一个加性差。因此，

$$\sum_{j=1}^N u_j v_j = 0, \tag{3.34}$$

$$\sum_{j=1}^N (\partial_z u_j)(z)(\partial_{\bar{w}} v_j)(w) = 0, \tag{3.35}$$

并且，对于每个 $i \geq 1$,

$$\sum_{j=1}^{N} (\partial_z^i u_j)(z)(\partial_w v_j)(w) = 0, \tag{3.36}$$

$$\sum_{j=1}^{N} (\partial_{\bar{z}}^i u_j)(z)(\partial_{\bar{w}} v_j)(w) = 0. \tag{3.37}$$

如果 (1.15)–(1.18) 中的任何一个极限不存在，则选取一个边界序列，使得沿该序列其模具有正下界。以该序列为中心进行缩放，并提取同步符号极限。在 $z = 1$, $(1 - |a_n|^2)/\delta_n = 2 - \delta_n \to 2$ 和 $|\lambda_n| = \delta_n$。根据 (3.31)–(3.33)，相应极限导数表达式的模仍具有正下界。这与 (3.34)–(3.37) 矛盾。因此，所有所述边界条件均成立。

反之，假设 (1.15)–(1.18) 成立。取任意同步边界极限 u_j, v_j并令 $\Psi(z, w) = \sum_{j=1}^{N} u_j(z)v_j(w)$。条件 (1.15) 给出

$$\sum_{j=1}^{N} u_j(z)v_j(z) = 0. \tag{3.38}$$

条件 (1.16) 和缩放公式给出

$$\sum_{j=1}^{N} (\partial_z u_j)(z)(\partial_{\bar{z}} v_j)(z) = 0. \tag{3.39}$$

对角线唯一性 [7, 引理 3.1] 因此推出

$$\partial_z \partial_{\bar{w}} \Psi(z, w) = \sum_{j=1}^{N} (\partial_z u_j)(z)(\partial_{\bar{w}} v_j)(w) = 0. \tag{3.40}$$

¯将 $\partial\partial$ 应用于精确的极限恒等式 (3.38)。调和性和 (3.39) 给出$\sum_{j=1}^{N} (u_j)_{\bar{z}}(z)(v_j)_z(z) = 0$。将相同的对角线唯一性应用于此恒等式，得到

$$\partial_{\bar{z}} \partial_w \Psi(z, w) = 0. \tag{3.41}$$

考虑全纯函数

$$F_+(z, w) = \partial_z \partial_w \Psi(z, w) = \sum_{j=1}^{N} (\partial_z u_j)(z)(\partial_w v_j)(w).$$

其分离秩至多为 N。条件 (1.17) 和缩放公式给出，对于 $i = 1, \ldots\ldots, N$,

$$\sum_{j=1}^{N} (\partial_z^i u_j)(z)(\partial_z v_j)(z) = 0, \quad \text{equivalently} \quad (\partial_z^{i-1} F_+)(z, z) = 0.$$

引理 3.4 蕴含

$$\partial_z \partial_w \Psi = 0. \tag{3.42}$$

对 (1.18) 取复共轭，并使用 (3.32)。将同一引理应用于全纯函数 $\partial_{\bar{z}} \partial_{\bar{w}} \Psi(z, w)$，得到

$$\partial_{\bar{z}} \partial_{\bar{w}} \Psi = 0. \tag{3.43}$$

方程 (3.40)–(3.43) 表明，Ψ 的四种交叉变量混合 Wirtinger 导数均为零。因此 $\Psi(z,w) = \alpha(z) + \beta(w)$。为直接验证这一点，固定 $o \in \mathbb{H}$ 并令

$$K(z,w) = \Psi(z,w) - \Psi(z,o) - \Psi(o,w) + \Psi(o,o).$$

Ψ_z 和 $\Psi_{\bar z}$ 关于第二个变量的两个一阶导数均为零，因此这些函数与该变量无关。于是 $\partial_z K = \partial_{\bar z} K = 0$。由于 $K(o,\ w) = 0$，可得 $K = 0$。因此，可将函数 α，β 选为有界调和切片。方程 (3.38) 给出 $\beta = -\alpha$。命题 3.1 和引理 3.3 表明 D是紧的。□

注 3.5。反射 U 保持面积和调和子空间，因此 $UQ = QU$和 $UT_\gamma U = T_{U\gamma}$。由于 $h_\alpha = T_\alpha U$，

$$h_\alpha h_\gamma = T_\alpha T_{U\gamma}, \qquad (T_\alpha h_\gamma)U = T_\alpha T_\gamma, \qquad (h_\alpha T_\gamma)U = T_\alpha T_{U\gamma}.$$

因此，任何由 TT 项和 hh 项组成的和本身就是 Toeplitz 乘积和。由Th 项和 hT 项组成的和，右乘U后会变成 Toeplitz 乘积和，而右乘运算保持秩、紧性和本质范数。由于 $U^2 = I$，这两种替换都可逆。包含两组项的和具有形式$D_0 + D_1 U$，其中 D_0，D_1 如 (1.1) 所示。两个主要定理分别给出了 D_0和 $D_1 U$ 的判据。

注 3.6. 对每个偶数 $N \ge 2$，取 $p(z) = (1-z)^{\mathrm{i}}$，其中采用主值对数，并对 $0 \le j < N$，令

$$\varphi_j = \frac{(-1)^j \binom{N-1}{j}}{(N-j)(j+1)} p^{N-j}, \qquad \psi_j = p^{j+1}.$$

这些符号有界且解析，因为 $|\arg(1-z)| < \pi/2$。将 j 与$N-1-j$ 配对得到 $\sum_j \varphi_j \psi_j = 0$，而二项式定理给出

$$\sum_j \varphi_j'(z)\psi_j'(w) = p'(z)p'(w)\big(p(z) - p(w)\big)^{N-1}.$$

先对 z 求导 $i-1$ 次，再令 $w = z$。当 $1 \le i < N$ 时，结果为零；当 $i = N$ 时，结果等于 $(N-1)!(p'(z))^{N+1}$。沿着 $z = r \to 1$，其模乘以 $(1-r^2)^{N+1}$ 趋于 $(N-1)!\,2^{N+1}$。所有混合条件和反解析条件都恒等为零。因此，若在定理 1.2 (iv) 中省略阶数 N，就会包含这个非紧和。情形 $N = 2$ 则在相差一个标量的意义下还原了 [10, 例 4.10(i)]。

4. Consequences and examples

推论 4.1。令 D 为 (1.1) 中的和。

(i) 如果所有 φ_j、ψ_j 都是调和多项式，那么 D 具有有限秩当且仅当

$$\sum_{j=1}^{N} \varphi_j(z)\psi_j(z) = 0, \qquad \sum_{j=1}^{N} (\partial_z \varphi_j)(z)(\partial_{\bar z}\psi_j)(z) = 0 \qquad (z \in \mathbb{D}).$$

(ii) 对于任意有界调和符号，(1.11) 中的张量 Φ 刻画零算子：

$$D = 0 \iff \Phi(z,w) = \phi(z) - \phi(w) \quad (z,w \in \mathbb{D}) \quad \textit{for some } \phi \in h^\infty(\mathbb{D}).$$

如果 (i) 中的两个符号恒等式成立，那么当且仅当两个合并分子 $\mathcal{R}_+$ 和 $\mathcal{R}_-$ 恒等为零时，$D = 0$ 也成立。

证明。 对角线唯一性与积分将混合导数条件与定理 1.1 中的中心化二元恒等式对应起来。对于多项式分量，两个分子都是多项式，并且根据 (1.4)，它们除以 $(z-w)^3$ 后为全纯函数。因此，两个分子都可被 $(z-w)^3$ 整除。有理基可以选为 $\{1\}$，因此（RD3）自动成立。关于 $\mathcal{R}_+$ 和 $\mathcal{R}_-$ 的断言由引理 2.3 中的两个交叉核推出。

假设 $D=0$。命题 2.2 给出 $\Phi(z,z)=0$ 以及两个中心恒等式，从而有 $\Phi_{z\bar{w}}=\Phi_{\bar{z}w}=0$。此外还有 $\mathcal{R}_+=\mathcal{R}_-=0$。对 (1.3) 求导得到$\partial_z\partial_w\mathscr{R}_{f,h}(z,w)=(z-w)f'(z)h'(w)$。将其应用于 (z,w) 处的 $\mathcal{R}_+$，以及 $(\bar{z},\bar{w})$ 处的 $\mathcal{R}_-$，便得到 $\Phi_{zw}=\Phi_{\bar{z}\bar{w}}=0$ 在对角线之外成立，因而处处成立。因此，$\Phi(z,w)-\Phi(z,0)$ 与 z 无关，并且等于 $\Phi(0,w)-\Phi(0,0)$。由此，对角恒等式给出了所声称的表示，其中 $\phi(z)=\Phi(z,0)\in h^\infty(\mathbb{D})$。反过来，按照命题 3.1 的证明，对符号张量应用双线性可得 $D=T_\phi T_1-T_1T_\phi=0$。□

注 3.5 将下面的每个交换子问题归结为 Toeplitz 乘积之差。普通 Toeplitz 交换子已在 [10, 定理 1.1 和 1.2、推论 4.1]中得到分类。对于 $\varphi(z)=z$ 和$\psi=1$而言，这一区别已经显而易见：

$$[T_z,T_1]=0,\qquad [T_z,h_1]U=[h_z,h_1]=T_{z-\bar{z}}.$$

根据定理 1.2，最后一个算子不是紧算子，因为其对角符号 $z-\bar{z}$沿着 $z=\mathrm{i}r$，$r\to 1$趋于 $2i$ 。事实上，每个具有调和符号的普通 Toeplitz 交换子都会湮灭 1，因为 $[T_f,T_g]1=Q(fg)-Q(gf)$，而$T_{z-\bar{z}}1=z-\bar{z}$。

这里我们考虑有界调和符号对。对于 φ，$\psi\in h^\infty(\mathbb{D})$，由反射可得

$$[T_\varphi,h_\psi]U=[T_\varphi,T_\psi]+T_\psi T_{\varphi-U\varphi}.$$

混合交换子具有有限秩当且仅当它为零。这些条件恰好在 $\psi=0$，或在 $\varphi=U\varphi$和 1，φ，ψ在$\mathbb{C}$上--线性相关时成立。事实上，有限秩性和命题 2.2 给出 $\psi(\varphi-U\varphi)=0$。若 $\psi\neq 0$，则由唯一延拓可得 $\varphi=U\varphi$，而 [10, 定理 1.1] 给出所述的相关性，因为反射不变的解析函数或共解析函数必为常数。反之，若 $\psi=0$ 或 φ 为常数，则混合交换子为零。在剩余情形下，$\psi=\lambda\varphi+\mu$ 和 $UT_\varphi=T_\varphi U$，这同样给出零交换子。

此外，$[T_\varphi,h_\psi]$ 是紧的，当且仅当 $[T_\varphi,T_\psi]$ 是紧的，且

$$\psi(z)\big[\varphi(z)-\varphi(\bar{z})\big]\longrightarrow 0\qquad(|z|\to 1).$$

这一边界条件的必要性由定理 1.2 (ii) 得出。在此条件下，$(\psi,\ \varphi-U\varphi)$ 的每个同时半平面剖面 $(\Psi,\ V)$ 都满足$\Psi V=0$。由唯一延拓可知，其中一个剖面恒为零，因此引理 3.3 给出 $T_\psi T_{\varphi-U\varphi}$的紧性。所示分解以及$U$ 的幺正性证明了这一等价关系。剩余的 Toeplitz 交换子当且仅当满足 [10, 定理 1.2]中的三个加权导数条件时才是紧的。如果两个符号都连续延拓至 $\overline{\mathbb{D}}$，那么 Toeplitz 交换子自动是紧的。在这种情况下，剩余的边界条件也可由 [16, 定理 4.4], 中的商代数描述结合 $h_\psi=T_\psi U$ 得出。

来自 [10,例 4.9] 的反射自交换子给出

$$[T_{z+\bar{z}},h_z]=[T_{\bar{z}},T_z]U,\qquad \lambda_n=\frac{1}{(n+1)(n+2)}\quad(n\geq 1).$$

由于 $Uz^n = \bar{z}^n$ 和 $U\bar{z}^n = z^n$，所引用的对角作用变为

$$[T_{z+\bar{z}}, h_z]1 = 0, \qquad [T_{z+\bar{z}}, h_z]z^n = -\lambda_n \bar{z}^n,$$
$$[T_{z+\bar{z}}, h_z]\bar{z}^n = \lambda_n z^n, \quad [T_{z+\bar{z}}, h_z]^2 z^n = -\lambda_n^2 z^n.$$

正交二维块的奇异值为 $\lambda_n \to 0$，因此 $[T_{z+\bar{z}}, h_z]$ 是无限秩的紧算子，并且 $[T_{z+\bar{z}}, h_z]^2 \neq 0$。

Chen、He 和 Hu [4] 刻画了具有有界调和符号的小Hankel算子的可交换性。现在，我们对在完整调和Bergman空间上产生正有限秩的有界调和符号对进行分类。

推论4.2。设 φ、$\psi \in h^\infty(\mathbb{D})$。则 $[h_\varphi, h_\psi]$ 具有非零有限秩，当且仅当存在非常数解析函数 u，使得 u、$u^{-1} \in H^\infty(\mathbb{D})$ 均具有有理原函数，并且对于某些 a、b、c、$d \in \mathbb{C}$，

$$\varphi = au + bU(u^{-1}), \qquad \psi = cu + dU(u^{-1}), \qquad ad - bc \neq 0. \tag{4.1}$$

在这种情况下

$$\operatorname{rank}[h_\varphi, h_\psi] = 2\operatorname{rank}(T_u, T_{u^{-1}}]. \tag{4.2}$$

每个正偶数秩都会出现。

秩的偶数性也可由 Chen、Koo和Lee 关于有限秩复斜对称算子的定理得出 [6]。在调和 Bergman 空间上定义共轭算子 K，使得 $(Kf)(z) = \overline{f(\bar{z})}$。由于 $Kh_\alpha^* K = h_\alpha$，我们有

$$K[h_\varphi, h_\psi]^* K = -[h_\varphi, h_\psi].$$

现在我们证明符号分类和秩公式，并说明每个正偶数秩都能实现。

证明。假设 $[h_\varphi, h_\psi] \neq 0$ 秩有限，并将 $\varphi = \varphi(0) + f + g(\bar{z})$、$\psi = \psi(0) + p + q(\bar{z})$ 写成具有中心化分量的形式。对 $[h_\varphi, h_\psi] = T_\varphi T_{U\psi} - T_\psi T_{U\varphi}$ 应用命题 2.2 和注 2.1，得到

$$\begin{aligned} &\varphi(z)\psi(\bar{z}) - \psi(z)\varphi(\bar{z}) = 0, \\ &f(z)p(w) - p(z)f(w) = 0, \qquad g(z)q(w) - q(z)g(w) = 0. \end{aligned} \tag{4.3}$$

由于 $[h_\varphi, h_\psi] \neq 0$，$V =$ 张成$_{\mathbb{C}}\{\varphi, \psi\}$ 是二维的。若 $1 \in V$，则在基 $(\alpha_0, 1)$ 下，由第一个恒等式可得 $\alpha_0 = U\alpha_0$。但是

$$[h_{\alpha_0}, h_1] = T_{\alpha_0 - U\alpha_0} = 0,$$

因此双线性得到 $[h_\varphi, h_\psi] = 0$，矛盾。故有 $1 \notin V$。V 上的两个中心分量映射的秩至多为一，并且合起来是单射；因此二者的秩均为一，且核各不相同。选取它们的核向量，得到一个基 $(u,\ Uv)$，其中 $u,\ v \in H^\infty$ 非常数。由于这些基向量属于 V，它们的有界性随即成立。第一个恒等式表明，uv 等于其反射，因此是一个非零常数。重标度得到 $v = u^{-1}$ 和 (4.1)；系数行列式非零，因为两对符号都是 V 的基。

直接相乘得到

$$[h_\varphi, h_\psi] = (ad - bc)\big((T_u, T_v] - U(T_v, T_u]U\big). \tag{4.4}$$

方程 (1.4) 和 (2.7) 给出 $\mathscr{H}_{v,\,u}(z,\ w) = \mathscr{H}_{u,\,v}(w,\ z)$。转置保持分离秩不变。因此，位于相反位置的交叉块具有相同的秩和正交值域，从而证明了 (4.2)，并将 $[h_\varphi, h_\psi]$ 的有限秩性归结为 $(T_u,\ T_v]$ 的有限秩性。两者

半交换子随后均为有限秩，其差 $[T_u, T_v]$ 也是如此。根据 [10, 定理 1.1],，除非 u，u^{-1} 相关，否则两个原函数都是有理的；将这种关系乘以 u 会使其非常数值域满足一个非零二次多项式，这与开映射定理矛盾。反之，假设 u 和 $v = u^{-1}$ 具有有理原函数。有限秩小 Hankel 定理 [15, 定理 4.2], 在 [10, 定理 2.2 的圆盘表述及其后的段落中],表明，$PM_\alpha|_{A^2(\mathbb{D})}$ 对 $\alpha = u$，v 具有有限秩。每个调和 Toeplitz 算子T_α 在解析–共解析分解下都是上三角的。由于 $uv = 1$，$T_uT_v - I$ 的对角块为零，而其剩余块中的每一项都包含这些有限秩限制中的一个。$T_vT_u - I$ 也同样如此。方程 (4.4) 给出了所需的有限秩性。此外，$\mathscr{K}_{u,\ v}(z,\ z) = z^2(u'(z)/u(z))^2/3 \neq 0$，因此该分支非零。

对于每个正偶数秩，固定 $0 < a < 1$ 和一个整数 $m \geq 2$，并令

$$A_m(z) = (1 - az)^m, \qquad B_m(z) = (1 - az)^{-m}. \tag{4.5}$$

公式 (2.7) 给出

$$\mathscr{K}_{A_m,B_m}(z, w) = \frac{2a^2m}{m^2 - 1} zw \sum_{k=0}^{m-2} (k + 1)(m - 1 - k) \frac{(1 - az)^k}{(1 - aw)^{k+2}}. \tag{4.6}$$

对于 $m = 2$，该核为 $4a^2zw/[3(1 - aw)^2]$,，因此由 (4.2) 可知，交叉块的秩为一，而小 Hankel 交换子的秩为二。一般而言，因子族 $z(1-az)^k$ 和 $w(1-aw)^{-k-2}$，$0 \leq k \leq m-2$ 分别线性无关，因此秩$(T_{A_m},\ T_{B_m}] = m - 1$ 以及秩$[h_{A_m}, h_{UB_m}] = 2(m - 1)$。实 Taylor系数给出 $[h_{A_m}, h_{UB_m}] = (T_{A_m},\ T_{B_m}] - (T_{A_m},\ T_{B_m}]^* \neq 0$，因此

$$-[h_{A_m}, h_{UB_m}]^2 = [h_{A_m}, h_{UB_m}]^*[h_{A_m}, h_{UB_m}] \neq 0. \qquad \square$$

紧性。 应用定理 1.2，其中 $N = 2$ 和符号张量

$$\Phi_h(z, w) = \varphi(z)\psi(\bar{w}) - \psi(z)\varphi(\bar{w}).$$

其导数判据表明，当且仅当以下四个量在 $|z| \to 1$ 时趋于零时，$[h_\varphi, h_\psi]$ 才是紧的:

$$\Phi_h(z, z), \qquad (1 - |z|^2)^2(\partial_z\partial_{\bar{w}}\Phi_h)(z, z),$$
$$(1 - |z|^2)^2(\partial_z\partial_w\Phi_h)(z, z), \qquad (1 - |z|^2)^3(\partial_z^2\partial_w\Phi_h)(z, z).$$

这里的导数是在设定 $w = z$ 之前求取的。为说明为何四个条件足够，令 $F(z) = (\partial_z\partial_w\Phi_h)(z, z)$，并令 $G(z) = (\partial_z^2\partial_w\Phi_h)(z, z)$。根据 $\Phi_h(z, w) = -\Phi_h(\bar{w}, \bar{z})$，另外两个共解析表达式分别为 $-F(\bar{z})$ 和 $G(\bar{z}) - F'(\bar{z})$。由于 F是解析的，根据 $|w - z| = (1 - |z|)/2$ 上的柯西估计，只要 $(1 - |z|^2)^2F(z) \to 0$，就有 $(1 - |z|^2)^3F'(z) \to 0$。

对于在 $\mathbb{D}$ 上连续的符号，紧性已经等价于 $\Phi_h(z, z) \to 0$。这个特殊情形由 [16, 定理 4.4], 推出，因为 $[h_\varphi, h_\psi]$ 在紧算子商空间中的像是边界函数 $\varphi(U\psi) - \psi(U\varphi)$。

一个有用的倒数符号情形也可由已有结果推出: [10, 推论 4.5(i)] 以及 Fulsche 的紧半交换子结果 [12, arXiv 版本中的引理 13] 给出，对于 $u,\ v = u^{-1} \in H^\infty(\mathbb{D})$,

$$[h_u, h_{Uv}] \text{ is compact} \iff (1 - |z|^2)|u'(z)| \longrightarrow 0 \quad (|z| \to 1).$$

事实上，(4.4) 包含两个相反的交叉块，因此小 Hankel 交换子的紧性使得 $(T_u,\ T_v]$ 和 $(T_v,\ T_u]$ 都是紧的。它们的差 $[T_u, T_v]$ 因此也是紧的。由于

$$u'v'' - u''v' = 2(u'/u)^3,$$

[10, 推论 4.5(i)]以及 u 和 u^{-1} 的有界性给出了右侧的小Bloch条件。反之，沿双曲测地线对 u' 进行积分表明，该条件使 u 在每个固定半径的双曲圆盘上的振荡趋于零。因此，$u \in \mathrm{VO} \subset \mathrm{VMO}_\partial$，而 Fulsche 的结果使两个半交换子均为紧算子。方程 (4.4) 随即给出了所断言的紧性。

Data availability

本文所述研究未使用任何数据。

Conflict of interest

作者　声明不存在利益冲突

。

Declaration of generative AI and AI-assisted technologies in the manuscript preparation process

OpenAI 的 ChatGPT 用于协助撰写数学论述、检查示例，以及修改英文文本和 LaTeX 格式。作者独立核实了数学论证、计算和参考文献，并对最终稿件承担全部责任。

References

[1] S. Axler 和 D. Zheng，通过 Berezin变换研究紧算子，

Indiana Univ. Math. J. ( ), **47** 1998 2, 387 400

第 – 期。DOI。[2] W. Bauer 和 J. Isralowitz，Fock空间 Toeplitz代数中算子的紧性刻画， F^p_α *J. Funct. Anal.* **263** (2012)，第 5 期，1323–1355。DOI。[3] A. Bostan 和 P. Dumas，朗斯基行列式与线性无关性， *Amer. Math. Monthly* **117** (2010)，第 8 期，722–727。DOI。[4] Y. Chen、W. He 和 Y. Hu，调和 Bergman 空间上小Hankel算子的代数性质， *Illinois J. Math.* **59** (2015)，第 2 期，295–317。DOI。[5] Y. Chen、H. Koo 和 Y. J. Lee，调和 Bergman 空间上 Toeplitz算子交换子的秩， *Integral Equations Operator Theory* **75** (2013)，第 1 期，31–38。DOI。[6] Y. Chen、H. Koo 和 Y. J. Lee，复斜对称算子的秩及其在 Toeplitz 算子中的应用， *J. Math. Anal. Appl.* **425** (2015)，第 2 期，734–747。DOI。[7] B. R. Choe、H. Koo 和 Y. J. Lee，具有调和符号的 Toeplitz 乘积之和，

Rev. ( ), *Mat. Iberoam.* **24** 2008 1, 43 70

第 – 期。DOI。[8] B. R. Choe、H. Koo 和 K. Na，调和 Bergman 空间上 Toeplitz算子的有限秩乘积， *Rocky Mountain J. Math.* **41** (2011)，第 1 期，45–78。DOI。[9] B. R. Choe 和 K. Nam，调和 Bergman空间上的 Berezin变换与 Toeplitz 算子， *J. Funct. Anal.* **257** (2009)，第 10 期，3135–3166。DOI。[10] P. Cui、Z. Huang、Y. Lu 和 C. Zu，调和 Bergman 空间上有限秩与紧的 Toeplitz交换子，arXiv:2611.08988v2 (2026年)。[11] X.-T. Dong 和 Z.-H. Zhou，拟齐次Toeplitz算子的交换子与广义半交换子的秩， *Monatsh. Math.* **183** (2017)，第 1 期，103–141。DOI。作者版本：arXiv:1411.0213v3。[12] R. Fulsche，多重调和函数空间上的 Toeplitz 算子：变形量子化与谱理论， *Integral Equations Operator Theory* **91** (2019)，论文编号 40。DOI。作者版本：arXiv:1901.02644v1。[13] H. Y. Guan 和 Y. F. Lu，调和 Bergman 空间上 Toeplitz算子与小Hankel算子的代数性质， *Acta Math. Sin. (Engl. Ser.)* **30** (2014)，第 8 期，1395–1406。DOI。

[14] K. Guo、S. Sun 和 D. Zheng，具有调和符号的 Toeplitz算子的有限秩交换子与半交换子，*Illinois J. Math.* **51** （2007），第 2 期，583–596。DOI。[15] K. Guo 和 D. Zheng，不变子空间、拟不变子空间与汉克尔算子，*J. Funct. Anal.* **187** （2001），第 2 期，308–342。DOI。[16] K. Guo 和 D. Zheng，调和 Bergman 空间上的Toeplitz代数与汉克尔代数，*J. Math. Anal. Appl.* **276** （2002），213–230。DOI。[17] Y. J. Lee，托普利茨算子与汉克尔算子乘积的有限秩和，*J. Math. Anal. Appl.* **397** 2013 2, 503 514 （ ），第 – 期。DOI。[18] Y.J. Lee，Hardy 空间上托普利茨算子与汉克尔算子乘积的零和，*Studia Math.* **227** 2015 1, 41 53 （ ），第 – 期。DOI。[19] Y. J. Lee，Dirichlet 空间上的 Toeplitz 乘积的紧和与Toeplitz代数，*Tohoku Math. J. (2)* **68** （2016），第 2 期，253–271。DOI。[20] C. W. Liu 和 B. W. Lin，调和Bergman空间上弱局部化算子的代数（中文），*Sci. Sin. Math.* **45** （2015），第 11 期，1881–1892。DOI。[21] D. H. Luecking，Bergman 空间上的有限秩托普利茨算子，*Proc. Amer. Math. Soc.* **136** 2008 5, 1717 1723 （ ），第 – 期。DOI。[22] J. Wang、J. Zhang 和 X. Zhao，Bergman 空间上交换的托普利茨算子与小汉克尔算子，*Collect. Math.* **76** （2025），第 2 期，417–433。DOI。[23] J. Zhang 和 X. Zhao，调和 Bergman 空间上交换的托普利茨算子与小汉克尔算子，*Acta Math. Sin. (Engl. Ser.)* **42** （2026年），第 8 期，2051–2072。DOI。

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian 116029, China
Email address: cuipuyu1234@163.com

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian 116029, China
Email address: huangzengyong123@163.com