arXiv:2611.32027v1 [cond-mat.mes-hall] 24 Nov 2026

# 菱形链中的环境辅助输运

Pavel S. Muraev，[1,2] Andrey R. Kolovsky，[1,2] 和 Dmitrii N. Maksimov[1,2]1俄罗斯科学院西伯利亚分院克拉斯诺亚尔斯克科学中心联邦研究中心，*660036*，俄罗斯克拉斯诺亚尔斯克2*IRC SQC*，西伯利亚联邦大学，*660041*，俄罗斯克拉斯诺亚尔斯克（2026年11月25日）

我们研究了与边界处的马尔可夫储库耦合的菱形链中的量子输运。该系统受到均匀退相干的影响，并存在贯穿每个晶格元胞、磁通量为Φ 的外部磁场。我们为 $\Phi = 0$ 和 $\Phi = \pi$推导出精确的解析解。我们证明，在 $\Phi = \pi$的全能带平坦区间内，退相干会破坏阿哈罗诺夫–玻姆笼禁，从而导致环境辅助量子输运。我们的研究结果表明，将平带系统与耗散环境耦合，为控制输运提供了一条可行途径；在仅有相干动力学的情况下，这些区间会导致完全局域化。

## I. 引言

晶格几何与规范场的相互作用，为通过相消干涉调控量子输运提供了一条有力途径。一个典型实现是穿有磁通的线性菱形（或菱形）链，这种结构可在光子和原子系统中通过合成规范场实现 [1–3]. 当每个 $\Phi = \pi$ 元胞的规范不变磁通为 [1–6]时，连接相邻晶胞的隧穿路径会发生相消干涉，从而形成全能带平坦（ABF）的单粒子谱和紧致局域态（CLS） [1–6]。这种现象称为阿哈罗诺夫–玻姆（AB）囚禁效应，在理想的相干孤立极限下会抑制单粒子弹道扩散。近期理论研究进一步推广了具有时间反演对称性破缺的 ABF 构造，其中 CLS 可承载由磁通调控的局域环流 [7]。

因此，AB 囚禁效应是一个尤为清晰的无无序局域化实例。它完全源于晶格几何与量子干涉。不同于安德森局域化 [8], 通过随机散射抑制输运，AB 囚禁效应依赖于传播路径之间精确的相位关系。因此，CLS 与相干性及囚禁条件密切相关。抬升平带简并的微扰可能使能带变平坦性消失并恢复输运 [9, 10]。与此同时，CLS 对某些静态微扰具有稳健性，因此微调与保护之间的相互作用并非简单明了 [11]。

在讨论扰动如何影响囚禁条件之前，我们先简要回顾边界驱动量子输运的更广泛背景。在这一设置中，两个化学势不同的储库由一个晶格连接起来，从而建立稳态电流 [12]。对于二次开放系统，即量子李乌维尔算符关于场算符呈二次形式的系统，协方差矩阵的运动方程可以严格闭合，且稳态为高斯态 [13–15]。这使得边界驱动的紧束缚链可以得到精确求解。此外，对于带有退相干的线性链，平均电流 [16, 17] 也已得到解析计算。

在现实中的量子系统和光子系统中，相干动力学伴随着驱动；而在具有相互作用的平台中，还伴随着多体相互作用。这些因素会改变破坏性干涉所依赖的布居数和相干性，从而改变阿哈罗诺夫–玻姆囚禁中的输运阻塞。近期关于菱形链电学晶格的实验表明，局域驱动可以选择性地激发紧致局域态，但也会在移位后的紧致局域态频率与色散带发生共振时诱发不稳定性并恢复输运 [18]。从理论上看，相互作用并不会简单地恢复扩散，还可能导致多体平带局域化或量子囚禁，使输运局限于束缚对 [19–21], 。玻色子阿哈罗诺夫–玻姆囚笼中的相互作用可以驱动局域化区域与离域化区域之间的电导跃迁 [22]。超导量子比特实验已经观测到平带局域化和相互作用诱导的光子离域化 [23], ，而里德堡原子实验揭示了相互作用驱动的阿哈罗诺夫–玻姆囚禁破缺及束缚对动力学 [24]。

除相互作用和驱动外，与环境的耦合会引入退相干，并发挥双重作用。适度的退相干可以破坏相干局域化和暗态，促进输运——即环境辅助量子输运（ENAQT） [25, 26]——通过驱动局域子空间中的反芝诺效应式逃逸 [27,28]。ENAQT 已在无序网络、激子材料和合成量子硬件中得到证实 [29–32]。相比之下，强退相干会起到连续测量的作用，抑制相干隧穿并阻碍输运，即量子芝诺效应 [28, 33]。尽管 ENAQT 和芝诺区间

在无序网络和光合复合体中已得到充分研究，但它们在具有合成磁通的平带系统中的表现，尤其是退相干对通过 AB 笼的稳态输运的影响，仍相对缺乏探索。

这引出了一个根本性问题：在几何受挫晶格中的量子输运与局域化过程中，相干干涉、外部驱动、耗散和相互作用之间存在错综复杂的相互作用。在本文中，我们针对一个由边界驱动、玻色子占据的菱形链来探讨这一问题。该链

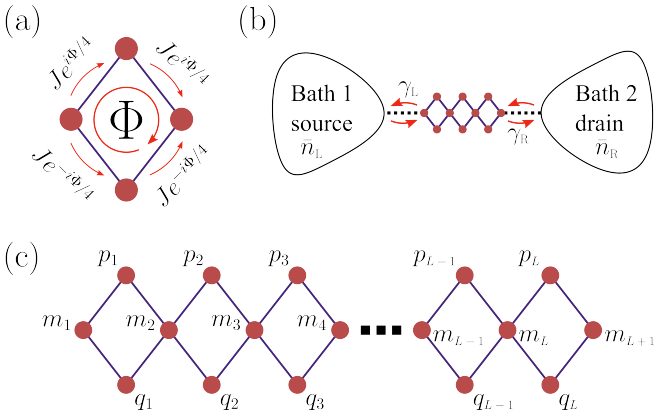


图1. 系统示意图。(a) 菱形链晶格的晶格元胞，突出显示受磁通 $\Phi$ 调制的跃迁连接。(b) 包含储库的完整系统构型。(c) 位点索引约定。

在两端与粒子储库耦合，并受到体退相干的影响。我们聚焦于非相互作用极限，此时单粒子密度矩阵能够精确描述稳态。下文将展示耗散如何触发或抑制输运。

## II. 模型

我们考虑一条由 $L$个菱形元胞（菱形）构成的菱形链，其中有 $M = 3L+1$ 个位点，由玻色子占据。这些位点分为三个子晶格：侧边位点 $p_\ell$， $q_\ell$ 其中 $\ell = 1, \ldots, L$，以及中心位点 $m_\ell$， $\ell = 1, \ldots, L+1$，见图1。紧束缚哈密顿量为

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{H}} = -\frac{J}{2}\sum_{\ell=1}^{L}\Big[&e^{i\Phi/4}\big(\hat{a}^\dagger_{p_\ell}\hat{a}_{m_\ell} + \hat{a}^\dagger_{m_{\ell+1}}\hat{a}_{p_\ell}\big)\\ &+ e^{-i\Phi/4}\big(\hat{a}^\dagger_{q_\ell}\hat{a}_{m_\ell} + \hat{a}^\dagger_{m_{\ell+1}}\hat{a}_{q_\ell}\big)\Big] + \text{h.c.},\end{aligned} \tag{1}$$

其中 $\hat{a}^\dagger$，$\hat{a}$ 为玻色子产生湮灭算符，$J$ 为跃迁振幅， $\Phi$ 为每个晶格元胞的磁通。Peierls相位对称分布，使得穿过该晶格元胞的总磁通为 $\Phi$。系统动力学由 Lindblad 主方程控制

$$\frac{\partial\widehat{\mathcal{R}}}{\partial t} = -i[\widehat{\mathcal{H}},\widehat{\mathcal{R}}] + \sum_{\ell=1,L+1}\mathcal{L}_{m_\ell}(\widehat{\mathcal{R}}) + \sum_{j\in\{m,p,q\}}\mathcal{D}_j(\widehat{\mathcal{R}}), \tag{2}$$

其中 $\mathcal{L}j$ 描述与左侧（$\ell = 1$）和右侧（$\ell = L+1$）储库之间的粒子交换，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_m(\widehat{\mathcal{R}}) = \gamma_m(\bar{n}_m+1)\Big(\hat{a}_m\widehat{\mathcal{R}}\hat{a}^\dagger_m - \frac{1}{2}\{\hat{a}^\dagger_m\hat{a}_m,\widehat{\mathcal{R}}\}\Big)\\ + \gamma_m\bar{n}_m\Big(\hat{a}^\dagger_m\widehat{\mathcal{R}}\hat{a}_m - \frac{1}{2}\{\hat{a}_m\hat{a}^\dagger_m,\widehat{\mathcal{R}}\}\Big),\end{aligned} \tag{3}$$

弛豫率为 $\gamma_m$ ，相应储库中的粒子平均密度为 $\bar{n}_m$，而 $\{\ldots,\ldots\}$ 表示反对易子。全文中，我们使用 $\bar{n}_{m_1}\equiv\bar{n}_{\mathrm{L}}$、$\bar{n}_{m_{L+1}}\equiv\bar{n}_{\mathrm{R}}$，同理，使用 $\gamma_{m_1}\equiv\gamma_{\mathrm{L}}$、 $\gamma_{m_{L+1}}\equiv\gamma_{\mathrm{R}}$。体退相干由下式描述

$$\mathcal{D}_j(\widehat{\mathcal{R}}) = \kappa\Big(\hat{n}_j\widehat{\mathcal{R}}\hat{n}_j - \frac{1}{2}\{\hat{n}_j^2,\widehat{\mathcal{R}}\}\Big), \tag{4}$$

其中 $\kappa$ 是退相干率，且 $\hat{n}_j = \hat{a}^\dagger_j\hat{a}_j$。

在长时间极限下，系统达到稳态。两个最受关注的量是稳态格点布居和稳态粒子流。这两者均可由单粒子密度矩阵（SPDM）得到

$$\rho_{\ell',\ell} = \langle\hat{a}^\dagger_\ell\hat{a}_{\ell'}\rangle \equiv \mathrm{Tr}\big[\hat{a}^\dagger_\ell\hat{a}_{\ell'}\widehat{\mathcal{R}}\big]. \tag{5}$$

将定义直接应用于式（2），即可得到 SPDM 的运动方程。结果为

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{\rho}}{dt} &= -i\big(\hat{H}_{\mathrm{eff}}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{H}^\dagger_{\mathrm{eff}}\big)\\ &+ \kappa\sum_{j\in\{m,p,q\}}|j\rangle\langle j|\hat{\rho}|j\rangle\langle j| + \sum_{\ell=1,L+1}\gamma_{m_\ell}\bar{n}_{m_\ell}|m_\ell\rangle\langle m_\ell|\end{aligned} \tag{6}$$

其中 $H_{\mathrm{eff}}$ 为有效非厄米哈密顿量

$$\hat{H}_{\mathrm{eff}} = \hat{H} - i\frac{\kappa}{2}\sum_{j\in\{m,p,q\}}|j\rangle\langle j| - \frac{i}{2}\sum_{\ell=1,1+L}\gamma_{m_\ell}|m_\ell\rangle\langle m_\ell|. \tag{7}$$

该晶格的紧束缚单粒子哈密顿量在 $p$–$m$–$q$ 基底下具有块结构，

$$\hat{H} = -\frac{J}{2}\begin{pmatrix}0 & \hat{D} & 0\\ \hat{D}^\dagger & 0 & \hat{D}^{\mathsf{T}}\\ 0 & \hat{D}^* & 0\end{pmatrix}, \tag{8}$$

其中

$$\hat{D} = e^{-i\Phi/4}\hat{J}_{(+)} + e^{+i\Phi/4}\hat{J}_{(-)}, \tag{9}$$

$\hat{}$和 $J_{(\pm)}$是具有以下结构的 $L\times(L+1)$ 矩阵

$$\begin{aligned}\hat{J}_{(+)} &= \begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\end{pmatrix},\\ \hat{J}_{(-)} &= \begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{10}$$

将单粒子密度矩阵写成分块形式

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix}\hat{\rho}_p & \hat{\rho}_{pm} & \hat{\rho}_{pq}\\ \hat{\rho}_{mp} & \hat{\rho}_m & \hat{\rho}_{mq}\\ \hat{\rho}_{qp} & \hat{\rho}_{qm} & \hat{\rho}_q\end{pmatrix}, \tag{11}$$

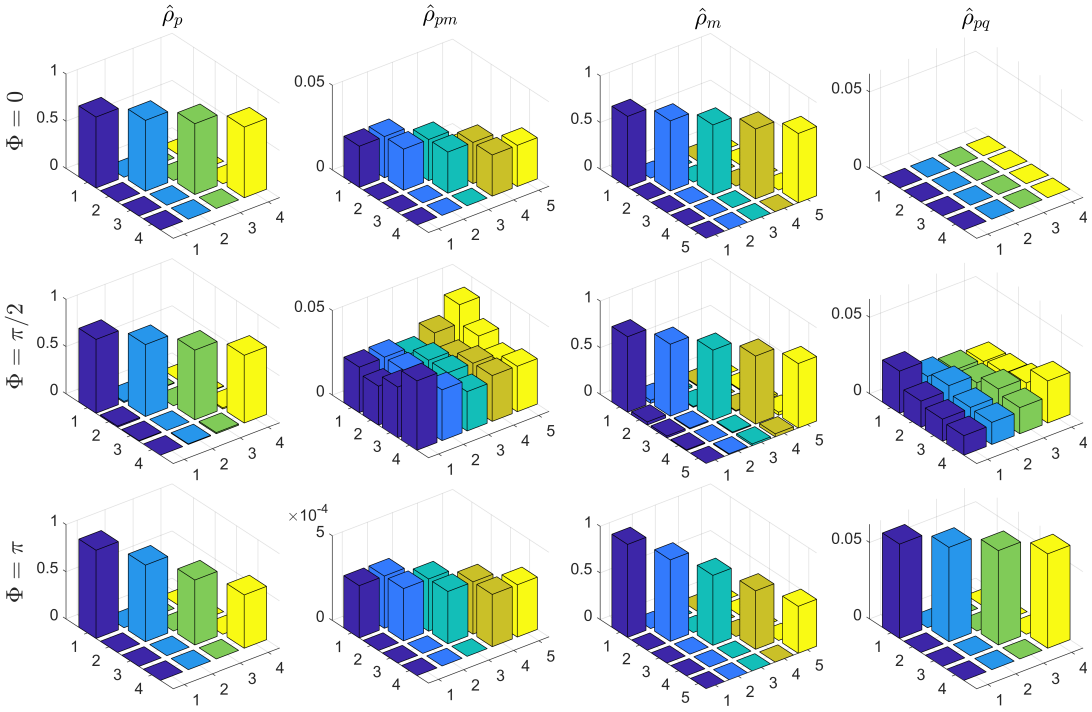


图 2. 单粒子密度矩阵各元素的绝对值。各列对应于式（15）中的相同块；各行对应于相同的磁通 $\Phi$。参数为 $J = 1$， $L = 4$，$\gamma_{\mathrm{L}} = \gamma_{\mathrm{R}} = 0.2$， $\bar{n}_{\mathrm{L}} = 1$， $\bar{n}_{\mathrm{R}} = 0.5$，以及 $\kappa = 0.01$。

并利用该矩阵的以下性质

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= \hat{\rho}^{\dagger}, \\ \hat{\rho} &= \widehat{P}\hat{\rho}^{*}\widehat{P}, \end{aligned} \tag{12}$$

其中 $\widehat{P}$ 由下式给出

$$\widehat{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\widehat{\mathbb{1}}_L \\ 0 & \widehat{\mathbb{1}}_{L+1} & 0 \\ -\widehat{\mathbb{1}}_L & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{13}$$

其中 $\widehat{\mathbb{1}}_L$ 为 $L \times L$ 单位矩阵。式（12）中的第二行可通过对主方程（6）取复共轭并利用

$$\widehat{H} = -\widehat{P}\widehat{H}^{*}\widehat{P}. \tag{14}$$

考虑式（12）后，可得到如下形式的单粒子密度矩阵

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \hat{\rho}_p & \hat{\rho}_{pm} & \hat{\rho}_{pq} \\ \hat{\rho}_{pm}^{\dagger} & \hat{\rho}_m & -\hat{\rho}_{pm}^{\mathsf{T}} \\ \hat{\rho}_{pq}^{*} & -\hat{\rho}_{pm}^{*} & \hat{\rho}_p^{*} \end{pmatrix}, \tag{15}$$

其中，关系式 $\hat{\rho}_m = \hat{\rho}_m^{*}$、$\hat{\rho}_{pq} = \hat{\rho}_{pq}^{\mathsf{T}}$ 和 $\hat{\rho}_p = \hat{\rho}_p^{*}$ 由厄米性和对称性 $\hat{\rho} = P\hat{\rho}^{*}P$ 得出。

链中的粒子流可计算为

$$I = \gamma_{\mathrm{L}}(\bar{n}_{\mathrm{L}} - n_{m_1}) = \gamma_{\mathrm{R}}(n_{m_{L+1}} - \bar{n}_{\mathrm{R}}), \tag{16}$$

其中，$n_{m_1} \equiv \rho_{m_1 m_1}$ 和 $n_{m_{L+1}} \equiv \rho_{m_{L+1} m_{L+1}}$ 是边缘格点处的布居数。请注意，式 (16) 中两种粒子流定义的等式仅在稳态情形下成立，即 $d\hat{\rho}/dt = 0$，此时式 (6) 化为一个关于单粒子密度矩阵四个唯一块中各元素的封闭线性方程组。图 2 展示了稳态下 $\Phi = 0$、$\pi/2$、$\pi$ 时单粒子密度矩阵块的一个数值解。注意，在 $\Phi = 0$、$\pi$ 时，所有块都呈对角形式。所有方阵都是对角矩阵，而矩形 $\hat{\rho}_{pm}$ 有两条非零主副对角线。与此相比，在 $\Phi = \pi/2$ 中，$\hat{\rho}_{pm}$ 和 $\rho_{pg}$ 是稠密矩阵。数值模拟表明，$\Phi = 0$、$\pi$ 是仅有的几种无需退相干便能抑制非对角长程序的特殊情形。一般而言，在 $\Phi \in (0, \pi)$ 时，SPDM 块是稠密矩阵。

## III. 电流的解

### A. $\pi$-磁通：阿哈罗诺夫–玻姆笼禁与退相干辅助输运

在 $\Phi = \pi$ 处，稳态方程的解为

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{pm} &= a\widehat{D}^{*}, \\ \hat{\rho}_{pq} &= ib\,\widehat{\mathbb{1}}_L, \\ \hat{\rho}_m &= \mathrm{diag}(n_{m_1}, \ldots, n_{m_{L+1}}), \\ \hat{\rho}_p &= \mathrm{diag}(n_{p_1}, \ldots, n_{p_L}), \end{aligned} \tag{17}$$

其中 $a$ 和 $b$ 是未知实数。将上述试探解代入主方程（6）并令 $\partial\hat{\rho}/\partial t = 0$，可得以下表达式

$$\begin{aligned}
&n_{p_\ell} - n_{m_\ell} + 2\frac{\kappa^2 + J^2}{\kappa J}a + \gamma_{\mathrm{L}}\frac{a}{J}\delta_{\ell,1} = 0,\\
&n_{m_{\ell+1}} - n_{p_\ell} + 2\frac{\kappa^2 + J^2}{\kappa J}a + \gamma_{\mathrm{R}}\frac{a}{J}\delta_{\ell,L} = 0,\\
&\gamma_{\mathrm{L}} n_{m_1} + 2Ja = \gamma_{\mathrm{L}}\bar{n}_{\mathrm{L}},\\
&\gamma_{\mathrm{R}} n_{m_L} - 2Ja = \gamma_{\mathrm{R}}\bar{n}_{\mathrm{R}},
\end{aligned} \tag{18}$$

同时，参数 $b$ 可表示为

$$b = -\frac{2J}{\kappa}a. \tag{19}$$

关于上述方程推导的详细内容见附录 A。方程（18）可求得 $a$。结果为

$$a = \frac{\kappa J\gamma_{\mathrm{L}}\gamma_{\mathrm{R}}(\bar{n}_{\mathrm{L}} - \bar{n}_{\mathrm{R}})}{\kappa(2J^2 + \gamma_{\mathrm{L}}\gamma_{\mathrm{R}})(\gamma_{\mathrm{L}} + \gamma_{\mathrm{R}}) + 4\gamma_{\mathrm{L}}\gamma_{\mathrm{R}}L(\kappa^2 + J^2)}. \tag{20}$$

边缘位点的布居数 $n_{m_1}$ 和 $n_{m_{L+1}}$ 可由方程（18）的最后两行求得，其余所有未知量则可通过应用方程（18）的前两行递推求得。概率流的表达式可由（16）得出，因此最终结果为

$$I_\pi = \frac{2\kappa J^2\gamma_{\mathrm{L}}\gamma_{\mathrm{R}}(\bar{n}_{\mathrm{L}} - \bar{n}_{\mathrm{R}})}{\kappa(2J^2 + \gamma_{\mathrm{L}}\gamma_{\mathrm{R}})(\gamma_{\mathrm{L}} + \gamma_{\mathrm{R}}) + 4\gamma_{\mathrm{L}}\gamma_{\mathrm{R}}L(\kappa^2 + J^2)}. \tag{21}$$

我们来考察方程（21）。在相干极限 $\kappa \to 0$下，概率流随 $\kappa$ 线性趋于零，

$$I_\pi \simeq \frac{\kappa(\bar{n}_{\mathrm{L}} - \bar{n}_{\mathrm{R}})}{2L} \to 0. \tag{22}$$

这就是 AB 囚禁区。尽管储库偏压有限，相消干涉仍会抑制输运。随着$\kappa$ 增大，概率流先上升、达到最大值，然后下降，因为

$$I_\pi \simeq \frac{J^2(\bar{n}_{\mathrm{L}} - \bar{n}_{\mathrm{R}})}{2L\kappa}, \qquad \kappa \gg J. \tag{23}$$

最大值出现在

$$\kappa = J, \tag{24}$$

with

$$I_\pi^{\max} = \frac{2J^2\gamma_{\mathrm{L}}\gamma_{\mathrm{R}}(\bar{n}_{\mathrm{L}} - \bar{n}_{\mathrm{R}})}{(2J^2 + \gamma_{\mathrm{L}}\gamma_{\mathrm{R}})(\gamma_{\mathrm{L}} + \gamma_{\mathrm{R}}) + 8\gamma_{\mathrm{L}}\gamma_{\mathrm{R}}LJ}. \tag{25}$$

对于 $L \gg 1$ 可得

$$I_\pi^{\max} \simeq J\frac{\bar{n}_{\mathrm{L}} - \bar{n}_{\mathrm{R}}}{4L}. \tag{26}$$

$I_\pi$ 对 $\kappa$ 的非单调依赖是环境辅助量子输运的标志。适度的退相干会破坏导致阿哈罗诺夫–玻姆囚禁的相消干涉，从而恢复输运。在强退相干下，电流再次受到抑制，这与量子芝诺机制相符。

### B. 零磁通：弹道-扩散交叉

在 $\Phi = 0$ 处，$D = J_{(+)} + J_{(-)}$。稳态方程由试探解求得

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}_{pm} &= ia(\widehat{J}_{(+)} - \widehat{J}_{(-)}),\\
\hat{\rho}_{pq} &= 0,\\
\hat{\rho}_m &= \mathrm{diag}(n_{m_1}, \ldots, n_{m_{L+1}}),\\
\hat{\rho}_p &= \mathrm{diag}(n_{p_1}, \ldots, n_{p_L}).
\end{aligned} \tag{27}$$

按照上一小节中的相同步骤，可得到

$$a = \frac{J\gamma_{\mathrm{L}}\gamma_{\mathrm{R}}(\bar{n}_{\mathrm{L}} - \bar{n}_{\mathrm{R}})}{(2J^2 + \gamma_{\mathrm{L}}\gamma_{\mathrm{R}})(\gamma_{\mathrm{L}} + \gamma_{\mathrm{R}}) + 4\gamma_{\mathrm{L}}\gamma_{\mathrm{R}}L\kappa}. \tag{28}$$

相应的电流为

$$I_0 = \frac{2J^2\gamma_{\mathrm{L}}\gamma_{\mathrm{R}}(\bar{n}_{\mathrm{L}} - \bar{n}_{\mathrm{R}})}{(2J^2 + \gamma_{\mathrm{L}}\gamma_{\mathrm{R}})(\gamma_{\mathrm{L}} + \gamma_{\mathrm{R}}) + 4\gamma_{\mathrm{L}}\gamma_{\mathrm{R}}L\kappa}. \tag{29}$$

方程（29）在 $\kappa = 0$ 处达到最大值，并随退相干的增强而单调减小。这是一个不存在囚禁效应的系统所表现出的预期行为。相干输运本已十分高效，而退相干只会对其造成干扰。值得一提的是，方程（29）类似于边界驱动的玻色链中存在体退相干时所得到的弹道-扩散交叉解[17]。在 $\kappa = 0$ 处，电流与链长无关；但对于 $\kappa \neq 0$，电流渐近地与链长成反比。

### C. 任意磁通

对于任意 $\Phi$，由于存在非对角长程序，稳态方程通常不允许采用简单的闭式对角 Ansatz。在强退相干极限 $\kappa \gg J$ 下，非对角元仍然必须受到阻尼，因此可以对 SPDM 块作如下代换

$$\hat{\rho}_{pm} = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & a & b & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & a & b \end{pmatrix}, \tag{30}$$

and

$$\hat{\rho}_{pq} = \begin{pmatrix} c & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & c & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & c \end{pmatrix}. \tag{31}$$

对于块 $\hat{\rho}_m$ 和 $\hat{\rho}_p$，替换形式与（17）和（27）中的相同。使用上述替换，可得到稳态电流的如下结果

$$I = \frac{2\kappa J^2\gamma_{\mathrm{L}}\gamma_{\mathrm{R}}(\bar{n}_{\mathrm{L}} - \bar{n}_{\mathrm{R}})}{\kappa(2J^2 + \gamma_{\mathrm{L}}\gamma_{\mathrm{R}})(\gamma_{\mathrm{L}} + \gamma_{\mathrm{R}}) + 4\gamma_{\mathrm{L}}\gamma_{\mathrm{R}}L(\kappa^2 + FJ^2)}, \tag{32}$$

with

$$F = \sin^2\Big(\frac{\Phi}{2}\Big) + \frac{\bar{a}}{2}\sin\Phi,$$
$$\bar{a} = -\frac{2J^2 L \sin\Phi}{\kappa(\gamma_{\rm L}+\gamma_{\rm R}) + 4\kappa^2 L + 4J^2 L\cos^2(\Phi/2)}. \tag{33}$$

方程（32）的推导细节见附录 B。该表达式在 $\Phi = 0$ 和 $\Phi = \pi$时是精确的；对于所有 $\kappa$，它分别化为方程（21）和（29）。对于中间磁通量，它给出了适用于 $\kappa \gtrsim J$的最低阶近似。在相反的极限下，$\kappa \ll J$，所提出的近似无法捕捉稳态密度矩阵的完整结构。数值上，中间磁通量下的电流可由 $I \simeq I_0\cos^2(\Phi/2)$ 很好地描述，这与 [34] 中关于同一晶格内无退相干的非相互作用玻色子的经验关系一致。

### D. 数值示例

图3(a) 展示了稳态电流随 $\Phi$ 和 $\kappa$ 变化的数值结果，其中 $L = 6$。在 $\Phi = \pi$ 和 $\kappa \simeq J$附近可以看到环境辅助量子输运区域，而在 $\Phi = 0$ 处，电流随 $\kappa$单调下降。图3 (b) 将方程（6）的稳态数值解与方程（21）和（29）的解析结果进行了比较，其中 $L = 2$ 和 $L = 20$。对于所有 $\kappa$，在 $\Phi = 0$ 和 $\Phi = \pi$ 处，两者完全吻合。在 $\Phi = \pi/2$处，解析解与$\kappa \lesssim J$的数值曲线存在偏差，这与强退相干试探解在中等磁通下属于近似解的性质相符。

## IV. 结论

我们研究了受到体退相干和外部磁场作用的边界驱动菱形链中的稳态输运。对于磁通值 $\Phi = 0$，$\pi$，我们推导出了概率流的精确解析解。研究表明，在每个晶格元胞磁通为 $\Phi = \pi$ 时出现的阿哈罗诺夫–玻姆笼禁效应会被适度退相干打破，从而恢复输运；此时最优退相干率为 $\kappa = J$，且与储库耦合率及链中的格点数无关。研究还表明，在 $\Phi = 0$时，退相干只会抑制电流。这些结果确立了菱形链作为环境辅助量子输运的最小晶格实现，并表明它可作为一种受磁通控制的开关，在退相干抑制与退相干辅助两种机制之间切换。

由此呈现出的物理图景如下。在相干极限下，$\Phi = \pi$ 处的链谱是无色散的，而相消干涉阻断了通过该链的输运。将链与边缘处的储库耦合起来，本身并不会导致输运，因为因禁条件受到晶格几何结构的保护。退相干打破了这种保护。在中等

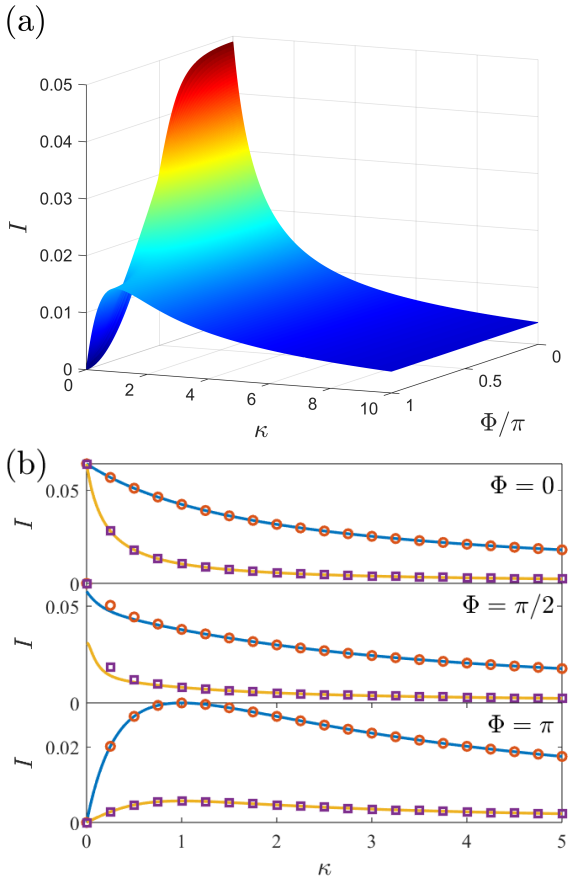


图 3. （a）概率流随磁通 $\Phi$ 和退相干率 $\kappa$的变化。参数为 $L = 6$、$J = 1$、$\gamma_{\rm L} = \gamma_{\rm R} = 0.2$ $\bar{n}_{\rm L} = 1$ $\bar{n}_{\rm R} = 0.5$ 、和。（b）概率流随退相干 $\kappa$的变化。图中展示了解析结果（实线）和解析结果（标记）。蓝线和圆圈对应于 $L = 2$；黄线和方块对应于 $L = 20$。$\Phi = 0$、$\pi/2$、$\pi$的结果。参数为 $J = 1$、$\gamma_{\rm L} = 0.2$、$\gamma_{\rm R} = 0.4$、$\bar{n}_{\rm L} = 1$ 和 $\bar{n}_{\rm R} = 0.5$。

退相干率下，噪声破坏了导致囚禁效应的相位关系，从而使输运成为可能。最佳退相干率 $\kappa = J$ 让人联想到激子输运背景下所讨论的“金发姑娘”条件，[30, 31], 即最佳噪声强度与相关的相干能量尺度相当。相比之下，在 $\Phi = 0$ 处，链是一个具有色散能带的紧束缚晶格。弹道输运十分高效，而退相干只会使其劣化，这与已知的具有退相干的开放链中的弹道-扩散交叉相一致 [16, 17]。

未来研究有几个自然的方向。首先，可以沿着 [20–22, 24] 的思路，探索退相干与相互作用之间的相互影响。其次，可以研究非马尔可夫噪声和结构化储库的作用 [26, 29]。第三，可以在光子波导阵列 [2, 3], 、冷原子合成晶格或电路平带晶格 [6, 18] 中，检验预测的环境辅助输运峰值 $\kappa = J$。

致谢。本研究由 俄罗斯科学基金会，资助编号：25-12-00268。

[1]J. Vidal、R. Mosseri 和 B. Dou˛cot，《二维结构中的阿哈罗诺夫–玻姆笼》，《物理评论快报》81，5888（1998）。[2] S. Longhi，《合成磁场通过波导和耦合谐振器晶格产生的阿哈罗诺夫–玻姆光子笼》，《光学快报》39，5892（2014）。[3] S. Mukherjee、M. Di Liberto、P. ¨Ohberg、R. R. Thom[4] son 和 N. Goldman，《在光子晶格中实验观测阿哈罗诺夫–玻姆笼》，《物理评论快报》121，075502（2018）。[5] A. A. Lopes 和 R. G. Dias，《菱形链中的相互作用无自旋费米子》，《物理评论B》84，085124（2011）。[6] D. Leykam 和 S. Flach，《展望：光子平带》，《APL光子学》3，070901（2018）。[7] N. Lape、S. Diubenkov、L. Q. English、P. G. Kevrekidis、A. Andreanov、Y. Kim 和 S. Flach，《全能带平坦电晶格的实现与表征》，《物理评论B》112，184309（2025）。[8] R. K. Ray、C. Danieli、A. Andreanov 和 S. Flach，《时间反演对称性破缺平带中的紧致局域电流》，《物理评论B》114，125105（2026）。[9] P. W. Anderson，《某些随机晶格中的扩散缺失》，《物理评论》109，1492（1958）。[10] C. Danieli、A. Andreanov、D. Leykam 和 S. Flach，《平带精细调控及其光子学应用》，《纳米光子学》13，3925（2024）。[11] C. Danieli 和 S. Flach，《人工平带系统研究进展：分类、扰动与应用》，《物理学进展》75，73（2026）。´G. Gligori[12] c、D. Leykam 和 A. Maluckov，《不同无序类型对菱形链中阿哈罗诺夫–玻姆笼禁效应的影响》，《物理评论A》101，023839（2020）。[13] G. T. Landi、D. Poletti 和 G. Schaller，《非平衡边界驱动量子系统：模型、方法与性质》，《现代物理评论》94，045006（2022）。[14] C. Guo 和 D. Poletti，《玻色与费米耗散二次开放系统的解》，《物理评论A》95，052107（2017）。[15] A. E. Teretenkov，《具有二次生成元的不可逆量子演化：综述》，《无穷维分析、量子概率与相关主题》22，1930001（2019）。[16] T. Barthel 和 Y. Zhang，《开放费米与玻色系统中准自由和二次Lindblad主方程的求解》，《统计力学杂志：理论与实验》2022，113101（2022）。[17] M. ˇZnidariˇc，《开放量子链扩散型非平衡稳态的精确解》，《统计力学杂志：理论与实验》2010，L05002（2010）。A. Asadian、D. Manzano、M. Tiersch 和 H. J. Briegel，《任意维度量子谐振子晶格中的热输运》，《物理评论E》87，012109（2013）。[18]C. Chase-Mayoral、L. Q. English、N. Lape、Y. Kim、S. Lee、A. Andreanov、S. Flach 和 P. G. Kevrekidis，《电路平带晶格中的紧致局域态》，《物理评论B》109，075430（2024）。[19] J. Vidal、B. Dou˛cot、R. Mosseri 和 P. Butaud，《周期势中两个粒子的相互作用诱导离域化》，《物理评论快报》85，3906（2000）。[20] C. Danieli、A. Andreanov 和 S. Flach，《多体平带局域化》，《物理评论B》102，041116（2020）。[21] C. Danieli、A. Andreanov、T. Mithun 和 S. Flach，《相互作用多体全能带平坦晶格中的量子囚禁》，《物理评论B》104，085132（2021）。[22] A. R. Kolovsky、P. S. Muraev 和 S. Flach，《阿哈罗诺夫–玻姆笼中相互作用玻色子的电导跃迁》，《物理评论A》108，L010201（2023）。[23] J. G. C. Martinez、C. S. Chiu、B. M. Smitham 和 A. A. Houck，《光子的平带局域化与相互作用诱导的离域化》，《科学进展》9，eadj7195（2023）。[24] T. Chen、C. Huang、I. Velkovsky、T. Ozawa、H. Price、J. P. Covey 和 B. Gadway，《平带里德伯晶格中相互作用驱动的阿哈罗诺夫–玻姆囚禁破缺》，《自然·物理》21，221（2025）。[25] M. Mohseni、P. Rebentrost、S. Lloyd 和 A. Aspuru-Guzik，《光合作用能量传递中的环境辅助量子行走》，《化学物理学杂志》129，174106（2008）。[26] P. Rebentrost、M. Mohseni、I. Kassal、S. Lloyd 和 A. Aspuru-Guzik，《环境辅助量子输运》，《新物理学杂志》11，033003（2009）。[27] A. G. Kofman 和 G. Kurizki，《通过频繁观测加速量子衰变过程》，《自然》405，546 2000（）。[28] S. Greenfield、A. Kamal、J. Dressel 和 E. Levenson-Falk，《教程：理解量子芝诺与反芝诺区间》（2026），arXiv:2506.12679 [quant-ph]。[29] D. Dwiputra 和 F. P. Zen，《环境辅助量子输运与迁移率边》，《物理评论A》104，022205（2021）。[30] S. Alterman、J. Berman 和 F. W. Strauch，《全连接网络上环境辅助量子输运的最优条件》，《物理评论E》109，014310 2024（）。[31] D. D. Blach、V. A. Lumsargis-Roth、C. Chuang、D. E. Clark、S. Deng、O. F. Williams、C. W. Li、J. Cao 和 L. Huang，《钙钛矿纳米晶超晶格中激子的环境辅助量子输运》，《自然·通讯》16，1270（2025）。[32] L. Nallamothula 和 V. Prybutok，《作为资源的噪声：在量子硬件上对环境辅助量子输运的实验证明》，《先进量子技术》9，e70328（2026）。[33] P. Facchi 和 S. Pascazio，《量子芝诺动力学：数学与物理层面》，《物理学杂志A：数学与理论》41，493001（2008）。[34] P. S. Muraev 和 A. R. Kolovsky，《一维磁通菱形晶格中的量子输运》，《量子电子学》-

电子学**51**，502（2021）。

**附录 A：SPDM 块的稳态方程**

将式（15）给出的单粒子密度矩阵的分块形式代入稳态主方程（6）可得

$$i\frac{J}{2}\big(\widehat{D}\hat{\rho}^{\dagger}_{pm}-\hat{\rho}_{pm}\widehat{D}^{\dagger}\big)-\kappa\big[\hat{\rho}_p-\mathrm{diag}(\hat{\rho}_p)\big]=0, \tag{A1}$$

$$i\frac{J}{2}\big(\widehat{D}^{\dagger}\hat{\rho}_p+\widehat{D}^{\mathsf{T}}\hat{\rho}^{*}_{pq}-\hat{\rho}_m\widehat{D}^{\dagger}\big)-\kappa\hat{\rho}^{\dagger}_{pm}-\frac{1}{2}\big(\gamma_{\mathrm{R}}|m_{L+1}\rangle\langle m_{L+1}|\hat{\rho}^{\dagger}_{pm}+\gamma_{\mathrm{L}}|m_1\rangle\langle m_1|\hat{\rho}^{\dagger}_{pm}\big)=0, \tag{A2}$$

$$i\frac{J}{2}\big(\widehat{D}^{*}\hat{\rho}^{\dagger}_{pm}+\hat{\rho}^{*}_{pm}\widehat{D}^{\dagger}\big)-\kappa\hat{\rho}^{*}_{pq}=0, \tag{A3}$$

$$\begin{aligned}i\frac{J}{2}\big(\widehat{D}^{\dagger}\hat{\rho}_{pm}-\widehat{D}^{\mathsf{T}}\hat{\rho}^{*}_{pm}+\hat{\rho}^{\mathsf{T}}_{pm}\widehat{D}^{*}-\hat{\rho}^{\dagger}_{pm}\widehat{D}\big)-\frac{\gamma_{\mathrm{L}}}{2}\big(|m_1\rangle\langle m_1|\hat{\rho}_m-2\bar{n}_{\mathrm{L}}|m_1\rangle\langle m_1|+\hat{\rho}_m|m_1\rangle\langle m_1|\big)\\-\frac{\gamma_{\mathrm{R}}}{2}\big(|m_{L+1}\rangle\langle m_{L+1}|\hat{\rho}_m-2\bar{n}_{\mathrm{R}}|m_{L+1}\rangle\langle m_{L+1}|+\hat{\rho}_m|m_{L+1}\rangle\langle m_{L+1}|\big)-\kappa\big[\hat{\rho}_m-\mathrm{diag}(\hat{\rho}_m)\big]=0.\end{aligned} \tag{A4}$$

这些式（17）和（27）可在两种极限磁通情形下求解这些方程。对于 $\pi$-磁通情形，使用以下恒等式

$$\begin{aligned}\widehat{J}_{(\pm)}\widehat{J}^{\dagger}_{(\pm)}&=\widehat{\mathbb{1}}_{L},\\ \widehat{J}^{\dagger}_{(+)}\widehat{J}_{(+)}&=\widehat{\mathbb{1}}_{L+1}-|L{+}1\rangle\langle L{+}1|,\\ \widehat{J}^{\dagger}_{(-)}\widehat{J}_{(-)}&=\widehat{\mathbb{1}}_{L+1}-|1\rangle\langle 1|.\end{aligned} \tag{A5}$$

将方程（A1）–（A4）化简为关于 $a$、$b$以及正文中所列格点布居数的封闭方程组。

**附录 B：任意磁通下的电流推导**

方程（A1）和（A4）分别表示大小为 $L\times L$和 $L+1\times L+1$的方阵。通过直接代入方程（30）和方程（31），可以看出所得两个方程的主对角线

$$\begin{aligned}n_{p_1}&=n_{m_1}+\langle m_1|\hat{\rho}_m|m_2\rangle e^{-i\Phi/2}-c^{*}e^{-i\Phi/2}-i\frac{a^{*}}{J}(2\kappa+\gamma_1)e^{-i\Phi/4},\\ n_{m_{\ell+1}}&=n_{p_\ell}-\langle m_{\ell+1}|\hat{\rho}_m|m_\ell\rangle e^{+i\Phi/2}+\langle p_{\ell+1}|\hat{\rho}_p|p_\ell\rangle e^{+i\Phi/2}+c^{*}e^{+i\Phi/2}+\langle p_{\ell+1}|\hat{\rho}^{*}_{pq}|q_\ell\rangle+i\frac{2b^{*}}{J}\kappa e^{+i\Phi/4},\ \ell=1,2,\ldots,L{-}1,\\ n_{p_\ell}&=n_{m_\ell}+\langle m_\ell|\hat{\rho}_m|m_{\ell+1}\rangle e^{-i\Phi/2}-\langle p_{\ell-1}|\hat{\rho}_p|p_\ell\rangle e^{-i\Phi/2}-c^{*}e^{-i\Phi/2}-\langle p_{\ell-1}|\hat{\rho}^{*}_{pq}|q_\ell\rangle-i\frac{2a^{*}}{J}\kappa e^{-i\Phi/4},\ \ell=2,3,\ldots,L,\\ n_{m_{L+1}}&=n_{p_L}-\langle m_{L+1}|\hat{\rho}_m|m_L\rangle e^{+i\Phi/2}+c^{*}e^{+i\Phi/2}+i\frac{b^{*}}{J}(2\kappa+\gamma_2)e^{+i\Phi/4}.\end{aligned} \tag{B3}$$

通过以下替换可以简化上述方程

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_m&=\mathrm{diag}(n_{m_1},\ldots,n_{m_{L+1}}),\\ \hat{\rho}_p&=\mathrm{diag}(n_{p_1},\ldots,n_{p_L}).\end{aligned} \tag{B4}$$

在由四个矩阵方程组成的系统中

在我们选择.....时变为单位阵

$$\begin{aligned}a&=e^{-i\Phi/4}\frac{\bar{a}+i}{2J}I,\\ b&=e^{+i\Phi/4}\frac{\bar{b}-i}{2J}I,\end{aligned} \tag{B1}$$

其中 $\bar{a}$， $b$ 均为实数，且 $I$ 是沿晶格的概率流。为使其与式（B1）一致，概率流被引入式（16）中。式（A3）也是一个方阵。将式（30）和式（31）用于式（A3）的主对角线，可得

$$c=-i\frac{I}{2\kappa}\left[e^{-i\Phi/2}\bar{a}+e^{+i\Phi/2}\bar{b}+2\sin\left(\frac{\Phi}{2}\right)\right] \tag{B2}$$

式（A2）是一个 $L+1\times L$ 矩形矩阵。前两条副对角线给出

这些代换带来两个结果。首先，它们给出了式（$a=b$ **B1**）中的条件，这是

源于$\hat{\rho}_p$ 和$\hat{\rho}_m$ 的对角结构，而非独立近似。其次，它们得出了连接边缘位点布居数的递推解

$$n_{m_{L+1}} = n_{m_1} + \mathrm{Re}\Big[L\,(c-c^*)\,e^{-i\Phi/2} - i\frac{\gamma_1 a^* + \gamma_2 b}{J}e^{-i\Phi/4} - 2i\kappa L\frac{a^*+b}{J}e^{-i\Phi/4}\Big] \tag{B5}$$

上述方程与式（B1）、式（16）和式（B2）共同得到概率流的公式（32）。可以将表达式（32）按 $1/\kappa$的幂展开为下一项级数

$$\begin{aligned} I/C_0 &= \frac{1}{\kappa} - B\frac{1}{\kappa^2} + \left[B^2 - J^2\sin^2\left(\frac{\Phi}{2}\right)\right]\frac{1}{\kappa^3} - \\ &\left[B^3 - 2J^2B\sin^2\left(\frac{\Phi}{2}\right)\right]\frac{1}{\kappa^4} + \\ &\left[B^4 - 3B^2J^2\sin^2\left(\frac{\Phi}{2}\right) + \frac{J^4\sin^2\Phi}{4} + J^4\sin^4\left(\frac{\Phi}{2}\right)\right]\frac{1}{\kappa^5}, \\ C_0 &= \frac{J^2(\bar{n}_1 - \bar{n}_L)}{2L}, \\ B &= \frac{(2J^2 + \gamma_1\gamma_L)(\gamma_1 + \gamma_L)}{4\gamma_1\gamma_L L}. \end{aligned} \tag{B6}$$