arXiv:2611.32028v2 [math.SP] 25 Nov 2026

多边形魏因斯托克不等式与定量稳定性

ZHUO CHENG 和 YIAN ZHANG

Abstract. 对于每个整数 $N \geq 3$，正则 N 边形 R_N 在所有至多具有 N 条边的简单平面多边形P中，关于相似变换意义下唯一地使周长归一化的第一正斯捷克洛夫特征值 $J(P) = |\partial P|\sigma_1(P)$ 达到最大。更一般地，若 P 在合并连续共线边后具有 p 个严格凸顶点和 q 个凹顶点，则 $J(P) \leq J(R_{p+\min(q,2)})$；等号成立当且仅当 $q = 0$，且 P 与 R_p 相似。在至多具有 N 条边的多边形中，将范围限制为非凸多边形或具有少于 N 条实际边的多边形，会使 J 的上确界降低 $12\pi\zeta(3)N^{-4} + O(N^{-5})$，当 $N \to \infty$ 时，对于每个 $N \geq 4$ 都存在正间隙。

对于凸的 p 边形，谱亏损 $J(R_p) - J(P)$ 控制支撑高度、中点偏移量和边长的归一化平方偏差，其权重分别为 1、p^{-2} 和 p^{-3}；同时也控制相对于 $2\pi/p$ 的外角偏差平方和乘以 p^{-3}；边长权重 p^{-3} 是尖锐的。对于三角形，在周长固定时，亏损则与相对面积亏损的平方根可比；等价地，它与 $1 - r$ 可比，其中 r 是从等边三角形到该三角形的仿射映射的奇异值比。无论凹顶点的数量如何，弧长平衡圆盘坐标中的边界相位恒等式都给出尖锐四阶界 $2\pi/J(P) - 1 \geq 2\zeta(3)p^{-3} + 8\zeta(4)p^{-4} + O(p^{-5})$。对于固定的 p，次数为 p 的布拉施克输运将这一恒等式与正则化平方根的 $H^{1/p}$ 强制性、等间距凸前顶点处的周长集中刚性，以及 $p \geq 4$ 的二次豪斯多夫稳定性联系起来。

1. Introduction

1.1. 多边形上的谱等周问题与魏因斯托克问题。对于有界利普希茨区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$，斯捷克洛夫特征值问题

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega, \qquad \partial_\nu u = \sigma u \quad \text{on } \partial\Omega,$$

具有离散谱 $0 = \sigma_0(\Omega) < \sigma_1(\Omega) \leq \sigma_2(\Omega) \leq \cdots \to \infty$，其与 $\partial\Omega$ 上狄利克雷至诺伊曼映射的特征值重合（见 [31, 24]）。在所有具有有限周长的单连通平面区域中，魏因斯托克经典不等式 [38]断言，尺度不变泛函

$$J(\Omega) := |\partial\Omega|\,\sigma_1(\Omega)$$

满足 $J(\Omega) \leq 2\pi$；当且仅当 Ω 为圆盘时等号成立。更高阶斯捷克洛夫特征值满足尖锐的 Hersch–Payne–Schiffer界 $|\partial\Omega|\sigma_k(\Omega) \leq 2\pi k$ [27, 22]；而在固定体积下，球在每个维度 [5]中都使 σ_1 达到最大值；关于斯捷克洛夫问题的综合性综述，参见 [23, 10]、[21]关于拟共形映射界，以及 [30] 关于曲边多边形的 Steklov 渐近分析。对于狄利克雷-诺伊曼算子而言，Weinstock 定理与 Faber–Krahn 不等式和 Szeg˝o–Weinberger 不等式 [34, 37] 在狄利克雷拉普拉斯算子和诺伊曼拉普拉斯算子中的基础地位相同。

将椭圆型形状优化问题的研究范围从一般区域限制到至多有 N 条边的多边形，会从根本上改变其数学性质。由于 Steiner 对称化通常会增加顶点数，重排技术在边数超过四条时便不再适用。在由 P´olya 和 Szeg˝o [33]发起的多边形等周问题研究计划中（另可参见 [26], 和[28, 29] 关于三角形和对称多边形的诺伊曼特征值的研究），多边形法贝尔–克拉恩猜想长期以来仅在 $N = 3$ 和 $N = 4$ 的情形下无条件成立。近期的重大进展来自经验证的计算方法与局部极小性框架，相关工作由

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号 35P15；次要分类号 30C20、49Q10、52A10。

Key words and phrases. 斯捷克洛夫特征值、Weinstock 不等式、多边形、施瓦茨–克里斯托费尔映射、定量稳定性。

Bogosel 和 Bucur [1, 2], 解决了所有充分大的 N 情形下的凸多边形法贝尔–克拉恩不等式, Cheng、Gui、Hu 和 Li [8], 证明了切向类中扭转刚度的定量 P´olya–Szeg˝o 定理，Gui、Hu 和 Li [25], 取得了进展；此外，Wang [36] 以及 Bogosel、Bucur 和 Fragal`a [3]近期在多边形圣维南不等式和 P´olya–Szeg˝o 不等式方面也取得了进展。

关于斯捷克洛夫特征值的类似问题是多边形 *Weinstock* 问题 [32,开放问题 8]: Oudet 最初提出，哪个凸 N边形能使 $J(P)$达到最大值? 而允许边数不超过 N 的任意简单多边形这一一般性表述，则是在2018年AIM研讨会上关于斯捷克洛夫特征值问题的讨论中提出的（参见 [9, 第 1], 节以及数值优化研究 [12]）。最近，Cheng、Gui、Hu、Li 和 Yao [9] 提出了正多边形猜想，并证明了对所有 $N \geq 3$均成立的全局严格单调性 $J(R_N) < J(R_{N+1})$，以及 R_N第一斯捷克洛夫特征空间的旋转特征识别。最近，Davies[11] 以及 Dong、Yang 和 Pan [13],分别独立证明了三角形情形和凸四边形情形。

多边形上的斯捷克洛夫问题还有两个进一步的微妙之处，使其与光滑温斯托克问题和狄利克雷问题都截然不同。首先，尽管在定体积约束 [4] 下或在凸集 [19] 中定量稳定性成立（另见 [15]），Bucur 和 Nahon [7] 表明，在不受限制的光滑单连通平面区域类中，温斯托克周长不等式确实不稳定：微观边界振荡会使几何收敛与 $J(\Omega)$的变化脱钩。在三维及更高维度中，Fraser 和 Schoen [18] （基于他们的共形理论和自由边界极小曲面理论[16, 17]）表明，缺乏凸性时，周长／表面积温斯托克不等式一般不成立；而 Bucur、Ferone、Nitsch 和 Trombetti [6]则证明，凸性能够使该不等式重新成立。其次，在简单平面 N边形类中，允许出现非凸 多边形会造成严重的几何障碍。与经典的面积-周长等周问题不同，取凸包并不会显然地增大 $J(P)$；加入凹顶点可以重新分配弧长，并使区域变形至远离其凸包的位置，同时不增加凸角点。

本文确立的核心原则是：从共形视角来看，严格凸顶点与凹顶点发挥着不对称的作用。在黎曼映射 $\mathbb{D} \to P$ 下，单位圆 $\mathbb{T}$ 上的施瓦茨–克里斯托费尔边界弧长密度 $|1-\bar{\xi}_i z|^{-2b_i}$ ($0 < b_i < 1/2$) 仅在严格凸顶点的原像处产生可积幂次奇点，而凹顶点带有负转角权重（ $-1/2 < b_i < 0$），只会使共形导数产生零点。因此，Weinstock亏损

$$d(P) \coloneqq \frac{2\pi}{J(P)} - 1 > 0$$

主要取决于严格凸顶点的数量，而不是边的总数。将这一观察发展为定量理论后，便可仅凭解析论证、无需计算机辅助，彻底解决每个 $N \geq 3$ 以及每个简单多边形（无论凸或非凸）的多边形 Weinstock 问题。同时，这也表明，多边形约束使 Weinstock 不等式恢复了很强的定量稳定性，并具有尖锐的各向异性标度律，以及一个精确的谱隙，将非凸多边形和边数较少的多边形与正则 N-边形区分开来。

1.2. 主要结果。 在本文中， $P \subset \mathbb{R}^2$ 表示一个正面积的简单平面多边形， R_n 表示一个正 n边形（$n \geq 3$）。将连续共线边合并，使得没有内角等于 π后，令 p 表示严格凸顶点的数量（内角严格小于 π）， q 表示凹顶点的数量（内角严格大于 π）。由于外转角之和为 2π ，且每个严格凸顶点贡献的外转角小于 π，因此总有 $p \geq 3$。

我们的主定理通过将多边形魏因斯托克不等式中的 J（P）直接与 p和 min(q, 2)联系起来，对该不等式作出了强化。

定理 1.1 (多边形魏因斯托克不等式)。 设 P 为一个简单平面多边形，在合并连续共线边后具有 p 个严格凸顶点和 q 个优角顶点，并令

$n = p + \min(q,\ 2)$。则

$$J(P) \le J(R_n),$$

当且仅当 $q = 0$ 与 P 相似于 R_p时等号成立。因此，对于每个整数 $N \ge 3$，正多边形 N边形 R_N 在所有至多具有 N条边的简单平面多边形中，在相似变换意义下唯一地使 J 达到最大。

定理 1.1 表明，在 $q = 2$处存在尖锐的饱和现象：任何具有 p 个严格凸顶点且至少具有两个凹顶点的简单多边形都满足 $J(P) < J(R_{p+2})$，无论其还具有多少个额外的凹顶点。将这一统一界与 $J(R_n)$的严格单调性和渐近展开相结合——后者已在 [9] 中得到确立，并在第3节中得到改进——

$$J(R_N) = 2\pi - 4\pi\zeta(3)N^{-3} + O(N^{-4}), \qquad J(R_N) - J(R_{N-1}) = 12\pi\zeta(3)N^{-4} + O(N^{-5}),$$

这表明，非凸 N边形在渐近意义下无法比正（$N-1$）边形更加接近 $J(R_N)$。

定理 1.2（非凸和退化多边形的谱隙）。 对于 $N \ge 4$，令 $\mathcal{D}_N$ 表示这样一类简单平面多边形：其至多具有 N 条边，并且要么是非凸的，要么在合并连续的共线边后具有少于 N 条实际边。存在一个绝对常数$c > 0$ 使得

$$J(R_N) - J(P) \ge cN^{-4} \qquad \textit{for all } P \in \mathcal{D}_N.$$

更确切地说，

$$\inf_{P \in \mathcal{D}_N} \big(J(R_N) - J(P)\big) = 12\pi\zeta(3)N^{-4} + O(N^{-5}) \qquad (N \to \infty).$$

与光滑单连通区域上 Weinstock 不等式普遍存在的不稳定性相反， [7], 凸 p边形满足统一的定量稳定性估计，并且对 p 具有显式且尖锐的依赖关系。令 Q 为一个凸 p边形，将其归一化为单位周长，并平移使其边界质心位于原点。令 $x = 1/p$，并令 $H_* = (x/2)\cot(\pi x)$ 表示单位周长正 p边形 R_p 的边心距。在第 i 条边上，记 y_i 为其长度， $h_i > 0$ 为其相对于原点的支撑高度， m_i 为其中点相对于从原点向该边作垂线所得垂足的有向位移。定义归一化边参数

$$a_i = \frac{h_i}{H_*}, \qquad b_i = py_i, \qquad v_i = \frac{m_i}{H_*},$$

并记 $\mathbb{E}f = \sum_{i=1}^{p} y_i f_i$ 为边长平均值。记 $2\theta_i \in (0,\ \pi)$ 为第 i 个顶点处的外转角（因此 $\sum_{i=1}^{p} \theta_i = \pi$），并令 $\mathcal{I} \ge 0$ 表示式 (4.1) 中定义的三次支撑函数惯性余项。

定理 1.3（凸多边形的定量稳定性）。 存在一个绝对常数$c > 0$，使得每个单位周长凸 p边形 Q（$p \ge 3$）都满足

$$J(R_p) - J(Q) \ge c\Big\{\mathcal{I} + \mathbb{E}\big[(a_i - 1)^2 + p^{-2}v_i^2 + p^{-3}(b_i - 1)^2\big]\Big\}.$$

特别地，存在一个绝对常数 $c' > 0$，使得

$$J(R_p) - J(Q) \ge \frac{c'}{p^3}\sum_{i=1}^{p}\Big(\theta_i - \frac{\pi}{p}\Big)^2.$$

此外， 乘以边长平方偏差的权重 p^{-3} 在 $p \to \infty$时是最优的。

对于三角形（$p = 3$），稳定性指数严格更强：令 $\mathcal{D} = \mathbb{E}[\,(a_i - 1)^2 + (b_i - 1)^2 + v_i^2]$，并以 $r \in (0, 1]$ 表示将等边三角形映射到 Q的仿射映射的奇异值之比，则有

$$J(R_3) - J(Q) \asymp 1 - r \asymp \sqrt{1 - |Q|/|R_3|} \asymp \sqrt{\mathcal{D}},$$

其中， R_3 的周长与 Q相同。

定理 1.3 中的三个权重 (1， p^{-2}， p^{-3}) 反映了J 在 R_p附近不同的几何敏感性：扰动支撑高度会以 1 阶改变宏观形状，移动边中点的作用为 p^{-2}阶，而沿近圆形轮廓重新分配边长则会产生 p^{-3}阶的代价。将 R_{p-1} 的一条边分成两段并将其中点无穷小地向外推，表明 p^{-3} 无法改进（注 4.9）。另一方面，三角形对仿射畸变 $1-r$呈线性依赖，因此相对面积亏损遵循平方根规律，而非 $p \geq 4$所呈现的二次标度。作为定理 1.3 的直接推论，在所有非奇异仿射像 TR_p ($p \geq 3$)中，当 T为相似变换时， J 取得唯一最大值（推论 4.10）。

我们的共形方法还得出两个进一步的结果，它们无需凸性假设，也不限制凹顶点 q 的数量。通过黎曼映射 $\mathbb{D} \to P$ 将归一化边界弧长测度 $d\mu = ds/|\partial P|$ 拉回到 $\mathbb{T}$，可在 $\mathbb{T}$ 上得到绝对连续概率测度 $\rho\, dm$，其中 $dm = d\theta/(2\pi)$。在弧长平衡坐标（由 $\int_{\mathbb{T}} z\,\rho(z)\,dm(z) = 0$ 唯一确定，至旋转为止）中，严格凸顶点的原像将 $\mathbb{T}$ 分成 p 个开弧，其归一化长度为 s_1，……， s_p，总和为 1。记 $Z = \zeta$ 为式 (3)，$W = \zeta$ 为式 (4)，并令 H 为共形导数 F 的解析平方根，其在 $\mathbb{T}$ 上由 $|F| = \rho$ 归一化，且 $H(0) > 0$。

定理 1.4（与凹顶点无关的尖锐四阶界）。 在所有具有 p 个严格凸顶点且凹顶点数量任意的简单平面多边形 P 中，

$$\inf_P d(P) = 2Zp^{-3} + 8Wp^{-4} + O(p^{-5}) = d(R_p) + O(p^{-5}) \qquad (p \to \infty).$$

更确切地说，存在一个绝对常数 $C > 0$，使得对于所有充分大的 p，

$$d(P) \geq d(R_p) + 2p^{-4}\sum_{i=1}^{p}(ps_i - 1)^2 + \frac{1}{6}p^{-3}\|H-1\|_2^2 - Cp^{-5}.$$

特别地， $J（P）< J（R_{p+1}）$ 对所有充分大的 p 均成立，并且与凹顶点的数量无关；而 $d（P）\leq d（R_p）+O（p^{-5}）$ 蕴含 $\sum_{i=1}^{p}（ps_i-1）^2 = O（p^{-1}）$ 以及 $\|\rho-1\|_1 = O（p^{-1}）$。

即使不限制凹顶点的数量或角度，定理 1.4 不仅恢复了领先的三阶正则项 $2\zeta(3)p^{-3}$，还给出了精确的四阶系数 $8\zeta(4)p^{-4}$，同时定量控制凸前顶点之间的间距以及 L^2- 偏离 1 的 H。

对于固定的 $p \geq 3$，一种适用于凸前顶点的规范 p 次布拉施克分解同时控制周长分布以及到 R_p 的豪斯多夫邻近性。

定理 1.5（等距前顶点与二次豪斯多夫稳定性）。 设 P 是一个单位周长的简单平面多边形，具有 $p \geq 3$ 个严格凸顶点和任意多个凹顶点，并在弧长平衡坐标下进行讨论。

（i）如果 p 个凸前顶点在 $\mathbb{T}$ 上等距分布，且 $p \geq 4$ 或 $p = 3$ 具有非恒等旋转对称性，则 $J（P）\leq J（R_p）$，当且仅当 P 与 R_p 相似时等号成立。此外，对于任意 $t \in（0，\pi）$，其前像位于某个凸前顶点的 t/p 角距离以内的 $|\partial P|$ 所占比例，由 R_p 取得最小值；该比例超过正则值的部分控制着 $（z \mapsto z^p）_*\mu$ 与 R_p 所对应测度之间的全变差距离。

（ii）令 $e^2 = \sum_{i=1}^{p}（s_i - 1/p）^2$ 和 $H_p（P）= \inf_g d_{\mathrm{H}}（\partial P，\ g\partial R_p）$，其中 d_{H} 表示豪斯多夫距离， R_p 的周长为 1，而 g 遍历刚体运动。对于每个 $p \geq 4$，存在常数 c_p、$K_p > 0$ 使得

$$d(P) - d(R_p) \geq c_p H_p(P)^2 - K_p e^2.$$

特别地，存在 $\gamma_p > 0$，使得 $d(P) \geq d(R_{p+1}) + \gamma_p$，只要 $p \geq 4$ 且 e 足够小。

定理 1.5 的更强加权版本（包括 $(FS^{2/p})^{1/2}$ 的最优 $H^{1/p}$ 索伯列夫强制性、$(p-3)$ 维带标记的对数密度模型，以及线性豪斯多夫

强化形式（位于 $p=3$）在第5节中得到证明（引理 5.2、推论 5.3、定理 5.4 和推论 5.5）。

1.3. **证明的解析与几何机制**。下式的变分刻画$J(P)$为

$$J(P)\,\mathrm{Var}_\mu(F)\le \int_P |DF|^2, \qquad \mathrm{Var}_\mu(F):=\int_{\partial P}\Big|F-\int_{\partial P}F\,d\mu\Big|^2 d\mu, \tag{1.1}$$

对所有非常值的标量或向量值 $F\in H^1(P)$均成立，其中 $d\mu=ds/|\partial P|$和 $|DF|^2=\sum_k|\nabla F_k|^2$。非常值调和场的等号成立，当且仅当每个中心化分量均为零或第一 Steklov 特征函数，并且 $J(P)$在相似变换下不变。定理 1.1–1.5 的证明结合了四种不同的解析与几何机制。

1. 边界相位恒等式与间隙优化（$q\ge 2$）。由共形不变性，(1.1)转化为单位圆上的谱问题，将圆周 Dirichlet-to-Neumann能量 $\mathcal{E}(f)$与 μ对 f的方差配对。在弧长平衡坐标中，对径向-切向扰动$z(g+ik)$进行优化，可得到一个尖锐的对偶不等式，以 $|\mu g-\bar g|^2$为上界，而上界由 $d(P)$ $\mathcal{N}(g)$给出（引理 2.2）。另一方面，Schwarz–Christoffel导数 F满足边界相位恒等式（引理 2.4）：对于任意在每个严格凸前顶点处为零的实值 f，$-\int_{\mathbb{T}}(\Lambda+1)f\,\rho\,dm$等于一个严格非负的二重积分，该积分度量单位切向相位 $u=F/|F|$的边界变化。在每个凸间隙 I_i 上选取支集为其上的轮廓函数，并通过半无限条带调和延拓优化其傅里叶模态，可将 $d(P)$从下方估计，并且下界仅取决于弧长平衡的间隙长度 s_1、……、s_p（引理 2.5）。随后，凸性将与 R_{p+2} 的比较归结为关于$\sum_{i=1}^p s_i^2$的标量不等式，从而一次性处理所有具有 $q\ge 2$ 的多边形（命题 3.6）。
2. 正多边形的谱分析。 为了在有限 n 以及渐近情形下区分 P 与 R_n ，我们细化了 [9]的正多边形傅里叶矩阵分析。将奇异权重$w_{1/n}$乘以倒数密度 $w_{-\lambda}$，得到一个精确的半正定二次型，该二次型界定压缩矩阵范数 $\|M_*\|\le (n+1)/(n-1)^2$，并为 $d(R_5),\dots,d(R_{10})$给出紧的有理上界（引理 3.4）。与此同时，在极坐标和笛卡尔坐标下计算二维半平面的高斯弦积分，可得到耦合能量 $S(x)$的闭式正幂级数；由此，Neumann运行长度展开和欧拉贝塔积分提取出精确的五阶展开 $d(R_n)=2Zn^{-3}+8Wn^{-4}+26\zeta(5)n^{-5}+O(n^{-6})$。

3. 物理空间惯性、半带状区域试探函数与等变移植（$q=0$）。对于凸多边形，单靠共形检验不易达到精确最大值 R_p，而物理空间几何则能捕捉精确的抵消：在 $1/p$的四阶项上，坐标场亏损与正则斯捷克洛夫亏损相匹配。通过支撑函数表达边界转动惯量，可以显现出一个精确的三次余项 $\mathcal{I}\ge 0$，用以控制外角；再沿每条边以奇调和半带状区域剖面补充坐标场，便可得到全局先验预算，将任何近最大化的凸 p边形（$p\ge 10$）限制在 R_p的一个显式邻域内。

在此邻域内，我们在每个质心扇区上对正则第一特征场进行线性移植。要控制由此产生的二次型，需要在 R_p上的坐标场 X 的能量正交补上建立尖锐的迹界；我们通过斯托克斯定理和勒让德–维廷格估计证明了一个对每个 $p\ge 3$都成立的等变迹不等式（引理 4.1）。对于三角形，该迹界直接给出刚性以及关于（$1-r$）的线性稳定性定律（定理 4.4）。对于 $4\le p\le 9$，我们构造了显式的低模固定顶点调和场（在正方形上精确成立；对于 $5\le p\le 9$则为三模多项式）；通过移植，这些调和场迫使竞争者进入精确特征场稳定性区域，从而统一了所有$p\ge 3$上的凸刚性证明和定理 1.3 的证明。

4. 单凹角比较（$q=1$）、循环相位平均与布拉施克输运。当$q=1$时，要胜过 $J(R_{p+1})$，就必须解析 $1/p$中的四阶项。对于 $p\ge 6$，我们在间隙剖面 f 中加入一个内部平台 g，使得（$I+\Lambda$）$f+kg$ 提取出完整的间隙内相位积分，将其与跨间隙弦界（引理 6.3）结合起来，并通过修改 $\Lambda-I$ 的第一谐波，使其差核逐点非负（引理 6.1），借助由此获得的圆上的链式法则，将其转化为非线性径向-切向检验 z（$\sqrt{1+2h}+ik$）上的

逐点半圆柱障碍 Λf（引理 6.6）。结合起来，一个解析的估计便可解决所有 $p \geq 6$（命题 6.7）。

剩余的低阶凸情形可清晰地分为两类： $p = 3$ 通过凸包口袋分解得到解决，该分解表明 $J(P) < 3\sqrt{3} < J(R_4)$（命题 7.1）；而对于 $p = 4$ 和 $p = 5$，间隙离散度将凸前顶点局部化在正则元组附近，此时将倒数正则密度 $w_{-1/p}$ 通过一个次数为 p 的布拉施克乘积 B 拉回（并通过欧拉积分和 carré du champ 推前界控制其能量）会与 $d(P) \leq d(R_{p+1})$ 矛盾。与此同时，对循环间隙平移下的边界相位差取平均，得到定理 1.4 的无约束四阶界；而布拉施克输运恒等式则给出定理 1.5 的尖锐 $H^{1/p}$强制性、弧质量刚性和二次豪斯多夫稳定性。

1.4. 论文结构与约定。第 2 节发展平衡共形坐标、径向-切向对偶性、弧长偏差、边界相位恒等式和间隙优化引理。第3节分析正多边形傅里叶矩阵，证明 $d(R_n)$ 的严格单调性、五阶展开和定量界，并建立与增加两条边的比较。第 4 节处理任意 $p \geq 3$ 下的凸 p-边形，并证明定理 1.3 及其仿射像推论。第 5 节证明定理 1.4，发展布拉施克输运矩理论，并建立定理 1.5 及其加权细化。第 6 节证明 $p \geq 6$的单凹角比较，第 7 节解决剩余的单凹角情形 $p \in \{3, 4, 5\}$。第 8 节汇总定理1.1和1.2的证明。

在所有显式数值估计中，有限小数表示精确有理数。

2. Balanced conformal coordinates and the boundary phase identity

2.1. 变分表述与平衡圆盘坐标。令 $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$为开单位圆盘， $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$ 为配备归一化勒贝格概率测度 $dm = d\theta/(2\pi)$ 的单位圆，其中测度取在 $z = e^{i\theta}$ 上。通过黎曼映射 $\mathbb{D} \to P$ 将归一化边界弧长测度 $d\mu = ds/|\partial P|$ 拉回到 $\mathbb{T}$，得到 $\rho\, dm$ 上的一个绝对连续概率测度，我们仍将其记为 μ。

对于 $\mathbb{T}$ 上的可积函数 f，记 $\widehat{f}(k) = \int_{\mathbb{T}} f(z) z^{-k}\, dm(z)$ 为其第 k 个傅里叶系数，并令 $\bar{f} = \int_{\mathbb{T}} f\, dm$, $\mu f = \int_{\mathbb{T}} f\, d\mu$。令 Λ 为由$\Lambda(z^k) = |k| z^k$定义的圆周狄利克雷-诺伊曼算子，并设

$$\mathcal{E}(f) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} |k|\, |\widehat{f}(k)|^2, \qquad \mathcal{E}(f, g) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} |k|\, \widehat{f}(k)\overline{\widehat{g}(k)}.$$

由于 f 到 $\mathbb{D}$ 的调和延拓具有狄利克雷能量 $2\pi\mathcal{E}(f)$，狄利克雷积分的共形不变性可将 (1.1) 改写为关于 $d(P) = 2\pi/J(P) - 1$ 的表达式：

$$1 + d(P) = \sup_{\mathcal{E}(f) > 0} \frac{\mathrm{Var}_\mu(f)}{\mathcal{E}(f)}, \tag{2.1}$$

其中 $\mathrm{Var}_\mu(f) = \int_{\mathbb{T}} |f - \mu f|^2\, d\mu$。

令 $\alpha_i \in (0, 2\pi)$ 表示 P真实顶点处的内角，并定义有符号外转角权重 $b_i = (\pi - \alpha_i)/(2\pi)$，使得 $\sum_i b_i = 1$。根据施瓦茨–克里斯托费尔公式（见 [14]），边界密度具有如下形式：

$$\rho(z) = C \prod_i |1 - \bar{\xi}_i z|^{-2b_i}, \tag{2.2}$$

其中乘积遍历所有真实顶点的不同前顶点 $\xi_i \in \mathbb{T}$ P。由于$\alpha_i > 0$，每个顶点都满足 $b_i < 1/2$；因此，对于满足$2s\max_i (b_i)_+ < 1$的每个 $s > 1$，均有 $p \geq 3$ 和 $\rho \in L^s(dm)$。

在商希尔伯特空间 $H^{1/2}(\mathbb{T})/\mathbb{C}$ 上，赋予内积 $\mathcal{E}(\cdot,\cdot)$，定义有界正自伴算子 T_μ 为

$$\mathcal{E}(T_\mu f, g) = \mathrm{Cov}_\mu(f,g) \coloneqq \int_{\mathbb{T}} (f-\mu f)\overline{(g-\mu g)}\, d\mu.$$

根据均值为零的 $H^{1/2}(\mathbb{T})$到 $L^{2s/(s-1)}(dm)$的紧嵌入以及 H¨older 不等式， T_μ是紧的，且其算子范数为 $\lambda_P := 1 + d(P)$。

如果 ν 圆盘坐标对于概率测度是弧长平衡的，定义在 $\mathbb{T}$ 上，则称其为 $\int_{\mathbb{T}} z\, d\nu(z) = 0$。我们将对弧长测度和前顶点有限集都采用这一归一化。

引理 2.1（弧长平衡坐标的存在性、唯一性与连续性）。 设 ν 是 $\mathbb{T}$ 上的一个概率测度，且其每个原子的质量都严格小于 $1/2$。则存在唯一的点 $a \in \mathbb{D}$ ，使泛函达到最小值

$$\Phi_\nu(a) \coloneqq \int_{\mathbb{T}} \log \frac{|z-a|^2}{1-|a|^2}\, d\nu(z).$$

该最小值点是 $\mathbb{D}$ 中平衡方程的唯一解

$$\int_{\mathbb{T}} \frac{z-a}{1-\bar{a}z}\, d\nu(z) = 0, \tag{2.3}$$

并且当 ν 弱收敛到任意原子质量均小于 $1/2$的概率测度时，该点连续依赖于 ν 。特别地， P 的弧长平衡坐标存在，并且除旋转外唯一。

证明。 为验证在 $\partial\mathbb{D}$附近的强制性，假设 $a_k \to \zeta \in \mathbb{T}$。取以$\zeta$ 为中心的闭弧 $I \subset \mathbb{T}$ ，使得 $\nu(I) = m < 1/2$。对于 $z \in I$ ，我们有 $|z-a_k| \geq 1-|a_k|$；而当 k足够大时， $|z-a_k|$ 在 $\mathbb{T}\setminus I$ 上保持一致有界于下。因此

$$\Phi_\nu(a_k) \geq (2m-1)\log(1-|a_k|) - O(1) \longrightarrow +\infty,$$

所以 Φ_ν 在 $\mathbb{D}$中取得其全局最小值。

对于沿双曲测地线的严格凸性，应用一个将给定测地线映射为直径的圆盘自同构；这会使每个被积函数沿该测地线移动一个与双曲距离 ℓ 无关的加性常数，从而将被积函数变为 $\log(\cosh\,\ell - \cos\,\theta \sinh\,\ell)$。其关于 ℓ 的二阶导数为 $\sin^2\theta/(\cosh\ell - \cos\theta\sinh\ell)^2,$ ，在除两个端点 $\theta \in \{0,\pi\}$之外的地方严格为正。由于这两个端点所携带的 ν-质量之和严格小于1， Φ_ν 沿每条双曲测地线均严格凸，从而得到极小值点的唯一性以及临界方程(2.3)解的唯一性。

最后，如果 $\nu_k \rightharpoonup \nu$ 弱收敛且 ν 的每个原子质量都小于 $1/2$，那么用 ν-质量严格小于 $1/2$ 的闭弧有限覆盖 $\mathbb{T}$ ，可在 Φ_{ν_k}上得到相同的统一下界，从而将极小元 a_k 限制在 $\mathbb{D}$的紧子圆盘内。沿任意收敛子序列将(2.3)取极限，由唯一性得到 $a_k \to a$ 。□

按逆时针循环顺序仅保留 P的严格凸顶点的 p 原像，我们将分隔相邻凸前顶点的 p开圆弧（间隙）记为 I_1，……， I_p，并设 $s_i = m(I_i)$，于是 $\sum_{i=1}^p s_i = 1$。全文中我们设 $Z = \zeta(3)$、$W = \zeta(4)$，并定义常数和函数

$$c = \frac{1}{2Z}, \qquad b = \frac{W}{Z^2}, \qquad e = \frac{\zeta(6)}{Z^2}, \qquad D(s) = c + bs - es^3, \qquad \mathcal{H}(s) = \frac{s^4}{D(s)}. \tag{2.4}$$

2.2. **径向-切向对偶性与弧长偏差**。 对平衡坐标映射 z 施加径向-切向向量场扰动，可得到能量最优对偶不等式，该不等式用 Weinstock亏损控制 $\mu - m$ 的线性泛函。

引理 2.2（径向振幅和切向修正）。 对于实值零均值函数 g， $k \in H^{1/2}(\mathbb{T})$，令 $V = z(g+ik)$ 并通过 $Cg \in H^{1/2}(\mathbb{T})$ 定义 $\widehat{Cg}(0) = 0$ 以及 $\widehat{Cg}(n) = i\hat{g}(n)/n$ ，其中

$n \neq 0$。在弧长平衡坐标中，

$$|\mu(g+ik)|^2 + d(P)\,\mathrm{Var}_\mu(V) \le d(P)\big(1+d(P)\big)\mathcal{E}(V),$$
$$\mathcal{E}(V) = \mathcal{N}(g) + \mathcal{E}(k - Cg),$$

其中

$$\mathcal{N}(g) \coloneqq \sum_{n\neq 0} \big(|n| - |n|^{-1}\big)|\widehat{g}(n)|^2.$$

特别地，$(\mu g)^2 + d(P)\,\mathrm{Var}_\mu(zg) \le d(P)(1+d(P))\mathcal{E}(g)$。

证明。由 (2.1)，厄米型 $(1+d)\mathcal{E} - \mathrm{Cov}_\mu$（其中 $d = d(P)$）是半正定的。在点对 $(z,\ V)$ 上，其 $(1,\ 1)$ 项为 $(1+d) - 1 = d$，而其 $(1,\ 2)$ 项为 $-\mu(g+ik)$，因为 $\widehat{\mu z} = 0$ 且 $V(1) = \widehat{g}(0) + ik(0) = 0$。取 2×2 格拉姆矩阵的行列式即可得到第一个不等式。

为计算 $\mathcal{E}(V)$，对每个 $n \ge 1$，将频率为 $1+n$ 和 $1-n$ 的傅里叶模态配对。利用 $\widehat{\overline{g}}(-n) = \widehat{g}(n)$ 以及 $k(-n) = k(n)$，$\mathcal{E}(V)$ 中这两项之和等于

$$(n+1)|\widehat{g}(n) + i\widehat{k}(n)|^2 + (n-1)|\widehat{\overline{g}(n)} + i\widehat{\overline{k}(n)}|^2 = 2\Big(n - \frac{1}{n}\Big)|\widehat{g}(n)|^2 + 2n\Big|\widehat{k}(n) - \frac{i\widehat{g}(n)}{n}\Big|^2.$$

对 $n \ge 1$ 求和即可得到能量恒等式。令 $k = 0$ 可恢复 $\mathcal{E}(zg) = \mathcal{E}(g)$，从而得到最终不等式。□

选择 $k = Cg$ 可使给定径向轮廓函数 g 下的 $\mathcal{E}(V)$ 最小。由于 1 和 z 在 $L^2(\mu)$ 中正交归一，将 $V = z(g+iCg)$ 沿 $\mathrm{span}\{1, z\}$ 分解，并应用引理 2.2，可得

$$|\mu(g+iCg)|^2 + \frac{d(P)}{1+d(P)}\,\mathrm{dist}_{L^2(\mu)}\big(z(g+iCg), \mathrm{span}\{1,z\}\big)^2 \le d(P)\,\mathcal{N}(g).$$

该估计具有关于算子 $T = T_\mu$ 的精确谱解释。记 $\lambda = 1 + d(P)$ 和 $Sg = z(g+iCg)$ 为实值零均值 g，通过 $\widehat{g_\rho}(n) = \widehat{\rho}(n)/\widehat{(|n| - |n|^{-1})}$ 定义 g_ρ，其中 $|n| \ge 2$，且 $\widehat{g_\rho}(n) = 0$ 当 $|n| \le 1$ 时成立。平衡性给出 $\mathcal{E}(Tz, z) = 1$ 以及 $Tz(n) = \widehat{\rho}(n-1)/|n|$，其中 $n \neq 0$。由于当 $n \neq 0$ 时，$Sg(1+n) = (1-1/n)\widehat{g}(n)$，我们有 $(T-I)z = Sg_\rho$，模去常数。定义谱矩

$$B_\mu \coloneqq \mathcal{E}\big((T-I)z\big) = \mathcal{N}(g_\rho) = \sum_{n\ge 2} \frac{2n}{n^2-1}|\widehat{\rho}(n)|^2,$$

我们得到恒等式

$$d(P) - B_\mu = \mathcal{E}\big(T(\lambda I - T)z, z\big) \ge 0. \tag{2.5}$$

这里 $\mathcal{E}(Tz) = 1 + B_\mu$。由于 $\rho > 0$ 几乎处处成立，T 在 $H^{1/2}(\mathbb{T})/\mathbb{C}$ 上是单射，因此 (2.5) 中等号成立当且仅当 $Tz = \lambda z$，这等价于 $\rho \equiv 1$。此外，由于 $-2\log|z-w|$ 是作用于零均值函数的 Λ^{-1} 的卷积核，将 $z\rho$ 与 $\Lambda^{-1}(z\rho)$ 配对（由于 $\rho \in L^s$，在 $L^{s/(s-1)}$ 中通过阿贝尔极限可证）可得弦表示

$$1 + B_\mu = \mathcal{E}(Tz) = -2\iint_{\mathbb{T}\times\mathbb{T}} \Re(z\bar{w})\log|z-w|\,d\mu(z)\,d\mu(w).$$

对于任意实值零均值 $g \in H^{1/2}(\mathbb{T})$，有 $\mathcal{E}(Sg,\ (T-I)z) = \mu(g+iCg)$，因此由柯西–施瓦茨不等式可得精确对偶性界

$$|\mu g - \bar{g}|^2 \le B_\mu\,\mathcal{N}(g) \le d(P)\,\mathcal{N}(g) \le d(P)\,\mathcal{E}(g), \tag{2.6}$$

对每个实值 $g \in H^{1/2}(\mathbb{T})$ 都成立。首要常数 B_μ 在 $g = g_\rho$ 处取到，此时 $\mu g_\rho = B_\mu$。

作为 (2.6) 的一个直接应用，B_μ 在 $\mathbb{T}$ 的所有弧上均匀地控制 μ 与 m 之间的差异。

引理 2.3（平衡坐标中的弧长偏差）。对于 $0 < h \le 1/24$，令 $a = \sin(\pi h/2)$ 并且

$$C_h = \pi^{-2}\Big[\log\frac{1}{a} - \frac{5}{8} + 2a^2 - a^4\Big].$$

那么每条弧 $I \subset \mathbb{T}$ 都满足 $|\mu(I) - m(I)| \le h + \sqrt{C_h B_\mu}$。特别地，$C_{1/48} < 0.294$ 和 $C_{1/72} < 0.334$。由于 $B_\mu \downarrow 0$，有一致界

$$\sup_{I} |\mu(I) - m(I)| \le \Big(\frac{1}{\pi\sqrt{2}} + o(1)\Big)\sqrt{B_\mu \log(1/B_\mu)}.$$

证明。在 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 上使用转角坐标。定义随机变量 $U \in [-h/2, h/2]$，使其满足 $\sin(\pi U) = a\cos\theta$，其中 θ 在 $[0,\pi]$ 上均匀分布。由对称性以及反正弦积分（通过分解余弦函数之差并利用 $\int_0^\pi \log\sin t\,dt = -\pi\log 2$ 得到），其圆周对数势在 $[-h/2, h/2]$ 上为常数：对每个 $|v| \le h/2$，

$$\mathbb{E}\,\text{对数}\,|\text{正弦}\,\pi(v-U)| = \frac{1}{2}\mathbb{E}\,\text{对数}\,|\text{正弦}^2\pi v - \text{正弦}^2\pi U| = \mathbb{E}\,\text{对数}\,|\text{正弦}\,\pi v - a\,\text{余弦}\,\theta| = \text{对数}\,\frac{a}{2}.$$

U 的前两个余弦矩为 $k_1 = \mathbb{E}\cos(2\pi U) = 1 - a^2$ 和 $k_2 = \mathbb{E}\cos(4\pi U) = (1-a^2)(1-3a^2)$。

设 I 为长度为 $s = m(I) > h$ 的弧，设 g 为长度为 $\ell = s - h$ 的同心弧的示性函数与 U 的分布的卷积。那么，几乎处处有 $0 \le g \le \mathbf{1}_I$，且 $\bar{g} = \ell$。设 U' 为 U 的一个独立副本，令 $X = U - U'$，并定义

$$K(t) = \log|\sin\pi t| + \cos(2\pi t) + \frac{1}{8}\cos(4\pi t).$$

在 $\mathcal{N}(g) = \mathcal{E}(g) - \|g - \bar{g}\|^2_{\dot{H}^{-1/2}}$ 中，在相减的范数中仅保留频率 ±1 和 ±2。利用区间示性函数的傅里叶系数（由于势连续，阿贝尔极限保证了这一处理的合理性；对于 $t = |\sin\pi v| > a$，同一反正弦积分给出 $\log((t + \sqrt{t^2 - a^2})/2)$），我们得到

$$\pi^2\mathcal{N}(g) \le \mathbb{E}\big[K(\ell + X) - K(X)\big] \le \max K - \log\frac{a}{2} - k_1^2 - \frac{k_2^2}{8}.$$

用 $u = \sin^2\pi t$ 表示，我们有 $K(t) = \frac{1}{2}\log u + \frac{9}{8} - 3u + u^2$，其最大值在 $u_* = (3 - \sqrt{5})/4$ 处取得。由 $4u_*^2 - 6u_* + 1 = 0$ 和 $\log(4u_*) \le 4u_* - 1$，可得 $\max K \le \frac{1}{2} - \log 2 - (\sqrt{5} - 2)/8$。由于 $a < 1/15$，我们有 $k_2^2 \ge 1 - 8a^2 > 3 - \sqrt{5}$，因此 $\mathcal{N}(g) \le C_h$。

应用 (2.6) 得到 $\mu(I) \ge \mu g \ge s - h - \sqrt{C_h B_\mu}$，当 $s \le h$ 时该界显然成立。将同一估计应用于 $\mathbb{T}\setminus I$，即可得到双边差异界。$h = 1/48$，$1/72$ 处的数值界由 $a \ge 3h/2$、$2a^2 < 0.01$、$\log 2 < 0.7$、$\log 3 < 1.1$ 和 $\pi^2 > 9.85$ 得出。选取 $h = \sqrt{B_\mu}$ 即可得到渐近陈述。□

2.3. 边界相位恒等式与间隙优化。 接下来，我们将 Schwarz–Christoffel 导数的模与其边界相位联系起来。考虑定义在 $\mathbb{D}$ 上的一个无零全纯乘积，其形式为

$$F(z) = C\prod (1 - \bar{\xi}_j z)^{-2b_j}, \qquad C \ne 0, \quad \xi_j \in \mathbb{T}\ \text{distinct}, \quad b_j < \frac{1}{2},$$

它在 $\mathbb{D}$ 上具有解析分支。令 $\beta = \sum_j b_j$，并在避开有限多个点 ξ_j 的 $\mathbb{T}$ 上定义边界相位 $u = F/|F|$（一个常数全局相位因子无关紧要）。

引理 2.4（边界相位恒等式）。取 $s \in (1,\infty)$ 使得 $2s\max_j(b_j)_+ < 1$，并令 $s' = s/(s-1)$ 为其共轭指数。设 $H = F^{1/2}$ 以及 $D_z H(w) = (H(w) - H(z))/(w - z)$。对于每个实数 $f \in W^1$，若 $s'(\mathbb{T})$ 在满足 $b_j > 0$ 的每一点 ξ_j 处均为零，则有如下绝对收敛恒等式

$$\begin{aligned} -\int_{\mathbb{T}} (\Lambda + \beta) f\,|F|\,dm &= 2\int_{\mathbb{T}} f(z)\|D_z H\|_2^2\,dm(z) \\ &= \iint_{\mathbb{T}\times\mathbb{T}} f(z)|F(w)|\left|\frac{u(w) - u(z)}{w - z}\right|^2 dm(w)\,dm(z). \end{aligned} \tag{2.7}$$

证明。设 $\rho = |H|^2 = |F|$，令 P_r 表示延拓至半径 $r \in$ 的泊松延拓（0， 1），并首先假设 $f \geq 0$。由于 $2s\max j(b_j)_+ < 1$，我们有 $H \in H^{2s}(\mathbb{D})$ 以及 $P_r H(z) = H(rz)$。展开 $|H(w) - H(z)|^2$ 并利用 P_r 的自伴性，得到

$$\iint_{\mathbb{T}\times\mathbb{T}} f(z)\frac{r|H(w)-H(z)|^2}{|w-rz|^2}\,dm(w)\,dm(z) = \frac{r}{1-r^2}\left[\int_{\mathbb{T}} \rho(P_r f - f)\,dm - 2\Re\int_{\mathbb{T}} f\bar{H}\big(H(rz)-H(z)\big)\,dm\right].$$

当 $r\uparrow 1$ 时，核 $r|w-rz|^{-2} = (|w-z|^2 + (1-r)^2/r)^{-1}$ 单调递增至 $|w-z|^{-2}$。在右侧，由于 $\Lambda f \in L^{s'}(\mathbb{T})$ 且 $r\partial_r P_r f = P_r \Lambda f$，我们有 $(P_r f - f)/(1-r) \to -\Lambda f$ 属于 $L^{s'}(\mathbb{T})$，而 $\rho \in L^s(\mathbb{T})$。

除前顶点外，$(H(rz) - H(z))/(1-r) \to -zH'(z)$。为利用控制收敛定理在积分号下取极限，令 $t = |z-\xi_j|$ 位于权重为 $b_j \neq 0$ 的前顶点 ξ_j 附近。由乘积公式及 $|1 - r\bar{\xi}_j z|^2 \geq rt^2$，可得 $|H(z)| \lesssim t^{-b_j}$，且 $\sup_{1/2<r<1} |H'(rz)| \lesssim 1 + t^{-b_j-1}$。当$b_j > 0$时，消失的 $f(\xi_j) = 0$ 以及 H¨older 不等式给出 $|f(z)| \lesssim t^{1/s}$，其中 $1/s > 2b_j$；当$b_j < 0$时， f 的有界性已足够。在这两种情况下，被积函数都有一个可积支配函数。¯由于 $2\Re(HzH') = -\beta\rho$ 在 $\mathbb{T}$ 上成立，取 $r\uparrow 1$ 即得 (2.7) 中的第一个等号。将带符号的 f 分解为 $f_+ - f_-$，即可证明一般情形下的绝对收敛。

对于第二个等号，固定一个远离前顶点的 $z \in \mathbb{T}$。然后 $D_z H \in H^2(\mathbb{D})$，并写成$\Delta H(w) = H(w) - H(z)$，得到

$$\int_{\mathbb{T}} \frac{\Delta H(w)^2}{|w-z|^2}\,dm(w) = -z\int_{\mathbb{T}} w\big(D_z H(w)\big)^2 dm(w) = 0,$$

因为 $w(D_z H(w))^2 \in H^1(\mathbb{D})$ 在 0 处消失。因此，对于任意模为一常数 $\alpha \in \mathbb{T}$,

$$\int_{\mathbb{T}} \frac{|\Delta H(w) - \alpha\overline{\Delta H(w)}|^2}{|w-z|^2}\,dm(w) = 2\|D_z H\|_2^2. \tag{2.8}$$

取 $\alpha = u(z) = H(z)/H(z)$，¯分子等于 $|H(w) - u(z)H(w)|^2 = |F(w)|\,|u(w) - u(z)|^2$，¯由此完成证明。□

特别地，只要 f 和 Λf 在 $\mathbb{T}$ 上连续，且 f 在每个严格凸前顶点处都为零，引理 2.4 就适用，因为圆周希尔伯特变换的有界性会使 f' 对所有 $1 < r < \infty$ 都属于 $L^r(\mathbb{T})$。

结合 (2.7) 与 (2.6)，我们现在优化一个支集位于间隙上的试探函数，从而仅用平衡的间隙长度 s_1， .. . ， s_p 来界定 $d(P)$。

引理 2.5（间隙轮廓优化）。 回顾 $D(s) = c + bs - es^3$ 和 $\mathcal{H}(s) = s^4/D(s)$ 见(2.4)，并定义

$$\mathcal{H}_{\mathrm{opt}}(s) \coloneqq 2s^4 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^3 + 2sj^2 - 2s^3}.$$

在弧长平衡坐标中，置 $y = 1/p$ 和 $Q = \sum_{i=1}^{p} (s_i/y - 1)^{2},$，并通过 $|F| = \rho$ 和 $H_F(0) > 0$ 将 $H_F^2 = F$归一化。则

$$d(P) \geq B_\mu \geq \Big(1 + \frac{1 - H_F(0)^2}{2}\Big)^2 \sum_{i=1}^{p} \mathcal{H}_{\mathrm{opt}}(s_i), \qquad \mathcal{H}_{\mathrm{opt}}(s) \geq \mathcal{H}(s).$$

此外，令 $m = \sum_{i=1}^{p} s_i^2 = y\,(1 + Q/p)$，则 $K = \mathcal{H}$ 和 $K = \mathcal{H}_{\mathrm{opt}}$ 均满足

$$\sum_{i=1}^{p} K(s_i) \geq \frac{K(m)}{m} \geq p\Big(1 + \frac{Q}{p}\Big)^2 K(y) \geq (p + 2Q)K(y). \tag{2.9}$$

特别地， $B_\mu \geq (c\nu^3 + b\nu^2 - e)^{-1}$ 其中 $\nu = (\sum_{i=1}^{p} s_i^2)^{-1} \leq p$。

证明。先考虑有限个非负系数 A_{ij}。将每个间隙 I_i 用其单位坐标 $v\in[0,1]$参数化，令 $f(v)=\sum_j A_{ij}(1-\cos(2\pi j v))$，其中 I_i。于是 $f\ge 0$ 是分段光滑的，并且具有利普希茨导数；f 和 f' 在每个凸前顶点处均为零，因此 Λf是连续的。对 $G=(I+\Lambda)f$ 应用带有 $|F|=\rho$ 和 $\beta=1$ 的（2.7）式，得到

$$-\mu G = 2\int_{\mathbb{T}} f(z)\|D_z H_F\|_2^2\,dm(z).$$

由于 $|w-z|\le 2$ 在 $\mathbb{T}$上，记 $|H_F(w)-H_F(z)|^2=|H_F(w)-H_F(0)|^2+|H_F(z)-H_F(0)|^2-2\Re\big((H_F(w)-H_F(0))\overline{(H_F(z)-H_F(0))}\big)$，并对 w 积分（利用 $\int_{\mathbb{T}} H_F\,dm=H_F(0)$ 和$\|H_F\|_2=1$），得到

$$2\|D_z H_F\|_2^2 \ge \frac{1}{2}\big(\|H_F-H_F(0)\|_2^2+|H_F(z)-H_F(0)|^2\big)\ge \frac{1-H_F(0)^2}{2}.$$

因此 $-\mu G\ge \frac12(1-H_F(0)^2)\,\bar f$。令 $L=1+(1-H_F(0)^2)/2$并调用 (2.6)，得到

$$L^2\Big(\sum_{i,j} s_i A_{ij}\Big)^2 \le (\bar G-\mu G)^2 \le B_\mu\,\mathcal{N}(G).$$

在傅里叶侧，角向微分 f' 满足

$$\mathcal{N}(G)=\mathcal{E}(f')+2\|f'\|_2^2-2\,\mathrm{Var}_m(f)-\|f\|_{\dot H^{-1/2}}^2.$$

为从上方界定 $\mathcal{E}(f')$，将 $\mathbb{D}$ 共形地视为角向周长为2π 且竖直坐标为 $t>0$ 的半圆柱。在间隙 I_i 上方的半条带中，将 f'的 j 阶正弦模态 $(jA_{ij}/s_i)\sin(2\pi jv)$ 乘以因子 e^{-jt/s_i} 延拓。由于这些延拓在凸前顶点上方的每条竖直射线上都为零，它们能够连续地拼接成半圆柱上的有限能量竞争函数，其归一化狄利克雷能量从上方界定 $\mathcal{E}(f')$。I_i上的 j 阶模态对该能量的贡献为 $\frac{s_i}{2}(j/s_i)^3A_{ij}^2$。将这一上界与$\|f'\|_2^2$的精确值以及间隙内方差（舍去间隙间方差和 $\|f\|_{\dot H^{-1/2}}^2$）结合，得到

$$\mathcal{N}(G)\le \sum_{i,j}\frac{j^3+2s_ij^2-2s_i^3}{2s_i^2}A_{ij}^2.$$

每个分母系数均为正，因为 $0<s_i<1$。根据柯西–施瓦茨不等式，选择 $A_{ij}=s_i^3/(j^3+2s_ij^2-2s_i^3)$ 可使所得商最大；令频率截断趋于无穷，即得 $B_\mu\ge L^2\sum_i \mathcal{H}_{\mathrm{opt}}(s_i)$。

对于后续章节，单独考察使首阶条带代价最小的轮廓函数会更方便：

$$\Phi(v)\coloneqq\frac{1}{Z}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1-\cos(2\pi jv)}{j^3},\qquad v\in[0,1].\tag{2.10}$$

根据柯西–施瓦茨不等式，$(\sum_j A_j)^2\le Z\sum_j j^3A_j^2$，等号成立当且仅当 $A_j\propto j^{-3}$。将级数在 $j\approx 1/v$ 处分开可知，在 $v=0$ 附近，$\Phi(v)=O(v^2(1+|\log v|))$；相应地，将 Φ' 分开可知，Φ' 是任意小于 1 的指数下的 H¨older 连续函数。因此，通过截断，前述估计可推广至 $f|_{I_i}=a_i\Phi$：

$$\|f\|_{\dot H^{3/2}}^2\le c\sum_{i=1}^{p}\frac{a_i^2}{s_i^2},\qquad 2\|f'\|_2^2=b\sum_{i=1}^{p}\frac{a_i^2}{s_i},\qquad 2\,\mathrm{Var}_m(f)\ge e\sum_{i=1}^{p}a_i^2s_i.\tag{2.11}$$

我们还需要给出 $\mathcal{E}(f)$ 的一个下界：将 f 的调和延拓限制在每个半条带上，并放宽垂直射线上的连续性约束，可得到诺伊曼延拓；它会将第 j 个余弦模态衰减 e^{-jt/s_i}，代价为 $jA_{ij}^2/2$。对 j 求和可得

$$\mathcal{E}(f)\ge 2c^2\zeta(5)\sum_{i=1}^{p}a_i^2.\tag{2.12}$$

用 $A_j \propto j^{-3}$ 检验 $\mathcal{H}_{\mathrm{opt}}(s)$ 的商，立即得到 $\mathcal{H}_{\mathrm{opt}}(s) \geq \mathcal{H}(s)$。更一般地，若 $\gamma_i \geq 0$ 对所有 $a_i \geq 0$ 都满足 $\bar{G} - \mu G \geq \sum_{i=1}^{p} a_i s_i \gamma_i$，则在 (2.6) 中令 $a_i = s_i^3 \gamma_i / D(s_i)$，可得

$$d(P) \geq B_\mu \geq \sum_{i=1}^{p} \mathcal{H}(s_i)\gamma_i^2. \tag{2.13}$$

最后，为间隙 i 赋予概率 s_i，使随机间隙长度 S 的期望为 $\mathbb{E}S = m = \sum_i s_i^2$。出现在 $\mathcal{H}$ 或 $\mathcal{H}_{\mathrm{opt}}$ 中的每个求和项 $K_0(s) = s^4/D_0(s)$都有一个正的凹分母 D_0。应用柯西–施瓦茨不等式和詹森不等式（利用 $s^{3/2}$ 的凸性和 D_0的凹性），得到

$$\sum_{i=1}^{p} K_0(s_i) = \mathbb{E}\left[\frac{S^3}{D_0(S)}\right] \geq \frac{(\mathbb{E}S^{3/2})^2}{\mathbb{E}D_0(S)} \geq \frac{m^3}{D_0(m)} = \frac{K_0(m)}{m},$$

除非所有间隙都相等，否则不等式严格成立。对 K 中的各项求和，即得 (2.9) 中的第一个不等式。由于 $D_0(s) - sD_0'(s) > 0$，函数 $s/D_0(s)$ 单调递增，因此$K(m)/m \geq (m/y)^2 K(y)/y$，从而证明了 (2.9) 的其余部分。将 $m = 1/\nu$ 代入 $\mathcal{H}(m)/m$，得到最终估计。□

当一个间隙至多包含一个反射前顶点时，(2.7) 中的相位商在整个间隙内都接近 1，并给出间隙内相位贡献的一个显式下界。

引理 2.6（至多含一个反射前顶点的间隙内源平均值）。对于 $0 < s \leq U < 1/2$，令 $v = (1 - 1/(4U))_+$ 并定义

$$\kappa(U) := \left[1 + 2\pi U v^2 - \frac{U}{\pi Z}\big(1 - \cos(2\pi v)\big)\right]^{-1}.$$

在长度为 s 且至多含一个反射前顶点的间隙上，对于该间隙中任意固定的目标点 w，相位商 $|u(w) - u(z)|^2/|w - z|^2$ 关于源点 z、相对于以间隙坐标表示的概率密度 Φ 的平均值至少为 $\kappa(U)$。特别地，$\kappa(1/4) = 1$，$\kappa(1/3) > 0.95$，以及 $\kappa(5/12) > 9/11$。

证明。当角分离为 $t \in (0, 1/2)$ 周时，只要 z 和 w位于同一条直边上，相位商就等于 1。跨越一个转角幅度为 $\gamma \in (0, \pi)$ 的反射角点时，相位以周为归一化单位变化 $2\pi t + \gamma$，从而得到

$$\left|\frac{u(w) - u(z)}{w - z}\right|^2 = \frac{\sin^2(\pi t + \gamma/2)}{\sin^2(\pi t)} \geq \min(1, \cot^2 \pi t).$$

因此，只有间隔为 $t > 1/4$ 的点对才可能出现低于 1 的损失。从离目标较远的端点起测量 $w' \in [0, 1]$，并令 $v_s = (1 - 1/(4s))_+$，我们有 $2\pi(t - 1/4)_+ \leq X := 2\pi s(v_s - w')_+$。由于 $1 - \cot^2(\pi/4 + \theta) = 2\sin(2\theta)/(1 + \sin(2\theta))$，逐点损失至多为 $2X/(1 + X)$。令 $L_s = \int_0^{v_s} \Phi(w')\, dw'$ 且 $A_s = 2\int_0^{v_s} X\Phi(w')\, dw'$，在 $[0, v_s]$ 上应用詹森不等式，可得总损失比例的上界为

$$e(s) := \frac{2L_s A_s}{2L_s + A_s} \leq \frac{A_s}{1 + A_s},$$

其中，对于 $s \leq 1/4$，$e(s) = 0$。这里，由于 Φ 的对称性，$L_s \leq 1/2$ 成立，并且 L_s 和 A_s 均随 s 增大。对 (2.10) 逐项积分，得到

$$A_U = 2\pi U v^2 - \frac{U}{\pi Z} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos(2\pi n v)}{n^5}.$$

仅保留 $n = 1$ 项可得界 $A_s \leq A_U \leq \kappa(U)^{-1} - 1$，从而得到所述下界$\kappa(U)$。在 $U = 1/3$ 和 $U = 5/12$ 处，A_U的这一上界分别等于 $\pi/24 - 1/(3\pi Z) < 0.05$ 和$2\pi/15 - 5(1 + \cos(\pi/5))/(12\pi Z) < 2/9$。

在相位恒等式中保留每个间隙内贡献 $(1-e(s_i))\mu_i$（其中 $\mu_i=\mu(I_i)$），并调用（2.13），得到

$$d(P)\ge \sum_{i=1}^{p}\mathcal{H}(s_i)\big[1+(1-e(s_i))\mu_i\big]^2. \tag{2.14}$$

在 $s=3/10$，保留级数的前两项可得 $A_s\le \pi/60-21/(128\pi Z)<0.01$；在$s=5/12$，直接积分得到 $L_s\le 2/5-[\sin(\pi/5)-(W-1)]/(2\pi Z)<1/3$。因此$e(3/10)<0.01$，$e(1/3)<0.05$，且 $e(5/12)<1/6$。□

3. Spectral analysis of the regular polygons

记 $d_n=d(R_n)=2\pi/J(R_n)-1$、$Z=\zeta(3)$ 和 $W=\zeta(4)$。本节将证明 $J(R_n)$ 的严格单调性及其五阶渐近展开

$$d_n=2Zn^{-3}+8Wn^{-4}+26\zeta(5)n^{-5}+O(n^{-6}), \tag{3.1}$$

并利用 [9] 中引入的正多边形傅里叶矩阵，建立适用于所有 $n\ge 4$ 的 d_n 的显式有理上界。作为引理 2.5 与这些谱界的直接应用，我们随后证明与增加两条边的比较，从而为至少具有两个凹顶点的所有多边形解决定理 1.1。

在整个数值界中，我们使用以下基本的 ζ 函数估计：对任意实数 $s\ge 3$，将尾项 $\sum_{k=9}^{\infty}k^{-s}$ 与 $\int k^{-s}\,dk$ 进行比较，并应用梯形公式和中点公式，可得尾项介于 $9^{1-s}/(s-1)+9^{-s}/2$ 和 $(17/2)^{1-s}/(s-1)$ 之间。特别地，

$$1.202<Z<1.2022,\qquad 1.082<W<1.0825,\qquad 1.036<\zeta(5)<1.0371.$$

3.1. 傅里叶矩阵、首个特征模态与严格单调性。 对于 $b<1/2$，令 w_b 表示 $\mathbb{T}$ 上与 $|1-z|^{-2b}$ 成正比的概率密度。其傅里叶系数为

$$r_0(b)=1,\qquad r_j(b)=\frac{(b)_j}{(1-b)_j}\quad (j\ge 1),\qquad (b)_j:=b(b+1)\cdots(b+j-1),$$

其中，递推关系 $(j+1-b)r_{j+1}(b)=(j+b)r_j(b)$ 可由在 $[0,2\pi]$ 上对 $(\sin(\theta/2))^{1-2b}e^{i(j+1/2)\theta}$ 求导后积分得到。

在 R_n 的中心化圆盘坐标中，边界密度为 $w_x(z^n)$，且满足 $x=1/n$。在由能量正交归一基 $\{z^{1+ni}/\sqrt{\ell_i}:i\in\mathbb{Z}\}$ 张成的 $H^{1/2}(\mathbb{T})/\mathbb{C}$ 的闭旋转子空间上，其中 $\ell_i=|1+ni|$，边界方差算子 T_μ 表示为无穷对称矩阵

$$M_{ik}=\frac{r_{|i-k|}(x)}{\sqrt{\ell_i\ell_k}},\qquad i,k\in\mathbb{Z}.$$

为了将 $\|M\|$ 与 $1+d_n$ 识别起来，我们首先记录任意多边形上的第一 Steklov 特征函数所具有的一般非退化性质。

引理 3.1 (非零第一傅里叶模态)。 *在 P 的任意圆盘坐标表示中，若边界测度为 $\mu=\rho\,dm$，则每个由 $\mu u=0$ 归一化的非常数实值第一 Steklov 特征函数 u 都满足 $\mathcal{E}(z,u)\neq 0$。*

证明。写作 $\lambda=1+d(P)$，并反设 $\mathcal{E}(z,u)=0$。特征值方程 $\lambda\mathcal{E}(z,u)=\mu(zu)$ 于是得到 $\mu(zu)=0$。令 $a=\int_{\mathbb{T}}u\,dm$ 和 $g=u-a$。将实值零均值函数 g 的相反傅里叶模态配对，得到 $\mathcal{E}(zg)=\mathcal{E}(g)=\mathcal{E}(u)$，而

$$\mathrm{Var}_\mu(zg)=\mathrm{Var}_\mu(u)+a^2(1-|\mu z|^2).$$

由于 $\mathrm{Var}_\mu(u)=\lambda\mathcal{E}(u)$ 且 $|\mu z|<1$，λ 的变分极大性迫使 $a=0$。因此，zu 也是复能量空间中的一个极大者，且 $\mu(zu)=0$。比较两个特征值方程 $\lambda\Lambda(zu)=\rho zu$ 和 $\lambda\Lambda u=\rho u$，得到 $[\Lambda,z]u=0$。然而，交换子在单项式上的作用为 $[\Lambda,z]z^k=(|k+1|-|k|)z^{k+1}$，其乘数对每个 $k\in\mathbb{Z}$ 都是 ±1，这与$u\neq 0$矛盾。□

施加一个圆盘自同构，将任意内点移至原点，可知在任意圆盘坐标中，梯度映射 $u \mapsto \nabla u$ (0) 在实第一特征空间上是单射。在 R_n上的中心化坐标中，该映射关于二面体群D_n等变，因此它在 $\mathbb{R}^2$ 中的非零像在旋转 $2\pi/n$ 下不变，进而等于$\mathbb{R}^2$的全部。由此， R_n 的实第一特征空间是二维的，并承载 D_n的标准表示；此外，等变第一特征场构成一个一维实空间，因为任何同时与阶为 $n \geq 3$ 的旋转及一个反射交换的 2×2 实矩阵都是数量矩阵。根据引理 3.1， z 在第一特征空间上的正交投影非零，且属于由 $\{z^{1+ni}\}$张成的旋转子空间。因此 $\|M\| = 1 + d_n$。

每个条目 M_{ik} 都随 n 减小；当且仅当（i， k）$\neq$（0，0）时，这种减小是严格的。对于 $n+1$，将 $M^{(n+1)}$ 的单位最大化特征向量的各个条目替换为其绝对值，会保持或增大瑞利商，而特征值方程随后迫使每个条目都严格为正。用这个正的单位向量检验 $M^{(n)}$ 可得 $1 + d_n > 1 + d_{n+1}$，从而证明严格单调性

$$J(R_n) < J(R_{n+1}) \qquad (n \geq 3). \tag{3.2}$$

注 3.2（从 z 的迭代中恢复特征值）。对于任意多边形 P，递归定义 f_0（z）$= z$ 和 $f_{k+1} = T_\mu f_k$，并将其以均值为零的形式表示为

$$(T_\mu f)(z) = -2 \int_{\mathbb{T}} \log|z - w| \big(f(w) - \mu f\big)\, d\mu(w),$$

因为 $-2\log|z-w|$ 的傅里叶系数在 $j \neq 0$ 时为 $1/|j|$，在 $j = 0$ 处为 0。令 ν 为 z 关于能量内积下 T_μ 的谱测度，其矩为 $m_j = \int t^j \, d\nu$（t）。于是 Var_μ（f_k）$/\mathcal{E}$（f_k）$= m_{2k+1}/m_{2k}$，根据柯西–施瓦茨不等式，它随 k 增大而增加。由于引理 3.1 保证 ν 在 $1 + d$（P）处有一个正原子，在除以（$1 + d$（P））^{2k} 后应用控制收敛可得 $m_{2k+1}/m_{2k} \uparrow 1 + d$（$P$）。特别地，$2\pi/J$（$P$）的每个严格下界都可由 T_μ 在 z 上进行有限次迭代得到。

3.2. 倒数密度压缩、弦积分与渐近分析。令 M_* 表示删除 M 的第零行和第零列后得到的子矩阵，并令 v 表示其耦合列，其元素为$v_i = r_{|i|}(x)/\sqrt{\ell_i}$（$i \neq 0$时）。

由倒数密度得到的二次型。固定 $x = 1/n$ 和一个参数 $\lambda \in [x, 1/2)$。令$r_m = r_m(x)$， $c_m = -r_m(-\lambda) > 0$，并在 $m \geq 1$时令 $b_m = -r_m(x - \lambda) \geq 0$； r_m的递推关系在负参数下仍然成立。逐点乘积 $w_x w_{-\lambda} = D w_{x-\lambda}$ 具有常数均值 $D = 1 - 2\sum_{m=1}^{\infty} r_m c_m > 0$。比较非恒定傅里叶系数（由于 $c_m = O(m^{-1-2\lambda})$而绝对收敛，因此这一比较是合理的）可知，正向量 $h_i = \sqrt{\ell_i}\, c_{|i|}$ $(i \neq 0)$满足

$$\frac{(M_* h)_i}{h_i} = \frac{r_{|i|} + D b_{|i|}}{\ell_i c_{|i|}}, \qquad i \neq 0. \tag{3.3}$$

对于由 $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ 索引的任意有限支撑向量 f，展开差值可得半正定恒等式

$$\sum_{i \neq 0} \frac{(M_* h)_i}{h_i} |f_i|^2 - \langle M_* f, f \rangle = \frac{1}{2} \sum_{i,k \neq 0} M_{ik} h_i h_k \left| \frac{f_i}{h_i} - \frac{f_k}{h_k} \right|^2 \geq 0.$$

取特例 $\lambda = x$，可得 $b_m = 0$ 和 $M_* h = v$。对于 $i = \pm m$，较大的行比为 $Q_m = v_{-m}/h_{-m}$，其满足

$$Q_1 = \frac{x(1+x)}{(1-x)^2}, \qquad \frac{Q_{m+1}}{Q_m} = \frac{(m+x)(m+1+x)}{(m+1-x)^2} < 1$$

对于 $n \geq 4$，因为 $(m+1-x)^2 - (m+x)(m+1+x) = m(1-4x) + 1 - 3x > 0$。由上述二次型界，我们得到

$$\|M_*\| \leq Q_1 = \frac{n+1}{(n-1)^2} \qquad (n \geq 4). \tag{3.4}$$

根据余维一极小极大原理， T_μ 在旋转类中的第二个方差特征值同样被上界 $(n+1)/(n-1)^2$所控制。

弦积分与标量耦合级数。对于标量估计，我们按照相同的公式将 M_* 和 v 延拓为连续的 $x\in(0,1/6]$，其中 $\ell_i=|1+i/x|$。消去 $x=1/n$ 处最高特征向量方程中的非零分量，可得到舒尔补方程

$$d_n=\big\langle v,((1+d_n)I-M_*)^{-1}v\big\rangle.$$

我们将 d_n 与零移位预解式 $U(x):=\langle v,(I-M_*)^{-1}v\rangle$ 进行比较，其首项由标量级数控制

$$S(x):=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{r_j(x)^2}{j}=\sum_{k=2}^{\infty}(2^{k-1}-1)\zeta(k+1)x^k,\qquad 0\le x<\frac12. \tag{3.5}$$

为推导（3.5），令 $a,\ b<1/2$、$s>\max(-1/2,\ a+b-1)$，并将 $(c)_s=\Gamma(c+s)/\Gamma(c)$ 写出。我们首先计算圆弦矩

$$I_{ab}(s):=\iint_{\mathbb{T}\times\mathbb{T}}|z-w|^{2s}w_a(z)w_b(w)\,dm(z)\,dm(w)=4^s\frac{(1/2)_s(1-a-b)_s}{(1-a)_s(1-b)_s}. \tag{3.6}$$

在两个相互独立的上半平面副本上赋予与 $v^{-2a}e^{-u^2-v^2}\,du\,dv$ 及 $(v')^{-2b}e^{-(u')^2-(v')^2}\,du'\,dv'$ 成比例的归一化密度，并以两种方式计算 $|\det(X,\ Y)|^{2s}$ 的期望。在极坐标中，$z=e^{2i\arg X}$ 的密度为 w_a，而 $|X|^{2s}$ 的均值为 $(1-a)_s$（Y、w 同理）；由于 $2|\det(X,\ Y)|=|X|\,|Y|\,|z-w|$，该期望等于 $4^{-s}(1-a)_s(1-b)_sI_{ab}(s)$。在笛卡尔坐标中，给定高度 v、v' 后，对水平高斯对 $(u,\ u')$ 进行旋转，将 $uv'-u'v$ 化为一个乘以 $\sqrt{v^2+(v')^2}$ 的单一标准高斯，其贡献为 $(1/2)_s(v^2+(v')^2)^s$。令 $v^2=rt$ 且 $(v')^2=r(1-t)$，可得 $r=v^2+(v')^2$ 具有归一化密度 $r^{-a-b}e^{-r}\,dr/\Gamma(1-a-b)$，其 s 阶矩为 $(1-a-b)_s$。比较这两种求值方式即得（3.6）。

根据 $-\log|z-w|$ 的傅里叶级数和阿贝尔极限（这是合理的，因为小的正、负弦线矩支配 $|\log|z-w||$），通过欧拉伽马乘积在 $s=0$ 处对 (3.6) 求导可得

$$2\sum_{j=1}^{\infty}\frac{r_j(a)r_j(b)}{j}=-I_{ab}'(0)=\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{j-a-b}-\frac{1}{j-a}-\frac{1}{j-b}+\frac1j\right).$$

令 $a=b=x$，得到 $S(x)=\sum_{j=1}^{\infty}x^2/[j(j-x)(j-2x)]$，，展开为几何级数即可证明 (3.5)。对部分分式积分得到积分表示

$$2S(x)=\int_0^1\frac{(t^{-x}-1)^2}{1-t}\,dt,\qquad 2S(1/p)=p\int_0^1\frac{v^{p-3}(1-v)}{1+v+\cdots+v^{p-1}}\,dv. \tag{3.7}$$

诺伊曼展开与五阶系数。在 $U(x)=\langle v,(I-M_*)^{-1}v\rangle$ 的诺伊曼级数中，将任意重复的非零指标 i 的连续串分组后，其对角权重由几何级数 $D_i=\sum_{r=0}^{\infty}\ell_i^{-1-r}=(\ell_i-1)^{-1}$ 取代，从而 $D_j=x/j$，并且当 $j\ge1$ 时有 $D_{-j}=x/(j-2x)$。这给出 $U(x)=\sum_{k=0}^{\infty}U_k(x)$，其中

$$U_k(x)=\sum_{\substack{i_0,\dots,i_k\neq0\\ i_a\neq i_{a-1}}}r_{|i_0|}(x)r_{|i_k|}(x)\prod_{a=1}^{k}r_{|i_a-i_{a-1}|}(x)\prod_{a=0}^{k}D_{i_a}.$$

由 (3.4)，该级数在 $x=1/6$ 处收敛，因此根据逐项单调性，它在 $(0,\ 1/6]$ 上处处收敛。U_k 中的每个求和项在 x 中都有一个泰勒级数，其非负系数从$3+2k$次开始，因此可以在 $(0,\ 1/6]$上按系数求和。

在 $Y(x):=U_0(x)$ 中配对相反指标 $i_0=\pm j$，得到

$$Y(x)=2xS(x)+2x^2\sum_{j=1}^{\infty}\frac{r_j(x)^2}{j(j-2x)}=2Zx^3+8Wx^4+O(x^5),$$

由于 $S(x)=Zx^2+3Wx^3+O(x^4)$，且第二个求和以 Wx^2 开始。特别地，$U(x)=Y(x)+O(x^5)$。在 $x=1/n$ 处，将 $U(1/n)$ 和 d_n 的谱积分与

M_* 的谱测度（支集位于 $[0,\|M_*\|]$ 上）将因子 $d_n/(1-t)$ 插入 d_n 的被积函数中，从而得到

$$d_n^2 \le U(1/n) - d_n \le \frac{d_n^2}{1-\|M_*\|} = O(n^{-6}). \tag{3.8}$$

为提取五阶系数，令 $V=\zeta(5)$、$P_4(x)=2Zx^3+8Wx^4$，并定义非负系数幂级数

$$\mathcal{U}(x) := \frac{U(x)-P_4(x)}{x^5}, \qquad 0<x\le\frac{1}{6}. \tag{3.9}$$

只有 $Y=U_0$ 和 U_1 会对 $\mathcal{U}(0)$ 作出贡献。记 $H_m=\sum_{k=1}^{m}1/k$ 和 $T=\sum_{j=1}^{\infty}H_{j-1}/j^4$。将 $r_j(x)=(x/j)[1+(2H_{j-1}+1/j)x+O(x^2)]$ 代入关于 Y 的配对公式，得到 $[x^5]Y = 22V+8T$。在欧拉贝塔恒等式的左侧

$$a\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^b\,dt = \frac{\Gamma(1+a)\Gamma(1+b)}{\Gamma(1+a+b)}, \tag{3.10}$$

b^2 的系数为 $a\sum_{j=1}^{\infty}H_{j-1}/[j(j+a)]$，由 $\tfrac12\log^2(1-t)$ 的幂级数可知。利用欧拉伽马乘积提取等式两边 a^3b^2 的系数，得到 $T=2V-\zeta(2)Z$。

对于 U_1，按差值 $k\ge1$ 对指标对 $(j,\ j-k)$ 进行分组。裂项求和 $k/[j(j-k)]=1/(j-k)-1/j$ 得到 $\sum_{j\in\mathbb{Z}\setminus\{0,k\}}1/[j(j-k)]=2/k^2$，对该恒等式平方可得

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}\setminus\{0,k\}}\frac{1}{j^2(j-k)^2}=\frac{4\zeta(2)}{k^2}-\frac{6}{k^4}.$$

乘以 $2/k$ 并对 $k\ge1$ 求和得到 $[x^5]U_1=8\zeta(2)Z-12V$。因此 $\mathcal{U}(0)=[x^5](Y+U_1)=26V$，而 (3.8) 将该系数直接传递给 d_n，从而证明 (3.1)。

3.3. 参考谱的显式界。 现在我们记录有限-p 比较中所需的 $J(R_n)$ 和 d_n 的定量界，首先从正方形的显式第一特征函数开始（关于矩形和长方体的 Steklov 谱，参见 [35, 20]）。

引理 3.3（参考正方形）。令 $\tau\in(0,\ \pi/2)$ 为 $\tan\tau\tanh\tau=1$ 的唯一根，并令 $t=\tanh\tau=\cot\tau$。在正方形 $S=(-1,\ 1)^2$，上，函数 $\sin(\tau x)\cosh(\tau y)$ 和 $\sin(\tau y)\cosh(\tau x)$ 是第一 *Steklov* 特征函数，并且

$$\frac{11}{15}<t<0.735, \qquad 0.93<\tau<0.94, \qquad 5.5<J(R_4)=8\tau t<5.52.$$

证明。根据引理 3.1 之后建立的梯度同构，在 S 上原点处梯度为 $(1,\ 0)$ 的第一特征函数关于 x 为奇函数。将其在 $\{x>0\}$ 上替换为绝对值，并关于 S 奇延拓，不改变瑞利商，从而得到一个与 $u(x,\ y)=\sin(\tau x)\cosh(\tau y)$ 的边界内积严格为正的第一特征函数。由于 u 是调和函数，并且在四条边上满足 $\partial_\nu u=\tau t\,u$，不同特征空间的正交性表明 $\sigma_1(S)=\tau t$，交换 x 和 y 即得到第二特征函数。

将 $\arctan t+\operatorname{artanh}t=\pi/2$ 改写为 $\pi/4=tS_0(t^4)$，其中 $S_0(u)=\sum_{k=0}^{\infty}u^k/(4k+1)$，我们将超过 $u^2/9$ 的尾部在 $u=0.29$ 处界定于 $u^3/13$ 和 $u^3/[13(1-u)]$ 之间，从而得到 $1.0692<S_0(0.29)<1.0700$。由于 $(11/15)^4<0.29<0.735^4$，由单调性可得 $11/15<t<0.735$。函数 $z\mapsto z\operatorname{arccot}z$ 在 $(0,1)$ 上递增；利用 $w=(1-z)/(1+z)$ 将 $\operatorname{arccot}z=\pi/4+\arctan w$ 表示出来，并在端点 $w=2/13$ 和 $w=53/347$ 处应用 $w-w^3/3<\arctan w<w$，可得 $11/16<t\tau<0.69$ 和 $0.93<\tau<0.94$。□

引理 3.4（d_n 的倒数密度上界）。对于 $d_n=d(R_n)$ 和 $U(x)=\langle v,\ (I-M_*)^{-1}v\rangle$，有

$$d_5<0.0518, \qquad d_6<0.02420, \qquad d_7<0.013273, \qquad d_8<0.00812, \qquad d_9<0.00531,$$

并且 $U(1/10)<0.003668$。此外，式（3.9）中的五阶余项 $\mathcal{U}(x)$ 满足

$$\mathcal{U}(x)<27+130x\quad(0<x\le1/10), \qquad \mathcal{U}(1/8)<44.97, \qquad \mathcal{U}(1/9)<42.21. \tag{3.11}$$

证明。对于 $n\in\{5,6,7,10\}$，令 $x=1/n$、$\lambda=\min\{1/3,1/2-x\}$、$\delta=\lambda-x$ 和 $t_m=r_mc_m$。代入 $z=2m+1$、$\alpha=1-2x$、$\beta=1+2\lambda$ 和 $u_m=m+1/2+\delta$，两个递推关系给出

$$\frac{t_{m+1}}{t_m}=\frac{z^2+\alpha\beta-z(\alpha+\beta)}{z^2+\alpha\beta+z(\alpha+\beta)}\ge\frac{z-\alpha-\beta}{z+\alpha+\beta}=1-\frac{2+2\delta}{u_{m+1}}.$$

整理得 $u_mt_m-u_{m+1}t_{m+1}\le(1+2\delta)t_m$。由于 $u_mt_m\to0$，从 $m=3$ 求和得到

$$D\le D_0:=1-2t_1-2t_2-\frac{7+2\delta}{1+2\delta}t_3.$$

由（3.3），倒数密度二次型给出算子界 $M_*\le\operatorname{diag}(T_{|i|}/\ell_i)$，其中 $T_m=(r_m+D_0b_m)/c_m$。

序列 T_m 是凹的：对于比值 $v_m=r_m/c_m$（其中 $\theta=x$）或 $v_m=b_m/c_m$（其中$\theta=x-\lambda$），前向差分均为正，并满足

$$\frac{v_{m+2}-v_{m+1}}{v_{m+1}-v_m}=\frac{(m+\theta)(m+1+\lambda)(2m+3)}{(m+2-\theta)(m+1-\lambda)(2m+1)}\le1,$$

因为分母比分子大 $2[(1-2\theta-2\lambda)(m+1)^2+\lambda(1-\theta)]\ge0$。

对于下表列出的四种参数选择，直接求值可验证 $2T_3\le3T_2$，$T_1<(n-1)a$，以及 $T_2<(2n-1)a$。凹性随即意味着 T_m/m 在 $m\ge2$ 上递减，因此下式也递减

$$C_m:=\frac{1}{na-T_m/m+a/m}+\frac{1}{na-T_m/m-a/m},$$

如将 $(a/m)/(na-T_m/m)$ 展开为偶次几何级数即可看出。对 M_* 取对角上界的倒数并配对相反指标，得到

$$\langle v,(aI-M_*)^{-1}v\rangle\le C_3S(x)+\sum_{m=1}^{2}(C_m-C_3)\frac{r_m^2}{m}.$$

为了有理地界定 $S(x)$，令 $\gamma=15/64-x^2/2$ 和 $g(u)=[2(u^2+\gamma)]^{-1}$。对于 $u=j-x$，当 $j\ge3$ 时，有 $(\gamma+1/4)^2<u^2/32$，这确保了 $g(u-1/2)-g(u+1/2)\ge[u(u^2-x^2)]^{-1}$。因此，对 (3.5) 进行裂项求和可得

$$S(x)\le x^2\left[\sum_{j=1}^{2}\frac{1}{j(j-x)(j-2x)}+g(5/2-x)\right].$$

分别计算 $n=5$、6、7、10 的这些有理上界，并分别以非负量 r_1^2、$r_2^2/2$ 和 $S-r_1^2-r_2^2/2$ 对 C_1、C_2、C_3 加权，可得以下界：

- 对于 $n=5$ 和 $a=1.0518$：$(C_1,\ C_2,\ C_3)<(0.5621,\ 0.531,\ 0.522)$，$S<0.09392$，以及 $\langle v,(aI-M_*)^{-1}v\rangle<0.05166$。
- 对于 $n=6$ 和 $a=1.02420$：$(C_1,\ C_2,\ C_3)<(0.4316,\ 0.4110,\ 0.4037)$，$S<0.05700$，以及$\langle v,(aI-M_*)^{-1}v\rangle<0.02419$。
- 对于 $n=7$ 和 $a=1.013273$：$(C_1,\ C_2,\ C_3)<(0.351929,\ 0.33531,\ 0.329034)$，$S<0.038304$，以及 $\langle v,\ (aI-M_*)^{-1}v\rangle<0.0132724$。
- 对于 $n=10$ 和 $a=1$：$(C_1,\ C_2,\ C_3)<(0.229,\ 0.220,\ 0.217)$、$S<0.01619$以及 $\langle v,\ (aI-M_*)^{-1}v\rangle<0.003668$。

例如，在 $n=7$ 处，尾部估计给出 $D_0<0.8875$，其中 $r_1^2=1/36$ 且 $r_2^2/2=8/1521$；在 $n=10$ 处，有 $(c_1,\ c_2,\ c_3)=(1/4,\ 1/14,\ 1/28)$ 且 $0.926<D_0<0.927$，因此预解式至多为 $0.217(0.01619)+0.012/81+0.003(11/171)^2/2<0.003668$。对于 $n=5$，6，7，上界严格小于 $a-1$，因此舒尔补方程给出 $d_n<a-1$；在 $n=10$ 处，它直接得到$U(1/10)<0.003668$。

由 (3.8) 和 (3.4)，我们还得到 $U(1/7)<0.013273+(9/7)(0.013273)^2<0.0135$。利用 $Z>1.202$ 和 $W>1.082$，从 $P_4(x)$ 中减去，可得 $\mathcal{U}(1/10)<40$ 和 $\mathcal{U}(1/7)<48.51$。由于 $\mathcal{U}(x)$ 的泰勒系数非负，它在 $[0,1/7]$ 上是凸函数，且 $\mathcal{U}(0)=26\zeta(5)<27$。它在 $[0,1/10]$ 和 $[1/10,1/7]$ 上的弦线（其中 $1/8$ 和 $1/9$ 将 $[1/10,1/7]$ 分别按 $7/12$ 和 $7/27$ 的比例分割）立即给出 (3.11)。代入 $U=P_4+x^5\mathcal{U}$ 并利用 $d_n(1+d_n)\le U(1/n)$，得到 $d_8<0.00812$ 和 $d_9<0.00531$。□

推论 3.5。令 $R'_p = p^4 d(R_{p+1}) - 2Zp$ 且 $A = 8W - 6Z$。则

$$R'_6 < 2.78, \qquad R'_p < A + \frac{8.9}{p} \quad (p \geq 4).$$

特别地，对于所有 $p \geq 10$，$R'_7 < 2.741$、R'_8、$R'_9 < 2.60$ 和 $R'_p < 2.34$ 。

证明。引理 3.4 中的界 $d_7 < 0.013273$ 直接给出 $R'_6 < 2.78$。对于 $4 \leq p \leq 8$，引理 3.4 中对每个 d_{p+1} 的界都严格小于 $2.404/p^3 + 1.442/p^4 + 8.9/p^5$。

对于 $p \geq 9$，令 $y = 1/p$、$x = y/(1+y)$ 和 $B = 2Zy^3 + Ay^4 + 8.9y^5$。根据 (3.8)，只需验证 $B(1+B) > U(x)$。将 $x^{-5}[B(1+B) - P_4(x)]$ 展开为关于 y 的多项式，其前三个系数为

$$32W - 12Z + 8.9, \qquad 20Z + 10A + 44.5 + 4Z^2, \qquad 10Z + 10A + 89 + 20Z^2 + 4ZA,$$

分别超过 29、88 和 150，同时所有更高阶系数均为非负数。另一方面，(3.11)给出 $(1+y)\mathcal{U}(x) < 27 + 157y$。将差乘以 $1+y$ 后至少得到

$$2 - 40y + 238y^2 = 2(1-10y)^2 + 38y^2 > 0.$$

$p \geq 7$ 的具体数值界由 $A < 1.448$推出。 □

3.4. **与增加两条边的比较**。结合引理 2.5与推论 3.5，可解决所有多边形与 R_{p+2} 的比较问题，并以平衡间隙长度表示出明确的定量余量。

命题 3.6（与增加两条边的比较）。设 s_1、…、s_p 是简单多边形 P的平衡凸顶点间隙，并令 $m = \sum_{i=1}^{p} s_i^2$和 $f(s) = s^3/D(s) = \mathcal{H}(s)/s$。对于每个整数 $k \geq 3$，

$$d(P) - d(R_{k+2}) > \frac{1}{(k+1)^4} + f(m) - f(1/k).$$

特别地，$m \geq 1/k$推出 $J(P) < J(R_{k+2})$，且与凹顶点的数量无关。令 $k = p$ 和 $x = 1/p$，可得

$$d(P) - d(R_{p+2}) > \frac{1}{(p+1)^4} + \frac{x^2(3c + 2bx)}{D(x)^2} \sum_{i=1}^{p} (s_i - x)^2.$$

证明。由（2.9），有 $d(P) \geq f(m)$，因此第一条断言归结为证明：对于与多边形无关的量 $d_* = f(1/k)$，有 $d_* - d(R_{k+2}) > (k+1)^{-4}$。令 $y = 1/(k+1)$、$u = 2 - 2W/Z$、$h = 1 + u$、$\ell = 1 - 2u$和 $A = 8W - 6Z$。写作 $1/k = y/(1-y)$，得到 $d_* = 2Zy^3/L$，其中

$$L = 1 - hy - \ell y^2 - \Big(\frac{2\zeta(6)}{Z} + u - 1\Big) y^3 < 1 - hy - \ell y^2.$$

根据推论 3.5（应用于 $p = k+1 \geq 4$），只需验证 $[2Z + (A+1)y + 8.9y^2]L < 2Z$。从 $2Z$ 中减去左端项，除以 y，应用 $L < 1 - hy - \ell y^2$，并去掉所得的正三次项后，得到下界

$$12(Z - W) - 1 + \big[2Z\ell + (A+1)h - 8.9\big]y + \big[(A+1)\ell + 8.9h\big]y^2 > 0.43 - 4.54y + 12.1y^2 > 0,$$

其中，数值界由 $1.202 < Z < 1.2022$ 和 $1.082 < W < 1.0825$ 推出（它们给出 $0.198 < u < 0.200$ 和 $A > 1.442$），且最后一个二次式的判别式为负。这就证明了 $d_* - d(R_{k+2}) > y^4$。

最后，$f(s) = s^3/D(s)$ 在 $(0,\ 1)$ 上递增且为凸函数，因为 D 为正且为凹函数（引理 2.5）。用其在 $x = 1/p$处的切线从下方估计 $f(m) - f(x)$，该切线的斜率为

$$f'(x) = \frac{x^2\big(3D(x) - xD'(x)\big)}{D(x)^2} = \frac{x^2(3c + 2bx)}{D(x)^2},$$

并注意到 $m - x = \sum_{i=1}^{p} (s_i - x)^2$，即可得到最后一个不等式。 □

作为示例，对于任意 $p \geq 4$，单一的离散条件 $\sum_{i=1}^{p} (s_i - 1/p)^2 \geq 1/[p(p-1)]$ 已经迫使 $m \geq 1/(p-1)$ 成立，从而通过在命题 3.6 中取 $k = p-1$，无需使用任何关于优角的信息，即可得到 $d(P) > d(R_{p+1}) + p^{-4}$。

4. 凸多边形：整体比较与定量稳定性

本节证明，对于每个凸 p 边形（$p \ge 3$），尖锐比较 $J(Q) \le J(R_p)$ 成立，且等号成立时具有唯一性，同时证明定量稳定性定理（定理 1.3）。论证在物理空间中进行，而非在共形坐标中进行。首先，三次支撑函数恒等式与切向半条带修正给出一个先验几何预算，用于控制面积、支撑高度和边长。接下来，在 R_p 上的尖锐等变迹不等式控制了围绕 R_p 的具体盒中线性移植的正则特征场的能量-方差平衡。结合这些工具，可直接处理 $p \ge 10$，通过仿射拉回处理 $p = 3$，并借助显式的低模固定顶点调和场处理 $4 \le p \le 9$，随后便可在所有 $p \ge 3$ 中一致地推出定量稳定性。

4.1. 边界惯性与切向半条带试函数。 将凸 p边形Q 归一化为单位周长，并将其边界质心置于原点。设 $x = 1/p$, $H = 2|Q|$,$H_* = (x/2)\cot(\pi x)$，以及 $I = \int_{\partial Q} |X|^2\, ds$。在第 i 条边的外单位法向量与正向单位切向量标架 $(\nu_i,\ \tau_i)$ 中，我们将该边参数化为

$$X_i(t) = h_i \nu_i + (m_i + y_i t)\tau_i, \qquad -\frac{1}{2} \le t \le \frac{1}{2},$$

其中，y_i 是边长，$h_i > 0$ 是该边相对于原点的支撑高度，m_i 是其中点相对于垂足的有向位移。记作 $\mathbb{E}f = \sum_{i=1}^{p} y_i f_i$。散度定理给出 $\mathbb{E}h_i = H$，沿每条边积分则得到 $I = \mathbb{E}(h_i^2 + m_i^2 + y_i^2/12)$。对任意 $0 < j \le J(Q)$，取坐标场 X（其狄利克雷能量为 H，边界方差为I）代入 (1.1)，得到 $jI \le H$。多边形等周不等式给出 $H \le H_*$。

令 $u(\phi) = \max_{Z \in Q} Z \cdot (\cos\phi, \sin\phi)$ 为 Q 的支撑函数。在对应于一个顶点的每个法向方向开区间上，$u'' = -u$；而跨过一条边的边法向量时，u'从 $m_i - y_i/2$ 跃变为 $m_i + y_i/2$，因此 $\int_0^{2\pi} u(\phi)\, d\phi = \sum_i y_i = 1$。类似地，$u^2u' + \frac{2}{3}(u')^3$ 在边法向量之间的导数为 $-u^3$，并且跨过第 i 条边的边法向量时跃变 $\int_{m_i - y_i/2}^{m_i + y_i/2} (h_i^2 + 2t^2)\, dt$。对所有边求和可得三次惯性恒等式

$$2I - \mathbb{E}h_i^2 = \int_0^{2\pi} u(\phi)^3\, d\phi.$$

在第 i 个与第 $(i+1)$ 个边法向量之间，记外转角为 $2\theta_i \in (0, \pi)$（因此 $\sum_{i=1}^{p} \theta_i = \pi$），并将 $u = c_0 \cos t + d_0 \sin t$ 记为 $|t| \le \theta_i$。由端点值 h_i 和 h_{i+1}，可得 $w_i := \int_{-\theta_i}^{\theta_i} u\, dt = 2c_0 \sin\theta_i = (h_i + h_{i+1}) \tan\theta_i$ 以及 $2d_0 \sin\theta_i = h_{i+1} - h_i$。定义

$$k(t) := \frac{2\sin t}{\sqrt{1 - \frac{1}{3}\sin^2 t}}, \qquad k_i = k(\theta_i), \qquad K = \sum_{i=1}^{p} k_i, \qquad K_* = p\, k(\pi/p), \qquad z_i = \frac{w_i}{k_i}.$$

将 t 与 $-t$ 配对可得 $\int_{-\theta_i}^{\theta_i} u^3\, dt = w_i^3/k_i^2 + w_i(h_{i+1} - h_i)^2/4$。由于 $\sum_i k_i z_i = 1$ 和 $K_*^{-2} = H_*^2 + x^2/6$，围绕 $1/K$ 展开可得到非负的支撑函数惯性余项

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &:= 2I - \mathbb{E}h_i^2 - K_*^{-2} \\ &= \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{p} w_i (h_{i+1} - h_i)^2 + \sum_{i=1}^{p} k_i \Big(z_i - \frac{1}{K}\Big)^2 \Big(z_i + \frac{2}{K}\Big) + K^{-2} - K_*^{-2}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

注意，根据连续性，平角（$\theta_i = 0$）对两个求和均贡献为零。

为了解 $\mathcal{I}$ 如何控制外角，注意在 $[0, \pi/2]$ 上有

$$-k''(t) = \frac{4\sin^3 t}{3(1 - \frac{1}{3}\sin^2 t)^{5/2}} \ge \frac{32t^3}{3\pi^3}.$$

在关于 $b = \pi/p$的 k 中，对 $s \in [0,1]$使用 $b + s(t - b) \ge (1 - s)b$，并对 i 求和（其中 $\sum_i \theta_i = \pi$），得到 $K_* - K \ge \frac{32}{15p^3} \sum_{i=1}^{p} (\theta_i - \pi/p)^2$。由于 k 是凹函数——

又因 $k'(0)=2$，我们有 $K\le K_*\le 2\pi$，因此

$$\mathcal{I}\ge K^{-2}-K_*^{-2}\ge \frac{2(K_*-K)}{K_*^3}\ge \frac{8}{15\pi^3 p^3}\sum_{i=1}^{p}\Big(\theta_i-\frac{\pi}{p}\Big)^2. \tag{4.2}$$

将 (4.1) 改写为关于 $V_h:=\mathbb{E}(h_i-H)^2$ 可得

$$I=\frac{H^2+V_h+H_*^2+\mathcal{I}}{2}+\frac{x^2}{12}, \tag{4.3}$$

或者等价地，相对于正则边心距 H_*，

$$2H_*(H_*-H)+\mathcal{I}=\mathbb{E}\Big[(h_i-H_*)^2+2m_i^2+\frac{y_i^2-x^2}{6}\Big]. \tag{4.4}$$

我们还记录关于各个支撑高度和边中点的两个初等界。对于任意一条边，旋转并平移使其位于 $\{Y=0\}$ 上，并令 $Q\subset\{Y\ge 0\}$，再设$T=\max_Q Y$以及 $h=\mathbb{E}Y$（该边相对于形心的支撑高度）。连接最小高度点与最大高度点的两条边界弧均投影到 $[0,T]$ 上，且$ds\ge |dY|$，因此 $\mathbb{E}[Y(T-Y)]\ge 2\int_0^T u(T-u)\,du=T^3/3$。在 $T>0$上取 $hT-T^3/3$的最大值可得下方的上界，而将两个坐标试验函数与 (4.3) 结合则得到下界：对于每个 $0<\sigma\le J(Q)$，

$$\frac{2}{3}h^{3/2}-h^2\ge \operatorname{Var}(Y)\ge \frac{H_*^2+x^2/6}{2}+\frac{H^2}{2}-\frac{H}{2\sigma}\ge \frac{H_*^2+x^2/6}{2}-\frac{1}{8\sigma^2}. \tag{4.5}$$

对边 i 的底边应用相同的投影论证，可得 $y_i^3/6\le \operatorname{Var}(X)\le H/(2\sigma)$。接下来，以单位速度从长度为 y 的一条边的中点 P 开始对 ∂Q 参数化，并选取以形心为中心的坐标 $(X,\,Y)$，使 X 轴沿着 P 的方向。在 $X(0)=\int_0^1 (t-1/2)X'(t)\,dt$ 中，与 P 相邻的两条半边相互抵消，因为 X' 在那里为常数，所以对 $[y/2,1-y/2]$ 应用柯西–施瓦茨不等式，得到 $12|P|^2\le (1-y)^3\int_0^1 (X')^2\,dt$。格林公式和坐标试验函数给出 $|Q|^2=(\int_0^1 XY'\,dt)^2\le (|Q|/\sigma)\int_0^1 (Y')^2\,dt$。将其与 $(X')^2+(Y')^2=1$ 及 $H=2|Q|$ 结合，得到

$$24|P|^2\le (1-y)^3(2-\sigma H). \tag{4.6}$$

为使坐标试验函数 X 沿每条边在切向方向上更精确，引入奇调和半带状区域剖面

$$w(s,t):=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2}e^{-2\pi k s}\sin(2\pi k t),\qquad s>0,\quad |t|<\frac{1}{2},$$

该函数在侧向射线 $|t|=1/2$ 上为零。下文所有二重积分均取遍 $(0,\,\infty)\times(-1/2,\,1/2)$。由正交性可得

$$E_0:=2\iint w_s^2=2\iint w_t^2=\pi Z,$$

$$G_1:=\int_{-1/2}^{1/2} t w(0,t)\,dt=\frac{Z}{2\pi},\qquad G_2:=\int_{-1/2}^{1/2} w(0,t)^2\,dt=\frac{W}{2}.$$

为计算交叉矩 $2\iint t w_s w_t$，令 $A=w_t^2-w_s^2$ 和 $B=2w_s w_t$。调和性给出$B_s=-A_t$，而正交性给出 $\int_{-1/2}^{1/2} A(s,\,t)\,dt=0$，对每个 $s>0$ 均成立。由于 $w_s=0$ 在 $|t|=1/2$处且 w_t 关于 t为偶函数，分部积分得到 $\frac{d}{ds}\int tB\,dt=-w_t(s,\,1/2)^2$。从 ∞ 积分，然后在 $(0,\,\infty)$ 上积分，并令 $w_t(s,\,1/2)=2\pi\log(1-q)$，其中 $q=e^{-2\pi s}$，我们得到

$$2\iint t w_s w_t=\int_0^{\infty} s\,w_t(s,1/2)^2\,ds=\int_0^1 \frac{-\log q}{q}\log^2(1-q)\,dq=3W-\zeta(2)^2=G_2.$$

这里的积分等于欧拉贝塔恒等式 (3.10) 左端的 a^2b^2 系数的 -2 倍；将其右端记为 R，则 $\log R$ 中的每一项都可被 ab 整除，其中 $[ab]\log R=-\zeta(2)$，而根据欧拉伽马乘积，$[a^2b^2]\log R=-3W/2$，以及 $\zeta(2)^2=5W/2$。

在质心扇区 $X = rX_i(t)\,(0<r\le 1,\,|t|\le 1/2)$ 上，引入对数深度$u=-(h_i/y_i)\log r$，并针对缩放参数 $\gamma_i>0$ 定义 $W_i(X)=y_i\tau_i w(\gamma_i u,t)$，再将$W_i$ 延拓为零至其他扇区。由于 W_i 在侧向射线上消失且具有有限能量，$W_i\in H^1(Q;\mathbb{R}^2)$。记 E 和 V 为狄利克雷能量与弧长边界方差（以及相应的双线性极化）。支集互不相交且边界平均值为零，因此对于 E 和 V，场 W_i 两两正交。Green 恒等式与切向性给出$E(X,W_i)=0$，而 $V(X,W_i)=G_1y_i^3$，且 $V(W_i,W_i)=G_2y_i^3$。

令 $f(u,t)=w(\gamma_i u,t)$，则扇区雅可比行列式为 $|\det\partial_{(r,t)}X|=rh_iy_i$，在局部 (ν_i,τ_i) 坐标系中

$$\nabla t=\Big(-\frac{m_i+y_it}{rh_iy_i},\frac{1}{ry_i}\Big),\qquad \nabla u=\Big(-\frac{1}{ry_i},0\Big),$$

从而

$$E(W_i)=y_i^2\iint\left[f_t^2+\Big(f_u+\frac{m_i+y_it}{h_i}f_t\Big)^2\right]du\,dt.$$

关于 t 的两个奇函数项积分为零，而交叉矩对 G_2y_i/h_i 的贡献为 $E(W_i)/y_i^2$。对于 t 中的二次矩，初等估计 $t^2\le(1-\cos(2\pi t))/8$ 仅将 w_t 的相邻余弦模态耦合起来，从而得到

$$\frac{\iint t^2w_t^2}{\iint w_t^2}\le\frac{1}{8}\left(1+\frac{2}{Z}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j(j+1)(2j+1)}\right)<0.173,$$

其中，根据部分分式 $1/j+1/(j+1)-4/(2j+1)$，该和等于 $3-4\log 2$。因此，涉及 w_s^2 和 w_t^2 的项的上界为 $\frac{E_0}{2}[\gamma_i+(1+(m_i^2+0.173y_i^2)/h_i^2)/\gamma_i]$。对 $\gamma_i>0$ 进行优化可得

$$\frac{E(W_i)-jV(W_i)}{y_i^2}\le K_i:=E_0\sqrt{1+\frac{m_i^2+0.173y_i^2}{h_i^2}}+G_2y_i(h_i^{-1}-j).$$

对于任意 $0<j\le J(Q)$，代入 $X+\sum_{i=1}^p c_iW_i$ 可得，对所有实数 c_i，都有 $0\le H-jI+\sum_i(y_i^2K_ic_i^2-2jG_1y_i^3c_i)$；这迫使每个 $K_i>0$ 都成立，并且对 c_i 取最小值后，得到 $H-jI\ge j^2G_1^2\sum_{i=1}^p y_i^4/K_i$。

令 $s=H_*-H$、$b_i=y_i/x$、$k_i=K_i/E_0$、$\bar k=\mathbb{E}k_i$、$C_0=(Z/\pi)(j/(2\pi))^2x^3$，且 $D=H_*-j(H_*^2+x^2/12)$，再结合 (4.3) 和 $x\sum_i b_i=1$ 代入，便得到全局条带不等式

$$(1-jH_*)s+\frac{j}{2}(s^2+V_h+\mathcal{I})+C_0x\sum_{i=1}^{p}\Phi_{k_i}(b_i)\le D-C_0+C_0(\bar k-1),\tag{4.7}$$

其中 $\Phi_k(b):=b^4/k+bk-5b+3$。令 $\psi(b):=b^{5/2}-1-\frac{5}{2}(b-1)$，由算术-几何平均不等式可得 $\Phi_k(b)\ge 2\psi(b)$，而因式分解 $\psi(b)-\frac{3}{2}(b-1)^2=b(\sqrt{b}-1)^2(\sqrt{b}+1/2)$ 则推出 $\Phi_k(b)\ge 2\psi(b)\ge 3(b-1)^2$。

4.2. 等变迹不等式与扇区移植。 取 $p\ge 3$，将R_p 归一化为单位周长，并使中心位于原点，再调整方向，使一个外向边法向量指向正实轴。记 $x=1/p$, $H_*=(x/2)\cot(\pi x)$，以及 $j=J(R_p)$。若向量场 $Y\in H^1(R_p;\mathbb{R}^2)$（视为复值函数）满足 $Y(\omega z)=\omega Y(z)$ 且 $Y(\bar z)=Y(z)$，其中 $\omega=e^{2\pi i/p}$，则称其为等变。

引理 4.1（在 X 的能量正交补上的等变迹不等式）。在边心距为 h 的正p边形 R 上，设 $Y\in H^1(R;\mathbb{R}^2)$ 是一个非零等变向量场，且与坐标场 $X(z)=z$能量正交。令 $a=\tan(\pi/p)$。那么

$$\int_{\partial R}|Y|^2\,ds<h\,\frac{1+a^2}{2}\,E(Y).$$

此外，

$$\int_{\partial R}|Y|^2\,ds\le h\,\frac{a}{\pi}\mathcal{B}_*(a)\,E(Y)\le h\,\frac{a}{\pi}\mathcal{B}(a)\,E(Y),$$

其中 $\mathcal{B}(a)=1+\frac{3}{5}a(1+a)$ 以及 $\mathcal{B}_*(a)$ 在下文的 (4.8) 中定义。

证明。进行缩放，使得 $h=1$，将右边 $\{1+it$ 上的均匀平均记为 $|t|\le a\}$，用括号 $[\cdot]$表示，并写作 $d(U)=E(U)/|\partial R|$。由于 $E(Y,X)=0$ 且 Y是等变的，格林公式和反射对称性给出 $[Y]=0$。因此，边缘原函数 $P(t):=\int_{-a}^{t} Y(1+is)\,ds$ 在 $t=\pm a$处取值为零。将 P延拓到右侧扇区，定义为 $U(r(1+it))=rP(t)$，并通过旋转延拓到 R。对任意 $b\in\mathbb{C}$，由斯托克斯定理和 $[Y]=0$ 可得

$$[|Y|^2]=|\partial R|^{-1}\int_R dY\wedge d\overline{(U-bX)}\le\sqrt{d(Y)\,d(U-bX)},$$

通过密度从光滑场延拓到 $H^1(R;\mathbb{R}^2)$。对 $[-a,a]$ 进行径向积分和分部积分可得

$$2d(U)=\big[|P-tY|^2+|Y|^2\big]=\big[(1+t^2)|Y|^2\big]+2\big[|P|^2\big].$$

由格林公式，U 与 X的复能量配对除以 $|\partial R|$后等于 $[P]$，而$d(X)=1$；因此，对 $b\in\mathbb{C}$取最小值会将 $[|P|^2]$ 替换为 $\mathsf{Var}\ P$。应用勒让德不等式 $2\,\mathsf{Var}\ P\le[(a^2-t^2)|P'|^2]$ 可得 $2\min_b d(U-bX)\le(1+a^2)[|Y|^2]$。（为验证勒让德不等式，写成 $4a^2\mathsf{Var}\ P=\int_{-a\le t<s\le a}|P(s)-P(t)|^2\,dt\,ds$，应用 $|P(s)-P(t)|^2\le(s-t)\int_t^s|P'(u)|^2\,du$，并注意到 $\int_{-a}^{u}\int_u^a(s-t)\,ds\,dt=a(a^2-u^2)$。）等号成立迫使 P'为常数，由端点条件可知 $P\equiv0$；由于任何边界迹为零的非零等变场都具有严格为正的能量，第一个不等式是严格的。

对于更精细的第二个界，在右边写上 $Y=f+ig$，并令 $c=[tg]$，于是由奇偶性可得 $[P]=-ic$。对 $U_\gamma(r(1+it))=r^\gamma K(t)$ 使用同样的斯托克斯估计，其中$K(t)=P(t)+ic(1+it)$，且 $\gamma=\pi/a>1$。径向积分得到 $2\gamma\,d(U_\gamma)=[|\gamma K-tK'|^2+|K'|^2]$。对 $t(|K|^2)'$分部积分并利用 $[t\Re P]=-[t^2f]/2$，我们得到

$$2\gamma\,d(U_\gamma)-2d(U_1)=(\gamma-1)\left[(\gamma+2)\big(\mathrm{Var}\,P+c[t^2f]\big)+\Big(\frac{(\gamma-1)a^2}{3}-1\Big)c^2\right].$$

在 $[0,a]$上，$\Re P$ 在两个端点处均为零，而 $\Im P+c$ 是偶函数且均值为零，因此由维尔廷格不等式可得 $\mathsf{Var}\ P\le(a/\pi)^2[|Y|^2]$。令 $u=[f^2]^{1/2}$、$v=\sqrt{3}\,|c|/a$ 和 $q=a^3/(3\sqrt{15})$，由柯西–施瓦茨不等式可得 $u^2+v^2\le[|Y|^2]$ 和 $|c[t^2f]|\le2quv$，因为 $[f]=0$ 且 $[(t^2-a^2/3)^2]=4a^4/45$。将此与负的 c^2 项结合，得到

$$q(2uv-h_0v^2)\le qR(u^2+v^2),\qquad h_0=\frac{\sqrt{15}(1-\pi a/3+a^2/3)}{\pi+2a},\qquad R=\frac{\sqrt{h_0^2+4}-h_0}{2},$$

由于 $R(R+h_0)=1$。代入斯托克斯不等式，得到第二个界，其中

$$\mathcal{B}_*(a):=1+\frac{a}{2\pi}+\frac{1-2/\pi^2}{2}a^2+R\,\frac{a(\pi-a)(\pi+2a)}{6\sqrt{15}}.\tag{4.8}$$

由于 $\pi a-a^2\le\pi^2/4<3$，我们有 $h_0>0$，因此 $R<1$；将 R替换为 1 后，a 和 a^2 的系数严格小于 $3/5$，且三次项为负，因此 $\mathcal{B}_*(a)\le\mathcal{B}(a)$。□

对于单位周长 R_p上的坐标场 X，我们有 $E(X)=H_*$ 以及 $V(X)=H_*^2+x^2/12$。展开余切级数和正切级数可得

$$\mathcal{L}:=\frac{2\pi V(X)}{E(X)}=\pi x\Big(\cot(\pi x)+\frac{1}{3}\tan(\pi x)\Big)=1+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{2(4^k-4)}{3}\zeta(2k)x^{2k}>1+8x^4.\tag{4.9}$$

在 X 的能量正交补上，引理 4.1 给出 $2\pi V(Y)/E(Y)\le x\mathcal{B}_*(a)$，因为 $H_*=x/(2a)$。将复旋转类中的任意场在反射 $Y(z)\mapsto Y(\bar z)$ 下分解为实部和虚部，仍与 X 正交，且两个二次型相加；因此，余维一极小极大原理将旋转类中的第二个方差特征值 λ_2 限制为不超过 $x\mathcal{B}_*(a)$。由于 $(\pi-a)(\pi+2a)\le9\pi^2/8$，我们有 $\mathcal{B}_*(a)<1+0.16a+0.4a^2+0.48aR$；对 $a\le3/4$ 使用 $h_0>0.3$（因此 $R<0.9$），对 $a\le1/2$ 使用 $h_0>0.5$（因此 $R<0.8$），并取 $a<0.73,\mathbf{0.484},0.33$ 在 $p=5,\mathbf{7},10$ 处，可得

$$\lambda_2<0.334\quad(p\ge5),\qquad\lambda_2<0.194\quad(p\ge7),\qquad\lambda_2<0.124\quad(p\ge10),\tag{4.10}$$

因为 x 和 $a=\tan(\pi x)$ 都随 p 增大而减小。取 $j=2\pi/(1+d_p)$ 时，每个与 X 能量正交的等变 Y 都满足

$$E(Y)-jV(Y)\ge \eta E(Y),\qquad \eta:=1-\frac{x\mathcal{B}_*(a)}{1+d_p},\tag{4.11}$$

其中 $\eta>0.64$ 取 $p\ge 5$，$\eta>0.79$ 取 $p\ge 7$，而 $\eta>0.872$ 取 $p\ge 10$。

对由 X 和 Y 构成的能量正交归一对取迹，也得到 ds

$$\frac{2\pi V(Y)}{E(Y)}\le 1+d_p+\lambda_2-\mathcal{L}<1+d_p,$$

因此，等变的第一特征线与 X 非平凡配对。令 U 为唯一的等变第一特征场，并通过 $E(U,X)=H_*$ 进行归一化。根据格林公式，$\int_{\partial R_p}U\cdot\nu\,ds=H_*$。在每个质心扇区的 (ν,τ) 坐标系中写作 $U=(u,w)$ 时，分量 u 和 w 在关于边平分线的反射下分别为偶函数和奇函数，其边平均值分别为 H_* 和 0。

扇区移植与校准。在一个单位周长的凸 p-边形 Q 上，设其边界质心位于原点，置 $a_i=h_i/H_*$、$b_i=y_i/x$ 和 $v_i=m_i/H_*$。在参考扇区与目标扇区的定向 (ν_i,τ_i) 坐标系中，定义仿射扇区映射 L_i 以及移植场 F，使得

$$L_i=\begin{pmatrix} a_i & 0\\ v_i & b_i\end{pmatrix},\qquad F(L_iZ)=L_iU(Z).$$

沿着从原点指向 R_p 的某个顶点的每条射线，反射对称性迫使 U 与该射线平行；由于相邻映射 L_i 在公共射线上一致，其迹相匹配，并且 $F\in H^1(Q;\mathbb{R}^2)$。由于 U 在 R_p 的每条边上的均值为 $(H_*,0)$，因此 Q 的第 i 条边上 F 的均值等于其中点 $h_i\nu_i+m_i\tau_i$，所以 F 在 ∂Q 上的全局边界平均值为零。

设 $G=U-X$ 和 $D=E(X)-jV(X)=H_*-j(H_*^2+x^2/12)>0$（等号成立将迫使 $\nu=jX$ 沿每条直边成立）。定义

$$e=\frac{E(G)}{D},\qquad r=\frac{jx^2}{12D},\qquad \tau=\frac{x^2}{12H_*^2}.$$

由于 $E(G,X)=0$，且特征值方程给出 $E(G)-jV(G)=D$，不等式（4.11）得到 $e\le 1/\eta$。令 X_0 和 Y_0 分别表示 $U=(u,w)$ 的法向分量和切向分量在 ∂R_p 上的弧长 L^2-范数的平方。归一化条件 $E(U,X)=H_*$ 给出 $j\int_{\partial R_p}G\cdot X\,ds=D$；由于 G 在每条边上的法向均值为零，其法向部分消失。展开 $U=X+G$ 并利用 $E(U)=H_*+E(G)$ 可得

$$\frac{jX_0}{D}=\frac{r}{\tau}+b_n,\qquad \frac{jY_0}{D}=r+2+b_t,\qquad b_n+b_t=e-1,\tag{4.12}$$

其中 b_n，$b_t\ge 0$ 分别是 G的法向分量和切向分量的边界范数平方的 j/D 倍。定义扇区积分导数矩

$$n=\frac{1}{D}\int_{R_p}u_t^2,\qquad k=\frac{1}{D}\int_{R_p}w_n^2,\qquad m=\frac{1}{D}\int_{R_p}\big[(u_n-w_t)^2-2u_tw_n\big].$$

根据 DG的各项，我们有 $n+k\le e$ 和 $m\le 2(e-n-k)+2\sqrt{nk}$。令 $C=j(\overline{X_0}-Y_0)+2D(k-n)$ 和 $T=jY_0-\tau C$。方程 (4.12) 给出

$$\frac{C}{D}\ge r(\tau^{-1}-1)-1-3e,\qquad \frac{T}{D}\ge 2+\tau(r+3-e-2k+2n).$$

在每条边上，记 $s=a-1$、$z=b-1$，以及

$$A=\frac{k}{a}+n\frac{a+2b}{b^2},\qquad B=\frac{m}{a}+n\frac{2a+v^2/a}{b^2}.$$

在每个扇区上进行变量替换可得

$$\begin{aligned}V(F)&=X_0\,\mathbb{E}(a^2+v^2)+Y_0\,\mathbb{E}b^2,\\ E(F)&=\mathbb{E}\big\{aE(U)+2D(k-n)(b-a)+D\big[A(s-z)^2+Bv^2\big]\big\}.\end{aligned}$$

为验证能量公式，应用 $|M|^2=(\operatorname{tr}\ M)^2-2\det\ M+(M_{21}-M_{12})^2$ 于 $M=L_i(DU)L_i^{-1}$，其斜对称差为 $[b^2w_n-(a^2+v^2)u_t+bv(u_n-w_t)]/(ab)$；乘以雅可比$ab$，利用奇偶性消去关于 t 的奇次项，并代入 $b^2/a-a=2(b-a)+(b-a)^2/a$ 和 $a^3/b^2-a=2(a-b)\ +(a+2b)(a-b)^2/b^2$，即可得到该恒等式。

令 $g_0=\mathbb{E}z=\mathbb{E}(z^2/b)$ 和 $\Delta=-\mathbb{E}s=1-H/H_*$。$jV(F)\ -E(F)$ 中的线性项等于 $-C\Delta+2(jY_0-Dk+Dn)g_0$。将 (4.4) 重写为 $\Delta=\mathbb{E}(s^2/2+v^2)\ +\tau(2g_0+\mathbb{E}z^2)\ -\mathcal{I}/(2H_*^2)$，并利用 $E(U)\ =H_*+eD$ with $e\ge n+k$，我们得到对于 $C\ge 0$:

$$\frac{jV(F)-E(F)}{D}\ge\frac{C\mathcal{I}}{2DH_*^2}+\mathbb{E}\big\{U_1s^2+V_1z^2-A(s-z)^2+(r+2-2k+2n-B)v^2\big\},\quad(4.13)$$

其中 $U_1=H_*/(2D)\ +(3n-k)/2$，且 $V_1=T/D+2(T/D-k+n)/b$。

引理 4.2 (扇区稳定性框)。设 R_p 的校准量满足 $C\ge 0$、$e\le E$、$n\le N$、$H_*/(2D)\ge S$、$r+2\ge R$ 和 $T/D\ge t:\ =2+\theta n$ 其中常数取自下表中相应的行，并且 Q 的每条边都满足 $a_i\in[a_-,a_+]$、$b_i\in[b_-,b_+]$ 和 $v_i^2\le u(a_i)$:

p	S	E	N	R	θ	$[a_-,a_+]$	$[b_-,b_+]$	$u(a)$
$5,6$	14.5	1.57	1.57	6.2	3/5	$[0.84,1.16]$	$[11/15,19/15]$	$1/16$
$7,\ 8,\ 9$	49	1.266	1.266	9	0	$[0.84,1.16]$	$[19/36,53/36]$	$1/16$
≥ 10	173	1.15	0.185	14	0	$[0.69,1.35]$	$[1/4,7/4]$	$1.82-a^2$

于是，移植的正则特征场 F 满足

$$jV(F)-E(F)\ge\frac{C\mathcal{I}}{2H_*^2}+\frac{1}{4000}\,\mathbb{E}\big[H_*(a_i-1)^2+jx^2v_i^2+D(b_i-1)^2\big].\qquad(4.14)$$

证明。记 $s=a-1$、$z=b-1$ 和 $V=t+2(t-k+n)/b$。在（4.13）中，表达式 $U_1s^2+Vz^2-A(s-z)^2$ 随 k 减小，因此我们用其上界 $E-n$ 替换 k。令 $y=1/b$，则有$A\le f:\ =k/a_-+n(2y+a_+y^2)$。对于固定的（$s$，$z$），表达式 $0.96(U_1s^2+Vz^2)\ -f(s-z)^2$ 分别关于 n 为仿射函数、关于 y 为凹函数，因此只要它在四个角点处均非负，它在 $[0,N]\times[1/b_+,1/b_-]$ 上就非负。由加权柯西–施瓦茨不等式，角点条件为$f(1/U_1+1/V)\ \le 0.96$。在 $n=0$ 和 $n=N$ 处分别取 $b\in\{b_-,b_+\}$ 的较大值，可得三行中的上界分别为（0.84，0.96）、（0.54，0.91）和（0.58，0.63）。例如，在最紧的角点（第一行中的 $n=N$ 和 $b=b_-$）处，有 $U_1>16.85$、$f<7.68$ 和 $V>15.24$。因此，每一行中至少保留 $0.04(U_1s^2+Vz^2)$。

对于 v^2 的剪切系数，令 $M=\max(2,2/a)$ 和 $X=(2a+u(a)/a)/b_-^2-2$。利用$m\le 2(E-n)+2\sqrt{n(E-n)}$ 和杨氏不等式 $2\sqrt{n(E-n)}/a\le\frac{7}{5}(E-n)\ +\frac{5}{7a^2}n$，从 $r+2$ 得到的降幅至多为

$$M(E-n)+\frac{2\sqrt{n(E-n)}}{a}+Xn\le\Big(M+\frac{7}{5}\Big)(E-n)+\Big(X+\frac{5}{7a^2}\Big)n.$$

第一行中，$M<2.39$、$X<2.46$ 和 $5/(7a^2)\ <1.02$，损失不超过 $3.79E$。第二行中，$M+7/5<3.79$，且凸函数 $X+5/(7a^2)$ 的端点值分别低于 5.32 和 7.06，因此损失低于 $7.06E$。第三行中，$M<2.90$、$X<51.3$，且$5/(7a^2)\ <1.51$，因此损失至多为 $4.30(0.965)+52.81(0.185)\ <13.93$。三行中的损失均低于 $0.996R$，因此剪切系数至少为 $0.004(r+2)\ \ge 0.004r$。

最后，$U_1\ge H_*/(2D)\ -E/2$ 和 $V>2$；两边乘以 D，得到（4.14）。 □

4.3. 至少有十条边的凸多边形。将条带预算（4.7）与引理 4.2 结合起来，即可解决所有边数不少于十的凸多边形情形。

定理 4.3。每个满足 $p\ge 10$ 的凸 p 边形 Q 都满足 $J(Q)\ \le J(R_p)$；当且仅当 Q 与 R_p 相似时，等号成立。

证明。令 $x=1/p\le 1/10$, $d=d(R_p)$, $j=2\pi/(1+d)$, $H_*=(x/2)$余切(πx), $D=H_*-j(H_*^2+x^2/12)$, $\gamma_0=W/(2\pi Z)\ <0.144$，以及 $C_\infty=Z/\pi\in(0.382,0.383)$。由于 $U(x)/x^3$具有非负的泰勒系数，且引理 3.4 给出 $U(1/10)\ <0.003668$，因此我们有 $d\le$

$U(x)<3.668x^3<3.684x^3$。由 $h=2\pi H_*$，余切展开给出 $h\le 1-2\zeta(2)x^2$ 和 $h^2-h+\pi^2x^2/3\ge 8Wx^4+12\zeta(6)x^6$。将 (3.11) 代入 $2\pi(1+d)D=hd-(h^2-h+\pi^2x^2/3)$ 得到

$$2\pi D<2Zx^3+x^5\big[27-4\zeta(2)Z+\big(130-16\zeta(2)W-12\zeta(6)\big)x\big].$$

The bracket is at most $19.1+90x\le 28.1$ hence $D<x^3(C_\infty+4.48x^2)<0.428\,x^3$. 由条带试算得到全局先验界。假设 $J(Q)\ge j$，并写作 $H=2|Q|$, $s=H_*-H$, $z=jH$, $z_*=jH_*$, $\kappa=1-z_*$, $L=H/j-H^2$, $V_h=\mathbb{E}(h_i-H)^2$, $M_i=m_i^2+0.173y_i^2$，以及 $C_0=C_\infty(j/(2\pi))^2x^3$。由于根据余切级数，(4.3) 和 $I\le H/j$ 蕴含$2H/j\ge H^2+(2\pi)^{-2}$，因此

$$z\ge 1-\sqrt{1-(j/(2\pi))^2}\ge 1-\sqrt{2d}>0.913,\qquad H>0.14.$$

每个支撑高度都满足 $h_i\ge H/2>0.07$：在从边 i量起的向内坐标 $Y\ge 0$ 中，格林公式给出 $|Q|=\int_{\partial Q}Y\nu_Y\,ds\le\int_{\partial Q}Y\,ds=h_i$。我们还有 $L=H(1-z)/j<0.0024$。

坐标界 $V_h+\mathbb{E}(m_i^2+y_i^2/12)\le L$ 蕴含 $\mathbb{E}M_i\le 2.076L$ 和 $\mathbb{E}y_i^2\le 12L$。在 $k_i=K_i/E_0$ 中将每个 h_i 替换为 H，并利用 $\sqrt{1+t}\le 1+t/2$，可将所得平均条带代价的上界估计为

$$1+(1-z)\left[\frac{2.076}{2z}+\gamma_0\sqrt{\frac{12(1-z)}{z}}\right]<1+1.30(1-z).$$

由于 $t\mapsto\sqrt{1+t^2}$ 是 1-利普希茨的，恢复各个高度 $h_i\ge 0.07$ 至多会增加

$$\frac{(\sqrt{2.076}+\gamma_0\sqrt{12})\sqrt{LV_h}}{(0.14)(0.07)}<9.8\sqrt{V_h}.$$

由余切级数和 $d<3.684x^3$，可得 $3.28x^2<\kappa<3.71x^2$ 和 $H_*>0.1538$。将 $1-z=\kappa+js$ 和 $9.8C_0\sqrt{V_h}\le jV_h/4+9.8^2C_0^2/j$ 代入 (4.7)，得到统一预算

$$2.84x^2s+\frac{j}{4}V_h+C_0x\sum_{i=1}^{p}\Phi_{k_i}(b_i)\le x^5(4.48+1.85+5.10x)<6.85x^5,\tag{4.15}$$

利用 $C_0>0.3796x^3$、$D-C_0<4.48x^5+2.83x^6$（由 $C_0=C_\infty x^3/(1+d)^2$ 和 $C_\infty>0.3825$ 得出）、$\kappa-1.30jC_0>2.84x^2$、$1.30C_0\kappa<1.85x^5$和 $9.8^2C_0^2/j<2.27x^6$。

由（4.15）立即可读出 $s<2.64x^3\le 0.264x^2$ 和 $V_h<4.79x^5\le 0.479x^4$。如果某条边满足 $|b_i-1|\ge 3/4$, 那么 $\psi(b_i)\ge 29/32$, 因此该单条边对（4.15）的贡献将超过0.7592（$29/32$）$x^4>6.85x^5$，这就产生了矛盾。因此，对于每个 i都有 $y_i>x/4$，且$|h_i-H|\le\sqrt{V_h}/y_i<0.439x$。对于每个边中点 P_i，将（4.6）与 $\sigma=j$ 结合可得$24|P_i|^2<1$，因为 $2-jH=1+\kappa+js<1+5.38x^2<1+3x/4\le(1-x/4)^{-3}$。由于$a_i^2+v_i^2=|P_i|^2/H_*^2$且 $H_*>0.1538$，每条边都位于盒

$$\frac14<b_i<\frac74,\qquad 0.69<a_i<1.35,\qquad a_i^2+v_i^2<1.82.\tag{4.16}$$

精确特征场的应用。由(4.11)可得 $e<1/0.872<1.15$，而 $D<0.428x^3$得到 $r>12$ 和 $H_*/(2D)>173$。为界定导数矩 $n=D^{-1}\int_{R_p}u_t^2$，令 U_s为 X 上的坐标场 R_p 加上第4.1小节中的最优奇条带修正。由于该修正纯粹沿切向，$E(U_s-U,\ X)=0$，且 U_s的法向分量在每个扇区内的切向导数为零。正规条带代价满足 $K_t=\sqrt{1+0.173x^2/H_*^2}+\gamma_0x\kappa/H_*<1+5.64x^2<1.057$。对 U_s-U应用特征值方程和(4.11)可得

$$\eta nD\le\eta E(U_s-U)\le E(U_s)-jV(U_s)\le D-\frac{C_0}{K_t}<(1-0.839)D,$$

因为 0．839(0．428)(1．057) <0.3796; 因此 $n<0.161/0.872<0.185$。

校准界给出 $C>0$ 和 $T/D\ge 2$，因此 (4.16) 和谱常数满足引理 4.2 的 $p\ge 10$行。由于 $J(Q)\ge j$意味着 $jV(F)-E(F)\le 0$，不等式 (4.14) 迫使

$(a_i,\ b_i,\ v_i) = (1,\ 1,\ 0)$ 对每条边都成立。因此 $H = H_*$，而多边形等周不等式中的等号成立迫使 $Q \sim R_p$。□

4.4. 三角形。 在转向 $4 \le p \le 9$ 之前，我们利用引理 4.1 和从等边三角形出发的仿射拉回，直接处理三角形。

定理 4.4。 每个三角形 P 都满足 $J(P) \le J(R_3)$，当且仅当 P 是等边三角形时等号成立。更准确地说，若 $P = L(T)$ 对于等边三角形 T 和一个线性部分的奇异值比为 $r \in (0,1]$，的仿射映射 L，则 $J(R_3) - J(P) \ge c(1-r)$，其中 $c > 0$ 为绝对常数。

证明。取参考等边三角形 T，其顶点为 $-2, -2\omega, -2\omega^2$，其中 $\omega = e^{2\pi i/3}$。它的右边位于 $\{x = 1\}$ 上，面积为 $|T| = 3\sqrt{3}$，周长为 $|\partial T| = 6\sqrt{3} = 2|T|$。记 $D = E/|\partial T|$ 为归一化狄利克雷内积，B 为弧长边界内积，$[\cdot]$ 为右边 $\{1 + iy$ 上的均匀平均：$|y| \le \sqrt{3}\}$。令 $Z(X) = X$，$K(Z) = -\bar{Z}^2/2$，并令 $\lambda = 1/\sigma$，其中 $\sigma = \sigma_1(T)$。

在右边上，$K = (y^2-1)/2 + iy$ 和 $\partial_\nu K = Z - 2$。由于 $[y^2] = 1$，格林公式使 Z 和 K 关于 D正交归一。对 $s \in \mathbb{R}$ 检验 $Z + sK$ 并利用 $[y^4] = 9/5$，得到

$$\lambda(1+s^2) \ge B(Z+sK, Z+sK) = 1 + (1+s)^2 + \frac{s^2}{5}.$$

消去 $s^2/5$ 并取判别式，得到 $(\lambda-2)(\lambda-1) \ge 1$，因此 $\lambda > 2$ 且 $(\lambda-1)^2 \ge \lambda$。令 V 为 T的一个等变第一特征场。根据引理 4.1，V 与 Z的配对非零；将 V归一化，使其满足 $D(V,\ Z) = [V] = 1$。记 $W = V - Z \ne 0$（因为 Z 不是第一特征场），特征值方程和引理 4.1（其中 $(1 + \tan^2(\pi/3))/2 = 2$）给出

$$(\lambda - 2)\big(D(V,V) - 2\big) = B(W,W) - 2D(W,W) < 0,$$

因此 $D(V,\ V) < 2$。

在相似变换意义下，写作 $P = L(T)$，其中 L 的线性部分的奇异值为 1 和$r \in (0,1]$，长轴为 $e^{i\gamma}$。令 $Y = (1-r)Z + rV$。由 $B(V,\ Z) = \lambda$和 $[V] = 1$，我们得到$[y\Im V] = \lambda - 1$，从而由柯西–施瓦茨不等式可得 $2[(\Im V)^2] \ge 2(\lambda-1)^2 \ge 2\lambda > \lambda D(V,\ V) = [|V|^2]$。由反射对称性，$[V^2] = [(\Re V)^2 - (\Im V)^2] < 0$，而 $[ZV] = 2 - \lambda < 0$ 和 $[Z^2] = 0$；展开平方后因此得到 $[Y^2] \le 0$。

设 s_1、s_2、s_3 分别为单位切向量在 L 下映射到T的三条边后的长度，令 $w_i = s_i / \sum_k s_k$，并令 $\xi = \sum_{i=1}^3 w_i \nu_i$ 表示 T 的外单位法向量 ν_i。由于 $c_i := \cos(2 \arg \nu_i - 2\gamma)$ 满足 $\sum_i c_i = 0$，且 $s_i^2 = (1+r^2) - (1-r^2)c_i)/2$随 c_i递减，我们有$\sum_i w_i c_i \le 0$。因此，通过 L^{-1} 迁移标量函数 $\Re(e^{-i\gamma}Y)$，其边界均方值由 $B_r := [|Y|^2]/2$改变了 $-\frac{1}{2}[Y^2] \sum_i w_i c_i \ge 0$。由于 $[Y] = 1$，它在 ∂P上的边界平均值为 $\Re(e^{-i\gamma}\xi)$，所以其在 ∂P上的方差至少为 $B_r - |\xi|^2$。从每个 s_i 中减去 $\{s_1, s_2, s_3\}$ 的中位数不会改变 $\sum_i s_i \nu_i$，并将其模控制在 $\max s_i - \min s_i \le 1 - r$以内；结合 $\sum_i s_i \ge \sum_i s_i^2 = \frac{3}{2}(1+r^2)$，得到 $|\xi| \le \frac{2}{3}(1-r)$。

令 $x_\gamma = \Re(e^{-i\gamma}Z)$，并令 $g = \Re(e^{-i\gamma}(V - Z))$。由于 g 在 T的每条边上均值为零，我们有 $\int_T \nabla g = 0$；另一方面，旋转对称性和 $|\partial T| = 2|T|$ 给出 $|T|^{-1}\int_T |\nabla g|^2 = D(V,\ V) - 1$。通过 L^{-1} 将 $x_\gamma + rg$ 推前至 P，得到一个试探函数，其在 P 上的狄利克雷能量至多为 $r|T|D(V,\ V)$（交叉项的积分为零，且 $\|rL^{-1}\| = 1$）。另一方面，$B(V,\ Z) = \lambda$ 给出 $2\sigma B_r = 2\sigma(1-r)^2 + 2r(1-r) + r^2 D(V,\ V)$。将能量界除以 $|T|$ 后从 2σ 乘以方差界的结果中减去，至少得到

$$2\sigma\big[(1-r)^2 - |\xi|^2\big] + r(1-r)\big(2 - D(V,V)\big) \ge (1-r)\min\Big\{\frac{10\sigma}{9},\ 2 - D(V,V)\Big\}.$$

特别地，试探函数的方差严格为正，并且由于其方差具有一致上界，且 $2\sigma|T| = J(T)$，由变分原理可得 $J(T) - J(P) \ge c(1-r)$，且仅当 $r = 1$ 时等号成立。□

4.5. 边数为四至九的凸多边形。 对于 $4 \le p \le 9$，我们在 R_p 上构造显式的光滑等变场，使其固定各顶点，从而得到一种简单的扇区移植方法，适用于整个凸 p边形类。

固定顶点移植框架。将正 p边形 R_p 缩放至单位边长，并令 $s=\frac{1}{2}\cot(\pi/p)$ 为其边心距。设 U 为 R_p 上的光滑等变向量场，且固定所有顶点，因此沿每条顶点射线 $U(rV)=rc(r)V$，其中共有一个实值轮廓函数 $c(r)$，满足$c(1)=1$；令 $a(r)=(rc(r))'$。将右边上的 $Z=s+it\,(|t|\le 1/2)$ 记作……，把均匀的t平均记为 $[\cdot]$，把扇形径向平均记为 $\langle f\rangle=\int_0^1[f]\,r\,dr$。定义这些矩

$$\alpha=\langle|U_y-ia|^2\rangle,\qquad \beta=s^2\langle|U_x-a|^2\rangle,$$
$$n=s-[\Re U(Z)],\qquad k_0=[|U(Z)-s|^2],\qquad M=[|U(Z)|^2],$$

其中导数在 rZ 处取值。由于 $E(U)$ 具有尺度不变性，且 $\mathrm{Var}(U)=M$，U 的周长归一化瑞利商为 $J_0=E(U)/M$。

在一个周长为单位、边界质心位于原点的凸 p 边形 Q 上，令 $x=1/p$、$H_*=sx$、$w=h-H_*$、$d=y-x$ 和 $\Theta=1+\alpha-\beta/s^2$。在质心扇区 $X=r\nu[h+i(m+yt)]$, 上定义移植场

$$F(X)=\nu\big\{yU(rZ)+rc(r)(h-sy+im)\big\}.$$

在每条顶点射线上，$F(X)$ 化为 $c(r)X$，因此相邻扇区可以连续拼接。在该边的局部 (ν,τ) 坐标系中，F 的切向导数和法向导数分别为 U_y 和 $a+[sy(U_x-a)+m(ia-U_y)]/h$。反射奇偶性消去了关于 m 的线性项，而 $[U_y]=ic(r)$ 给出 $\langle a^2+|U_y|^2\rangle-\alpha=2\langle ac\rangle=1$。对面积元 $rhy\,dr\,dt$ 积分表明，$E(F)$ 等于 $(1+\alpha)H+\mathbb{E}[(\alpha m^2+\beta y^2)/h]$ 加上 $\mathbb{E}y$ 的一个常数倍。将 $y^2/h=2y/s-h/s^2+(d-w/s)^2/h$ 重写，并在 $Q=R_p$ 上校准 $\mathbb{E}y$ 的系数（其中 $F(X)=xU(X/x)$ 的能量为 $x^2E(U)=J_0x^2M$，而 $H=sx$ 和 $\mathbb{E}y=x$），确定该系数为 $J_0xM-s\Theta$。在边界上，F 的边平均值为 $\nu(h+im-ny)$，且 $\mathbb{E}\nu(h+im)=\mathbb{E}\nu=0$。因此

$$E(F)=\Theta H+(J_0xM-s\Theta)\mathbb{E}y+\mathbb{E}\left[\frac{\alpha m^2+\beta(d-w/s)^2}{h}\right],$$
$$V(F)=\mathbb{E}\big[h^2+m^2-2nyh+k_0y^2\big]-n^2|\mathbb{E}(d\nu)|^2.$$

当 $U=P+Q$ 为调和函数且具有全纯的 P，Q 在 0 处为零时，在顶点 $v=s+i/2$ 处记 $P(rv)=vf(r)$ 以及 $Q(rv)=\bar v g(r)$。等变性迫使 f 和 g 为实数，并满足$f(1)+g(1)=1$，于是扇形矩可化简为

$$\begin{aligned}\alpha&=\frac{E(U)}{2ps}-1+\int_0^1 r(f'^2+g'^2)\,dr+2\int_0^1 f'g'\,dr,\\ \frac{\beta}{s^2}-\alpha&=2g(1)^2+4\int_0^1(1-r)f''g\,dr.\end{aligned}\tag{4.17}$$

为验证 (4.17)，注意到沿边段积分可得 $[\Re U_x]=(f-g)/r$ 和$[\Im U_y]=(f+g)/r$，而沿同一边段取 $P'Q'$ 的原函数可得 $r[\Re(P'Q')]=2\Im\int_0^r vP'(uv)Q'(uv)\,du=-\int_0^r f'g'\,du$。因此 $\langle|U_x|^2-|U_y|^2\rangle=-4\int_0^1(1-r)f'g'\,dr$，而$\langle|U_x|^2+|U_y|^2\rangle=E(U)/(ps)$；将定义中的正方形用 $a=f'+g'$ 展开并进行分部积分，即可得到 (4.17)。

现在令 $c_*=2J_0x(s-n)-\Theta$。假设每条边都满足 $h_i\ge h_0>0$，并选取 $B\ge 0$使得 $c_*\le 2H_*B$。利用 $M=s^2-2sn+k_0$，$J_0V(F)-E(F)$ 的中心化线性项为 $-c_*(H_*-H)$ 和 $(J_0xM-sc_*)\mathbb{E}d$。应用 $|\mathbb{E}(d\nu)|^2\le\mathbb{E}d^2$、$\mathbb{E}d=\sum_i d_i^2=\mathbb{E}(d^2/y)$ 和 (4.4)，得到

$$J_0V(F)-E(F)\ge\mathbb{E}\Big[Aw^2+2Lwd+\Big(C+\frac{D_0}{y}\Big)d^2+Gm^2\Big],\tag{4.18}$$

其中

$$A=J_0-B-\frac{\beta}{s^2h_0},\qquad L=-J_0n+\frac{\beta}{sh_0},\qquad G=J_0-2B-\frac{\alpha}{h_0},$$
$$C=J_0(k_0-n^2)-\frac{B}{6}-\frac{\beta}{h_0},\qquad D_0=J_0xM-sc_*-\frac{Bx}{3}.$$

因为对于每个单位周长的凸多边形，配方表明，只要 $A > t$ 和 $D_0 \geq Y \geq 0$,

$$(A-t)\big[C+2(D_0-Y)\big] \geq L^2 \implies J_0 V(F) - E(F) \geq t\mathbb{E}w^2 + G\mathbb{E}m^2 + Y\sum_{i=1}^{p} d_i^2. \tag{4.19}$$

凸四边形。将 (4.18) 直接应用于正方形的精确第一特征场，可得到凸四边形的刚性和二次稳定性。

命题 4.5（凸四边形）。每个凸四边形 Q 都满足 $J(Q) \leq J(R_4)$，当且仅当 Q 为正方形时等号成立。此外，若 Q 具有单位周长且 $J(Q) \geq 5.5$，则移植的方形特征场满足

$$J(R_4)V(F) - E(F) \geq \frac{1}{20}\,\mathbb{E}\big(w^2 + d^2 + m^2\big). \tag{4.20}$$

证明。将 Q 归一化为单位周长，并在单位边长参考正方形 $[-1/2,1/2]^2$ ($s = 1/2$) 上考虑向量场

$$U(z) = \kappa\big(\Re\sin(2\tau z) + i\Im\sinh(2\tau z)\big), \qquad \tan\tau\tanh\tau = 1, \quad \kappa = (2\sin\tau\cosh\tau)^{-1}.$$

根据引理 3.3，U 的两个分量都是 R_4的第一特征函数。由于 U 是等变的，并且固定全部四个顶点，因此 (4.18) 可取 $J_0 = j = J(R_4)$ 应用。

令 $t = \tanh\tau = \cot\tau$，于是 $j = 8\tau t$和 $\kappa^2 = (1-t^4)/4$。在右边 $z = (1+iv)/2 (|v| \leq 1)$,

$$U(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{\cosh(\tau v)}{\cosh\tau} + i\frac{\sin(\tau v)}{\sin\tau}\right),$$

从而得到 $n = (1-t/\tau)/2$ 以及 $4[|U|^2] = \frac{1}{2}(\operatorname{sech}^2\tau + \csc^2\tau) + (\tanh\tau - \cot\tau)/(2\tau) = 1$，因此 $M = 1/4$ 和 $k_0 = n$。在（4.17）中，全纯部分为 $2P = \kappa(\sin + \sinh)(2\tau z)$ 和$2Q = \kappa(\sin - \sinh)(2\tau z)$, 所以 $f'' = -2\tau^2 g$、$g'' = 2\tau^2 f$以及 $f'g' = \tau^2(f^2 - g^2)$。式（4.17）中的积分具有精确原函数

$$(f^2+g^2)'' = 2(f'^2 + g'^2), \qquad (fg)'' = 4f'g', \qquad \left(\frac{f'^2+g'^2}{2\tau^2} - fg\right)'' = 8\tau^2 g^2.$$

利用（f'，g'）=（$2\kappa\tau$，0）在 $r = 0$ 处的结果，再结合（f，g）=（（$1+t^2$）/2，（$1-t^2$）/2）以及 $f' = g' = \tau t$在 $r = 1$ 处的结果，可得

$$\alpha = \frac{j - 5 - t^4}{4}, \qquad 4\beta = \frac{j}{4} - 2t^2 - \frac{t^4}{2}, \qquad c_* = \kappa^2.$$

由引理 3.3，这些满足 $5.5 < j < 5.52$, $0.10 < n < 0.12$, $\kappa^2 < 0.18$, $\alpha < 0.06$，且$4\beta = 2t(\tau - t) - t^4/2 < 0.16$。

假设 $J(Q) \geq 5.5$。不等式 (4.5) 给出 $(2/3)h_i^{3/2} - h_i^2 \geq 5/384 - 1/242 > 0.00888$，因此每条边上都有 $h_i > 0.08$。在 (4.18) 中取 $h_0 = 0.08$ 和 $B = 3/4$（因 $c_* = \kappa^2 < 2H_*B = 3/16$，故该式适用），我们得到 $\beta/h_0 < 1/2$, $jn(1-n) > 0.495$，以及 $D_0 = j/16 - \kappa^2/2 - B/12 > 0.191$，从而

$$A > \frac{11}{4}, \qquad |L| < \frac{2}{3}, \qquad C + 2D_0 > \frac{1}{4}, \qquad G > 3.$$

应用 (4.19)，取 $t = 1/20$ 和 $Y = 1/40$（因为 $(11/4 - 1/20)(1/4 - 1/20) > 4/9$），并利用$\sum_i d_i^2 \geq 2\mathbb{E}d_i^2$，即可得到 (4.20)。特别地，$J(Q) \geq J(R_4)$ 会迫使每条边上都有 $w = d = m = 0$，因此 $H = H_*$，且 Q 是一个正方形。□

边数为五至九的凸多边形。对于 $5 \leq m \leq 9$，我们首先在 R_m 上构造一个显式的三模态调和场，其瑞利商对 $J(R_m)$ 的近似足够精确，从而将任何竞争者限制在引理 4.2 的稳定性盒内。

引理 4.6 (三模态调和参考场)。 记 $j_m = J(R_m)$。对于每个 $5 \le m \le 9$，存在一个光滑的等变调和场 W，它在 R_m 上固定各顶点，且其归一化的^瑞利商 j 满足

$$0 \le \widehat{j} - j_m < \begin{cases} 0.0062 & (m=5),\\ 0.004 & (m=6,7),\\ 0.0027 & (m=8),\\ 0.0023 & (m=9), \end{cases} \qquad j_5 > 5.9725.$$

证明。 将 R_m 归一化为单位边长，并令 $u = \sin(\pi/m)$、 $c = \cos(\pi/m)$、 $R = 1/(2u)$、$s = Rc$、$h = m-1$ 以及 $l = m+1$。结合 $z = X/R$ 和 $g = 1 + (P-1)t$，定义

$$W(X) = \frac{R}{g}\big(z - Pt\bar{z}^{h} + tz^{l}\big),$$

其中，参数 (P<style id="2">， t) 分别取为：对于 $m=5$ 取 (4， $3/80$)，对于 $m=6$ 取 ($14/5$， $1/32$)，对于 $m=7$ 取 (3，0。019)，对于 $m=8$ 取 ($5/2$，0。016)，对于 $m=9$ 取 (2，0。014)。在每个顶点 V 处，每个非线性单项式除以 z 等于 -1，因此径向迹在所有顶点射线上保持一致，并且$W(V) = V$。在边 $z = c + iuv$ ($|v| \le 1$) 上，记均匀的 v-平均为 $[\cdot]$，对z^k 积分并对 $v(c^2 + u^2v^2)^k$ 求导，得到

$$[z^k] = \frac{\sin((k+1)\pi/m)}{(k+1)u}, \qquad L_k := [|z|^{2k}] = \frac{1 + 2kc^2 L_{k-1}}{2k+1}, \qquad L_0 = 1.$$

设定 $f = gW/R$、 $d_0 = g\partial_\nu W$、 $S = [|f|^2]$和 $cT = [\Re(d_0 \bar{f})],$，边平均值与 Green 恒等式给出（利用 $\bar{z} = 2c - z$ 求 $[|z|^2 z^m] = -1/(m+3) - 4c^2/[(m+2)(m+3)]$）

$$S = L_1 + t\left[\frac{2P}{m+1} - \frac{2}{m+3} - \frac{8c^2}{(m+2)(m+3)}\right] + t^2\Big(P^2 L_h + L_l - \frac{2P}{2m+1}\Big),$$

$$T = 1 - \frac{4t}{m+2} + t^2\big(P^2 h L_{m-2} + l L_m\big),$$

$$M = \frac{R^2 S}{g^2}, \qquad \widehat{j} = \frac{2mucT}{S}, \qquad \mu = s\left[1 - \frac{1 - 2t/(m+2)}{g}\right], \qquad v_* = M - (s-\mu)^2.$$

在 (4.17) 中，射线迹为 $f(r) = (r - tr^l)/g$和 $g(r) = Ptr^h/g$，其中 $E(W)/(2ms) = T/(2g^2)$。直接进行多项式积分可得

$$2g^2\alpha = T - 1 + \frac{4t}{m+2} + t^2\left[P^2(m-3) + m - 1 - \frac{4Pm(m-2)}{2m-1}\right],$$

$$g^2\Big(\frac{\beta}{s^2} - \alpha\Big) = 2t^2 P\Big(P - \frac{l}{2m-1}\Big).$$

除 c 外，只需 L_{m-2}，因为 L_{m-1}, L_m, L_{m+1} 均可由递推关系推出。由 $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$，可得 $2c_5 = \varphi$、$2c_6 = \sqrt{3}$ 和 $c_8^2 = (2+\sqrt{2})/4$，而在 $3.1415\overline{926}/m < \pi/m < 3.141\overline{5927}/m$ 处交替使用 Taylor 界可得 $0.81174 < c_7^2 < 0.81175$ 和 $0.883021 < c_9^2 < 0.883024$。由于递推关系在 c^2 和 L_{k-1} 两方面均递增，端点求值得到

$$L_3 = \frac{7 + 4\varphi}{28}, \quad L_4 = \frac{319}{630}, \quad L_5 \in (0.532, 0.536), \quad L_6 \in (0.558, 0.562), \quad L_7 \in (0.582, 0.586),$$

分别对应 $m = 5$、6、7、8、9，因此

$$\widehat{j} < 5.9787, \quad 6.138, \quad 6.204, \quad 6.235, \quad 6.252,$$

分别如此。例如，在 $m=5$ 处，界 $1.6180339 < \varphi < 1.6180340$ 和 $1.175570 < R^{-1} < 1.175571$ 给出 $80^2 S > 5215.67$ 和 $80^2 cT < 5305.11$；在 $m = 8$处， $S > 0.90820$ 和$T < 1.00099$ 满足 5。65686(1。00099) < 6.235(0。90820)。另一方面，引理 3.4 给出$j_m = 2\pi/(1 + d_m) > 5.9725$、6。134、6。20、6。2323、6。2497，对应 $m = 5$、.....、9。相减即可得到所述的五个界。□

定理 4.7。 对于 $5 \le m \le 9$，每个凸 m-边形 Q都满足 $J(Q) \le J(R_m)$；当且仅当 Q 与 R_m 相似时等号成立。

证明。令 $x=1/m$、 $j=J(R_m)$ 和 $H_*=sx$。对于一个单位周长的凸 m-边形 Q，令$0<\sigma\le \min\{J(Q)\ j\}$ 为一个测试参数（对于全局比较，我们取 $\sigma=j$）。将 (4.18) 应用于引理 4.6 中的调和场 W，其中 $J_0=\widehat{j}$、 $n=\mu$、 $k_0=k_*:=v_*+\mu^2$，且$B=c_*/(2H_*)>0$，注意到 $D_0=s\Theta+\widehat{j}x(k_*-s^2)-Bx/3$。利用 $I\le H/\sigma$、 $\mu>0$ 和 $y_i\le 1/2$， F 的边界方差满足

$$V(F)\le \frac{H_*}{\sigma}+\frac{1}{2}\Big[\frac{k_*-1/12}{2}-2\mu h_0\Big]_+=:\overline{V}(\sigma).$$

每当 (4.19) 与 $t=2$ 一起成立时，变分不等式 $\sigma V(F)\le E(F)$ 给出

$$2\mathbb{E}w^2+G\mathbb{E}m_i^2+Y\sum_{i=1}^{m}d_i^2\le(\widehat{j}-\sigma)\overline{V}(\sigma)=:\varepsilon_m(\sigma). \tag{4.21}$$

假设 $J(Q)\ge j$ 并令 $\sigma=j$。根据余切级数， $H_*^2+x^2/6\ge(2\pi)^{-2}$。由于 $j>5.9$且 $(2/3)(0.08)^{3/2}-(0.08)^2<1/(8\pi^2)-1/[8(5.9)^2]$, 不等式 (4.5) 蕴含了在每条边上都有 $h_i>0.08$。因此，对于所有 $5\le m\le 9$， $h_0=0.078$ 都是可容许的，并且对于 j 左邻域中的所有 σ，该结论仍然成立。

取 $Y=1/20$ 使得 $m=5$,6，并取 $Y=1/50$ 使得 $m=7,8,9$。直接代入引理 4.6 中的矩公式可得 $B>0$、 $D_0>Y$、 $A>3.30$，以及

$$|L|<0.114,\qquad C+2(D_0-Y)>0.011,\qquad G>(1.9,\ 1.2,\ 0.87,\ 0.60,\ 0.42)\quad(m=5,\dots,9).$$

由于 $1.30(0.011)>0.114^2$，条件 (4.19) 对 m 的五个取值均成立。（例如，当 $m=5$ 和 $m=6$ 时，有 $0.0256<\beta<0.02575$ 和 $0.0165<\beta<0.0168$，分别得到 $0.020<L<0.028$、 $-0.082<L<-0.068$ 和 $C+2(D_0-Y)>0.08$，0.04。）在这五种情况下，相同的矩给出 $V(j)<0.0265$。

记 $\varepsilon=\varepsilon_m(j)$ 和 $q_m^2=m(m-1)\varepsilon/Y$（$\varepsilon=0$ 的情形显然）。由于 $\sum_k d_k=0$，由柯西–施瓦茨不等式可得 $\sum_k d_k^2\ge md_i^2/(m-1)$，因此由 (4.21) 得

$$\frac{(b_i-1)^2}{q_m^2}+\frac{xH_*^2b_i}{\varepsilon}\big[2(a_i-1)^2+Gv_i^2\big]\le 1.$$

因此，对于，6，有 $|b_i-1|\le q_m$，其中 $q_m<4/15$；对于，8，9，有 $q_m<17/36$，其中 $m=7$。配方得到 $1-(b-1)^2/q_m^2\le 2b/(1+\sqrt{1-q_m^2})$，于是

$$2(a_i-1)^2+Gv_i^2\le\frac{2m\varepsilon}{H_*^2(1+\sqrt{1-q_m^2})}<\frac{16m\varepsilon}{15H_*^2}.$$

利用余切级数中的 $2\pi H_*>1-\frac{7}{2}x^2$，前述界给出 $m\varepsilon/H_*^2<0.047$ 和 $m\varepsilon/(GH_*^2)<0.057$, 因此对任意 $5\le m\le 9$，都有 $|a_i-1|<0.16$ 和 $|v_i|<1/4$。

为验证引理 4.2 的谱假设，保留式 (4.9) 中前两个正项：令 $\gamma=8.64x^4+40x^6$，并令 $\rho_m=(d_m-\gamma)/x^2$。由于 $\mathcal{L}>1+\gamma$ 和 $D>0$，我们有 $\rho_m>0$。利用 $D/H_*=1-\mathcal{L}/(1+d_m)$ 和 $2\pi H_*<1-3.28x^2$，得到

$$\frac{H_*}{2D}>\frac{1}{2}+\frac{1+\gamma}{2\rho_m x^2},\qquad r>\frac{3.28}{(1-3.28x^2)\rho_m}.$$

引理 3.4 表明， $\rho_m=m^2d_m-8.64/m^2-40/m^4$严格低于 0.886，0.601，0.46，0.46，0.46，适用于 $m=5$，.....，9。因此，对于所有 $m\ge 5$， $H_*/(2D)>14.5$ 以及 $r>4.2$，而当 $m\ge 7$ 时， $H_*/(2D)>49$ 以及$r>7$。由 (4.11) 可知，对于 $m\ge 5$ 有 $e<1/0.64$，而对于 $m\ge 7$ 有 $e<1/0.79$。由于 $\tau<1/5$，校准得到 $C>0$；当 $m=5$，6 时， $\tau\ge 1/9$ 和 $r+3-3e>7n/5$ 给出 $T/D\ge 2+3n/5$，而对于 $m\ge 7$，我们有 $T/D\ge 2$。

因此， Q 严格位于引理 4.2 中相应的盒内。由于 $J(Q)\ge j$ 给出$jV(F)-E(F)\le 0$, 不等式 (4.14) 迫使所有边偏差均为零，而多边形等周等式给出 $Q\sim R_m$。□

4.6. 定量稳定性与仿射像。在对每个$p \geq 3$建立凸刚性之后，我们现在证明定理 1.3 及其推论。我们首先研究三角形和四边形的尖锐行为。

推论 4.8（三角形与凸四边形的稳定性）。设 Q 是一个单位周长的凸 p 边形，满足 $p \in \{3,4\}$，并令 $\mathcal{D} = \mathbb{E}[(a_i-1)^2 + (b_i-1)^2 + v_i^2]$。存在绝对常数 c、$C>0$，使得

$$c\sqrt{\mathcal{D}} \leq J(R_3) - J(Q) \leq C\sqrt{\mathcal{D}} \quad (p=3), \qquad J(R_4) - J(Q) \geq c\mathcal{D} \quad (p=4).$$

对于三角形，有 $\mathcal{D} \asymp 1 - |Q|/|R_3| \asymp (1-r)^2,$，其中 R_3 与 Q 的周长相同，且 r 是将 R_3 映射到 Q 的仿射映射的奇异值比。

证明。对于三角形（$p=3$），定理 4.4 已给出下界 $J(R_3) - J(Q) \geq c(1-r)$。反过来，经由 L^{-1} 作仿射拉回，会使狄利克雷能量至少乘以 r，而按弧长计算的边界方差至多乘以 $1/\bar{s}$（其中 $\bar{s} = (s_1+s_2+s_3)/3$，因为 $s_i \leq 1$，且方差是在加性常数上取最小值）。因此 $J(Q) \geq r\bar{s}\, J(R_3) \geq r^2 J(R_3)$，从而得到 $J(R_3) - J(Q) \leq 2J(R_3)(1-r)$。

设 $\rho = |Q|/|R_3|$ 具有等周长以及 $W_\ell = \mathbb{E}(b_i-1)^2$。边中点 M_1, M_2, M_3的加权平均值等于边界质心，且两两之间的距离为 $|M_i - M_j| = y_k/2 (k \neq i,j)$，因此它们的加权方差等于 $\sum_{i<j} y_i y_j |M_i - M_j|^2 = y_1y_2y_3/4$。除以$H_*^2 = 1/108$得到 $\mathbb{E}(a_i^2+v_i^2) = 27y_1y_2y_3$；由于 $\mathbb{E}a_i = \rho$，可推出 $\mathcal{D} = 1 + 27y_1y_2y_3 - 2\rho + W_\ell$。用 $e_i = 3y_i - 1$ 表示（它们满足 $\sum_i e_i = 0$），我们有 $W_\ell = \frac{1}{3}\sum_i e_i^2 + e_1e_2e_3$，以及海伦公式 $\rho^2 = \prod_{i=1}^3 (1-2e_i)$。直接代数运算展开可得恒等式

$$\mathcal{D} + 8W_\ell = \frac{1}{4}(1-\rho)(13+5\rho).$$

由于 $0 \leq W_\ell \leq \mathcal{D}$和 $0 < \rho \leq 1$，可得 $\frac{13}{36}(1-\rho) \leq \mathcal{D} \leq \frac{9}{2}(1-\rho)$。此外，$\rho = r/\bar{s}^2$；取$L$ 为对称正定，并通过 $\sum_i \tau_i \otimes \tau_i = \frac{3}{2}I$对 $\tau_i \cdot L\tau_i \leq s_i$和 $s_i^2 = \tau_i \cdot L^2\tau_i$取平均，得到 $(1+r)/2 \leq \bar{s} \leq \sqrt{(1+r^2)/2}$，因而

$$\frac{(1-r)^2}{(1+r)^2} \leq 1 - \rho \leq \frac{(1-r)^2}{1+r^2}.$$

因此 $J(R_3) - J(Q) \asymp 1 - r \asymp \sqrt{1-\rho} \asymp \sqrt{\mathcal{D}}$。

对于凸四边形（$p=4$），由于 $\operatorname{diam}(Q) \leq 1/2, H_* = 1/8$，且 $b_i \leq 2$，因此 $\mathcal{D}$ 在上方有一致界。若 $J(Q) < 5.5$，则间隙 $J(R_4) - J(Q)$ 的下界为 $J(R_4) - 5.5 > 0$。否则，命题 4.5 给出（4.20）：$J(R_4)V(F) - E(F) \geq \frac{1}{20}\mathbb{E}(w^2+d^2+m^2)$。由于 $a_i - 1 = 8w_i$, $b_i - 1 = 4d_i$, $v_i = 8m_i$，且 $V(F)$ 有一致上界（因为 $|h_i + im_i| \leq 1/2$、$y_i \leq 1/2$ 和 U 是固定的），变分不等式 $J(Q)V(F) \leq E(F)$ 证明了 $J(R_4) - J(Q) \geq c\mathcal{D}$。$\square$

定理 *1.3* 的证明。令 $x = 1/p$, $j = J(R_p)$, $\sigma = J(Q)$，并令 $g = j - \sigma$。由定理 4.3、4.4、4.7 和命题 4.5，对于每个凸 p 边形，我们有 $g \geq 0$。由于 $\mathcal{I} \leq 2I \leq 1/2, h_i^2 + m_i^2 \leq 1/4$, $H_* \geq 1/(6\sqrt{3})$，且 $b_i \leq 1/(2x)$，几何量

$$\mathcal{G}(Q) := \mathcal{I} + \mathbb{E}\big[(a_i-1)^2 + x^2 v_i^2 + x^3(b_i-1)^2\big]$$

在所有 $p \geq 3$ 以及所有单位周长凸 p 边形 Q 上均一致有界。因此只需假设 g 充分小。

每当 Q 位于引理 4.2 中相应的盒内时，移植的正则特征场满足 $V(F) \leq 4(X_0 + Y_0) = 4(H_* + eD)/j$；另一方面，校准给出 $C/H_* \geq jH_*(1-\tau) - (1+3e)D/H_* > 1/3$（使用 $j > 5.9$、$H_* \geq 1/8$、$\tau < 1/5$、$e \leq 1.57$ 和 $D/H_* \leq 1/29$）。由于由 (3.1) 可得 $D \asymp x^3$，且对每个固定的 p 都有 $D > 0$，将不等式 (4.14) 与 $jV(F) - E(F) \leq gV(F)$ 结合，得到 $\mathcal{G}(Q) \lesssim g$。

对于 $p \in \{3,4\}$，由推论 4.8 和 (4.4) 可直接得到该界：当 $d_i = y_i - x$ 时，有 $\mathbb{E}(y_i^2 - x^2) = \mathbb{E}d_i^2 + 2x\sum_i d_i^2$且 $\sum_i d_i^2 \leq 2(\sum_{d_i>0} d_i)^2 \leq 2p^2\mathbb{E}d_i^2$。对每个固定的 $p \geq 5$，定理 4.7 和定理 4.3 中的先验估计确保每条边都严格位于引理 4.2 的盒内，并且所有中间标量界都连续依赖于参数 σ 在 $\sigma = j$ 处的取值，且分母严格为正；因此，对每个固定的 $p \geq 5$，存在 $\delta_p > 0$，使得 $g < \delta_p$ 将 Q置于

该盒内。这涵盖了 p 的任意有限范围，因此只需考虑 $x = 1/p$ 和 g 都充分小的情形。

记 $s = H_* - H$, $V_h = \mathbb{E}(h_i - H)^2$, 和 $L = H/\sigma - H^2$，则坐标界 $I \le H/\sigma$ 可写为 $V_h + \mathbb{E}(m_i^2 + y_i^2/12) \le L$。当 x 和 g 足够小时，有 $\sigma > 5.9$，因此 (4.5) 强制每条边上都有 $h_i > 0.08$。于是，在 σ 处计算得到的归一化条带代价 $k_i = K_i/E_0$ 满足：对于绝对常数 $K, C > 0$，有 $0 < k_i \le K$ 和 $\bar{k} = \mathbb{E}k_i \le 1 + CL$： k_i 中的根式至多为 $1 + C(m_i^2 + y_i^2)$，而 $\mathbb{E}[y_i(h_i^{-1} - \sigma)] \le C\mathbb{E}[y_i|h_i - H|] + C(1 - \sigma H) \le C'L$，且 $L = O(1 - \sigma H) = O(x^2 + s + g)$。

将 (4.7) 中的 j 替换为 σ，记 $D_\sigma = H_* - \sigma(H_*^2 + x^2/12)$。在 $0 < k \le K$ 上，函数 $\Phi_k(b)$ 满足 $\Phi_k(b) \ge c_K(1 + b)(b - 1)^2$（因为 $2\psi(b)$ 在除其位于 $b = 1$ 的二重零点外均严格为正，而当 $b \to \infty$ 时， b^4/K 占主导地位）。因此，令 $D_y = x\sum_i (b_i - 1)^2,$，长度项便可控制 $C_0(D_y + \mathbb{E}(b_i - 1)^2)$，相差一个绝对常数因子。由于正规展开 (3.1) 给出 $D_\sigma - C_0 \le C(g + x^5)$ 和 $1 - \sigma H_* \ge cx^2$，误差 $C_0(\bar{k} - 1) \le Cx^3(x^2 + s + g)$ 可在 x 足够小时吸收到 (4.7) 的左端，从而得到

$$s^2 + V_h + \mathcal{I} + x^2 s + x^3\big(D_y + \mathbb{E}(b_i - 1)^2\big) \le C(g + x^5).$$

注意到 $s^2 + V_h = H_*^2\mathbb{E}(a_i - 1)^2$, 且由于 $\mathbb{E}y_i^2 \ge x^2$，(4.4) 给出 $2\mathbb{E}m_i^2 \le \mathcal{I} + 2H_* s$。因此，增广量 $\mathcal{A} := \mathcal{G}(Q) + x^3 D_y$ 满足 $\mathcal{A} \le C(g + x^5)$。

若 Q 位于盒 (4.16) 之外，则 $\mathcal{A} \ge c_0 x^4$：要么某条边满足 $|b_i - 1| \ge 3/4$，从而得到$D_y \ge \frac{9}{16}x$；要么每条 $y_i \ge x/4$，但有一条边满足 $|a_i - 1| \ge 1/10$ 或 $|v_i| \ge 1/10$，对 $\mathbb{E}[(a_i - 1)^2 + x^2 v_i^2]$贡献至少 $c_0 x^4$。当 x较小时，误差 Cx^5 便可由 $\mathcal{A}$吸收，从而得到$\mathcal{G}(Q) \le \mathcal{A} \lesssim g$。在 (4.16) 内，引理 4.2 已给出 $\mathcal{G}(Q) \lesssim g$。最后，外角估计直接由 (4.2) 得出，而三角形刻画即为推论 4.8。□

注 4.9（边长指数的最优性）。定理 1.3 中 $\mathbb{E}(b_i - 1)^2$ 前的权重 p^{-3} 无法改进。从单位周长的正则 $p - 1$ 边形 R_{p-1}出发，将一条边二等分，并沿边法向量将其中点向外推移一段小距离 $t > 0$，然后重新缩放至单位周长。对于每个固定的 $p \ge 4$ 以及充分小的 $t > 0$，这会产生一个严格凸的 p 边形 $Q_{p,t}$。当 $t \downarrow 0$ 时，从中心出发经过各顶点及新增中点的径向扇形上的分片仿射映射，其导数一致收敛于恒等映射，因此对于所有试验函数，狄利克雷能量和中心化边界方差均以乘法方式收敛，从而得到 $J(Q_{p,t}) \to J(R_{p-1})$。在此极限下，两条半边的合并权重为 $1/(p - 1)$，其中 $b_i = p/[2(p - 1)],$，而其余 $p - 2$ 条边满足 $b_i = p/(p - 1)$，因此 $\mathbb{E}(b_i - 1)^2 \sim 1/(4p)$。另一方面，(3.1) 蕴含 $J(R_p) - J(R_{p-1}) \sim 12\pi Z p^{-4}$。取充分小的 $t = t_p$，便得到一列凸 p 边形，使得 $J(R_p) - J(Q_{p,t_p}) \asymp p^{-3}\mathbb{E}(b_i - 1)^2$。

推论 4.10 (正多边形的仿射像)。 对于每个 $p \ge 3$ 以及 $\mathbb{R}^2$的每个非奇异仿射变换 T，都有 $J(TR_p) \le J(R_p)$；当且仅当 T为相似变换时，等号成立。

证明。 由于 TR_p是一个凸 p边形，上述凸刚性定理给出 $J(TR_p) \le J(R_p)$，且当且仅当 TR_p 为正多边形时等号成立。 R_p 的等权顶点的协方差矩阵是单位矩阵的正标量倍数；若 TR_p 也为正多边形，则其顶点协方差矩阵具有相同性质，从而迫使 T 的线性部分的奇异值彼此相等。□

5. Fourth-order asymptotics and Blaschke-transported rigidity

本节中的每个估计都适用于具有 p 个严格凸顶点以及任意数量凹顶点的简单平面多边形。在第 5.1 小节中，我们通过对凸间隙的循环移位取平均，证明定理 1.4。在第 5.2–5.4 小节中，我们引入一种适用于凸前顶点的次数为 p 的布拉施克分解，建立输运边界测度的索尔伯列夫强制性和弧质量刚性，并证明定理 1.5及其尖锐改进。

5.1. 固定凸顶点数下的尖锐四阶界。

定理 1.4 的证明。 在弧长平衡坐标下进行，并记 $y = 1/p$, $u = \max_i s_i$, $M = \sum_{i=1}^{p} s_i^4$, $T_5 = \sum_{i=1}^{p} s_i^5$ 和 $d = d(P)$。首先假设 $d \le 2Zy^3 + 22Wy^4$；下文所有隐含常数均为绝对常数，且关于 P 一致。

间隙集中。令 $r_i = s_i/y$。由于 $p\mathcal{H}(y) = 2Zy^3 + O(y^4)$，不等式 (2.9) 推出 $Q := \sum_{i=1}^{p}(r_i - 1)^2 = O(1)$，特别地，$u = O(y)$。将 r_i^4 和 r_i^5 在 1 附近展开，并利用 $\sum_i (r_i - 1) = 0$ 以及 $r_i = O(1)$，得到 $M = y^3 + O(y^4)$ 和 $T_5 = y^4 + O(y^5)$。

相位差的循环平均。定义间隙支撑剖面 $f|_{I_i} = s_i^3 \Phi$，其中 Φ 如 (2.10) 中所示。对共形导数 F 进行归一化，使得 $|F| = \rho$，并选取其解析平方根 $H = F^{1/2}$，满足 $H(0) > 0$。根据引理 2.4 和引理 2.5，(2.7) 中两个相位积分的共同值 $\mathcal{P}$ 满足

$$0 \le \mathcal{P} \le \sqrt{d(cM + bT_5)} - M = O(y^4).$$

令 $\eta^2 = \|H - 1\|_2^2 = 2(1 - H(0))$，选取在 0 处取实值的 $\log H$ 分支，并定义良集

$$G := \Big\{ z \in \mathbb{T} : \sup_{0<r<1} |H(rz) - 1| \le \frac{1}{2} \Big\}.$$

由于 $|H(rz) - 1| \le P_r |H - 1|(z)$，由 Hardy–Littlewood极大不等式可得 $m(G^c) \lesssim \eta^2$。对每个 $z \in G$，径向路径 $r \mapsto H(rz)$ 始终位于圆盘 $\{|w - 1| \le 1/2\}$ 内，因此 $\log H(z)$ 与主值对数一致。取 $\alpha = 1$ 应用 (2.8)，将相位积分表示为关于 $h := \Im H$ 的式子：

$$\mathcal{P} = 4 \iint_{\mathbb{T}\times\mathbb{T}} f(z) \frac{(h(z) - h(w))^2}{|z - w|^2} \, dm(z) \, dm(w).$$

令 $\epsilon = \sqrt{yQ}$。对于任意以周为单位的有向弧长 $s \in (-1, 1)$，在部分分式展开中将相反项配对，可得

$$|1 - e^{2\pi i s}|^{-2} = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{k\in\mathbb{Z}} (s + k)^{-2} \ge \frac{1}{(2\pi s)^2} + \frac{1}{12}.$$

常数项 $1/12$ 对 $\mathcal{P}$ 的贡献至少为 $\frac{1}{3} M \mathrm{Var}_m(h) = \frac{1}{6} M(1 - H(0)^2) \ge \frac{1}{12} M\eta^2$。

仅保留满足 $r_i \ge 1/2$ 的间隙，并按循环顺序重新编号。由于每个舍弃的间隙对 Q 至少贡献 $1/4$，因此保留的间隙数量为 $\ell = p - O(Q)$。令 $\mathbb{E}_i$ 表示在这些 ℓ 个指标上的均匀平均，将参数化 z_i 写为 $U_i(v) = H(z_i(v))$：$[0, 1] \to I_i$，并令 $t = w - v$、$d\omega = \Phi(v)\, dv\, dw$、$A_n = (U_i(v) - U_{i+n}(w))/y$，以及 $X_n = \Im A_n/\pi$。下面所有关于平移 n 的求和均限制在 $|n| \le \ell/3$ 上。

令 a 为 $z_i(v)$ 与 $z_{i+n}(w)$ 之间以 y 为单位测量的最短无向弧长，并定义 $K_n = r_i^{-4} r_{i+n}^{-1} a^2$。删除中间的舍弃短间隙后，$a$ 被 a_0 替代，其中 $a_0/|n + t|$ 是保留间隙比 r_j 的凸组合。由于保留比有上下界，且 $\mathbb{E}_i |r_i - 1| \le \sqrt{Q/\ell} = O(\epsilon)$，我们得到 $\mathbb{E}_i(r_i^{-4} r_{i+n}^{-1} a_0^2) \le (1 + C\epsilon)(n + t)^2$。所有舍弃间隙的长度之和以 y 为单位为 $O(Q)$，并且当 i 变化时，每个舍弃的间隙至多被经过 $|n|$ 次，因此 $0 \le a - a_0 \le CQ$ 且 $\mathbb{E}_i(a - a_0) \le C|n|yQ$。由于 $Q = O(1)$，当 $|n| = 1$ 时，差值 $(a - a_0)(a + a_0)$ 贡献 $O(yQ)$，而当 $|n| \ge 2$（其中 $|n + t| \ge |n|/2$）时，贡献 $O((n + t)^2 yQ)$。因此存在一个绝对常数 $C_0 > 0$，使得 $\mathbb{E}_i K_n \le (1 + C\epsilon) D_n$，其中 $D_n = (n + t)^2 + C_0 \epsilon^2 \mathbf{1}_{\{|n|=1\}}$。

定义循环平均剖面 $h_{\mathrm{av}}(v) = \mathbb{E}_i \Im U_i(v)/(\pi y)$，使得对于每个平移 n，都有 $\mathbb{E}_i X_n = h_{\mathrm{av}}(v) - h_{\mathrm{av}}(w)$。令 $S = (h_{\mathrm{av}}(v) - h_{\mathrm{av}}(w))/t$ 以及 $d\lambda = t^2 \sum_n D_n^{-1}\, d\omega$；对角线的测度为零，且密度中的第 $n = 0$ 个求和项等于 1。对每个 n，在循环平均中应用柯西–施瓦茨不等式，得到

$$\frac{\mathcal{P} - M\eta^2/12}{y^4} \ge \frac{\ell}{p} \int \sum_n \mathbb{E}_i \frac{X_n^2}{K_n} \, d\omega \ge \frac{\ell}{p(1 + C\epsilon)} \int S^2 \, d\lambda.$$

对于 $n \ne 0$，唯一的奇异角点出现在 $|n + t| = x_0 + b_0$ 时，其中 x_0，b_0 是 v，w 到相邻间隙端点的距离；由于 $\Phi(v) \le C x_0^{3/2}$，$\sum_{n\ne 0} D_n^{-1}\, d\omega$ 和 λ 都具有一致有界的边缘密度。将 D_n 替换为 $(n + t)^2$ 会使 λ 的总质量改变 $O(\epsilon)$

因为倒数差为 $O(\epsilon/(x_0+b_0)^3)$，且 $x_0^{3/2}/(x_0+b_0)^3$ 可积。此外，$\int \mathbb{E}_i|A_0/t|^2\,d\lambda = O(1)$：$n=0$ 项可直接由 $\mathcal{P}=O(y^4)$ 和 $r_i\ge 1/2$给出的同一间隙 Hardy 积分控制，而其余各项则可通过在同一间隙中引入一个密度为 Φ 的独立中间点，并利用有界的边缘密度得到。

对于 $n=0$，记 $z=z_i(v)$ 和 $\xi=z_i(w)$。在开间隙 I_i 上，$\Im\log H$ 沿直边具有角斜率 $-1/2$，并且跨过任何内部反射前顶点时严格向下跳跃；因此，对于 $t=w-v$ 的任一符号，$\Im(\log H(z)-\log H(\xi))/(\pi y t)\ge r_i$。当 $(z,\xi)\in G\times G$ 时，沿从 $H(\xi)$ 到 $H(z)$ 的直线段对 $1/\zeta-1$ 积分，得到

$$\frac{X_0}{t}\ge r_i-\frac{2}{\pi}\big(|H(z)-1|+|H(\xi)-1|\big)\left|\frac{A_0}{t}\right|.$$

在 $\mathbb{E}_i\,d\lambda$ 条件下，两个边缘分布相对于 m 都具有有界密度。因此，柯西–施瓦茨不等式将 $G\times G$ 上误差项的积分限制为 $O(\eta)$；而在例外集 $(G\times G)^c$（其测度为 $O(\eta^2)$）上，同一个 L^2-界将 $1-X_0/t$ 的积分控制为$O(\eta)$。由于 $S=\mathbb{E}_i(X_0/t)$ 且 $\mathbb{E}_i|r_i-1|=O(\epsilon)$，我们得到 $\int(1-S)\,d\lambda\le C(\epsilon+\eta)$，从而根据 $S^2\ge 2S-1$ 得到$\int S^2\,d\lambda\ge\int d\lambda-O(\epsilon+\eta)$。利用 $\ell/p=1-O(yQ)$，注意到省略的尾项$|n|>\ell/3$ 贡献为 $O(1/\ell)=O(y)$，并回顾 $M\ge y^3$，我们得到

$$\frac{\mathcal{P}}{y^4}\ge\frac{\eta^2}{12y}+\int_0^1\Phi(v)\int_0^1\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{(v-w)^2}{(n+w-v)^2}\,dw\,dv-O(\eta+\epsilon+y).$$

为计算此二重积分，令 $L(t)=-\log(2|\sin\pi t|)$。利用部分分式，内层积分等于 $\int_{v-1}^{v}t^2\pi^2\csc^2(\pi t)\,dt$。由于 $L''(t)=\pi^2\csc^2(\pi t)$ 在 $\mathbb{Z}$ 外且 L 是具有零均值的 1-周期函数，分部积分得到 $(2v-1)L'(v)-2L(v)$（$t=0$ 处的边界项消失，因为 $t^2L'(t)$ 和 $tL(t)$ 趋于 0）。在 (0,1) 上利用 $\Phi''=4\pi^2L/Z$，其中 $\Phi(0)=\Phi'(0)=\Phi(1)=\Phi'(1)=0$，两次分部积分和帕塞瓦尔恒等式给出

$$\begin{aligned}\int_0^1\Phi(v)\big[(2v-1)L'(v)-2L(v)\big]\,dv&=-\int_0^1\big[(2v-1)\Phi'(v)+4\Phi(v)\big]L(v)\,dv\\&=\frac{5Z}{4\pi^2}\int_0^1(\Phi')^2\,dv=\frac{5W}{2Z}.\end{aligned}$$

¯变分比较。令 $h=M-(1+\Lambda)f$。则 $h=0$、$\mu h\ge M+\mathcal{P}$，结合傅里叶展开与 (2.11) 得到 $\mathcal{E}(h)-\|h\|_2^2\le cM+bT_5/2$。由于在每个间隙端点处 $f'=0$ 且 $\Phi'\in C^{1/2}$，重新缩放后在 $\mathbb{T}$ 上整体得到 $[f']_{C^{1/2}}=O(u^{3/2})$。因此，$\Lambda f$ 的奇异积分中的对称二阶差分为 $O(\min\{u^3,u^{3/2}|t|^{3/2}\})$；在 $|t|=u$ 两侧分别与 $O(t^{-2})\,dt$ 相乘并积分，得到 $\|h\|_\infty=O(u^2)=O(y^2)$，从而 $\mathcal{E}(h)=O(y^3)$。由于$\|\rho-1\|_1\le\||H|+1\|_2\|H-1\|_2\le 2\eta$，将 m 替换为 μ 会使 $\mathrm{Var}(zh)$ 改变 $O(\eta\|h\|_\infty^2)=O(\eta y^4)$。此外，$|\int_{\mathbb{T}}zh\,dm|=2|\widehat{f}(1)|\le 2M$。用 $z(1+h/c)$ 检验 (2.1)，并利用 $\mu z=\bar{h}=0$ 得到

$$d\ge\frac{2\mu h}{c}-\frac{(1+d)\mathcal{E}(h)-\mathrm{Var}_\mu(zh)}{c^2}\ge\frac{M+2\mathcal{P}}{c}-\frac{bT_5}{2c^2}-O(\eta y^4+y^6).$$

代入 $T_5=y^4+O(y^5)$、$\mathcal{P}$, $c=1/(2Z)$ 的下界以及 $b=W/Z^2$，并注意到 $4Z\cdot 5W/(2Z)-2W=8W$，可得

$$d\ge 2ZM+8Wy^4+\frac{Z}{3}y^3\eta^2-Cy^4(\eta+\sqrt{yQ}+y).$$

利用 $(M-y^3)/y^4=\sum_{i=1}^{p}(r_i-1)^2(r_i^2+2r_i+3)\ge 3Q$，并对 η 和 $\sqrt{Q}$y 配方，得到 —

$$d\ge 2Zy^3+8Wy^4+2y^4Q+\frac{1}{6}y^3\eta^2-O(y^5).$$

当 $d>2Zy^3+22Wy^4$ 时，将此阈值下界与引理 2.5 取平均：前因子$[1+(1-H(0)^2)/2]^2$ 至少为 $1+\eta^2/2$，而对于足够小的 y，$(p+2Q)\mathcal{H}(y)\ge 2Zy^3-5Wy^4+4y^4Q$ 且$p\mathcal{H}(y)\ge 2y^3$，从而得到完全相同的下界。结合 (3.1)，即可得到稳定性不等式，其中 $d(R_p)$，且 L^1-界为 $\|\rho-1\|_1\le 2\eta$。正多边形给出了

与下确界相匹配的上界，并且在 (3.1) 中用 $p+1$ 替换 p 会使四阶系数减少 $6Z$，从而确保对于所有充分大的 p， $J(P) < J(R_{p+1})$。□

5.2. **布拉施克分解、输运矩与 $H^{1/p}$ 强制性**。设 $\xi_1, \dots, \xi_p \in \mathbb{T}$ 为 P的 p 严格凸顶点的原像，并定义前顶点多项式$S(z) = \prod_{i=1}^{p}(1 - \bar{\xi}_i z)$。任意如下形式的因式分解

$$S(z) = A(z)\big(1 - B(z)\big), \tag{5.1}$$

其中 A 在 $\mathbb{D}$ 上全纯且无零点， B 是次数为 p 的有限布拉施克乘积（因此B 将 $\mathbb{T}$ 映到 $\mathbb{T}$ ，构成 p重保定向覆盖，并将每个 ξ_i 映到 1），会将边界测度 μ 输运为圆周测度，其傅里叶矩满足精确的 Fej´er 正性恒等式。

引理 5.1 (Fej´er 输运矩恒等式)。给定一个因式分解(5.1)，对共形导数 F 进行归一化，使得 $|F| = \rho$, 并定义

$$H = (FS^{2/p})^{1/2}, \qquad u = \frac{|B'|}{p}, \qquad \nu = B_*(u|S|^{2/p}\mu),$$
$$\sigma = B_*\big(|1 - B(z)|^2 \|D_z H\|_2^2 \, dm(z)\big), \qquad D_z H(w) = \frac{H(w) - H(z)}{w - z}.$$

于是，对于每个整数 $j \geq 1$ 以及 ***Fej´er*** 核 $K_j(\zeta) = j^{-1}|1 + \zeta + \cdots + \zeta^{j-1}|^2$,

$$p \int_{\mathbb{T}} \Re \zeta^j \, d\nu(\zeta) = \int_{\mathbb{T}} K_j(\zeta) \, d\sigma(\zeta).$$

此外，设 $w = w_{1/p}$为与 $|1-\zeta|^{-2/p}$成比例的概率密度，记 $r_j = r_j(1/p)$ ，并令 $a_{jk} = r_{|j-k|} + r_{j+k} - 2r_j r_k$。则

$$\int_{\mathbb{T}} w(\zeta)(\Re \zeta^j - r_j) \, d\nu(\zeta) = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} \int_{\mathbb{T}} K_k(\zeta) \, d\sigma(\zeta) \geq 0. \tag{5.2}$$

左侧的每个倾斜矩在 H 非常数时都严格为正，而在 H 为常数时均为零。

证明。 记 $x = 1/p$ 以及 $w(\zeta) = C_p|1-\zeta|^{-2x}$，从而 $w \, d\nu = C_p B_*(u|A|^{2x}\mu)$ 。选取满足 $2x < 1/s' < 1 - \max_i(2b_i - 2x)$ + 的 $s' \in (1, \infty)$ （由于 $2b_i < 1$，这样的集合非空）。于是 $w \in L^{s'}(\mathbb{T})$ ，而 $|H|^2$ 属于共轭空间 $L^s(\mathbb{T})$ ，因为其唯一的正奇异指数来自 $2b_i - 2x$。

对于任意实数 $g \in L^{s'}(\mathbb{T})$, 令 $U = \Lambda^{-1}(g - \bar{g}) \in W^{1,\, s'}(\mathbb{T})$。通过对单项式进行验证并利用密度延拓，可得共形协变性 $\Lambda(U \circ B) = pu(g - \bar{g}) \circ B$。由于 $H^2 = FS^{2x}$的转向权重之和为 $1 - px = 0$，且函数 $f(z) = U(1) - U(B(z))$ 在每个严格凸前顶点处均为零，利用引理 2.4（取 $\beta = 0$）可得

$$p \int_{\mathbb{T}} (g - \bar{g}) \, d\nu = 2 \int_{\mathbb{T}} \big[U(1) - U(B(z))\big] \|D_z H\|_2^2 \, dm(z). \tag{5.3}$$

取 $g(\zeta) = \Re \zeta^j$，得到 $U(1) - U(\zeta) = (1 - \Re \zeta^j)/j = \frac{1}{2}|1 - \zeta|^2 K_j(\zeta)$，从而证明 Fej´er 恒等式。在 $j = 1$处，这表明 σ 是一个有限非负测度，并且 $\sigma(\mathbb{T}) > 0$ 当且仅当 H 为非常数。

令 X 为一个贝塔分布$(x, 1 - 2x)$随机变量，使得 $\mathbb{E}X^k = r_k$。递增函数的正协方差给出 $r_{j+k} \geq r_j r_k$, 并且由于 $r_{|j-k|} > r_{j+k}$ ，对于所有 $j, k \geq 1$, 我们有 $a_{jk} > 0$ 。对于 $g(\zeta) = w(\zeta)(\Re \zeta^j - r_j)$，我们有 $\bar{g} = 0$ 和 $\widehat{g}(k) = a_{jk}/2$ ，其中 $k \geq 1$。根据 Abel 平均和单调收敛，连续势满足 $U(1) - U(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk}(1 - \Re \zeta^k)/k$。将其代入 (5.3) 并应用 Tonelli 定理，得到 (5.2)；由于 $K_1 \equiv 1$，当且仅当$\sigma(\mathbb{T}) > 0$ 时具有严格正性。□

在 $j = 1$ 处，恒等式 (5.2) 给出了一个精确的径向差积分，它以最优指数和最优常数控制 H 的 $H^{1/p}$ Sobolev 半范数。

引理 5.2（第一个输运矩与 $H^{1/p}$ 强制性）。沿用引理 *5.1* 中的记号，令$x = 1/p$, $h = H/\sqrt{C_p}$, $V = u|A|^{2x}$，以及 $\overline{\delta} = \mu[V\ (\Re B - r_1)\ ]$。设 $X \sim$ 贝塔分布$(x, 1-2x)$，则有

$$p(1-x)\delta = \mathbb{E}\int_{\mathbb{T}} \left|\frac{(1+X)(1-B(z))}{1-XB(z)}\right|^2 \|D_z h\|_2^2 \, dm(z) \tag{5.4}$$

$$\geq \sum_{n=1}^{\infty} |\widehat{h}(n)|^2 \, \mathbb{E}\left[\frac{1+X}{1-X}(1-X^n)^2\right] \geq (1-r_2)\sum_{n=1}^{\infty} n^{2/p}|\widehat{h}(n)|^2. \tag{5.5}$$

恒等式 (5.4) 对每个因式分解 (5.1)都成立，而 (5.5) 在 $B(0) = 0$ 时成立。因子 $1 - r_2$ 对于 (5.5)中的径向乘子是尖锐的，而 *Sobolev* 指数 $1/p$ 即使在凸 p 边形的范围内也是尖锐的。

证明。令 $c_1 = 1 - r_1 = (1-2x)/(1-x)$。利用 $r_{n+1}/r_n = (n+x)/(n+1-x)$，我们将 a_{1n}对 $n \geq 1$ 重写为

$$a_{1n} = \frac{n(r_{n-1} - r_{n+1})}{1-x} = 2c_1 r_n \frac{n^2}{n^2 - (1-x)^2}. \tag{5.6}$$

将 $|1-\zeta|^2 K_n(\zeta) = 2(1 - \Re\zeta^n)/n$ 代入 (5.2) 中的 $j = 1$，并通过下式计算非负和

$$(1-v^2)\sum_{n=1}^{\infty} v^{n-1}(1-\cos nt) = \frac{(1+v)^2(1-\cos t)}{|1-ve^{it}|^2}$$

在 $v = X$ yields (5.4)。

现在假设 $B(0) = 0$。固定 $v \in (0,1)$ 以及一个远离前顶点的点 $w \in \mathbb{T}$。作为 z 的函数，$G(z) = (1+v)(1-B(z))D_w h(z)/(1-vB(z))$ 属于 $H^2(\mathbb{D})$。由 Schwarz 引理，$|B(vw)| \leq v$；对于任意复数 a，当 $|a| \leq v$ 时，三角不等式给出$|1-va| \leq v|1-a| + (1-v) \leq (1+v)|1-a|$。因此，Hardy 评价界 $\|G\|_2^2 \geq (1-v^2)|G(vw)|^2$ 蕴含

$$\|G\|_2^2 \geq \frac{1+v}{1-v}|h(w) - h(vw)|^2.$$

对 w 积分，应用帕塞瓦尔恒等式，并在 $v = X$ 处取期望，即可得到 (5.5) 中的第一个不等式。

将第 n 个径向乘子记为 $M_n = \mathbb{E}[(1+X)(1-X^n)^2/(1-X)]$。展开 $(1-X^n)/(1-X)$，并通过 $x(r_k + r_{k+1}) = (k+1)r_{k+1} - kr_k$ 对区块 $0 \leq k < n$ 和 $n \leq k < 2n$ 进行裂项求和，得到 $M_n = (2n/x)(r_n - r_{2n})$。将 $t = -n\log X$ 代入这个 Beta 矩差，得到

$$\frac{M_n}{n^{2x}} = \frac{2C}{x}\int_0^{\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{[2n\sinh(t/(2n))]^{2x}}\, dt,$$

其中 C 是 Beta 归一化常数。由于 $u \mapsto \sinh(u)/u$ 在 $(0,\ \infty)$ 上严格递增，M_n/n^{2x} 随 n 严格递增，并在 $n = 1$ 处达到最小值，此时 $M_1 = 1 - r_2 = 2(1-2x)/[(1-x)(2-x)]$。

为验证指数 $1/p$ 的锐性，设 P 是一个凸 p边形，其中有一个任意小的内角 $\alpha > 0$（通过截去尖角三角形的其他角点得到）。在相应的前顶点 ξ附近，$h(e^{it}\xi)$的表现如同一个处处非零的光滑因子乘以 $(1-e^{it})^{-b_0}$，其中 $b_0 = 1/2 - x - \alpha/(2\pi) > 0$。对于 $s \in (0,\ 1)$，将 H^s 二重积分限制在 $0 < t < \varepsilon$和 $2t < u < 3t$ 上，可得 $\|h\|_{H^s}^2$ 下界为 $\int_0^{\varepsilon} t^{-2b_0-2s}\, dt$ 的正倍数；当 $s \geq x + \alpha/(2\pi)$ 时，该下界发散。令 $\alpha \downarrow 0$，即可证明 $s = 1/p$ 的最优性。□

接下来，我们分析式（5.4）中出现的标量核，以建立 δ 与符号检验函数和全变差之间的联系。令 $X \sim$ 贝塔分布$(x, 1-2x)$，设 $Y = 4X/(1-X)^2$ 且 $\gamma = 1/2 - x$。由于$(1+Y)^{-1} = ((1-X)/(1+X))^2 \sim$ 贝塔分布(γ, x)，Y的密度为 $p_x(y) = Cy^{x-1}(1+y)^{-1/2}$，定义在$(0,\infty)$上。对于$A \in (0,1]$, 定义

$$m(A) = \mathbb{E}\log(1+AY), \qquad d(A) = \frac{2A}{1-x}\,\mathbb{E}\left[\frac{1+Y}{1+AY}\right],$$

当 $m(0) = d(0) = 0$时，由于 $-2[(1+y)p_x(y)]' = [1-2x+2(1-x)/y]p_x(y)$，对$\log(1+Ay)$进行积分（边界项在0处为 $O(y^x)$，在 ∞处为 $O(y^{x-1/2}\log y)$），得到：当$c_1 = (1-2x)/(1-x)$时，

$$0 \le d(A) - c_1 m(A) = 2\,\mathbb{E}\left[\frac{\log(1+AY)}{Y}\right] \le 2A. \tag{5.7}$$

将变量变换为 $t = Ay$ 可得

$$\frac{m(A)}{CA^\gamma} = \int_0^\infty \frac{t^{x-1}\log(1+t)}{\sqrt{A+t}}\,dt, \qquad \frac{(1-x)d(A)}{2CA^\gamma} = \int_0^\infty \frac{t^{x-1}\sqrt{A+t}}{1+t}\,dt.$$

第一个积分关于 A 严格递减，而第二个积分严格递增。因此， $m(A) \ge M_x A^\gamma$，其中 $M_x := m(1)$，且比值 $d(A)/m(A)$ 由 c_1（根据 (5.7)）严格递增至 $2/[(1-x)M_x]$于 $A = 1$。利用欧拉伽马乘积计算 $(1+Y)^{-1} \sim$ 贝塔分布$(\gamma,\ x)$ 的对数矩，得到

$$M_x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x}{(j+1/2)(j+1/2-x)} > \frac{4x}{1-2x}.$$

令 $b(z) = |1 - B(z)|$ 以及 $\beta = 2x$，则在 $A = b(z)^2/4$ 处，(5.4) 中的平均核等于 $2(1-x)d(A) \ge 2(1-x)c_1 M_x A^\gamma$。因此，对于定义在 $\mathbb{T}$ 上的任意连续（可能取复值） f，若满足 $|f| \le M_0 b^{1-\beta}$ 和分布意义下的界 $|\Lambda f| \lesssim b^{-\beta}$，则有 $\Lambda f \in L^{s'}$（其中 s' 如 (5.3) 所示），于是 $f \in W^{1,\ s'}$ 在严格凸前顶点处消失，而引理 2.4 给出

$$\int_{\mathbb{T}} |h|^2 \Lambda f \, dm = -2\int_{\mathbb{T}} f \|D_z h\|_2^2 \, dm, \qquad \left|\int_{\mathbb{T}} |h|^2 \Lambda f \, dm\right| \le C_p M_0 \delta. \tag{5.8}$$

写作 $L_v(s) = -2\log|s-v|$ 以及 $N(g) = \sup_{\eta\in\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} |g(s)|\,|s-\eta|^{-\beta}\,dm(s)$。对数核满足

$$N(L_v - L_u) \lesssim_p |v-u|^{1-\beta}. \tag{5.9}$$

事实上，令 $r = |u-v|$，$|L_v(s) - L_u(s)| \le 2\log(1 + r/|s-u|) + 2\log(1+r/|s-v|)$；根据中心化超水平弧上的层蛋糕表示，将任一项与 $|s-\eta|^{-\beta}$ 配对时，在中心重合的情况下取最大值，而缩放将积分界定为 $C_p r^{1-\beta}\int_0^\infty t^{-\beta}\log(1+1/t)\,dt$。

推论 5.3（弧质量控制推前测度的全变差）。 在引理 *5.2* 的记号下，令 $\omega = w_x\,dm$， $\eta = B_*(V\mu)/(\mu V)$，以及 $D = \delta/(\mu V) = \int_{\mathbb{T}} \Re\zeta\, d(\eta - \omega)$。对于$I_t = \{e^{is} :\ |s| \le t\}$，记作 $a_t = \omega(I_t)$。则

$$\frac{1}{2}\min(a_t, 1-a_t)\, D \le \eta(I_t) - a_t \le \|\eta - \omega\|_{\mathrm{TV}} \le C_p D, \qquad 0 \le t \le \pi, \tag{5.10}$$

其中， $\|\cdot\|_{\mathrm{TV}}$ 表示对模不超过1的实值可测测试函数取上确界。特别地，对于任意固定的 $t \in (0,\ \pi)$，等号成立 $\eta(I_t) = a_t$ 当且仅当 P 是凸的且等角的。当凸前顶点等距分布时，取 $B(z) = z^p$ 并令 $V \equiv 1$ （经过旋转）可知， $\eta(I_t)$ 是 $|\partial P|$ 中其前像位于某个凸前顶点的角距离 t/p以内的部分所占的比例， a_t 是 R_p对应的比例，而等号成立刻画了 R_p 在相似变换意义下的唯一性。

证明。 对于 $v \in \mathbb{T}$，令 $g_v = L_1 - L_v$、 $m_v = \omega g_v$以及 $d\lambda_v = (g_v - m_v)\,d\omega$。由（5.9）可得，

$$\|\lambda_v\|_{\mathrm{TV}} \le 2\int_{\mathbb{T}} |g_v|\,d\omega \lesssim_p |1-v|^{1-2x}. \tag{5.11}$$

对任意有界实值 G将（5.3）应用于 $g = w_x(G - \omega G)$，通过对数卷积得到 $U(1) - U(v) = \int G\,d\lambda_v$。由于 $w_x\,d\nu = C_p B_*(V\mu)$，这给出了有符号测度恒等式

$$p(\mu V)(\eta - \omega) = 2\int_{\mathbb{T}} \lambda_{B(z)} \|D_z h\|_2^2\, dm(z). \tag{5.12}$$

Co将 (5.11) 与 (5.8) 前的标量核界结合，可得 $\|\eta - \omega\|_{\mathrm{TV}} \le C_p D$。

对于中心弧和余弦函数，将 g_v 对称化：写作 $v = e^{i\theta}$ 和 $A = \sin^2(\theta/2)$，则 $g_v(e^{is})$ 的偶部为 $k(s) = \log|1 - A/\sin^2(s/2)|$。当 $v \ne 1$时，$\max(k(s) - A)$ 随 $|s|$递减：它在 $|s| \le |\theta|$上递减，且对于 $|s| > |\theta|$，我们有 $k(s) \le \log(1-A) \le -A$。令 $T = \int (k - m_v)_+\,d\omega$ 和 $d_v = \int \Re\zeta\,d\lambda_v$；显然 $d_v \le 2T$。取 $e_n = 1 - \cos(n\theta)$，对 $m_v = 2\sum_{n\ge1} r_n e_n/n$ 求和

通过对数级数，以及 $d_v=\sum_{n\ge 1}a_{1n}e_n/n$ 通过引理 5.2 的几何级数，得到 (5.7) 中的 $m_v=m(A)$ 和 $d_v=d(A)$。

现在固定 $t\in(0,\pi)$。如果 $k(t)\ge m_v$，则由 k 在其正值集上的单调性可得 $\lambda_v(I_t)\ge a_tT$。如果 $-A<k(t)<m_v$，那么在 I_t^c 上，m_v-k 的均值至少为 T，因为去掉 I_t^c 的负密度部分后会留下更大的值，所以 $\lambda_v(I_t)=-\lambda_v(I_t^c)\ge(1-a_t)T$。最后，如果 $k(t)\le -A$，那么 $m_v-k\ge m_v+A$ 处处满足 I_t^c，从而得到 $\lambda_v(I_t)\ge(1-a_t)(m_v+A)$。由于根据 (5.7) 和 $d_v\le 2T$，$d(A)\le m(A)+2A\le 2(m(A)+A)$，在每种情况下我们都得到

$$\lambda_v(I_t)\ge \min(a_t,1-a_t)\min(T,m_v+A)\ge \frac{1}{2}\min(a_t,1-a_t)\,d_v.$$

当 $v=1$ 或 $t\in\{0,\pi\}$时，不等式显然成立。对 (5.12) 积分即可证明 (5.10) 中的下界。反之，$D=\int_0^\pi(\eta(I_t)-a_t)\sin t\,dt$。根据 (5.2)，当且仅当 H 为常数，即 $F\propto S^{-2/p}$时，$D=0$ 成立；这意味着 P 在 p 个凸前顶点处均具有 $1/p$ 的转角权重，且没有其他顶点。因此，P 是一个凸等角 p边形；当前顶点等距分布时，它是一个正 p边形。□

5.3. 倒数密度输运与典范分解。对于 $\beta=1/p$，写作 $w=w_\beta$ 和 $r_j=r_j(\beta)$。给定满足 $\sum_{j\ge1}b_j<\infty$ 和 $\sum_{j\ge1}jb_j^2<\infty$的系数 $b_j\ge0$，令 $F_b(e^{i\phi})=2\sum_{j=1}^{\infty}b_j(r_j-\cos j\phi)$。对(5.2)逐项积分并应用帕塞瓦尔恒等式，可得

$$\int_{\mathbb T}u|A|^{2/p}F_b(B)\,d\mu\le 0,\qquad \int_{\mathbb T}F_b w\,dm=0,\qquad \mathcal E(F_b)=2\sum_{j=1}^{\infty}jb_j^2. \tag{5.13}$$

取 $b_j=r_j/j$，得到狄利克雷势

$$F_p(e^{i\phi})=2S(\beta)-2\sum_{j=1}^{\infty}\frac{r_j}{j}\cos(j\phi),\qquad \Lambda F_p=1-w, \tag{5.14}$$

它在 $g\mapsto\int g(1-w)\,dm$的狄利克雷柯西–施瓦茨估计中达到等号成立，并满足 $F_p(e^{i\phi})=2S(\beta)+\mathbb E\log[(1-X)^2+4X\sin^2(\phi/2)]$。

更一般地，对于 $W=P_r(\zeta)=(1-r^2)/|1-r\zeta|^2$ 或 $W=w_\beta$，在(5.3)中令 $U=\Lambda^{-1}(W-1)$且 $K_W=U(1)-U\ge0$(具体而言，$K_{w_\beta}=F_p-F_p(1)$和 $K_{P_r}(\zeta)=2\log(|1-r\zeta|/(1-r))$)，可得

$$p\left(\int_{\mathbb T}W\,d\nu-\nu(\mathbb T)\right)=2\int_{\mathbb T}K_W(B(z))\|D_zH\|_2^2\,dm(z)\ge 0. \tag{5.15}$$

对于第 7 节中的低侧比较，我们将（5.13）专门应用于倒数密度检验

$$F=w_{-\beta}-D_\beta,\qquad D_\beta=\pi\beta\cot(\pi\beta),\qquad C:=\bar F=1-D_\beta,\qquad \mathcal E(F)=\frac{\beta}{2}, \tag{5.16}$$

对应于 $b_j=-r_j(-\beta)>0$。这里，对于 $X=|1-z|^2$ 且 z 在 $\mathbb T$ 上服从均匀分布时，贝塔积分给出 $\mathbb EX^t=4^t\Gamma(t+1/2)/[\sqrt\pi\,\Gamma(t+1)]$（当 $t\ge -1/2$ 时），因此欧拉反射公式得到$w_\beta w_{-\beta}=(\mathbb EX^\beta\,\mathbb EX^{-\beta})^{-1}=\pi\beta\cot(\pi\beta)=D_\beta$。记 $J=H^2$、$\omega=J/|J|$、$w_\beta=C_\beta|1-\zeta|^{-2\beta}$ 和 $V=u|A|^{2\beta}$，将 $w_\beta w_{-\beta}=D_\beta$ 与 $w_\beta\,d\nu=C_\beta B_*(V\mu)$ 结合引理 2.4 可得

$$-\int_{\mathbb T}VF(B)\,d\mu=\frac{D_\beta}{pC_\beta}\iint_{\mathbb T\times\mathbb T}K_{w_\beta}(B(z))|J(w)|\left|\frac{\omega(w)-\omega(z)}{w-z}\right|^2dm(w)\,dm(z).$$

此外，由于 $K_{w_x}(v)=m_v$，（5.12）和（5.15）将 $p\delta$ 和 pL/D_x（其中 $L=-\mu[V(w_{-x}(B)-D_x)]$）表示为关于 $2\|D_zh\|_2^2\,dm(z)$ 对 $d_{B(z)}$ 和 $m_{B(z)}$ 的积分，因此（5.7）之后的逐点比值界蕴含

$$\frac{1-2x}{(1-x)D_x}L\le\delta\le\frac{2}{(1-x)D_xM_x}L.$$

(5.16) 中的狄利克雷能量是一个一般极化恒等式的特例，该恒等式通过对 r_j 的递推关系进行裂项求和得到。对于 a，$b<1/2$ 其中 $a+b<0$ 以及任意整数 $m\ge0$，令

$V_j=(j-a)(j+m-b)r_j(a)r_{j+m}(b)$ 得到 $V_j\to 0$, $V_1=a(m+b)r_m(b)$，以及 $V_{j+1}-V_j=2[(a+b)j+am]r_j(a)r_{j+m}(b)$，从而

$$\sum_{j=1}^{\infty}\big[(a+b)j+am\big]r_j(a)r_{j+m}(b)=-\frac{1}{2}a(m+b)r_m(b). \tag{5.17}$$

令 $m=0$、$a=-u$ 和 $b=-v$（$u,\ v>0$），即可得到混合能量公式

$$\mathcal{E}(w_{-u},w_{-v})=\frac{uv}{u+v}\quad(u,v>0),\qquad \mathcal{E}(F)=\frac{\beta}{2}. \tag{5.18}$$

最后，对于 $\mathbb{T}$ 上任意 p 元组的不重复点（ξ_1，……，ξ_p），存在一个满足 $B(0)=0$ 的典范分解（5.1）：令

$$S(z)=\prod_{i=1}^{p}(1-\bar{\xi}_i z),\qquad A(z)=S(z)-\frac{zS'(z)}{p},\qquad B(z)=1-\frac{S(z)}{A(z)}. \tag{5.19}$$

因为

$$\frac{2A(z)}{S(z)}-1=\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}\frac{1+\bar{\xi}_i z}{1-\bar{\xi}_i z}$$

在 $\mathbb{D}$ 上具有严格正实部，并且除前顶点外边界值为纯虚数，而 $A(\xi_i)=-\xi_i S'(\xi_i)/p\neq 0$，所以多项式 A 在 $\mathbb{D}$ 上无零点，且 B 是一个满足 $B(0)=0$ 及 $B(\xi_i)=1$ 的 p 次布拉施克乘积。在 p 次单位根构成的正则元组处，$A\equiv u\equiv V\equiv 1$ 且 $B(z)=z^p$。

5.4. **等间距前顶点与二次豪斯多夫稳定性**。定义正则谱矩

$$D_p:=\sum_{l=1}^{\infty}\frac{2pl}{p^2l^2-1}r_l(1/p)^2=\|v\|^2,$$

其中 v 是第3节中正 p边形傅里叶矩阵的耦合列。

定理 5.4（等间距凸前顶点处的比较）。假设 P的 p 凸前顶点在 $\mathbb{T}$上等间距分布（允许存在任意数量的凹顶点）。那么 $J(P)\le J(R_p)$，且等号成立当且仅当 P 与 R_p相似，以下任一情形均成立：

（i）圆盘坐标是弧长平衡坐标，且 $p\ge 4$；（ii）$p\ge 3$ 具有非恒等旋转对称性，且 P。

此外，若一列具有 p 个严格凸顶点的简单多边形 P_k 在任一假设下，其凸前顶点均收敛到一个等间距的 p元组，则$\liminf_{k\to\infty} d(P_k)\ge d(R_p)$。对于任意固定的 $p\ge 3$，若凸前顶点在弧长平衡坐标下收敛到一个等间距的 p元组，则

$$\liminf_{k\to\infty} d(P_k)\ge d_p-\frac{\alpha_p}{2+\alpha_p}(d_p-D_p),\qquad d_p=d(R_p),\quad \alpha_p=1-a_0^2,$$

其中 a_0 是正单位最大化特征向量$(a_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ 的第零个坐标，该向量对应于正p边形傅里叶矩阵 M。

证明。记 $x=1/p$。取一个实现有限下极限 d of $d(P_k)$ 的子序列，再取一个使 $\mu_k\rightharpoonup\mu$ 弱收敛的子序列，将其旋转，使极限元组成为 p-次单位根。在典范分解（5.19）中，有 A_k, $V_k\to 1$ 并且 $B_k\to z^p$ 在 $\mathbb{T}$上一致成立。由（5.2）可得，$\mu_k[V_k(\Re B_k^l-r_l)]\ge 0$对每个 $l\ge 1$均成立；取极限得到 $\delta_l:=\Re\widehat{\mu}(lp)-r_l\ge 0$。对于一个具有精确正则元组的单个多边形，引理 5.1 给出 $\delta_1>0$，除非 $F(1-z^p)^{2/p}$为常数，即除非 P与 R_p相似。

令 $j=1+d_p$。将单位能量正则第一特征场写为 $T(z)=z\psi(z^p)$，其中$\psi(\zeta)=\sum_{i\in\mathbb{Z}}c_i\zeta^i$ 且 $c_i=a_i/\sqrt{\ell_i}>0$。对于在 $|i|\le N$处的截断 T_N，c_ic_l 和$\delta_l\ge 0$的正性给出 $\mu|T_N|^2\ge\mu_{R_p}|T_N|^2$。由于变分不等式在三角多项式上对弱极限 μ仍成立，因此只需控制 $(1+d)\mathcal{E}(T_N)\ge \mathrm{Var}_\mu(T_N)$ 中的均值 μT_N。

在情形 (ii) 中，取一个子序列，使非零循环移位 $\ell_0 \in \{1,\dots,p-1\}$ 固定；该移位由旋转对称性诱导（旋转对称性在由三个边界点确定的圆盘自同构上连续作用），极限测度 μ 在乘以 $e^{2\pi i \ell_0/p}$ 后保持不变。因此，对所有 N，都有 $\mu T_N = 0$，从而得到 $d \ge d_p$。对于非正则多边形的精确正则元组，$\delta_1 > 0$ 使模态 $i = 0,\ 1$ 留下一个固定的严格正超额，当 $N \to \infty$ 时亦然。另请注意，p重旋转对称性会自动使以不动点为中心的坐标中的 p 个凸前顶点构成等间距轨道。

在平衡情形下，$\mu z = 0$。将频率 lp $(l \ge 1)$ 分配到式 (2.5) 中（先在有限频率集合上取弱极限），可将所有不能被 p 整除的正频率对应的 $2n(n^2-1)^{-1}|\widehat{\mu}(n)|^2$ 之和限制在 $d - D_p$ 以内。频率 $1 + pi$ $(i \neq 0)$ 的绝对值 $\ell_i \ge 2$ 两两不同，且都与 p 互素。因此，由柯西–施瓦茨不等式可得

$$|\mu T_N|^2 \le \frac{d - D_p}{2} \sum_{0<|i|\le N} a_i^2 (1 - \ell_i^{-2}) \le \frac{\alpha_p}{2}(d - D_p).$$

令 $N \to \infty$，可得 $d \ge d_p - \frac{\alpha_p}{2}(d - D_p)$，整理后即得对所有 $p \ge 3$ 均成立的所述一般下界。

为将此结果提升为平衡坐标在 $p \ge 4$ 时的精确比较 $d \ge d_p$，假设 $\lambda = 1 + d \le j$。均值与方差界给出（在 T 的任意标量归一化下）$\mu|T|^2 \le (j + d/2)\mathcal{E}(T)$。记 $m_\psi = \min_{\mathbb{T}} |\psi|$；我们将在下文验证 $m_\psi > 0$，并引入倒数检验场 $Y(z) = 1/\psi(z^p)$。由于 T 和 Y 占据互不相交的傅里叶剩余类（模 p），因此有 $\mathcal{E}(\{\mathrm{v21},\ Y) = 0$，而 $TY = z$ 意味着 $\mu(TY) = 0$。由柯西–施瓦茨不等式及狄利克雷差分核可得，

$$\mu|Y|^2 \ge (\mu|T|^2)^{-1}, \qquad \mathcal{E}(Y) \le \frac{p\mathcal{E}(\psi)}{m_\psi^4}.$$

我们分别验证 $\mu|Y|^2 > j\mathcal{E}(Y)$ 对于 $p \ge 5$ 和 $p = 4$成立。

对于 $p \ge 5$，将 $c_0 = 1$ 归一化，并令 $b_m = -r_m(-x)$ 和 $q_p = (p+1)/(p-1)^2 \le 3/8$。第3节中的舒尔权重 $h_i = \sqrt{\ell_i}\, b_{|i|}$ 满足 $M_* h = v \le q_p h$，因此 $M_* v \le q_p v$。根据诺伊曼级数，$\sqrt{\ell_i}\, c_i = [(jI - M_*)^{-1} v]_i \le v_i/(j - q_p)$，由此得到 $c_i \le \kappa b_{|i|}$，其中 $\kappa = q_p/(j - q_p) \le 3/5$，而零阶特征向量方程给出

$$U := \sum_{i \neq 0} \ell_i c_i^2 \le \frac{\sum_{i\neq 0} r_{|i|} c_i}{j - q_p} = \frac{d_p}{j - q_p} < \frac{4}{49},$$

利用 $d_p \le d_5 < 1/18$ (引理 3.4)。由于 $w_{-x}(1) = 0$，其绝对收敛的傅里叶级数给出 $\sum_{i\neq 0} b_{|i|}(1 - \cos i\theta) = w_{-x}(e^{i\theta})$。利用 $\cos t \ge -(1 - \cos t)/2$ 以及 $\max w_{-x} \le 2^{2x} < 4/3$（根据詹森不等式和 $\int \log|1 - z|\, dm = 0$），我们得到 $\Re\psi \ge 1 - \kappa w_{-x}/2 > 3/5$。由于$p|i| \le \frac{5}{4}\ell_i$且 $\mathcal{E}(T) = 1 + U$，因此

$$j\mathcal{E}(Y) < \frac{19}{18}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{4}{49}\cdot\Big(\frac{5}{3}\Big)^4 < \frac{5}{6}, \qquad \mu|T|^2 < \frac{13}{12}\cdot\frac{53}{49} < \frac{6}{5},$$

因此 $\mu|Y|^2 > 5/6 > j\mathcal{E}(Y)$。

对于 $p = 4$，取经过旋转的方形特征场 $T = H \circ f$，其中 $f\colon\ \mathbb{D} \to (-1,1)^2$ 是共形的，且 $f(0) = 0$，而 $H(w) = \Re\sin(\tau w) + i\Im\sinh(\tau w)$，其中 τ、$t = \tanh\tau = \cot\tau$如引理 3.3 中所示，因此 $j = \pi/(4\tau t)$。在边 $w = 1 + iv$ $(|v| \le 1)$ 上，$|H(w)|^2 = \sin^2\tau\cosh^2(\tau v) + \cosh^2\tau\sin^2(\tau v)$ 的最小值为 $\sin^2\tau$，平均值为 $\sin^2\tau\cosh^2\tau$。因此 $j\mathcal{E}(T) = (1 - t^4)^{-1}$，并且 $m_\psi^2 = (1 - t^2)j\mathcal{E}(T)$。将 T 乘以 $\bar{z}$ 会使每个全纯模态的绝对频率降低 1，并使每个反全纯模态的绝对频率升高 1；由于 T 的全纯部分和反全纯部分分别为 $\tfrac12(\sin + \sinh)(\tau f)$ 和 $\tfrac12\overline{(\sin - \sinh)(\tau f)}$，我们有

$$\mathcal{E}(T) - 4\mathcal{E}(\psi) = \int_{\mathbb{T}} \Re\big(\sin(\tau f)\overline{\sinh(\tau f)}\big)\, dm = 1.$$

为验证最后一个等号成立，令 $w = x + iy$ 及 $L(s) = \cos s\cosh s - \sin s\sinh s$。于是

$$\Re\big[\cos(\tau w)\cosh(\tau w) - \sin(\tau w)\overline{\sinh(\tau w)}\big] = L(\tau x)L(\tau y),$$

该函数在 $\partial(-1,1)^2$ 上为零，因为 $L(\pm\tau)=0$。因此，被积函数在 $\mathbb{T}$ 上与调和函数 $\Re(\cos(\tau f)\cosh(\tau f))$ 一致，而该函数在 0 处的值为 1。根据引理 3.3，$1.138<j<1.143$ 和 $t<0.735$，从而得到

$$\left[1-j(1-t^4)\right]\left(1+\frac{d}{2j}\right)<0.195(1.063)<0.21<(1-t^2)^2,$$

重新整理得 $\mu|Y|^2>j\mathcal{E}(Y)$。

T 和 Y 均为具有有限能量的连续函数，因此通过¯Fej´er逼近，它们的变分不等式可传递到 μ。由于 $\mu(TY)=\mathcal{E}(T,\ Y)=0$，两种形式在 $\operatorname{span}\{T,Y\}$ 上均为对角形式。将 $\mu|T|^2\ge j\mathcal{E}(T)$ 与 $\mu|Y|^2>j\mathcal{E}(Y)$ 结合，并从 T 和 Y 中选取一个 μ-均值为零的非零线性组合，可得 $\lambda\ge j$。对于一个前顶点等间距的单个非正则多边形，严格不等式 $\mu|T|^2>j\mathcal{E}(T)$ 强制推出 $\lambda>j$，而 R_p 达到等号成立。□

推论 5.5（二次豪斯多夫稳定性与标记对数模型）。将 P 归一化为单位周长，并在弧长平衡坐标中进行研究。令

$$e^2=\sum_{i=1}^{p}\Big(s_i-\frac{1}{p}\Big)^2,\qquad H_p(P)=\inf_{g}d_{\mathrm{H}}(\partial P,g\partial R_p),$$

其中，d_{H} 是豪斯多夫距离，R_p 的周长为1，而 g 遍历刚体运动。

(i) 对于每个固定的 $p\ge4$，都存在常数 c_p、$K_p>0$，使得

$$d(P)-d(R_p)\ge c_pH_p(P)^2-K_pe^2.$$

特别地，存在 $\gamma_p>0$，使得当 $p\ge4$ 且 e 充分小时，$d(P)\ge d(R_{p+1})+\gamma_p$。

(ii) 在 $p=3$处，如果 P 具有非恒等旋转对称性，或者如果 $\delta=\mu[V(\Re B-r_1)]$ 充分小，则更强的线性界 $d(P)-d(R_3)\ge c_3H_3(P)-K_3e$ 成立。对于所有平衡三元组，$d(P)\ge D_3-K_3e^2$。

(iii) 对于充分接近正则 p元组的凸前顶点组，ρ 到$(p-3)$-维仿射空间 $\mathcal{A}$（见(5.22)）的 L^1距离与 δ相当。对于以单位根为方向的等间距平衡三元组，$\delta\le\|\rho-w_{1/3}(z^3)\|_1\le C\delta$。

证明。固定 $p\ge3$，令 $x=1/p$、$\beta=2x$ 和 $j=1+d(R_p)$，并首先假设 e 很小。利用规范因式分解（5.19），进行旋转使得 $\xi_1=1$，并设

$$q=C_p|S|^{-\beta}=w(B)|A|^{-\beta},\qquad h=(FS^{\beta}/C_p)^{1/2},\qquad \delta=\mu[V(\Re B-r_1)],$$

其中 $|F|=\rho=q|h|^2$。因子 A、B、u、V 关于间隙长度光滑变化，并在 $e=0$ 处退化为 $A=u=V=1$、$B=z^p$；特别地，δ 一致有界。

加权强制性。记 $k=h-h(0)$。由 (5.5)，$\|k\|_{\dot H^x}^2\lesssim_p\delta$。我们声称，角点权重 q 同样受到控制：

$$\int_{\mathbb{T}}q|k|^2\,dm\lesssim_p\sum_{n=-\infty}^{\infty}n^{2x}|\widehat{h}(n)|^2\lesssim_p\delta.\tag{5.20}$$

¯对于分离的前顶点，$q\lesssim_p\sum_i w_x(\xi_iz)$。每个旋转权重的傅里叶矩阵的各项模在 $\mathbb{Z}$ 上均被 $K_{nm}=r_{|n-m|}(x)$ 控制。令 $a=(1-2x)/4$ 和 $v_n=r_{|n|}(a)>0$，则恒等式 $w_xw_a=Dw_{x+a}$（$D=\int w_xw_a\,dm$，根据 L^1 中的说明可知其合理性，因为 $x+a<1/2$）给出

$$\frac{(Kv)_n}{v_n}=D\frac{r_{|n|}(x+a)}{r_{|n|}(a)}\lesssim_p(1+|n|)^{2x}$$

ˆ根据上升阶乘公式，将第3节中的二次型界应用于 $|k(n)|$，并从多项式推广到 k，即可证明（5.20）。

令 $\theta\mapsto z(\theta)$ 为满足 $z(0)=1$ 且 $B(z(\theta))=e^{ip\theta}$ 的圆微分同胚；它随间隙平滑变化，并在 $e=0$ 处等于 $e^{i\theta}$。在 θ 坐标下，q 的奇异因子 $w(e^{ip\theta})$ 固定不变，因此 $Q:=\int_{\mathbb{T}}q\,dm$ 随间隙平滑变化；由和为零的间隙变分的循环对称性可知，它在 $e=0$ 处的一阶导数为零，从而得到 $Q=1+O_p(e^2)$。此外，$\int_{\mathbb{T}}qV\,dm=1$，因为 $B_*(u\,dm)=dm$。

设 $G_0 = C_p S^{-\beta}/Q$，并选取满足 $|c_0| = Q^{-1/2}$ 且相位与 $h(0)$ 相同的 $c_0 \in \mathbb{C}$。由于$\|h\|_{L^2(q)} = \|c_0\|_{L^2(q)} = 1$，由逆三角不等式得$\|h - c_0\|_{L^2(q)} \le 2\|k\|_{L^2(q)}$。将$h^2 - c_0^2$ 因式分解并应用柯西–施瓦茨不等式，令 $\alpha = c_0^2/|c_0|^2$，

$$\|\rho - q/Q\|_1 \le \|F - \alpha G_0\|_1 \lesssim_p \sqrt{\delta}.$$

由于 $\|V - 1\|_\infty = O_p(e)$，对 $V - 1$ 积分可得

$$|\mu V - 1| \le |Q^{-1} - 1| + O_p(e\sqrt{\delta}) \lesssim_p e^2 + e\sqrt{\delta}. \tag{5.21}$$

标记对数模型。令 $T(z) = z\psi(z^p)$ 为单位能量正则第一特征场，并定义移植场 $T_e(z) = z\psi(B(z))$。由于 $B(0) = 0$，zB^k 对于 $k \ge 0$ 是全纯的，对于 $k < 0$ 是反全纯的；在任一类中，其与 zB^l 的能量配对等于 $\pm\int_{\mathbb{T}}(1 + kpu)B^{k-l}\,dm = |1 + pk|\mathbf{1}_{k=l}$（因为 $B_* dm = B_*(u\,dm) = dm$），而不同类之间正交。因此 $\mathcal{E}(T_e) = \mathcal{E}(T) = 1$。

记 $L_i = L_{\xi_i}$，并令 X 为带符号密度 $q(a_0 + \sum_{i=1}^p a_i L_i)$ 的实向量空间，其中满足 $\sum_{i=1}^p a_i = 0$。令 $\mathcal{A} \subset X$ 为总质量为 1 且一阶矩为零（$\int z\,m\,dm = 0$）的密度所构成的仿射子空间。我们证明

$$\dim \mathcal{A} = p - 3, \qquad \operatorname{dist}_{L^1}(\rho, \mathcal{A}) \asymp_p \delta. \tag{5.22}$$

令 $\xi(z)$ 表示距离 z 最近的凸前顶点，设 $K(z) = \|D_z h\|_2^2$，并定义

$$E(s) = -2\int_{\mathbb{T}} \big[L_z(s) - L_{\xi(z)}(s)\big] K(z)\,dm(z).$$

由 (5.9) 及 (5.8) 前的核估计，$N(E) \lesssim_p \delta$。对于光滑的 f，线性泛函$\int |h|^2 \Lambda f\,dm + 2\int [f(z) - f(\xi(z))]K(z)\,dm(z)$，当 f 在所有前顶点 ξ_i 处（由 (5.8)）以及在 $f \equiv 1$ 处均为零时，该泛函也为零，因此可写为 $\sum_{i=1}^p a_i f(\xi_i)$，其中实数 a_i 之和为 0。对非恒定模态应用 Λ^{-1}，得到

$$|h|^2 = \int_{\mathbb{T}} |h|^2\,dm + \sum_{i=1}^p a_i L_i + E,$$

所有 Fubini 交换均由 $N(E) < \infty$ 保证其合理性。由于 $q \lesssim_p \sum_i |z - \xi_i|^{-\beta}$，乘以 q 后得到一个元素，它在 $O_p(\delta)$ 中与 ρ 的距离小于 L^1。

互异的对数奇点意味着 $\dim X = p$。在 $e = 0$ 处，我们有 $\int q\,dm = 1$, $\int zq\,dm = 0$、相等的质量 $\int qL_i\,dm$，以及带有 $R(1) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r_{|n|}/|1 + pn| > 0$ 的 $\int zqL_i\,dm = \xi_i R(1)$。由于 p 次单位根在仿射意义下张成 $\mathbb{R}^2$，三个实矩约束在 $e = 0$ 处具有满秩，并且随 θ 坐标变化 $O_p(e)$，因此当 e 足够小时，它们存在一致有界右逆。将系数调整 $O_p(\delta)$ 后，得到满足 $N(|h|^2 - m/q) \lesssim_p \delta$ 的 $m \in \mathcal{A}$，从而证明 $\dim \mathcal{A} = p - 3$ 以及 (5.22) 中的上界。

反过来，对于每个 $m = q(a_0 + \sum_i a_i L_i) \in X$，推前 $B_*(V m\,dm)$ 是 $w\,dm$ 的常数倍。事实上，$qV = uw(B)$，而 $(1 - \zeta)A - S$ 的根（其首项系数的模为 1，因为 $\deg A < p$）满足 $\prod_{B(z)=\zeta} |z - \xi_i| = |1 - \zeta|\,|A(\xi_i)|$；对纤维取平均并利用 $\sum_i a_i = 0$，可得 $B_*(V m\,dm) = [a_0 - (2/p)\sum_i a_i \log |A(\xi_i)|]w\,dm$。因此$\delta = \int V(\Re B - r_1)(\rho - m)\,dm$，这就证明了 (5.22) 中的下界。

由于 $\|m\|_1 \lesssim_p 1$ X 的基在 θ坐标下保持线性无关，m 的系数是一致有界的。在 $e = 0$处，$K_T = \Lambda^{-1}(qT) = jT$和 $K_z = \Lambda^{-1}(qz)$在前顶点处分别取值 $j\xi_i\psi(1)$和 $\xi_i R(1)$（这里 T 是连续的，因为对于某个 $r > 1$有 $qT \in L^r$，由Sobole夫嵌入可知，并且其正傅里叶系数在1处由阿贝尔收敛可求和）。由于 $\kappa = j\psi(1)/R(1)$，函数 $T - \kappa z$ 消去正则空间 X。在θ坐标下，$T_e = z(\theta)\psi(e^{ip\theta})$与 T 的均匀差为 $O_p(e)$，因此 $T_e - \kappa z$与 X 的基的积分为 $O_p(e)$。利用 $\mu z = 0$ 和 $\|\rho - m\|_1 \lesssim_p \delta$ 可得

$$|\mu T_e| = \left|\int_{\mathbb{T}} (T_e - \kappa z)\rho\,dm\right| \lesssim_p e + \delta.$$

在 $p=3$处，模型 $m_e\in\mathcal{A}$ 是唯一的；校正一阶矩 $\int zq/Q\,dm=O(e)$表明$\|m_e-q/Q\|_1=O(e)$，从而得到 $\|\rho-q/Q\|_1\lesssim e+\delta$。在 $e=0$处，$m_e=q=w_{1/3}(z^3)$，与 $\Re z^3$ 进行测试得到反向界 $\delta\le\|\rho-w_{1/3}(z^3)\|_1$。

在（5.2）中保留一对相邻模态，并利用傅里叶系数的正性，可得 $\mu[V(|T_e|^2-j)]\ge c_p\delta$。标量积分 $\int q(1-V)(|\psi(B)|^2-j)\,dm$ 由于光滑依赖性和循环对称性是 $O_p(e^2)$，而将 q/Q 替换为 ρ 会产生 $O_p(e\sqrt{\delta})$的误差。由于$\mathcal{E}(T_e)=1$，变分不等式（$1+d(P)$）$\mathcal{E}(T_e)\ge\mu|T_e|^2-|\mu T_e|^2$ 给出

$$d(P)-d(R_p)\ge c_p\delta-C_p(e^2+\delta^2),$$

因此，当 δ充分小时，$d(P)-d(R_p)\ge c_p'\delta-C_p'e^2$。当 $p\ge4$，或 $p=3$ 具有非恒等旋转对称性时，紧性将该下界推广到所有 δ：否则，存在一个序列满足 $e\to0$、$\delta\ge\delta_0>0$，且 $\limsup d(P)\le d(R_p)$，其弱极限 μ 如定理 5.4 的证明中那样，由相邻模态的 T 携带严格的质量超额，这与其中证明的下界相矛盾（对 $p\ge4$ 使用倒数场，并利用对称性对 $\mu T=0$ 使用 $p=3$）。由于 δ 有界，故可得到一致的裕度。

豪斯多夫距离界。在 θ 坐标中，与 G_0 对应的单位周长边界速度和 R_p 的单位周长边界速度共享可积因子 $C_p(1-e^{ip\theta})^{-\beta}/(2\pi)$，而其余因子 $izA(z)^{-\beta}(\arg z)'/Q$ 和 $ie^{i\theta}$ 的差在一致意义下为 $O_p(e)$。将此与$\|F-\alpha G_0\|_1\lesssim_p\sqrt{\delta}$ 结合，通过平移在 $\theta=0$ 处匹配基点，并沿 $\mathbb{T}$ 积分，可得 $H_p(P)\lesssim_p e+\sqrt{\delta}$。结合上述谱下界，当 e 较小时，这就证明了 (i)；对于较大的 e，只需增大 K_p，因为 $d(P)\ge0$ 且 $H_p(P)\le1$。严格单调性 (3.2) 立即推出邻域间隙 $d(P)\ge d(R_{p+1})+\gamma_p$。

在 $p=3$ 处，这改进为 $H_3(P)\lesssim e+\delta$。对于任意实数 $g\in L^1(\mathbb{T})$，定义施瓦茨积分 $\mathcal{S}g(z)=\int_{\mathbb{T}}(s+z)(s-z)^{-1}g(s)\,dm(s)$。由于对于分离的前顶点，$|S(r\eta)|^{-\beta}\lesssim_p(1-r)^{-\beta}$，从 0 出发的 $S^{-\beta}\mathcal{S}g$ 的原函数在 $\mathbb{D}$ 上由 $C_pN(g)$ 一致有界，因为 $\int_0^1(1-r)^{-\beta}(1-r+|s-\eta|)^{-1}\,dr\lesssim_p|s-\eta|^{-\beta}$。根据旋转后的单顶点原像界 (5.20)，$N(|k|^2)\lesssim\delta$，而 $N(|h|^2-1/Q)\lesssim e+\delta$，因为 $m_e/q-1/Q$ 的对数系数大小为 $O(e)$，且 $N(|h|^2-m_e/q)\lesssim\delta$。设 $h(0)=|h(0)|e^{i\theta_0}$（因此 $\alpha=e^{2i\theta_0}$），函数 $e^{-2i\theta_0}h^2\in H^1(\mathbb{D})$ 在 0 处为实数，因而等于其边界实部的施瓦茨积分；由于 $\Im(e^{-i\theta_0}h)=\Im(e^{-i\theta_0}k)$，我们有

$$h^2-\frac{\alpha}{Q}=\alpha\,\mathcal{S}\Big(|h|^2-\frac{1}{Q}-2\big[\Im(e^{-i\theta_0}k)\big]^2\Big).$$

由于边界数据的 N-范数为 $O(e+\delta)$，$F-\alpha G_0=C_3S^{-\beta}(h^2-\alpha/Q)$ 的原函数的上确界范数为 $O(e+\delta)$。将 G_0 与 R_3 比较可得到 $O(e)$，从而在所述三顶点情形下，$H_3(P)\lesssim e+\delta$，因此 $d(P)-d(R_3)\ge c_3H_3(P)-K_3e$。

最后，对于 R_3，(2.5) 中的级数 B_μ 等于 D_3，并且由于其边界密度非常数，$d(R_3)>D_3$。因此，定理 5.4 的渐近估计在正则三元组的邻域内始终严格高于 D_3，而扩大 K_3 即可涵盖其余三元组。□

注意　到定理 1.5 是推论 5.3、定理 5.4 和推论 5.5 的直接并集(　　i).

6. One reflex vertex with six or more convex vertices

现在，我们将为所有具有 $p\ge6$个严格凸顶点且至多一个凹顶点的简单多边形，建立严格比较 $J(P)<J(R_{p+1})$。为了达到所需的四阶精度，从而在一致地降至 $p=6$ 的范围内区分 P 与 R_{p+1}，我们结合三项要素：去除第一谐波后的圆上的链式法则、跨间隙弦估计，以及经过改进的间隙试探剖面；后者加入了一个内部平台，以捕捉完整的间隙内相位贡献。

6.1. **去除第一谐波后的链式法则与跨间隙弦界**。

引理 6.1（移除第一谐波后的链式法则）。令 P_1 为到 $\mathbb{T}$上$\{z,\bar z\}$ 的正交投影。假设 $h\in H^{1/2}(\mathbb{T})$ 为实函数，满足 $\bar h=0$ 和 $P_1h=0$，并令 $h_2=$

$\int_{\mathbb{T}} h^2\,dm$。对于任意实函数 C^1 F，若其在由 h的本质值域张成的闭区间上具有有界导数，令 $G' = |F'|^2$。则

$$\mathcal{E}(F(h)) - \mathrm{Var}_m\big(F(h)\big) + \frac{1}{2}\|P_1 F(h)\|_2^2 \le \big\langle (\Lambda - I)h, G(h)\big\rangle.$$

特别地，若 $1 + 2h \ge r > 0$ 几乎处处成立， $A = \sqrt{1+2h}$，且 $\psi(h) = h - \log A$，则

$$\mathcal{E}(A) - \mathrm{Var}_m(A) + |\widehat{A}(1)|^2 \le \mathcal{E}(h) - h_2 - \big\langle (\Lambda - I)h, \psi(h)\big\rangle, \tag{6.1}$$

当且仅当 $h = 0$ 几乎处处成立时，等号成立。

证明。令 P_0 为常数投影。将 $P_0 + \frac{1}{2}P_1$ 加到 $\Lambda - I$ 上不会改变其在 h上的作用，却会使 $\Lambda - I + P_0 + \frac{1}{2}P_1$ 的双线性差分核在 $\mathbb{T}\times\mathbb{T}$上逐点非负：

$$\frac{1}{1-\cos t} - 1 - \cos t = \frac{\cos^2 t}{1-\cos t} \ge 0.$$

将一维柯西–施瓦茨不等式 $|F(u)-F(v)|^2 \le (u-v)(G(u)-G(v))$ 对这个非负核积分，得到

$$\big\langle (\Lambda - I + P_0 + \tfrac{1}{2}P_1)F(h), F(h)\big\rangle \le \big\langle (\Lambda - I + P_0 + \tfrac{1}{2}P_1)h, G(h)\big\rangle.$$

由于 $P_0 h = P_1 h = 0$，右侧化简为 $\langle (\Lambda - I)h,\ G(h)\rangle$，从而证明了第一个结论。取 $F(x) = \sqrt{1+2x}$，得到 $G(x) = \frac{1}{2}\log(1+2x) = \log A$，并导出 (6.1)。由于 F'严格递减，柯西–施瓦茨不等式在每个非退化区间上都严格成立；由于差核对几乎所有角分离 t都严格为正，等号成立当且仅当 h 几乎处处为常数，进而 $h = 0$。□

为了界定不同间隙之间的相位相互作用，我们先比较到 p任意点的距离与到 $\mathbb{T}$等距中心的距离。

引理 6.2（与等距中心的比较）。在弧长平衡坐标中，令$D(t)$ 表示从 $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 到 p 个指定点中最近点的圈数距离。令 $y = 1/p$且 $D_0(t) = \mathrm{dist}(t, y\mathbb{Z})$。对于 $[0, 1/2]$上的任意非递减 *Lipschitz* 函数 g，

$$\int_{\mathbb{T}} g(D)\,d\mu \ge \int_{\mathbb{T}} g(D_0)\,dm - \sqrt{B_\mu\,\mathcal{N}\big(g(D_0)\big)}. \tag{6.2}$$

对于均匀测度（$B_\mu = 0$）和严格递增的 g，当且仅当 p 个点等距分布时等号成立。对于 $p \ge 6$ 和 $B_\mu \le 3y^3$，令 $D_c = \min(D, y/2)$ 且 $\gamma = \sqrt{B_\mu[\zeta(3) - y^2\zeta(5)]/(2\pi^4 y^3)} < 0.137$。则归一化弦函数满足

$$\mu L_a(D_c) \ge 1 - 12\gamma y, \qquad L_a(t) = \frac{1-\cos(2\pi a t/y)}{1-\sin(\pi a)/(\pi a)} \quad (0 < a \le 1), \qquad L_0(t) = \frac{12t^2}{y^2}. \tag{6.3}$$

证明。令 $F(r) = m\{D \le r\}$。将 r 增加 $h > 0$，会使闭弧的并集总长度至多增加 $2ph$，因此 $X := F(D)/(2p)$ 是 1-Lipschitz 函数，且满足 $X \le D$。由于 D 的水平集是有限集，F 连续，且 X 与 D_0在 $[0, y/2]$ 上具有相同的均匀分布。

在偶数 y-周期函数构成的子空间上，重排映射 $T : g(D_0) \mapsto g(X)$ 保持 L^2 内积，并使 $\mathcal{E}$ 收缩：根据反射和周期性，将 $g(D_0(t))$ 调和延拓到半圆柱后，具有形式 $U(s,\ D_0(t))$；与 X 复合后，得到延拓 $U(s,\ X(t))$，其狄利克雷能量不会更大，因为 X与 D_0等分布，而 $|X'| \le 1 = |D_0'|$ 几乎处处成立。对于该子空间中任意均值为零的 f，令 $h = \Lambda^{-1} f$（它也属于同一子空间），由对偶性可得

$$\|Tf\|_{\dot{H}^{-1/2}}^2 \ge \sup_{\widetilde{h}} \big\{ 2\langle Tf, T\widetilde{h}\rangle - \mathcal{E}(T\widetilde{h}) \big\} \ge \|f\|_{\dot{H}^{-1/2}}^2.$$

因此 $\mathcal{N}(Tf) \le \mathcal{N}(f)$。将 (2.6) 应用于 $g(X) \le g(D)$，即可证明 (6.2)。如果某个间隙大于 y，那么在其中点附近的某个开区间上$D > y/2 \ge X$，从而 m 严格不等。

每个函数 $L_a(D_0)$ 的均值均为 1。对于 $0<a<1$，令 $u=a^2$，并令 $P(u)=\prod_{j=2}^{\infty}(1-u/j^2)^{-1}$。在一个周期上积分并应用欧拉正弦乘积，可得对每个整数 $n\neq 0$，

$$\frac{1}{|\widehat{L_a(D_0)}(pn)|}=\frac{(n^2-u)(\pi a/\sin(\pi a)-1)}{u}=\frac{n^2-u}{1-u}\left(1+\frac{P(u)-1}{u}\right).$$

这两个因子关于 $u\in(0,1)$ 均为非递减函数（第二个因子通过其正项泰勒级数可知），当 $u\downarrow 0$ 时从 $n^2\zeta(2)$ 开始，并通过连续性延拓至 $a=1$。因此 $\mathcal{N}(L_a(D_0))\le\mathcal{N}(L_0(D_0))=2p[\zeta(3)-y^2\zeta(5)]/\zeta(2)^2$。将 (6.2) 应用于 $g(t)=L_a(\min(t,\ y/2))$ 即可得到 (6.3)。□

引理 6.3（跨间隙弦界）。假设 $p\ge 6$ 和 P 至多有一个凹顶点。令 $y=1/p$ 并假设 $d(P)\le 3y^3$ 且 $u=\max_i s_i\le U\le 1/4$。令 $\mathcal{R}$ 表示所有不同间隙的有序对 (i,k) $(i\neq k)$ 对 (2.7) 中 $f|_{I_i}=s_i^3\Phi$ 的相位积分所作的贡献，并令 $v_\Phi=\int_0^1(t-1/2)^2\Phi(t)\,dt$。则

$$\frac{4Z\mathcal{R}}{y^4}\ge 4Z\pi^2 y\Big[v_\Phi\Big(1-\frac{\pi^2U^2}{12}\Big)(1+0.34y)^{-5}+(1-2\pi^2v_\Phi y^2)\Big(1-\frac{\pi^2y^2}{20}\Big)\Big(\frac{1}{12}-0.137y\Big)\frac{(1-U)^4}{(1-y)^3}\Big].$$

特别地，若 $u\le 3y/2$，则 $4Z\mathcal{R}/y^4>2.83y$。

证明。记 $S_k=\mu(I_k)$，并令 A_i 和 B_k 分别为关于概率测度 $\Phi(v)\,dv$ 和 $d\mu/S_k$ 的边界相位在 I_i 和 I_k 上的平均值 $\int u$。由于 $|w-z|^2\le 4$ 在 $\mathbb{T}$ 上，

$$\mathcal{R}\ge\frac{1}{4}\sum_{i\neq k}s_i^4S_k\big(2-2\Re(A_i\overline{B_k})\big)\ge\frac{1}{2}\sum_{i\neq k}s_i^4S_k(1-|A_i|\,|B_k|).$$

由于每个间隙至多包含一个凹顶点，同一间隙中的任意两点 z,w 都满足 $\Re(u(z)u(w))\le\Re(z\bar{w})$，其中 $s_i\le 1/4$（如引理 2.6 中所示）；对这一逐点比较取平均，可得 $|A_i|$ 和 $|B_k|$ 分别以上界模数 a_i 和 b_k 为界，它们是圆坐标 z 相应平均值的模。由 Φ 的对称性，$a_i=\int_0^1\cos(2\pi s_i(v-1/2))\Phi(v)\,dv$，因此

$$1-a_i\ge 2\pi^2v_\Phi s_i^2\Big(1-\frac{\pi^2U^2}{12}\Big),\qquad a_i\ge 1-2\pi^2v_\Phi s_i^2.$$

对（2.10）逐项积分得到 $v_\Phi=1/12-\zeta(5)/(2\pi^2Z)\in(0.0395,0.040)$。

将 $1-a_ib_k=(1-a_i)+a_i(1-b_k)$ 分开。由于 $s_i\le 1/4$，相对于 I_i 中点的余弦至少为 $\cos(\pi/4)>2/3$，因此平衡性 $\mu z=0$ 迫使 $S_i\le 3/5$。在 $[0,3/5]$ 上，我们有 $(1-S)^{-1/5}\le 1+0.34S$（由凸性和 $1.204^5>5/2$），于是 H¨older 不等式给出

$$\sum_{i=1}^{p}(1-S_i)s_i^6\ge\Big(\sum_{i=1}^{p}(1-S_i)^{-1/5}\Big)^{-5}\ge y^5(1+0.34y)^{-5}.$$

对于第二部分，$q\mapsto q^4(1-2\pi^2v_\Phi q^2)$ 在 $[0,1/4]$ 上递增且为凸函数；应用詹森不等式和 $(1-U)/(p-1)\le y$ 可得

$$\sum_{i\neq k}a_is_i^4\ge\frac{(1-U)^4}{(p-1)^3}(1-2\pi^2v_\Phi y^2).$$

令 α_k 为 μ 在 I_k 上的 z 平均值的辐角（以周为单位），令 $D(t)$ 表示从 t 到最近的 α_k 的距离。由 $1-\cos(2\pi t)$ 的单调性可得 $\sum_k S_k(1-b_k)\ge\mu(1-\cos(2\pi D))\ge\mu(1-\cos(2\pi D_c))$。在 $a=y$ 处应用 (6.3)，并在 $u=\pi y$ 处利用 $1-\sin u/u\ge(u^2/6)(1-u^2/20)$，即可完成所示不等式的证明。

当 $U=3y/2$ 时，$(1-U)^4/(1-y)^3$ 随 y 减小，并在 $y=1/6$ 处取得其最小值 $(3/4)^4/(5/6)^3>0.546$，其中括号内的其他每个因子也同样达到最小值；直接计算得

$$47.4\big[0.0395(0.948)(0.758)+(0.978)(0.977)(0.0605)(0.546)\big]>2.83.\qquad\square$$

6.2. **组合试验剖面与逐点条带屏障**。 现在，我们通过加入一个内部梯形平台 g 来扩展间隙剖面 f，从而在每个间隙内均匀地获取间隙内相位积分。

引理 6.4（色散与能量估计的组合轮廓函数）。 在弧长平衡坐标中，假设 P至多有一个凹顶点。令 $y = 1/p$, $T_j = \sum_{i=1}^{p} s_i^j$, $M = T_4$,$u = \max_i s_i \le U < 1/2$, $w = u/y$, $\delta = (M - y^3)/y^4$, $\epsilon = 1/400$，以及 $\lambda = 1 - \epsilon$。对于任意$0 < k \le \kappa(U)$（其中 κ 来自引理 *2.6*），令

$$D_k(s) = c + 0.750s + 0.026ks^2 + (0.84k - 0.70)s^3 + 0.77k^2 s^4.$$

赋予 $X = s_i$概率 s_i^4/M，并令 $m = \mathbb{E}X = T_5/M$, $\bar{D}_k = \mathbb{E}D_k(X)$，以及 A_k =$(1 + k\lambda m)^2/\bar{D}_k$。那么

$$d(P) \ge MA_k + \frac{2A_k}{1 + k\lambda m}\,\mathcal{R}, \tag{6.4}$$

其中 $\mathcal{R}$ 是 $f|_{I_i} = s_i^3\Phi$的不同间隙相位贡献。

证明。 在间隙 I_i 上，取单位坐标 $v \in [0,1]$，令 $h_i = s_i^3$, $f_i = h_i\Phi(v)$，并令 $g_i = h_i s_i B(v)$在 I_i之外延拓为零，其中 $B(v) = \min\{1, v/\epsilon,(1-v)/\epsilon\}$。定义 $f = \sum_i f_i$, $g = \sum_i g_i$，以及 $G = (I + \Lambda)f + kg$。由引理 2.6，对于 I_i 中的每个目标点， f_i 的间隙内相位积分至少为 $\kappa(U)s_i h_i \ge kg_i$。结合 (2.7) 和 (2.6) 得

$$M(1 + k\lambda m) + \mathcal{R} \le \bar{G} - \mu G \le \sqrt{d(P)\,\mathcal{N}(G)}. \tag{6.5}$$

我们界定 $\mathcal{N}(G)$ 展开式中的每一项。对于 $i \ne j$， f_i 和 g_j 的非负支集彼此不相交，因此能量差核给出

$$\mathcal{E}(f_i, g_j) = -2\int_{I_i}\int_{I_j} \frac{f_i(z)g_j(w)}{|z - w|^2}\,dm(w)\,dm(z) \le 0.$$

对于对角项 $i = j$，将 Φ 从 (0,1) 延拓为零至 $\mathbb{R}$，并令

$$J(v) = \frac{1}{2\pi^2}\ \mathrm{p.v.}\int_{\mathbb{R}} \frac{\Phi(v) - \Phi(w)}{(v - w)^2}\,dw.$$

在 (0,1) 上加入 Φ 的非负平移副本会降低 J：以 $1/s_i$ 为周期进行周期化，由缩放得到 $\mathcal{E}(f_i, g_i) \le h_i^2 s_i \int_0^1 BJ\,dv$；而以 1 为周期进行周期化则得到 $J(v) \ge \Lambda_{\mathbb{T}}\Phi(v) = -Z^{-1}\sum_{n\ge1}\cos(2\pi nv)/n^2 \ge -\zeta(2)/Z$。 $\int_0^1 J(v)\,dv$ 中的内部主值相互抵消，并且由于 $\Phi(v) \le Z^{-1}\sum_{n\ge1}(1 - \cos(2\pi nv))/n^2 = \pi^2 v(1-v)/Z$，我们得到

$$\int_0^1 BJ\,dv \le \frac{1}{2\pi^2}\int_0^1 \frac{\Phi(v)}{v(1-v)}\,dv + \frac{\epsilon\zeta(2)}{Z} \le c + \frac{\epsilon\zeta(2)}{Z} < 0.420,$$

由此 $\mathcal{E}(f,\ g) \le 0.420\sum_i h_i^2 s_i$。根据对角线柯西–施瓦茨不等式， $\mathcal{E}(f) \le \sqrt{(b/2)(1 + e/2)}\sum_i h_i^2 < 0.714\sum_i h_i^2$，而 (2.12) 给出 $\mathcal{E}(f) \ge 2c^2\zeta(5)\sum_i h_i^2$。利用尺度不变性，与 $\mathbb{R}$ 上的零延拓类似地比较，可得 $\mathcal{E}(g) \le \sum_i h_i^2 s_i^2 \mathcal{E}_{\mathbb{R}}(B)$。在 $\mathbb{R}$上，通过分部积分， $\mathcal{E}_{\mathbb{R}}(B)$ 可表示为核 $-(2\pi^2)^{-1}\log|v - w|$ 作用于 B'（ $[0,\epsilon]$ 和 $[1-\epsilon, 1]$上均匀概率密度之差），因此由詹森不等式可得

$$\pi^2\mathcal{E}_{\mathbb{R}}(B) = \int_0^1\int_0^1 \log\frac{1 - \epsilon + \epsilon(v - w)}{\epsilon|v - w|}\,dv\,dw \le \log\frac{1-\epsilon}{\epsilon} + \frac{3}{2} < 0.77\pi^2,$$

利用 $\int_0^1\int_0^1(-\log|v - w|)\,dv\,dw = 3/2$。在角坐标下， $f_i'' = ch_i q(v)/s_i^2$，其中 $q(v) = -2\log(2\sin\pi v)$，因此分部积分得到 $\langle f',\ g'\rangle \le 0.031c\sum_i h_i^2$因为 $\int_0^1 qB\,dv \ge 2\epsilon\log(4\epsilon) - 3\epsilon > -0.031$。最后， Φ'在 0 和 $1/2$处为零，并且在 (0， $1/2$) 上是凹函数，因此 Φ 和 B 都向每个间隙的中点递增，而它们的间隙平均值 h_i 和 $\lambda s_i h_i$随 s_i共同递增；故 $\mathrm{Cov}_m(f,\ g) \ge 0$。

展开 $\mathcal{N}(G)$ 并舍去 $-2k\,\mathrm{Cov}_m(f,\ g) - \|f + kg\|^2_{\dot{H}^{-1/2}} \le 0$，我们得到

$$\mathcal{N}(G) \le \|f\|^2_{\dot{H}^{3/2}} + 2\|f'\|_2^2 + 2k\langle f', g'\rangle + 2k\mathcal{E}(f,g) + k^2\mathcal{E}(g) - 2\,\mathrm{Var}_m(f).$$

应用 (2.11) 以及刚刚建立的界，可得 $\mathcal{N}(G) \le M\bar{D}_k$。代入 (6.5) 并展开正方形可得 (6.4)。□

We r记录引理 6.4 的三个推论，这些推论将在本文及第 7:

（a） A_k上的切线下界。当 $u/y \le 7/4$ 和 $ku \le 7/20$时，利用 $X^2 \le uX$以及 $\operatorname{Var} X \le u\mathbb{E}[(X-m)^2/X] = u(m^2\mathbb{E}(1/X) - m)$可得 $2\mathbb{E}X^2/m^2 \le 1 + uT_3/T_4 \le 1 + u/y \le 11/4$ （因为 $T_4 \ge yT_3$）。令 $a = k\lambda$、 $b_0 = 0.750/c \in$ （1.803，1.805），并令$\ell = 1 + (2a - b_0)m \in$ （0，1.1）。由于 $D_k(X) \le c + 0.750X + [0.026 + 0.14ku + 0.77(ku)^2]X^2$，且方括号内的值小于 0.17，因此有 $\bar{D}_k/c \le 1 + b_0 m + (0.17/c)(11/8)m^2$，而 $(1+am)^2 - \ell(1+b_0m) = (b_0-a)^2m^2$。由于 $(b_0 - a)^2 > 0.64 > 1.1$（0.17）（2.406）$11/8$，可推出 $A_k \ge \ell/c$；特别地，

$$A_{0.95} \ge 2.4 + 0.19m, \qquad A_1 \ge 2Z + 0.4m. \tag{6.6}$$

(b) 独立递增振幅。将 s_i^3替换为任意满足递增条件的非负振幅 h_i，可保持 $\operatorname{Cov}_m(f,g) \ge 0$，并得到 $\mathcal{N}(G) \le \sum_i h_i^2 D_k(s_i)/s_i^2$，其首项均值为$\sum_i h_i s_i(1+k\lambda s_i)$。取 $h_i = s_i^3(1+k\lambda s_i)/D_k(s_i)$（由于 $3D_k - sD_k' = 3c + 1.50s + 0.026ks^2 - 0.77k^2s^4 > 0$，它随 s_i递增），即可得到 $d(P) \ge \sum_i s_i^4(1+k\lambda s_i)^2/D_k(s_i) + 2\min_i(h_i/s_i^3)\mathcal{R}$。

(c) 矩插值。令 $r_i = s_i/y$ 和 $q_j(v) = \sum_{l=0}^{j-2}(j-1-l)v^l$。当 $w = u/y \le w_*$时，令 $a_j = yq_j(w_*)/q_4(w_*)$，则对每个整数 $j \ge 4$，

$$(1+y\delta)^{(j-1)/3} \le \frac{T_j}{y^{j-1}} \le 1 + a_j\delta. \tag{6.7}$$

下界由权重为 s_i的幂平均得到，而上界则通过对 $r_i^j - 1 - j(r_i - 1) = (r_i-1)^2 q_j(r_i)$ 求和，并注意到 q_j/q_4 在 $[0,\infty$上递增而得（其前三个系数的比值递增，且更高次系数非负）。

引理 6.5（初始离散度与剖面界）。假设 P 至多有一个凹顶点，并沿用引理 *6.4* 的记号。对于 $p \ge 6$，假设 $d(P) \le d(R_{p+1})$ 意味着

$$u < \frac{1}{4}, \qquad \delta = \frac{T_4 - y^3}{y^4} < 0.85, \qquad \delta < 0.84 \quad (p \ge 7). \tag{6.8}$$

~ ~ ~对于任意满足 $u \le 1/4$ 的 p，取 $k = 1$ 属于 $G = (I + \Lambda)f + g$，并设 $h = (G - \bar{G})/c$, $h = h - P_1 h$,$h_2 = \int_{\mathbb{T}} h^2\,dm$, $E = \mathcal{E}(h)$，以及 $\epsilon = 1/400$。则

$$c\int_{\mathbb{T}} h\,d\mu \ge M + (1-\epsilon)T_5 + \mathcal{R},$$

$$E \le 2ZM + 4WT_5 + K(u)T_6, \qquad h_2 \le c^{-2}\big[\sqrt{b/2} + (1.17+u)u\big]^2 T_5,$$

其中 $K(u) = 2.406^2(0.714 + 0.84u + 0.77u^2) + 4.812(0.031)$。此外，$\|P_1\widetilde{h}\|_\infty \le (4|\widehat{f}(1)| + 2|\widehat{g}(1)|)/c$。

证明。根据推论 3.5（对于 $p \ge 7$）和 $216d_7 < 216(0.013273)$（对于 $p = 6$），我们有$d/y^3 \le d_*$: $= 2Z + 2.78y$。引理 2.5 给出 $M \le (c + bu)d$，从而得到 $\delta < 1.16 + 2.16w$。另一方面，将 r_i^4在 1 附近展开可得

$$\delta = \sum_{i=1}^{p}(r_i-1)^2(r_i^2 + 2r_i + 3) \ge (w-1)^2(w^2 + 2w + 3) \ge 6(w-1)^2, \qquad r_i = \frac{s_i}{y}, \tag{6.9}$$

这迫使 $w < 7/4$。若 $u \ge 1/4$，则根据 (6.9) 必有 $p = 6$, $u < 7/24 < 1/3$，以及 $\delta > 2$；在 (6.4) 和 (6.6) 中取 $k = 0.95$（因此 $ku < 7/20$），得到 $d/y^3 \ge 2.4(1 + y\delta) > 3.2$，这与$d/y^3 < 2.87$矛盾。因此 $u < 1/4$。

现在取 $U = \min(7y/4,\ 1/4)$ 和 $k = 1$。比值 $(1-U)^4/(1-y)^3$ 在$y = 1/7$处取得最小值，此时其超过 $1/2$，因此由引理 6.3 得 $\mathcal{R}/y^3 > y^2/2$ （因为 $\pi^2[0.039(0.94)(0.73) + (0.95)(0.97)(0.059)/2] > 1/2$）。由于 $m \le 1/4$，由 (6.6) 得 $A_1 \ge 2Z + 0.4m \ge 2(1 + \lambda m)$。代入 (6.4)，并利用 $T_5 \ge yM$，得到

$$\frac{d}{y^3} \ge (1+y\delta)(2Z + 0.4y) + 2y^2,$$

因此 $R \coloneqq (d-2Zy^3)/y^4 \ge 2Z\delta + 0.4 + (2+0.4\delta)y$。在 $\delta = 0.85$ 处，对于 $p=6$，该值超过 2.78；在 $\delta = 0.84$ 处，对于 $p=7$，该值超过 2.741，对于 $p=8$，9，该值超过 2.60，对于 $p \ge 10$，该值超过 2.34，这与推论 3.5 矛盾。于是 (6.8) 得证。

对于剖面界，$\int h\,d\mu$ 的下界直接由 (6.5) 和平衡性 $\widetilde{(}\mu P_1 h = 0)$ 得出。由于移除 P_1 不会改变能量减方差，展开 $G = (I+\Lambda)f + g$ 可得

$$c^2(E - h_2) = \|f\|_{\dot H^{3/2}}^2 + \|f'\|_2^2 - \mathcal{E}(f) + 2\langle f', g'\rangle + \mathcal{E}(g) - \operatorname{Var}_m(f+g). \tag{6.10}$$

类似地，$\mathcal{E}(G) \le \|f\|_{\dot H^{3/2}}^2 + 2\|f'\|_2^2 + 2\langle f', g'\rangle + \mathcal{E}(f) + 2\mathcal{E}(f,g) + \mathcal{E}(g)$，代入引理 6.4 的证明中得到的估计，可得 E 的界。将 $f+g$ 中心化，并利用 $\|f+g\|_2 \le (1.17+u)u\sqrt{T_5}$，可得 h_2。最后，由于 $I+\Lambda$ 将模态 ± 1 乘以 2，我们有 $\sim \qquad \sim \|P_1 h\|_\infty \le (4|f(1)| + 2|\widehat{g}(1)|)/c$。$\square$

引理 6.6（Λf 的逐点障碍界）。设 $f|_{I_i} = s_i^3 \Phi(v)$ $(v \in [0,1])$，并令 $m = \min_i s_i$ 和 $u = \max_i s_i$。在每个间隙 I_i 上，

$$\frac{\pi^2 s_i^2}{Z} v(1-v) - \frac{\zeta(2)}{Z} u^2 \le \Lambda f \le \frac{\pi^2 s_i^2}{Z} v(1-v) - \frac{\zeta(2)}{Z} m^2.$$

对于相等的间隙，两种界相同，在每个前顶点处均有 $-\Lambda f = [\zeta(2)/Z]u^2$。一般而言，$-\Lambda f \le [\zeta(2)/Z]u^2 < 1.37u^2$，并且用 $t = v - 1/2$ 表示为，

$$\frac{\Lambda f}{s_i^2} \le C_\Phi(1-4t^2) - \frac{8t^2}{\pi^2}, \qquad C_\Phi \coloneqq \frac{2}{Z}\left(3\log 2 + \frac{17\pi^2}{72} - \frac{35}{9}\right) < 0.87 < \frac{7}{8}.$$

证明。考虑角向周长为 2π、垂直深度为 $t>0$ 的半圆柱。在长度为 s（以周为单位）的间隙上，考虑 Neumann 调和延拓及其端点迹：

$$N_s(v,t) = s^3\left[1 - \frac{1}{Z}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nt/s}\cos(2\pi n v)}{n^3}\right], \qquad A_s(t) = N_s(0,t).$$

在每条半条带上令 $V = N_s - A_s + A_u$，则其在每条竖直射线处连续拼接（其值为 $A_u(t)$，且其水平法向导数为零）。此外，$\Delta V = A_u'' - A_s'' \le 0$，因为 $-Z A_s''(t) = s[-\log(1-e^{-t/s})]$ 是关于 s 单调递增的正函数之积。因此，V 在全局上是超调和的，在 $t=0$ 处与 f 一致，并且当 $t \to \infty$ 时趋于 $u^3 \ge \bar f$，所以由最大值原理，V 位于 f 的调和延拓之上。将 u 替换为 m 即可得到次调和下障碍。在 $t=0$ 处（此处调和延拓的法向导数为 $-\Lambda f$）取向内法向导数，并利用 $\sum_{n\ge 1}(1-\cos(2\pi n v))/n^2 = \pi^2 v(1-v)$，即可证明该双边不等式。

对于抛物线上界，将 $\phi(t) = \Phi(1/2+t)$ 在 $[-1/2, 1/2]$ 外延拓为零。将周期化差分核中的所有其他间隙及平移副本舍去，得到 $\Lambda f / s_i^2 \le J(t)$，其中 $J(t) = (2\pi^2)^{-1}\,\mathrm{p.\,v.}\int_{\mathbb{R}} (\phi(t) - \phi(v))/(t-v)^2\,dv$。恢复单位周期副本后，得到

$$J(t) = \frac{\pi^2}{Z}\Big(\frac{1}{12} - t^2\Big) + \frac{1}{2\pi^2}\sum_{k\ne 0}\int_{-1/2}^{1/2} \frac{\phi(v)}{(k+v-t)^2}\,dv.$$

将 $k+v$ 与 $-k-v$ 配对，可将该和表示为关于 t^2 的非负系数幂级数，因此 J 是关于 t^2 的凸函数。在端点 $t = 1/2$ 处，由詹森不等式（因为 Φ 是 $[0,1]$ 上的对称概率密度）可得 $J(1/2) = -(2\pi^2)^{-1}\int_0^1 \Phi(v)\,v^{-2}\,dv \le -2/\pi^2$。在中心 $t=0$ 处，利用 $\phi'(0) = 0$ 和 $\phi''(v) = -(4\pi^2/Z)\log(2\cos \pi v)$ 分部积分一次，得到

$$J(0) = -\frac{1}{\pi^2}\int_0^{1/2} \frac{\phi'(v)}{v}\,dv = \frac{2}{Z}\int_0^1 (-\log x)\log\Big(2\cos\frac{\pi x}{2}\Big)\,dx.$$

由欧拉余弦乘积以及对超过 $1-x^2$ 的因子使用 $1-\theta \le e^{-\theta}$，可得 $\cos(\pi x/2) \le (1-x^2)\exp(-(\pi^2/8 - 1)x^2)$。利用 $\int_0^1 (-\log x)\log(1-x^2)\,dx = -\sum_{n\ge 1}[n(2n+1)^2]^{-1} = 2\log 2 + \pi^2/4 - 4$，得到 $J(0) \le C_\Phi < 0.87$（因为 $\log 2 < 0.6932$、$\pi^2 < 9.87$，且 $Z > 1.20$）。连接变量 t^2 中的 $(0, C_\Phi)$ 与 $(1/4, -2/\pi^2)$ 的弦线，即得所述抛物线上界。$\square$

6.3. 对六个或更多凸顶点的比较。现在我们汇集第 6.1–6.2 小节中的工具，以排除任何具有 $p \ge 6$ 个严格凸顶点、至多一个凹顶点，且满足 $d(P) \le d(R_{p+1})$ 的多边形。保留引理 6.5 中的轮廓函数 f，g，h，B，ϵ，K，并令 $y = 1/p, M = T_4, w = u/y, \delta = (M - y^3)/y^4, s = \sqrt{\delta}, D = 2\int h\,d\mu - \mathcal{E}(h)$，以及 $h_2 = \int h^2\,dm$。

From (6.10)、引理 6.5 以及 (2.11) 中的间隙内方差界，我们对 $u \le U \le 1/$ 有 4:

$$D + h_2 \ge 2ZM + \big[4Z(1-\epsilon) - 2W\big]T_5 + B_6T_6 + 2\zeta(6)T_7 - B_8T_8 + 4Z\mathcal{R}, \tag{6.11}$$
$$\mathcal{E}(h) \le 2ZM + 4WT_5 + K(U)T_6,$$

其中 $B_6 \coloneqq 2.072 - 4.812(0.031)$ 和 $B_8 \coloneqq 2.406^2(0.77)$。注意，$W = \pi^4/90 < 1.0824$。还要注意，由于除最大值以外的 $p-1$ 偏差 $r_i - 1$ 之和为 $1-w$，(6.9) 可加强为 $\delta \ge (w-1)^2[w^2 + 2w + 3 + 3/(p-1)]$。

应用链式法则和二次谐波补偿。设 $-a \le h \le b_+$ with$r = 1 - 2a > 0$，并令 $A = \sqrt{1 + 2h}$ and $\psi(h) = h - \log A$，从而 (6.1) 适用。利用引理 6.6 的障碍界，我们有 $(\Lambda - I)h + c^{-1}\Lambda g = c^{-1}($ $f'' + f + g - \bar{G}) \ge -b_0$，其中$b_0 = 1.387u + \bar{G}/c$。对于任意 $t \ge 0$，令 $R_t(x) = \psi(x) - \psi(t) - \psi'(t)$ $(x - t) \ge 0$ 为 ψ 在 t 处的非负凸切线余项。$(1 + 2sx)^{-1}$ 在 $[-a, \infty)$ 上的弦界给出

$$\psi(x) = 2x^2 \int_0^1 \frac{s'\,ds'}{1 + 2s'x} \le 2x^2 \int_0^1 s'\big[1 + s'(r^{-1} - 1)\big]\,ds' = v_r x^2, \qquad v_r \coloneqq \frac{1 + 2/r}{3}.$$

由于 $(t\psi'(t) - \psi(t))' = 2t/(1 + 2t)^2 \le 2t$ 且 $\bar{h} = 0$，我们有 $R_t(h) \le v_r h_2 \overline{+ t^2}$。此外，$R_t'(x) = 2(x - t)/[$ $(1 + 2t)(1 + 2x)],$，因此 $\mathrm{Lip}(R_t) \le 2\max(a + t,\ b_+ - t)/[r(1 + 2t)]$。将这些估计与 $\mathcal{E}(g) \le 0.77T_8$ 结合，得到

$$\big\langle (\Lambda - I)h, \psi(h)\big\rangle \ge \psi'(t)\big(\mathcal{E}(h) - h_2\big) - b_0(v_r h_2 + t^2) - c^{-1}\,\mathrm{Lip}(R_t)\sqrt{0.77T_8\,\mathcal{E}(h)}. \tag{6.12}$$

我们还注意到，(2.6) 给出 $\mathcal{E}(h) \ge [(M + \bar{g})/c]^2/d \ge 2Zy^3$（因为 $4Z(1-\epsilon) > 2.78$）。

现在(4), j以及 $1 + k\,d$, $A($ $A - \widehat{A} - P_1A$（其中 C 来自引理 2.2），并记$X^2 = \mathcal{E}(k) = \sum_{|n|\ge 2} |\widehat{A}(n)$ $|^2/|n|$。对于 $0 \le t \le 1$，引理 2.2 给出 $U = z(A + itk)$ 的能量为 $\mathcal{E}(U) = (\bar{A})^2 + \mathcal{E}(A) - (2t - t^2)X^2$。由平衡性以及将 (2.6) 应用于 $U - \bar{A}z$ 和 zk,

$$|m| \coloneqq |\mu U| \le M_A \coloneqq |A_1| + \sqrt{d\mathcal{E}(h)/r}, \qquad |\mu(zk)| \le \sqrt{d}\,X,$$

使用 $\mathcal{E}(A) \le \mathcal{E}(h)/r$ 和 $|A_1| \le 2h_2/(1 + \sqrt{r})^2$（来自 $2(A-1) = 2h - (A-1)^2$ 和 $P_1h = 0$）。

为消除非零均值 $m = \mu U$，加入实切向扰动 $q = 2\Im(\bar{m}z)/j$，构成 $W = z(A + i(tk + q)) = U + ($ $\bar{m}z^2 - m)/j$。记 $\beta = \mu z^2$，则有

$$\mu W = \frac{dm + \bar{m}\beta}{j}, \qquad \mathcal{E}(W) = \mathcal{E}(U) + \frac{2|m|^2}{j^2} + \frac{4\Re(mA_1)}{j}.$$

对 z 和 $\bar{z}$ 进行检验得到 $|\beta| \le d$，因此 $\mu q^2 \ge 2(1-d)|m|^2/j^2$ 且 $|\mu(kq)| \le 2M_A\sqrt{d}\,X/j$。代入 $j\mathcal{E}($ $W) \ge \mu A^2 + \mu(tk + q)^2 - |\mu W|^2$，利用 $A^2 = 1$ 和 $\overline{2j} - 2(1 - d) + 4d^2 = 4dj$，并对 $j(2t - t^2)$ $X^2 - 4tM_A\sqrt{d}\,X/j$ 关于 $t \in [0,1]$ 取最大值，得到

$$d \ge 2\mu h - j\big(\mathcal{E}(A) - \mathrm{Var}_m(A)\big) + j\Big(X - \frac{2M_A\sqrt{d}}{j^2}\Big)_+^2 - \frac{4dM_A^2}{j} - 4|A_1|M_A,$$

当 $X = 0$ 时，该结论同样成立。令 $f_\perp = f - M - P_1f$ 和 $v = -f_\perp/c$，由傅里叶柯西–施瓦茨不等式可得 $X^2 \ge L \coloneqq 2\langle A,\ v\rangle - \mathcal{E}(v)$。对任意$\eta \in (0,\ 1)$，应用 $(X - b)_+^2 \ge (1 - \eta)X^2 - (\eta^{-1} - 1)b^2$ 并利用 $j \ge 1$，我们得到

$$d \ge 2\mu h - j\big(\mathcal{E}(A) - \mathrm{Var}_m(A)\big) + (1 - \eta)L - \frac{4dM_A^2}{\eta} - 4|\widehat{A}(1)|M_A. \tag{6.13}$$

将 $F_1 = |\widehat{f}(1)|$ 和 $G_1 = |\widehat{g}(1)|$代入 L中的 $A = 1 + h - (A-1)^2/2$，并结合$f_\perp \ge -M - 2F_1$ 与 $\mathrm{Cov}_m(f,\ g) \ge 0$ 可得

$$L \ge c^{-2}\big[\mathcal{E}(f) - 2F_1^2 + 2\|f_\perp\|_2^2 - 4F_1G_1\big] - \frac{4(M + 2F_1)h_2}{c(1 + \sqrt{r})^2}.$$

命题 6.7（一个凹顶点与六个或更多凸顶点）。若 $p \ge 6$ 且 P 至多有一个凹顶点，则 $J(P) < J(R_{p+1})$。

证明。反设 $d = d(P) \le d(R_{p+1})$。令 $Y = 1/6$, $\tau = y/Y \in (0,1]$, $s = \sqrt{\delta}$，且 $R = (d - 2Zy^3)/y^4$。根据推论 3.5，对于 $p = 6$、$p = 7$、$p \in \{8,9\}$ 和 $p \ge 10$，R 分别严格小于 2.78、2.741、2.60 和 2.34。令 $d_* = 2.406 + 2.78y$，于是 $d < d_* y^3$。

定义 $S = 0.925$, $W_* = 1.34$, $U = yW_*$, $\omega = \sqrt{(1-y)/6}$，以及 $w_0 = 1 + \omega s$。由 (6.8) 可得，$s < S$。此外，$u/y \le \min(W_*, w_0)$：令 $l = u/y - 1$，剩余的 $p-1$ 个归一化间隙的均值为 $1 - l/(p-1)$，因此由詹森不等式可得

$$\delta \ge (1+l)^4 + (p-1)\Big(1 - \frac{l}{p-1}\Big)^4 - p \ge \frac{6l^2}{1-y}$$

（l 中的所有高阶项均为非负），因此有 $l \le \omega s$；另一方面，由于 $0.34^2(6 + 4\cdot 0.34 + 0.34^2) > 0.85$, (6.9) 给出 $l < 0.34$。

令 $a_j = y q_j(W_*)/q_4(W_*)$、$Q_j = 1 + a_j s^2$ 和 $M_0 = 1 + y s^2$，则（6.7）给出 $(1+y\delta)^{(j-1)/3} \le T_j / y^{j-1} \le Q_j$，其中 $j \ge 4$。两个轮廓函数 Φ 和 B 均具有 $V(t) = \sum_{j\ge 1} b_j (1 - \cos(2\pi j t))$ 的形式，其中 $b_j \ge 0$ 和 $\sum_j b_j = \int_0^1 V \le 1$（具体而言，对于 Φ，有 $b_j = (Zj^3)^{-1}$；对于 B，有 $b_j = 2\epsilon(\sin(\pi j\epsilon)/(\pi j\epsilon))^2$），因为 $1 - B$ 是周期三角帐篷函数）。在长度为 x_0 的间隙上，$x_0^m V$ 的第一傅里叶系数与同一间隙上的常数 $x_0^m b_V(x_0)$ 的第一傅里叶系数一致，其中

$$\frac{\int_0^1 (1-\cos(2\pi j t)) e^{-2\pi i x_0 t}\,dt}{\int_0^1 e^{-2\pi i x_0 t}\,dt} = \frac{j^2}{j^2 - x_0^2}, \qquad b_V(x_0) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{b_j}{1 - x_0^2/j^2}.$$

对于 $m \in \{3,4\}$，由于 $U^2 < 0.05$，我们有

$$0 \le \frac{(x_0^m b_V(x_0))'}{m x_0^{m-1}} \le \frac{1}{1-U^2} + \frac{2U^2}{3(1-U^2)^2} < 1.09.$$

赋予 $\ell = s_i$ 概率 s_i。由 (6.7)，$\mathrm{Var}(\ell^m)/y^{2m} \le (a_{2m+1} - 2my/3)s^2$ 对 $m \in \{3,4\}$ 成立（对 T_{m+1} 的下界两边平方）。任意实值阶梯函数的首个傅里叶系数的平方的两倍不超过其方差；将利普希茨界应用于 ℓ 的两个独立副本，并注意到 $d(\ell^4)/d(\ell^3) \le 4U/3 < 0.30$，可得 $2\max\{F_1^2, (3G_1/(4U))^2\} \le 1.09^2 \mathrm{Var}(\ell^3)$。由于 $2y = \tau/3$、$a_7 < \sout{0.846\tau,\ \text{且}\ 1.09}\sqrt{(0.846 - 1/3)/2} < 0.553$，我们得到

$$F_1 \le y^3 \chi, \qquad G_1 \le 0.30 y^3 \chi, \qquad \chi := 0.553 s\sqrt{\tau}.$$

此外，由条件方差可知，$\mathrm{Var}_m(f) \ge e T_7/2 + \mathrm{Var}(\ell^3)$，因此 $2\|f_\perp\|_2^2 = 2\mathrm{Var}_m(f) - 4F_1^2 \ge e T_7 - 0.64 F_1^2$（因为 $4(1 - 1/1.09^2) < 0.64$）。

令 $c_* = 2.406$, $j_* = 1 + d_* y^3$, $\lambda = 1.25$, $\eta = 0.25$, $k_0 = 2\lambda/(1 + 2\lambda y^2)$, $z_0^2 = 1.017/(2\cdot 1.203^2)$ 和 $\alpha = 1 - \tau/20$。为简洁起见，在下文的包络中用 w_0 替换 w，定义

$$a = \alpha\Big\{c_*\big[\tfrac{7}{8}w_0^2 + 1.75 y w_0^3 + y^2 w_0^4 - y\big(1 + (1-\epsilon)y\big)\big] + 4.6 c_* \chi y\Big\},$$

$$r = 1 - 2ay^2, \qquad d_1 = (1 + \sqrt{r})^2,$$

$$H = \alpha^2 c_*^2 \left[\sqrt{\frac{1.0824 Q_5}{2\cdot 1.202^2}} + y\sqrt{0.353 + (1.353 a_7 - 2y)s^2} + y^2\sqrt{0.002 + (1.002 a_9 - 8y/3)s^2}\right]^2,$$

$$E = \alpha^2\big[c_* M_0 + 4(1.0824) y Q_5 + K(U) y^2 Q_6\big], \qquad m = \frac{2Hy}{d_1} + \sqrt{\frac{d_* E}{r}},$$

$$h_0 = \alpha\big[1.387 w_0 + c_* y^2 (M_0 + y Q_5)\big], \qquad v_r = 1 + \frac{2(1-r)}{3r}.$$

将 h 和切向试探函数 $-f_\perp/c$ 同时按 α 缩放后，引理 6.6 和引理 6.5 确保 $-ay^2 \le \alpha h \le (a + 2\lambda)y^2$、$h_2(\alpha h) \le H y^4$、$\mathcal{E}(\alpha h) \le E y^3$ 以及 $M_A \le m y^3$。事实上，M_0, $Q_5 \le w_0$（因为 $a_5 \le Y q_5(W_*)/q_4(W_*) < 0.313$ 和 $\omega > 0.37$），而引理 6.6 的下障碍给出

$$\frac{\alpha h/y^2 - a}{\alpha c_*} \le 0.495 w_0^2 + y(1 + M_0 - 1.75 w_0^3) + y^2(1 - \epsilon + Q_5 - w_0^4) \le 0.495(1.38)^2 + \frac{y}{4} + y^2 < \frac{2\lambda}{c_*},$$

因此，对于 $t=\lambda y^2$ 处的切线估计（6.12），$|\alpha h-\lambda y^2|\le (a+\lambda)y^2$。$H$ 的界可通过将 f 和 g 进行中心化后，对 G 应用三角不等式得到；注意到间隙内剖面方差分别被 0.353 和 0.002 所界定，而其余贡献则是有上界的间隙幂方差。

将（6.11）–（6.13）应用于经 α 缩放的试探函数，得到

$$R\ge P(y,\delta)-\mathcal{L}(y,s)+\frac{4Z\alpha\mathcal{R}}{y^4}.$$

这里，首项 $2Z(2\alpha-\alpha^2)M$ 在减去 $2Zy^3$ 并除以 y^4 后变为 $-2Z(1-\alpha)^2/y$。令 $g_\alpha=4(1.202)\alpha(1-\epsilon)-2(1.0824)\alpha^2$、$a_0=1+(1-\epsilon)y$ 以及 $a_1=y(1+4(1-\epsilon)y/3)$，并在缩放前使用 $\mathcal{E}(h)\ge (M+\bar g)^2/(c^2 d)$，我们得到

$$\begin{aligned}P\ge\ & -c_*\frac{(1-\alpha)^2}{y}+2.404(2\alpha-\alpha^2)\delta+g_\alpha\Big(1+\frac{4}{3}y\delta\Big)\\ &+\alpha^2\Big[2.072(2-\eta)y\Big(1+\frac{5}{3}y\delta\Big)+2.034y^2(1+2y\delta)+2(1-\eta)(2.404)^2z_0^2y^2\Big]\\ &+\alpha^2k_0(2.404)^2y\,\frac{a_0^2+2a_0a_1\delta}{d_*}.\end{aligned}$$

令 $c_\alpha=\alpha c_*$ 且 $\mathcal{E}(g)\le 0.77T_8$，累积误差项为

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(y,s)=\ & 2\alpha c_\alpha(0.031)yQ_6+c_\alpha^2(0.77)y^3Q_8+d_*Ey^2+k_0Hy^2+j_*h_0(v_rH+\lambda^2)y\\ &+\frac{2j_*c_\alpha(a+\lambda)\sqrt{0.77Q_8E}}{r(1+2\lambda y^2)}y^3+\frac{4}{\eta}d_*m^2y^5+\frac{8Hmy^3}{d_1}\\ &+(1-\eta)\left[3.84c_\alpha^2\chi^2y^2+\frac{4c_\alpha(M_0+2\chi)Hy^3}{d_1}\right].\end{aligned}$$

将 $Y=1/6$ 处的求值（固定 s）记为上标 $\circ$，并令 $k=\alpha/0.95=1+(1-\tau)/19$。我们声称

$$\mathcal{L}(y,s)\le \tau k^3\mathcal{L}^\circ(s).$$

在未缩放包络中，y 中唯一的递减输入是 $w_0=1+\omega s$，其满足 $-w_0'\le s/4$、$w_0<1.38$ 和 $w_0-1>0.37s$，对于 $s>0$ 成立。因此，对于 $1\le j\le 4$，$y(w_0^j-1)$ 随 y 增加而增加（因为 $w_0^j-1\ge (w_0-1)w_0^{j-1}$ 且 $jy|w_0'|\le s/6$）。由于 $\frac{7}{8}w_0^2+0.75y$ 也随 y 增加，将 a/α 中的各项分组可得 $a\le ka^\circ$；对于 h_0，我们有 $1.387(w_0-w_0^\circ)\le 0.33(Y-y)\le c_*(Y^2-y^2)$，而所有其他未缩放分子都直接随 y 增加。由于 $1-\tau k=(1-\tau)(1-\tau/19)\ge 0$，我们有 $r\ge r^\circ$。因此，H 和 E 至多增加 k^2，而 $a+\lambda$、m 和 h_0 至多增加 k。提取出 τ 的一次幂，并注意到 $y/(1+2\lambda y^2)$ 在 $(0,1/6]$ 上增加，$\mathcal{L}$ 中的每个求和项至多增加 k^3，从而得证。

此外，$\mathcal{L}^\circ(s)$ 在 $[0,S]$ 上递增且为凸函数：$\sqrt{H}$、$\sqrt{E}$ 和 $\sqrt{Q_8}$ 中的每个根式都具有 $\sqrt{A+Bs^2}$ 的形式，其中 A、$B\ge 0$；r^{-1}、$r^{-1/2}$ 和 d_1^{-1} 都是 $1-r$ 的递增凸函数；非负函数的乘积以及递增凸函数的复合都保持凸性。矩递推给出 $(a_5,a_6,a_7,a_8,a_9)<(0.313,0.531,0.846,1.291,1.909)$，且 $K(U)<7.41$，而 $\omega<0.390$ 在 $y=Y$ 处。直接在三个节点 $s=0$、$7/20$ 和 S 处求值，可得严格上界

$$\begin{aligned}s=0:&\quad H<2.71,&\quad E<3.013,&\quad 1/r<1.147,&\quad \mathcal{L}^\circ<1.85;\\ s=7/20:&\quad H<2.93,&\quad E<3.096,&\quad 1/r<1.251,&\quad \mathcal{L}^\circ<2.27;\\ s=S:&\quad H<4.242,&\quad E<3.588,&\quad 1/r<1.522,&\quad \mathcal{L}^\circ<4.10.\end{aligned}$$

（例如，在 $s=7/20$ 处有 $h_0<1.577$ 和 $m<3.62$，而 $\mathcal{L}^\circ$ 的前四个求和项、两个切线项、两个均值项以及最后一个括号分别不超过 0.484、1.330、0.205、0.189 和 0.059。）令 $Q(s)=1.99-0.12s+3.48s^2$。在三个节点 $s\in\{0,7/20,S\}$ 处，边界余量 $Q(s)-\mathcal{L}^\circ(s)$ 分别超过 0.14、0.10 和 0.75。在每个长度为 L_0 的子区间上，端点余量 e_0,e_1 满足 $\sqrt{e_0}+\sqrt{e_1}\ge\sqrt{3.48}\,L_0$；由于 $(1-z)e_0+ze_1\ge z(1-z)(\sqrt{e_0}+\sqrt{e_1})^2$ 支配了 Q 在其割线下方的二次下凹 $3.48L_0^2z(1-z)$，且 $\mathcal{L}^\circ$ 是凸的，我们得到对所有 $s\in[0,S]$ 均有 $\mathcal{L}^\circ(s)<Q(s)$。

现在令 $t=1-\tau\in[0,1)$, $c_1=(1-\epsilon)/6$, 以及在 $y=\tau/6$处计算的 $b(\tau)=0.95^2k_0(2.404)^2/(6d_*)$。则 $k=1+t/19$, $b(1)>0.708$（因为 $k_0(1)=180/77$），并且

$$\frac{b(\tau)}{b(1)}=\Big(1+\frac{2.78t}{6d_*}\Big)\Big(1+\frac{5(1+\tau)t}{72+5\tau^2}\Big)>1+0.225t\qquad(t>0),$$

因为 t 中的两个一次系数分别大于 0.161 和 0.064。令 $P_0+P_2s^2$ 表示所示的 P 下界，展开可得 $g_\alpha-6c_*(1-\alpha)^2/\tau>2.631-0.0595\tau-0.0055\tau^2$，而其余常数项大于 $k^2\tau[0.545+0.127\tau+b(\tau)(1+c_1\tau)^2]$（使用 $z_0^2>0.35136$）。由于 $k^2\ge1+0.105t$ 且 $0.105(1.253+0.362\tau)+0.225(0.708)(1+2c_1\tau)>0.290+0.090\tau$，我们得到

$$P_0>2.631-0.065\tau+\tau(1.253+0.362\tau+0.019\tau^2)+\tau t(0.290+0.090\tau).$$

类似地，利用 $g_\alpha\ge g_{0.95}>2.6024$、$1+c_1\tau\ge\tau(1+c_1)$ 和 $0.545(5/18)+0.95^2(2.034)/108+(0.708/3)(1+c_1)(1+4c_1/3)>0.504$，可得 $P_2>2.3979+0.5783\tau+0.504\tau^4$。减去 $3.48\tau k^3$ 后得到一个在 $[0,1]$ 上递减的函数（因为 $(\tau k^3)'=k^2(k-3\tau/19)\ge16/19$ 且 $3.48(16/19)>0.5783+4(0.504)$），其在 $\tau=1$ 处的值为 $0.0002>0$。

对于跨间隙项 $C=4Z\alpha\mathcal{R}/y^4$，应用引理 6.3，其中 $U=y\min(1.34,w_0)$。由于$4y\omega/(1-y)\le0.30\tau$，由伯努利不等式可得 $(1-U)^4/(1-y)^3\ge(1-y)(1-0.30\tau s)$。当$4Z\pi^2(0.95)/6>7.5$时，在 $\tau=1$（在因子 $1-0.30\tau s$ 之前）处括号内的两个求和项分别大于 $7.5(0.0395)(0.958)(0.758)>0.215$ 和 $7.5(0.978)(0.977)(0.0605)(5/6)>0.361$。对于第一个求和项，$1-0.042\tau^2$和 $(1+0.34\tau/6)^{-5}$相对于其在 $\tau=1$ 处的值的比率至少为$1+0.042t$ 和 $1+0.268t$；对于第二个求和项，$1-0.022\tau^2$、$1-0.023\tau^2$、$1/12-0.137\tau/6$和 $1-\tau/6$给出 t 中的线性系数，其总和至少为 $0.022+0.023+(0.137/6)/0.0605+0.20>0.622$。由于 $\tau(1+0.622t)\le1-0.378t$意味着 $k\tau(1+0.622t)\le1$，因此可得

$$\frac{C}{\tau}>k\big[0.215(1+0.310t)+0.361(1+0.622t)(1-0.30\tau s)\big]>0.576+0.321t-0.109s.$$

最后，将弦界 $1.99k^3\le1.99+0.333t$ 代入 $R\ge P-\tau k^3Q(s)+C$，得到

$$R>2.631+0.052\tau+0.174\tau^2-0.071\tau^3+0.011\tau s.$$

该三次多项式在 $[0,1]$ 上严格递增（其导数至少为 $0.052+0.135\tau>0$），在 $\tau=1$ ($p=6$) 处超过 2.78，在 $\tau=6/7$ ($p=7$) 处超过 2.75，并且在整个 $(0,1]$，上超过 2.60，这与对每个 $p\ge6$ 都成立的推论 3.5 矛盾。□

7. One reflex vertex with three, four, or five convex vertices

尚需证明，对于具有一个凹顶点和 $p\in\{3,4,5\}$ 个严格凸顶点的多边形，严格比较 $J(P)<J(R_{p+1})$ 成立。当 $p=3$ 时，一个初等的凸包口袋分解可将 $J(P)$ 严格限制在 $3\sqrt3<J(R_4)$ 以下，且此结论与凹顶点的数量无关。对于 $p=4$ 和 $p=5$，间隙离散度迫使凸前顶点落在规则 p 元组附近的一个具体区域内；此时，第 5.3 小节中的拉回的倒数正则密度 $w_{-1/p}(B)$ 与 $d(P)\le d(R_{p+1})$ 矛盾。

7.1. 三个严格凸顶点。

命题 7.1（三个严格凸顶点）。 每个恰好具有三个严格凸顶点的简单平面多边形 P 满足

$$J(P)=|\partial P|\,\sigma_1(P)<3\sqrt3<J(R_4).$$

证明。 对于任意多边形 D，记 $I_D=\min_{z\in\mathbb{R}^2}\int_{\partial D}|X-z|^2\,ds$。以边界质心为中心的两个笛卡尔坐标代入（1.1），得到 $J(D)I_D\le2|D|\,|\partial D|$。我们首先证明几何不等式

$$I_P\ge b|P|\,|\partial P|,\qquad b:=\frac{2}{3\sqrt3},$$

等号成立当且仅当为等边三角形。

T 凸包的三个顶点 P 必然是 P的严格凸顶点，因此穷尽了 P的所有严格凸顶点。它们将 ∂P 划分为三条简单弧；

与顶点 i 相对的弧连同长度为 a_i 的凸包边围成一个（可能退化的）凸口袋 K_i，因为该弧上的每个内部顶点都是优角顶点，而凸包边支撑着K_i。重新缩放，使得 $|\partial T| = 2$，令 $\Delta = |T|$，并写作 $|K_i| = \Delta\alpha_i$和 $\lambda = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i < 1$，从而$|P| = (1-\lambda)\Delta$。

设 h_i 为凸包边 i的有向距离，在 T内取正值，并令 $M_i = \max_{K_i} h_i$。由于 K_i 包含一个底边为 a_i、高为 M_i的三角形，因此有 $M_i/(2\Delta/a_i) \le \alpha_i$。另一方面，$K_i$ 包含于梯形 $T \cap \{h_i \le M_i\}$中；利用凸周长的单调性以及切除三角形 $T \cap \{h_i \ge M_i\}$ 的相似性，可得

$$|\partial P| \le L_+ := 2 + \sum_{i=1}^{3} (2 - 2a_i)\alpha_i .$$

在从凸包边 i的中点量起的开底边区间 $|t| < a_i/2$ 上，凸性意味着 K_i 的法向截面为 $[0, f_i(t)]$，，其中 f_i 的图像位于 ∂P 的替代弧上（若 K_i 退化，则有 $f_i \equiv 0$ ）。沿这些图像，$ds \ge dt$ 和$\sum_{i=1}^{3} \int_{-a_i/2}^{a_i/2} f_i(t)\,dt \le \lambda\Delta$。对于任意中心 $z \in \mathbb{R}^2$，$|X - z|^2$的切向分量对 I_P 的贡献至少为 $\frac{1}{12}\sum_{i=1}^{3} a_i^3$。对于法向分量，在总长度为 $|\partial T|$的三个底边区间的并集上应用柯西–施瓦茨不等式，再结合有向面积恒等式$\sum_i a_i h_i(z) = 2|T|$，并从凹陷部分至多减去 $|T| - |P|$，剩下的积分至少为 $|T| + |P| = (2-\lambda)\Delta$。因此

$$I_P \ge \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{3} a_i^3 + \frac{(|T| + |P|)^2}{|\partial T|}.$$

（注意，算术-几何平均不等式和（$\sum_i a_i^2$）$^2 \le 2\sum_i a_i^3$也给出 $2\sqrt{3}\,I_P \ge$（$|T| + |P|$）$\sum_i a_i^2$。）

设 $v_i = a_i - 2/3$、$v = \sum_{i=1}^{3} v_i^2$ 和 $t = 3\sqrt{3}\,\Delta$。海伦公式 $\Delta^2 = \prod_{i=1}^{3}(1 - a_i)$ 推出$t \le 1$，由算术-几何平均不等式可得 $\sum_{i=1}^{3} a_i^3 = 1 + \frac{3}{2}v - 3\Delta^2$，展开可得。代入 I_P 的下界得到

$$108 I_P \ge 9 + \frac{27}{2}v + (7 - 8\lambda + 2\lambda^2)t^2 \ge 2(1-t) + \frac{27}{2}v + 8t(2-\lambda),$$

因为两个右侧之差等于 $7(1-t)^2 + 8t\lambda(1-t) + 2t^2\lambda^2 \ge 0$。由于 $\sum_i v_i = 0$，我们有 $|v_i| \le \sqrt{2v/3}$，因此周长下界 L_+ 给出 $108 b|P|\,|\partial P| \le 16t(1-\lambda)(1 + \lambda/3 + \lambda\sqrt{2v/3})$。相减并应用 $2\lambda\sqrt{2v/3} \le \frac{2}{3}\lambda^2 + v$ 得到

$$108\big(I_P - b|P|\,|\partial P|\big) \ge 2(1-t) + \frac{8}{3}t\lambda + \Big(\frac{27}{2} - 8t\Big)v \ge 2(v + \lambda),$$

使用 $(1-t) + t\lambda \ge \lambda$。因此，$I_P \ge b|P|\,|\partial P|$ 仅在等边三角形的情形下等号成立。最后，对坐标试验函数求和得到的 $J(P) I_P \le 2|P|\,|\partial P|$ 对每个多边形都严格成立：若等号成立，则沿每条边都必须有 $\nu = \sigma_1(P)(X - z)$，这不可能，因为 ν 在一条边上为常数，而 $X - z$ 会变化。因此，$J(P) < 2/b = 3\sqrt{3}$。由引理 3.3，$J(R_4) > 5.5 > 3\sqrt{3}$。□

7.2. 间隙离散度与布拉施克乘子估计（适用于 $p = 4$、5。我们首先利用引理 6.4 缩小 $p = 4$ 和 $p = 5$ 的平衡凸间隙范围。

引理 7.2 (四个和五个凸顶点的间隙离散度)。设 P 是一个简单多边形，它有$p \in \{4, 5\}$ 个严格凸顶点、一个凹顶点，以及平衡凸间隙 s_1、……、s_p。

(i) 若 $p = 4$ 且 $d(P) \le 0.05215$，则对每个 i，都有 $s_i \in (0.08, 3/8)$，且 $\sum_{i=1}^{4}(s_i - 1/4)^2 < 0.021125$。(ii) 若 $p = 5$ 且 $d(P) \le 0.02420$，则对每个 i，都有 $s_i \in (0.08, 0.30)$，且 $\sum_{i=1}^{5}(s_i - 1/5)^2 < 0.00908$。

证明。保留引理 6.4 中的 $y = 1/p$，T_j，$M = T_4$，$u = \max_i s_i$，$w = u/y$，以及 $\delta = (M - y^3)/y^4$。首先，在两种情况下均有 $w < 5/3$：根据 (2.9) 中的凸性，令一个间隙等于$5y/3$，其余 $p - 1$ 个间隙相等，可在满足 $u \ge 5y/3$的条件下使 $\sum_i \mathcal{H}(s_i)$ 最小；使用

$D(s) < 0.416 + 0.750s - 0.70s^3$ 得到 $0.03014/0.6779 + 3(0.001429)/0.557 > 0.05215$ （当 $p = 4$时），以及 $1/(81 \cdot 0.641) + 4/(1296 \cdot 0.54) > 0.02420$ （当 $p = 5$时）。

在引理 6.4 后的切线界中取 $k = 9/11 \le \kappa(5/12)$，得到 $A_k > 2.22$。这迫使两种情况下都成立 $u < 3y/2$：否则，由凸性可得 $M \ge u^4 + (1-u)^4/(p-1)^3 > 0.025$（对于 $p = 4$）以及 > 0.011（对于 $p = 5$），因此 $2.22M$ 已经超过了关于 $d(P)$ 的假定上界。

由 $u < 3/8$ $(p = 4)$ 和 $u < 3/10$ $(p = 5)$，引理 2.6 给出 $\kappa(3/8) > 8/9$ 以及 $\kappa(3/10) > 63/64$，因为它们的倒数中相对于 1 的修正项分别为 $\pi/12 - 9/(16\pi Z) < 1/8$ 和 $\pi/60 - 3/(20\pi Z) < 1/63$。对于这些 k 的取值，切线界给出 $A_k > 2.37$ $(p = 4)$ 和 $A_k > 2.404 + 0.38m$ $(p = 5)$。在 (6.4) 中使用 $T_5 \ge yM$，得到 $d(P) \ge 2.37M$ $(p = 4)$ 以及 $d(P) \ge 2.48M$ $(p = 5)$，从而分别推出 $\delta < 1.64$ 和 $\delta < 1.10$。

设 $x_i = s_i/y - 1$, $V = \sum_{i=1}^{p} x_i^2$, $A = \sqrt{(p-1)V/p}$, 以及 $b_0 = A/(p-1)$。由于 $\sum_i x_i = 0$，每个 x_i 都满足 $|x_i| \le A$；此外，$3V \le \delta$ 意味着 $A < 1$。对于 $g(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2$，多项式

$$Q(x) = g(x) - (x + A)(x - b_0)^2(x + 4 - A + 2b_0)$$

次数为 2，且对所有 $x \ge -A$ 均满足 $Q(x) \le g(x)$，等号在 $x = -A$ 和 $x = b_0$处成立。由于向量 $(-A, b_0, \dots, b_0)$ 的前两个矩与 $(x_1, \dots, x_p)$ 相同，我们得到

$$\delta = \sum_{i=1}^{p} g(x_i) \ge g(-A) + (p-1)g(b_0) = V\big[6 - 4(A - b_0) + (A - b_0)^2 + Ab_0\big].$$

写作 $K = (p-2)/\sqrt{p(p-1)}$，则有 $A - b_0 = K\sqrt{V}$和 $Ab_0 = \overline{V}/p$。该下界在 $V \in [0, 1]$ 上递增，并在 $V = 0.338$ 处超过 1.64（$p = 4$，使用 $\sqrt{0.338/3} < 0.336$），在 $V = 0.227$ 处超过 1.10（$p = 5$，使用 $\sqrt{0.227} < 0.477$）。因此，$\sum_i (s_i - \overline{y})^2 = y^2 V < 0.021125$ 和 0.00908，分别地，并且在两种情况下 $s_i \ge y(1 - A) > 0.08$。□

接下来，我们为中心化的 $p = 4$ 和 $p = 5$ 模型中出现的 Blaschke 乘子推导一个精确的欧拉积分表示和一个能量乘积估计。

引理 7.3（Blaschke 乘子的欧拉积分）。设 $p \ge 3$ 为整数，并令$\beta = 1/p$, $x = z^2$, $t \in (0, 1)$, $q = t^2$, $k = (1-q)^{-4\beta^2}$，且 $D = |1 - tx|^2$。定义

$$\phi_t(x) = \frac{t - x}{1 - tx}, \qquad B = \eta z^{p-2}\phi_t(x), \qquad u = 1 - 2\beta + \frac{2\beta(1-q)}{D}, \qquad V = kuD^{\beta},$$

with $|\eta| = 1$。对于满足 $a = ((p-2)j - n)/2$ 为正整数的整数 $j \ge 0$ 和 n r,

$$\widehat{VB^j}(n) = -\frac{\eta^j k\beta \sin(\pi\beta)\, t^{a+j}}{\pi(j+\beta)} \int_0^1 v^{a-\beta-1}(1-v)^{j+\beta}(1-qv)^{\beta-j}\Big(n + 1 + \frac{4\beta q v}{1-qv}\Big)\, dv, \tag{7.1}$$

$\widehat{\ }$而相反奇偶性的傅里叶系数则为零。令 $v_m = V(2m)$，对于 $p = 5$ 和$t \le 0.605$，有

$$1 + 0.04q \le v_0 \le k(1 - 0.12q), \qquad 0 \le v_1 \le 0.2kt, \qquad 0 \le v_m \le 0.24kt^m \quad (m \ge 2).$$

证明。令 $L = (1 - tz^2)^{\beta}$ 和 $X = zL'/L$，则 $V = ku|L|^2$ 和 $u = 1 - X - \bar{X}$。对 $W = z^{-n}B^j|L|^2$ 沿 $\mathbb{T}$ 积分其角向导数，得到 $0 = \int_{\mathbb{T}} W(-n + pju + X - \bar{X})\, dm$，整理可得

$$(1 + pj)\widehat{VB^j}(n) = k\int_{\mathbb{T}} z^{-n}B^j|L|^2\Big(n + 1 - \frac{2zL'}{L}\Big)\, dm. \tag{7.2}$$

对于在 $\mathbb{D}$ 的邻域内全纯、但在 t 处可能存在极点的任意函数 f，将 $f(x)(1 - t/x)^{\gamma}/x$ 的柯西轮廓收缩到 $[0, t]$ 的两条边上，可得

$$\int_{\mathbb{T}} f(x)(1 - t\bar{x})^{\gamma}\, dm = -\frac{\sin(\pi\gamma)}{\pi}\int_0^1 f(tv)v^{-\gamma-1}(1-v)^{\gamma}\, dv \tag{7.3}$$

每当 $\operatorname{ord}_0 f > \gamma$ 和 $\operatorname{ord}_t f > -1 - \gamma$时。在（7.2）中，代入 $x = z^2$ 得到 $z^{-n}B^j = \eta^j x^a \phi_t(x)^j$，具有所述的奇偶性（而相反奇偶性时积分为零）。将（7.3）应用于 $\gamma = \beta$ 和$-2zL'/L = 4\beta tx/(1 - tx)$即可得到（7.1）。

现在固定 $p=5$ 和 $t\le 0.605$。对于 $j=0$ 和 $n=-2m$ $(m\ge 1)$，由于 $4\beta q/(1-q)<0.48$，（7.1）中的被积函数严格为负。令 $f(x)=x^m$ 代入（7.3），可确定左侧 t^m 的系数为 $-d_m$，其中 $(1-x)^{\beta}=1-\sum_{m=1}^{\infty} d_m x^m$；因此，由对称性和（7.1）得到$0\le v_m=v_{-m}\le kt^m(2m-1)d_m$。由 $d_1=\beta$ 和 $d_{m+1}/d_m=(m-\beta)/(m+1)$，我们有 $(2m-1)\,d_m\le 3d_2=0.24$,—对于 $m\ge 2$。利用 $L=1-\sum_{m\ge 1} d_m t^m z^{2m}$ 展开 $V/k=|L|^2-2\Re(zL'L)$，得到 $v_0/k=1-\sum_{m\ge 1}(4m-1)d_m^2 q^m\le 1-0.12q$。由于 $(4m-1)\,d_m^2$ 随 m减小，我们还可将 $(1-q)^{0.16}$ 展开至二阶，从而得到 $v_0/k\ge 1-0.12q-0.0448q^2/(1-q)\ge (1-q)^{0.16}(1+0.04q)$。□

引理 7.4 (四顶点和五顶点乘子的能量)**.** 在引理 7.3 的设定下，取$(p,\ell)=(4,1)$ 或 $(5,2)$，允许 $t=0$，假设 $4\beta q<1-q$，并令

$$R=\max_{0\le v\le 1}(tv)^{(p-2)\ell/2}\left(\frac{t(1-v)}{1-qv}\right)^{\ell},\qquad \Gamma(V)(z)=\int_{\mathbb{T}}\frac{|V(z)-V(w)|^2}{|z-w|^2}\,dm(w).$$

那么，对每个 $F\in L^2(\mathbb{T})$，

$$\int_{\mathbb{T}}\Gamma(V)|F(B)|^2\,dm\le\left(1+\frac{2R}{(1+p\ell)(1-R)}\right)\mathcal{E}(V)\int_{\mathbb{T}}|F|^2\,dm,\tag{7.4}$$

并且，对每个具有有限能量的实数 $f=F(B)$，

$$\mathcal{E}(Vf)\le\mathcal{E}(f,V^2f)+\int_{\mathbb{T}}\Gamma(V)f^2\,dm.\tag{7.5}$$

特别地，如果 $t\le 0.525$ 对于 $p=4$ 或 $t\le 0.605$ 对于 $p=5$，那么

$$\mathcal{E}(Vf)\le\mathcal{E}(f,V^2f)+0.575q\int_{\mathbb{T}}F^2\,dm.\tag{7.6}$$

证明。记 $v_m=\widehat{V}(2m)=v_{-m}$ 和 $U_j=VB^j$。对于 $m\ge 1$，公式 (7.1) 在 $n=-2m$, $j=0$ 处将 v_m 表示为严格正权的积分乘以一个正数

$$v^{m-\beta-1}(1-v)^{\beta}(1-qv)^{\beta}\Big(2m-1-\frac{4\beta qv}{1-qv}\Big).$$

在 $j=\ell s$ $(s\ge 1)$ 中，被积函数取表达式在 R 中达到最大值的 s 次幂，而前因子乘以 $\eta^{\ell s}/(1+p\ell s)$；因此$|\widehat{U}_{\ell s}(-2m)|\le v_m R^s/(1+p\ell s)$。

由 $\Gamma(V)=V\Lambda V-\frac{1}{2}\Lambda(V^2)$，可得 $\Gamma V(2n)=4\sum_{m=1}^{\infty} m v_m v_{m+n}$ 对于 $n\ge 0$。由于 B 是全纯的，

$$\left|\int_{\mathbb{T}}\Gamma(V)B^{\ell s}\,dm\right|=\left|4\sum_{m=1}^{\infty} m v_m\widehat{U}_{\ell s}(-2m)\right|\le\frac{R^s}{1+p\ell s}\mathcal{E}(V).$$

（事实上，对于 $t>0$，$(B^{\ell})_*(\Gamma(V)\,dm)/\mathcal{E}(V)$ 是以 $\eta^{\ell}a^{p\ell}b(v)$ 为中心的泊松核的混合，其通过以权重 $4mv_m^2/\mathcal{E}(V)$ 对 m 进行抽样得到；v 取自其归一化的欧拉权重，而 $a\sim$ 与 $\mathrm{Unif}[0,1]$ 相互独立。）在 $p=5$ 处，奇数阶 B-矩在 $z\mapsto -z$ 下消失。对 $B_*(\Gamma(V)\,dm)$ 的傅里叶系数取绝对值并求和，即可证明（7.4）。不等式（7.5）立即由 $\mathcal{E}(Vf)-\mathcal{E}(f,V^2f)$ 的差核表示得到；其被积函数包含 $f(z)f(w)|V(z)-V(w)|^2\le\frac{1}{2}(f(z)^2+f(w)^2)|V(z)-V(w)|^2$。

当 $t=0$、$V\equiv 1$ 时，（7.6）立即可得。对于 $t>0$，展开 $V/k=|L|^2-2\Re(zL'L)$ 后，在正模态中只会产生负的交叉项，因此保留前两项可得

$$0\le\frac{v_m}{kt^m}\le(2m-1)d_m-(2m+3)\beta d_{m+1}q.$$

对于 $m\ge 2$，$(2m-1)d_m$ 从 $M_2=3d_2$ 开始递减。在 $m=1,2$ 处，q修正系数与首项系数之比分别为 $5d_2\ge 0.4$ 和 $7\beta(2-\beta)/9\ge 0.28$，因此，由于 $q<0.367$，平方后 $m=1,2$ 的界分别改善了 $1-0.7q$ 和 $1-0.5q$ 倍。因此

$$\frac{\mathcal{E}(V)}{4k^2q}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{mv_m^2}{k^2q}\le\beta^2(1-0.7q)+M_2^2\big((1-q)^{-2}-1-q^2\big).$$

代入 $q<0.276$, $k^2<1.176$ ($p=4$) 以及 $q<0.367$, $k^2<1.166$ ($p=5$)，分别得到$\mathcal{E}(V)/q<0.550$ 和 <0.506。利用 $v(1-v)$ 的界， $\le 1/4$ 界定 $R\le q/[4(1-q)]$($p=4$) 和 $R\le t(q/[4(1-q)])^2$ ($p=5$)，二者均小于 0.1。将其代入 (7.4)–(7.5)（其中 $(47/45)(0.550)<0.575$），即可证明 (7.6)。□

我们还总结了与式（5.16）中的倒数测试函数 $F=w_{-\beta}-D_\beta$ 相关的带符号测度 $F\Lambda F$ 的调和分析性质。

引理 7.5 （倒数密度能量测度 $F\Lambda F$）。 固定 $\beta\in$（0，1/2），令 $X=|1-z|^2$在 z 上均匀分布 $\mathbb{T}$, 并定义 $w=w_{-\beta}=X^\beta/\mathbb{E}X^\beta$， $F=w-D_\beta$， $C=\bar F=1-D_\beta$，以及$b_j=-r_j$（$-\beta$）。

（i）令 T 与 X 相互独立，其在（0，1）上的密度为 $\beta t^{\beta-1}$ 。则 $\Lambda F=\Lambda w$ 可表示为满足下式的有限偶带符号测度

$$\int_{\mathbb{T}} J(X)\,d\Lambda w=\beta\,\mathbb{E}\big[J(X)-J(TX)\big]$$

对 $[0,4]$上的每个连续 J 均成立。其相对于 dm 的密度关于 X 递增，且均值为零，因此对于 $[0,4]$,上的每个有界非负递增函数 ψ

$$\int_{\mathbb{T}}\psi(X)F\,d\Lambda F\ge C\int_{\mathbb{T}}\psi(X)\,d\Lambda F\ge 0. \tag{7.7}$$

（ii）带符号测度 $F\Lambda F$ 的负全变差满足

$$\|(F\Lambda F)_-\|\le\frac{\beta}{4}\big(3\|F\|_1-C\big), \tag{7.8}$$

且其正质量等于 $\|$（$F\Lambda F$）$_-\|+\beta/2$。

（iii）傅里叶系数 $h_j=\widehat{F\Lambda F}(j)$ 对于 $j=0$、1、2 由下式给出

$$h_0=\frac{\beta}{2},\qquad h_1=D_\beta b_1-\frac{\beta}{2},\qquad h_2=2D_\beta b_2+\frac{\beta}{2}-\frac{\beta}{(1+\beta)^2}. \tag{7.9}$$

每当 $C<$（$1-\beta$）$/2$ 时，每个 h_n ($n\ge1$) 都满足 $0<h_n\le D_\beta b_1$。

证明。对于 $J(X)=X^k$ ($k\ge1$)，根据（5.18），表示恒等式的两边都等于 $\beta k\,\mathbb{E}X^k/(\beta+k)$，并且在常数函数上都为零。由于每个 $\cos(n\theta)$ 都是 X 的多项式，且奇模态由对称性而消失，该表示对所有偶连续函数成立；一致逼近和能量逼近表明， $F\Lambda F$ 与光滑测试函数上的能量配对 $\mathcal{E}(F、JF)$ 相同。

X 在 (0，4) 上的密度为 $[\pi\sqrt{x(4-x)}]^{-1}$，因此 TX 和 X 在$x\in$ (0，4) 处的密度比为

$$R(x)=\beta x^{\beta-1/2}\sqrt{4-x}\int_x^4\frac{dy}{y^{\beta+1/2}\sqrt{4-y}}.$$

由于 $\beta<1/2$，每个因子都随 x递减，因此 $d\Lambda F=\beta(1-R(X))\,dm$ 具有递增的密度且均值为零。在重加权概率测度 $\psi\,dm/\int\psi\,dm$ 下（对于 $\int\psi\,dm>0$），递增函数的正协方差保证 F 和 $1-R(X)$ 的均值分别至少为 C 和 0，再次对它们的乘积应用正协方差即可得到（7.7）。

记 $F=F_+-F_-$，界 $F_+(TX)\le T^\beta F_+(X)$ 和 $\mathbb{E}T^\beta=1/2$ 给出 $\|(F\Lambda F)_-\|\le\beta\,\mathbb{E}($ $F_-+F_+/2)=\frac{\beta}{4}(3\|F\|_1-C)$，从而证明（7.8）；正质量比此值多出 $\int F\,d\Lambda F=\mathcal{E}(F)=\beta/2$。

对于 (iii)， $\mathbb{E}[wX^k]=4^k(\beta+1/2)_k/(\beta+1)_k$ 以及 (5.18) 给出 $\int X^k w\,d\Lambda w=\beta(\beta+k)\mathbb{E}[wX^k]/(2\beta+k)$，其中 $k=0$，1，2；展开 $\cos\theta=1-X/2$ 和 $\cos(2\theta)=1-2X+X^2/2$ 即可得到 (7.9)。对于一般的 $n\ge1$，在 $a=b=-\beta$、 $m=n$ 处应用 (5.17) 于傅里叶卷积的两端，得到 $h_n=((n-\beta)/2-nC)b_n+\frac{n}{2}\sum_{j=1}^{n-1}b_jb_{n-j}$。 当 $C<(1-\beta)/2$ 时，该式严格为正；在对称和中用 j 替换 $n/2$ ，并结合 $jb_j\le b_1$ 与 $\sum_{j=1}^\infty b_j=1/2$ （由 $w(1)=0$）可得 $h_n\le D_\beta b_1$。□

7.3. 四个凸顶点和一个反角顶点。现在我们排除这样的简单多边形：它具有 $p=4$ 个严格凸顶点和 $q=1$ 个凹顶点，并达到 $d(P)\le 0.05215$。在平衡圆盘坐标中，连接四个凸前顶点中两对对顶点的两条双曲测地线在唯一的内部点处相交。施加一个将该交点映射到原点的圆盘自同构，可将两条测地线都变为直径；再经过一次旋转，四个前顶点变为 $\pm e^{i\alpha}$，$\pm e^{-i\alpha}$，其标记多项式为 $1-2tz^2+z^4$，其中 $t=\cos(2\alpha)\in[0,1)$。

引理 7.6（四个前顶点的对跖归一化）。在引理 7.2 关于 $p=4$ 的假设下，令 $W_0=\sum_{i=1}^{4}(s_i-1/4)^2<0.021125$。在将两条相对双曲对角线的交点映射到原点的对跖坐标中，令 $t\in[0,1)$ 为 $1-2tz^2+z^4$ 的参数，并令 r 为平衡原点像的模。那么 $t\le \sin(\pi\sqrt{W_0})<0.46$，且 $r<1/4$。

证明。将两对相对平衡间隙分别记为 $1/4+h\pm x$ 和 $1/4-h\pm y$，并令 $s=2\pi|h|$、$u=2\pi^2(x^2+y^2)$ 以及 $A=s^2+u=\pi^2W_0<0.209$。相对弦长的乘积与 $\sin^2(\pi(1/4\pm h))-\sin^2(\pi x_{\pm})$ 成正比（其中 $x_+=x$、$x_-=y$）。由交比不变性，t 等于这两个乘积之差的绝对值除以它们之和，从而得到 $t\le \sin s+(1+t)u/2$。令 $b=\sqrt{A}<1/2$ 和 $T=\sin b$，则 $(1+T)b<\cos b$，因此由中值定理得到 $T-\sin s\ge(b-s)\cos b\ge(1+T)u/2$。整理可得 $(1-u/2)(t-T)\le 0$，于是 $t\le T=\sin(\pi\sqrt{W_0})<0.46$。

在平衡坐标中，对角线交点的克莱因模型像 K 的模为$2r/(1+r^2)$。两条对角弦的单位法向量夹角为 $\pi/2\pm s$，且它们到原点的有向距离的模分别为 $|\sin\pi(x+y)|$ 和 $|\sin\pi(x-y)|$。将两个法向投影的平方相加，得到 $(1-\sin s)|K|^2\le \sin^2\pi(x+y)+\sin^2\pi(x-y)\le u$。令$d_0=2(1-\sqrt{1-A})$，则有 $u=A-s^2\le d_0(1-s)-(s-d_0/2)^2\le d_0(1-\sin s)$，因此 $|K|^2\le d_0$。由于 $A<0.209<64/289-(32/289)^2,$，我们得到 $d_0<64/289$；又因为 $4r^2/(1+r^2)^2$ 随 r 递增，并在 $r=1/4$处等于 $64/289$，所以 $r<1/4$。$\square$

命题 7.7（四个凸顶点和一个反角顶点）。每个具有 P 个严格凸顶点和 $q=1$ 个凹顶点的简单多边形都满足 $d(P)>0.05215>d(R_5)$，特别地，$J(P)<J(R_5)$。

证明。反设 $d(P)\le 0.05215$。根据引理 7.2 和引理 7.6，在对跖坐标中，参数 t 和平移后的平衡原点 $a\in\mathbb{D}$ 满足 $q:=t^2\le \pi^2W_0<0.209$（因此 $t<0.46<0.525$）以及 $r=|a|<1/4$。

令 $x=z^2$，$\kappa=q/(1-q)<0.265$，$B=x(t-x)/(1-tx)$，$h=\operatorname{arcosh}(|1-tx|/\sqrt{1-q})$，$u=(1+e^{-2h})/2$，以及 $V=ue^{h/2}$。将 (5.16) 中的倒数测试函数 $F=w_{-1/4}-D_{1/4}$ 取在 $\beta=1/4$ 处，令 $G=VF(B)$。由于 V与 $u|1-tx|^{1/2}$成正比，不等式 (5.13) 给出$\int_{\mathbb{T}}G\,d\mu\le 0$。与此同时，$G$ 在平衡坐标中的均值等于调和延拓在 a处的值 $M(a)$，其中调和延拓的边界数据为 G。

在 $\beta=1/4$ 处，我们有 $D_\beta=\pi/4$, $0.2145<C<0.215$, $b_1=1/5$，以及 $\mathcal{E}(F)=1/8$。帕塞瓦尔恒等式给出 $\int_{\mathbb{T}}F^2\,dm\le C^2+\mathcal{E}(F)/2+b_1^2<0.149$。$B=x\phi_t(x)$ 的两个分支由圆盘对合 ϕ_t 互换，该对合将 $P=e^{-2h}$ 映射到 P^{-1}。直接代数运算得出 $P+P^{-1}-2=\kappa|1-B|^2$，因此 $\sinh^2 h=\kappa v$，其中 $v=\sin^2(\phi/2)=X/4$。由于 $|B'|=4u$，测度 $u\,dm$ 对两个分支取相等的平均值；令 $u=e^{-h}\cosh h$，则 $e^{h/2}$ 和 V^2 的纤维平均值分别为 $c_0=\cosh(h/2)$ 和 $J(v)=\cosh^3 h=(1+\kappa v)^{3/2}$。由于 J 在 $[0,1]$，上是凸函数，$1+J'(1)v-J(v)$ 非负且递增；将 (7.7) 用于 $\int vF\,d\Lambda F=(h_0-h_1)/2$（其中 $h_0-h_1=1/4-\pi/20<0.093$ 由 (7.9) 得出），再结合 $\Lambda(F(B))=4u(\Lambda F)(B)$ 和 (7.6)，得到

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(G)&\le 4h_0+3\kappa\sqrt{1+\kappa}\,(h_0-h_1)+0.575q\int_{\mathbb{T}}F^2\,dm\\&<0.5+3(0.265)(1.125)(0.093)+0.575(0.209)(0.149)<0.602.\end{aligned}$$

为从下方估计 $M(a)$，令 $x'=\phi_t(x)$、$\zeta=xx'=e^{i\phi}$，并将两条分支上的平均值记为 $\langle\cdot\rangle$。由 $x+x'=t(1+\zeta)$ 和 $(x-x')\sinh h=t(\zeta-1)\cosh h$ (via

$\tanh h = t(t-\Re x)/(1-t\Re x))$，在 $\pm h$ 处取平均，得到

$$\langle x e^{h/2}\rangle = t\Big(c_0\zeta + \frac{1-\zeta}{4c_0}\Big).$$

利用 $0 \le c_0 - 1 \le \kappa/8$ 和 $\int \zeta F\, dm = -b_1$ 可得 $2|\widehat{G}(2)| \le t(|C-3b_1|/2 + 3\kappa\sqrt{0.149/8}) \le \sqrt{\kappa}/4$。此外，$c_0'(v) = \kappa/(8c_0\sqrt{1+\kappa v}) \ge \kappa/10$，因此 $c_0(v) - \kappa v/10$ 单调递增且至少为 1；与 F 的正协方差给出 $M(0) \ge C + \kappa(C+b_1)/20 \ge C + \kappa/50$。对于 $r = |a| < 1/4$，柯西–施瓦茨不等式将所有偶次调和项 $|2j| \ge 4$ 对泊松积分的贡献限制为 $\sqrt{\mathcal{E}(G)}\sum_{j\ge 2} r^{4j}/j \le 9r^4/16$。对 $\sqrt{\kappa}$ 配方可得

$$M(a) \ge C + \frac{\kappa}{50} - \frac{r^2\sqrt{\kappa}}{4} - \frac{9r^4}{16} \ge C - \frac{43r^4}{32} > 0.2092.$$

由平衡坐标中的 (2.6)，$d(P) \ge M(a)^2/\mathcal{E}(G) > 0.2092^2/0.602 > 0.072$，这与$d(P) \le 0.05215$矛盾。由引理 3.4，$d(R_5) < 0.0518 < 0.05215$，因此 $J(P) < J(R_5)$。$\square$

7.4. 五个凸顶点和一个凹顶点。 当 $p = 5$ 和 $q = 1$时，我们将五个凸前顶点本身进行平衡（通过引理 2.1），使其处于线性对称函数为零的标准形，然后在 $\beta = 1/5$处用拉回的倒数密度进行检验。

引理 7.8 (五个边界点的中心化)。 设单位圆上有五个循环排序的点，其连续角间隙为 g_j，满足 $W_0 = \sum_{j=1}^{5}(g_j/(2\pi) - 1/5)^2 \le 0.01$。存在一个圆盘自同构，将这五个点中心化到原点，并将原点映到模为 $h < 0.205$ 的点；中心化像 z_1、……、z_5 满足 $t := \frac{1}{2}|\sum_{j=1}^{5} z_j^2| < 0.590$。

证明。 经过旋转后，将原始点写为 $we^{i\gamma}$ on $\{w^5 = 1\}$ with $[\gamma] = 0$，其中方括号表示五点平均值，下标表示模 5 的离散傅里叶指标。令 $a_0 = |\gamma_1|$and $d_0 = |\gamma_2|$。对连续差分应用帕塞瓦尔恒等式可得 $10(a_0^2\sin^2(\pi/5) + d_0^2\sin^2(2\pi/5)) = \pi^2 W_0$，从而有 $d_0^2 + 0.381a_0^2 < 0.105^2$。这一椭圆界沿连续路径 $we^{i\tau\gamma}(\tau \in [0,1])$ 保持不变；下文中的 γ 指该路径上某一点处的相位。根据引理 2.1，中心化点沿该路径连续变化。将中心化后的点写为 $z = we^{ic}$ with $[c] = 0$，再经过旋转，令 $a = |c_1|$、$d = |c_2|$ 和 $L = a^2 + d^2$。

假设在 $[0,1]$ 的一个闭子集上，$h \le 0.205$ 且 $L \le 0.0139$，因此 $d < 0.118$。中心化条件 $(e^{ic})_{-1} = 0$ 以及泰勒展开首先给出 $a \le [c^2]/2 = L$，继而得到（$1-d$）$a \le d^2/2 + [|c|^3]/6$。对两个傅里叶对使用柯西–施瓦茨不等式和闵可夫斯基不等式，得到$\|c\|_4^2 \le \sqrt{6}$（$a+d$）^{2} 以及 $[|c|^3]/6 \le$（$a+d$）$^3/\sqrt{3}$，从而得到 $a < 0.0094$。

令 $x = we^{i(\gamma-\lambda)} =$（$z+b$）/（$1+\bar{b}z$），其中 $|b| = h$，并设 $m =$（$\gamma+c$）/2 以及 $B = \bar{b}e^{-i\lambda/2}$。将 $x - z = b - \bar{b}xz$ 除以 $2iwe^{i(m-\lambda/2)}$，得到 sin（（$\gamma-\lambda-c$）/2）$= -\Im$（Bwe^{im}）。由于¯连续提升满足（$\gamma-\lambda-c$）/2 = − arg（$1+bz$）$\in [-$ 反正弦函数 h，反正弦函数 $h]$，展开反正弦函数可得（相差一个加法常数）

$$\gamma = c - 2\Im(Bwe^{im}) + R, \qquad \|R\|_\infty \le \frac{h^3}{3(1-h^2)^{3/2}} \le 0.36h^3.$$

令 $A = |m_1|$、$D = |m_2|$ 和 $K = [m^2]/2$。由椭圆界可得，$\sqrt{a_0^2 + d_0^2} < 0.105/\sqrt{0.381} < 0.1702$ 和 $a_0 + d_0 < 0.105\sqrt{1 + 1/0.381} < 0.200$，从而得到 $K <$ ((0.1702 + 0.118)/2)$^2 < 0.0208$、$A + D <$ (0.200 + 0.0094 + 0.118)/2 < 0.164 以及 $D \le (d_0 + d)/2$。 $e^{im} - 1 - im$ 的每个傅里叶系数的模至多为 K；读出$2\Im(Bwe^{im})$的前两个离散傅里叶模态（涉及 e^{im} 的模态 (0，−2) 和 (1，2)）可得

$$a_0 \ge h(1 - 2K - D) - a - 0.36h^3, \qquad d_0 \ge d - h(A + D + 2K) - 0.36h^3.$$

第一个不等式给出 $0.8842h \le a_0 + hd_0/2 + 0.0094 < 0.105\sqrt{1/0.381 + 0.205^2/4} + 0.0094 < 0.1804$，因此 $h < 0.2045$。利用 $D \le (0.105 + 0.118)/2$，这两个界还给出 $a_0 \ge 0.831h - 0.0094$和 $d_0 \ge d - 0.221h$。在椭圆中配方，得到 $d_0 + 2a_0^2 < 2(0.105)^2/0.381 + 0.381/8 < 0.1056$，由此（利用 $(u-v)_+^2 \ge u^2 - 2uv$，当 $u, v \ge 0$ 时）

$$d < 0.1056 + 0.253h - 1.38h^2 \le 0.1056 + \frac{0.253^2}{4(1.38)} < 0.1174.$$

因此 $L<0.0094^2+0.1174^2<0.0139$。沿着 $\tau\in[0,1]$ 的连续性可知，两个严格界 $h<0.205$ 和 $L<0.0139$ 在 $\tau=1$ 处均成立。

最后，旋转使得 $\prod_j z_j=1$ 后，z_1、……、z_5 的初等对称多项式满足 $e_1=e_4=0$、$e_5=1$、$e_3=\bar e_2$ 和 $|e_2|=t$。因此，对每个 j，有 $z_j^5-1=z_j^2(\bar e_2-e_2z_j)$。对 j 上的模平方取均值，并利用 $[z]=0$ 可得 $2t^2=[|z^5-1|^2]=[|e^{5ic}-1|^2]\le 25[c^2]=50L$，所以 $t<0.590$。$\square$

引理 7.9（五顶点倒数测试函数的能量与平移后的均值）。在中心化的五顶点坐标中，令 $t=\frac12|\sum_{j=1}^5 z_j^2|$。当 $t\le 0.605$ 时，下面定义的检验函数 G 的调和延拓为 $M(a)>0$，并且在整个 $\{|a|\le 0.22\}$ 上满足 $M(a)^2>0.02420\,\mathcal{E}(G)$。

证明。旋转坐标，使得 $S(z)=\prod_{j=1}^5(1-\bar z_j z)$ 的二次项系数等于 $-t$。线性项系数为零以及共轭倒数对称性给出

$$S(z)=1-tz^2+\eta(z^5-tz^3),\qquad |\eta|=1.$$

将 $S=A(1-B)$ 分解为外因子 $A(z)=1-tz^2$ 和五次布拉施克乘积 $B(z)=-\eta z^3(z^2-t)/(1-tz^2)$，使每个 z_j 映射到 1。令 $x=z^2$，$q=t^2$，$T=0.605$，$Q=T^2$，$D=|1-tx|^2$，$k=(1-q)^{-4/25}$，$\tau=q/Q$，并且

$$u=\frac{|B'|}{5}=\frac35+\frac{2(1-q)}{5D},\qquad V=kuD^{1/5}.$$

在 $\beta=1/5$ 处取自 (5.16) 的 $F=w_{-1/5}-D_{1/5}$，其中 $b_1=1/6$，$b_2=2/33$，$\mathcal{E}(F)=1/10$，且 $0.13517<C=2\sum_{m=1}^{\infty}\zeta(2m)/25^m<0.136$（使用前三项，其中 $1.6449<\zeta(2)<1.645$，$1.082<W<1.083$，以及 $\zeta(6)>1$）。定义 $G=VF(B)$。

令 $P=(1-q)/D$、$y=q/(1-q)$、$e=P-1$、$S_0=P+P^{-1}-2$ 以及 $L_c=1+e/5+cS_0$，其中有 $c_-=1/35$ 和 $c_+=1/25$。我们首先验证双侧屏障

$$L_{c_-}\le uP^{-1/5}\le L_{c_+}. \tag{7.10}$$

用 $v=P^{1/5}\in[3/4,4/3]$ 表示时，比值 $(uP^{-1/5}-1-e/5)/S_0$ 等于

$$\frac{3+2v+v^2-v^4}{5(v^{-2}+v^{-1}+1+v+v^2)^2},$$

由于分子和分母具有相反的单调性，该比值在 $v=1$ 处严格递增至 $1/25$，并在超出 $v=1$ 后严格递减。在两个端点 $v=3/4$，$4/3$ 处，分子均超过 4.28，而 $v^{-2}+\cdots+v^2<5.43$，从而使该比值保持在 $1/35$ 以上。

能量界。令 $U_c=uL_c^2$。推前密度 $B_*(U_c\,dm)$ 的系数 I_c 为常数，且只有一个非常数频率对，位于 ±2 处，其模为 J_c，表示为

$$I_c=1+(0.4+4c)y+(0.096+0.96c+6c^2)y^2,\qquad J_c=0.4(0.2+c)^2ty^2.$$

为验证这一点，将 U_c 按 P^{-2} 的幂展开，……，P^3。由于对合 ϕ_t 以雅可比 P 将 P 与 P^{-1} 互换，我们有 $\int P=1$、$\int P^2=\int P^{-1}=1+2y$ 和 $\int P^3=\int P^{-2}=1+6y+6y^2$，从而得到 I_c。根据奇偶性，奇数阶 B–矩均为零。在变量 $x=z^2$ 中，B^{2j} 在 0 和 t 处分别有 $3j$ 阶和 $2j$ 阶零点，因此对于 $-2\le l\le 3$、$j\ge1$，P^lB^{2j} 是全纯的，并且在 0 处为零；但当 $(l,\ j)=(3,\ 1)$ 时除外，此时 $P^3B^2\,dx/x$ 在 t 处的留数为 η^2ty^2，且 U_c 中 P^3 的系数为 $0.4(0.2+c)^2$。在 $t=0$ 处同样成立。

由帕塞瓦尔恒等式，$\int_{\mathbb{T}}F^2\,dm\le C^2+\mathcal{E}(F)/3\pm\frac43b_1^2+\frac23b_2^2<0.092$，因此 (7.8) 给出 $\|(F\Lambda F)_-\|\le(3\sqrt{0.092}-C)/20<0.039$。(7.10) 中的两个屏障均为正，且 $U_{c_+}-U_{c_-}$ 的推前密度有上界 $I_{c_+}-I_{c_-}+2(J_{c_+}-J_{c_-})\le0.046y+0.016y^2+0.0043ty^2<0.033\tau$（利用 $y<0.578\tau$）。我们还有 $J_{c_+}<0.0047\tau$，并且 $(1-q)^{0.08}I_{c_+}\le(1-0.08q)(1+0.56y+0.144y^2)\le1+0.333\tau$（$q$ 中的所有非线性泰勒系数均非负，且在 Q 处其值小于 $0.971(1+0.56(0.578)+0.144(0.578)^2)<1.333$）。将 $uV^2\,dm$ 的光滑推前密度与 $F\Lambda F$ 配对，并利用 (7.9) 中的 $h_2=4D_\beta/33+1/10-5/36<0.067$、$\Lambda(F(B))=5u(\Lambda F)(B)$ 以及 (7.6)，我们得到

$$\mathcal{E}(G)\le5\big[h_0(1+0.333\tau)+2(0.0047)h_2\tau+0.033(0.039)\tau\big]+0.575q\int_{\mathbb{T}}F^2\,dm\le0.5+0.196\tau.$$

偏移均值界。令 $r=|a|\le 0.22$, $s=tr^2<0.0293$, $\mathcal{P}_a$ 表示在 a 处的调和延拓，并令 $L_0=L_{c_-}=(26+8P+P^{-1})/35$。由 (7.10)， $V/(1-q)^{0.04}$ 介于 L_0 和 $L_0+\frac{2}{175}S_0$ 之间。在 $\mathbb{T}$ 上，全纯恒等式

$$PB=-\eta(1-q)\frac{z^5}{A^2},\qquad P^{-1}B=-\eta\frac{z(z^2-t)^2}{1-q}$$

这意味着对于每个 $j\ge 1$， S_0B^j 都是全纯的，并且在 0 处为零，因此 $B_*(S_0\,dm)=2y\,dm$。此外，全纯级数 $L_0\sum_{j\ge1}b_jB^j$ 可以直接在 a 处计算：由于 $|B(a)|\le r^3(t+r^2)/(1-s)<0.0072$，其在 a 处的模的两倍不超过

$$\frac{2b_1}{35(1-0.0072)}\left[26(0.0072)+\frac{8r^5}{(1-s)^2}+\frac{r(t+r^2)^2}{1-q}\right]<0.0033.$$

将 $V/(1-q)^{0.04}$ 替换为 L_0 所产生的剩余误差不超过 $\frac{4}{175}y\|P_a\|_\infty\int F_-\,dm\le 0.023Cy$，其中使用了 $\|P_a\|_\infty\le(1+r)/(1-r)<1.565$、 $\int F_-\,dm\le(\sqrt{0.092}-C)/2<0.085$ 以及 $C>0.13517$。令 $w=ta^2$，则 $P-1$ 和 $P^{-1}-1$ 在 a 处的调和延拓分别为 $2\Re(w/(1-w))$ 和 $2y-2\Re(w)/(1-q)$，从而得到

$$\mathcal{P}_aL_0\ge 1+\frac{2y}{35}-0.4s-\frac{16s^2}{35(1-s)}>1+\frac{2y}{35}-0.0122.$$

在 $y=1/4$ 处对 $\log(1+y)$ 作切线，得到 $\log(1+y)\le 0.025+0.8y$；由于 $1-q=(1+y)^{-1}$ 且 $y<0.578$，我们得到 $(1-q)^{0.04}(1+2y/35)\ge(0.999-0.032y)(1+2y/35)\ge 0.999+0.023y$。 y 中的线性项相互抵消，留下

$$\frac{M(a)}{C}>0.999-0.0122-\frac{0.0033}{0.13517}>0.962.$$

最后，在整个 $\{|a|\le 0.22\}$ 上，$(0.962C)^2>0.02420(0.5+0.196)\ge 0.02420\,\mathcal{E}(G)$. □

命题 7.10 (五个凸顶点和一个凹顶点)。每个具有 $p=5$ 个严格凸顶点和 $q=1$ 个凹顶点的简单多边形 P 都满足 $d(P)>0.02420>d(R_6)$，特别是 $J(P)<J(R_6)$。

证明。反设 $d(P)\le 0.02420$。由引理 7.2 和 7.8，将五个凸前顶点居中后得到 $t<0.590<0.605$ and 一个偏移的平衡原点 $a\in\mathbb{D}$ with$|a|<0.205<0.22$。对于引理 7.9 的检验函数 G，(5.13) 给出 $\int_{\mathbb{T}}G\,d\mu\le 0$（因为 V 与 $u|A|^{2/5}$ 成比例），而其在平衡坐标中的均值为 $M(a)>0$。应用 (2.6) 得到 $d(P)\ge M(a)^2/\mathcal{E}(G)>0.02420$，矛盾。引理 3.4 给出 $d(R_6)<0.02420$，从而$J(P)<J(R_6)$。□

8. Proof of the main theorem and the spectral gap

现在我们结合第3–7节中建立的比较结果，完成定理 1.1 和定理 1.2 的证明。

定理 *1.1* 的证明。设 P 是一个简单平面多边形，在合并连续共线边后具有 p 个严格凸顶点和 q 个凹顶点，并令 $n=p+$=q, 2) 的最小值。

- 若 $q\ge 2$，则 $n=p+2$，由命题 3.6 得到 $J(P)<J(R_{p+2})$。
- 若 $q=1$，则 $n=p+1$，根据命题 7.1（$p=3$）、命题 7.7（$p=4$）、命题 7.10（$p=5$）和命题 6.7（$p\ge 6$），严格不等式 $J(P)<J(R_{p+1})$ 成立。
- 若 $q=0$，则 P 是一个凸 p 边形，且 $n=p$；定理 4.4（$p=3$）、命题 4.5（$p=4$）、定理 4.7（$5\le p\le 9$）和定理 4.3（$p\ge 10$）表明 $J(P)\le J(R_p)$，且等号成立当且仅当 P 与 R_p 相似。

最后，对于任意至多有 N 条边的简单多边形 P（$N\ge 3$），我们有 $n\le p+q\le N$。由 $J(R_k)$ 的严格单调性 (3.2) 可知， $J(P)\le J(R_n)\le J(R_N)$，且等号成立当且仅当 $n=N$、 $q=0$，并且 P与 R_N相似。□

定理 *1.2* 的证明。 每个多边形 $P \in \mathcal{D}_N$ 至多有 $p \le N-1$ 个严格凸顶点。我们首先确定当 $N \to \infty$ 时， $J(R_N) - J(P)$ 的渐近下确界。若 $p \ge N/2$，则定理 1.4 和单调性 (3.2) 给出 $d(P) \ge d(R_{N-1}) - O(N^{-5})$。若 $p < N/2$，则根据 (3.1)，引理 2.5 对所有充分大的 N 给出更强的界 $d(P) \ge (cp^3 + bp^2 - e)^{-1} > d(R_{N-1})$。由于 $R_{N-1} \in \mathcal{D}_N$，我们得到

$$\inf_{P \in \mathcal{D}_N} d(P) = d(R_{N-1}) + O(N^{-5}) \qquad (N \to \infty).$$

利用 $J(P) = 2\pi/(1 + d(P))$，结合 $d(R_{N-1}) - d(R_N) = 6ZN^{-4} + O(N^{-5})$，可得 (3.1)

$$\inf_{P \in \mathcal{D}_N} \big(J(R_N) - J(P)\big) = 12\pi Z N^{-4} + O(N^{-5}).$$

要对所有 $N \ge 4$ 建立一致下界 $J(R_N) - J(P) \ge cN^{-4}$，只需验证对每个固定的 $N \ge 4$，严格正的余量 $\inf_{P \in \mathcal{D}_N}(J(R_N) - J(P)) > 0$。

• 如果 P 的实际边少于 N 条，那么 $p + q \le N - 1$，因此由定理 1.1 和 (3.2) 得到$J(P) \le J(R_{N-1}) < J(R_N)$。

• 如果 P 有 N 条实际边和 $q \ge 2$ 个优角顶点，那么 $p \le N - 2$，因此由命题 3.6 得到$d(P) > d(R_N) + (N-1)^{-4}$。

• 如果 P 具有 N 条实际边和 $q = 1$ 个凹顶点，则 $p = N - 1$。对于 $p = 3$，命题 7.1 给出 $J(P) < 3\sqrt{3} < J(R_4)$。对于 $p = 4$和 $p = 5$，命题 7.7 和命题 7.10 排除了$d(P) \le 0.05215$和 $d(P) \le 0.02420$，根据引理 3.4，它们都严格高于 $d(R_5)$ 和 $d(R_6)$。对于$p \ge 6$，命题 6.7 的证明仅通过推论 3.5 的严格不等式使用 $d(R_{p+1})$（并且在 $p = 6$处使用严格不等式 $d_7 < 0.013273$）；由于这些严格不等式在 $d(R_{p+1})$的右邻域内仍然成立，同样的论证排除了 $d(R_N)$ 的一个正邻域。

将固定的-N 边际与大-N 的渐近极限相结合，可得到对所有 $N \ge 4$均成立的一致界$J(R_N) - J(P) \ge cN^{-4}$。□

Statement on the use of AI tools

在准备本稿件期间，使用了 AI 工具（包括 ChatGPT、OpenAI、Gemini 和 Google）协助进行数学阐述、稿件重组和语言润色，并通过互动讨论探索和完善证明策略。当前版本中的所有证明均为纯解析且自成一体；作者对所有数学结果、证明和显式界的独立核验，以及文章的最终内容，承担全部责任。

References

[1] B. Bogosel 和 D. Bucur, *On the polygonal Faber–Krahn inequality*, J. ´Ec. polytech. Math. **11** (2024), 19–105. [2] B. Bogosel 和 D. Bucur, *Polygonal Faber–Krahn inequality: local minimality via validated computing*, Commun. Contemp. Math. (2026), Art. 2650074. [3] B. Bogosel、D. Bucur 和 I. Fragal`a, *Proof of the polygonal Saint–Venant inequality conjectured by Pólya–Szegő*, 预印本, 2026, arXiv:2611.24573v1. [4] L. Brasco、G. De Philippis 和 B. Ruffini, *Spectral optimization for the Stekloff–Laplacian: the stability issue*, J. Funct. Anal. **262** (2012), 4675–4710. [5] F. Brock, *An isoperimetric inequality for eigenvalues of the Stekloff problem*, Z. Angew. Math. Mech. **81** (2001), 69–71. [6] D. Bucur、V. Ferone、C. Nitsch 和 C. Trombetti, *Weinstock inequality in higher dimensions*, J. Differential Geom. **118** (2021), no. 1, 1–21. [7] D. Bucur 和 M. Nahon, *Stability and instability issues of the Weinstock inequality*, Trans. Amer. Math. Soc. **374** (2021), no. 3, 2201–2223. [8] Z. Cheng、C. Gui、Y. Hu 和 Q. Li, *The Pólya–Szegő conjecture for convex polygons with many sides*, 预印本, 2026, arXiv:2609.18500. [9] Z. Cheng、C. Gui、Y. Hu、Q. Li 和 R. Yao, *Global strict monotonicity and asymptotics of the first Steklov eigenvalue for regular polygons* 2026, 2603 25116 2 , 预印本, arXiv: . v . [10] B. Colbois、A. Girouard、C. Gordon 和 D. Sher, *Some recent developments on the Steklov eigenvalue problem*, Rev. Mat. Complut. **37** (2024), no. 1, 1–161。

[11] J. Davies, *The equilateral triangle maximises the first Steklov eigenvalue among triangles*, 预印本, 2026年11月19日, Hexagon 2611.00629v1. [12] S. Dominguez、N. Nigam 和 B. Shabriari, *A combined finite element and Bayesian optimization framework for shape optimization in spectral geometry* **74** 2017 2874 2896 , Comput. Math. Appl. ( ), – . [13] L. Dong、S. Yang 和 J. Pan, *The square maximizes the first nonzero Steklov eigenvalue among convex quadrilaterals* 21 2026, 2611 00777 1 , 预印本, 2026年11月, Hexagon . v . [14] T. A. Driscoll 和 L. N. Trefethen, *Schwarz–Christoffel Mapping*, Cambridge Monogr. Appl. Comput. Math., vol. 8, 剑桥大学出版社, 剑桥, 2002. [15] A. Ferrero 和 P. D. Lamberti, *Spectral stability of the Steklov problem*, Nonlinear Anal. 222 (2022), Paper No. 112989. [16] A. Fraser 和 R. Schoen, *The first Steklov eigenvalue, conformal geometry, and minimal surfaces*, Adv. Math. 226 (2011), no. 5, 4011–4030. [17] A. Fraser 和 R. Schoen, *Sharp eigenvalue bounds and minimal surfaces in the ball*, Invent. Math. 203 (2016), no. 3, 823–890. [18] A. Fraser 和 R. Schoen, *Shape optimization for the Steklov problem in higher dimensions*, Adv. Math. 348 (2019), 146–162. [19] N. Gavitone、D. A. La Manna、G. Paoli 和 L. Trani, *A quantitative Weinstock inequality for convex sets*, Calc. Var. Partial Differential Equations 59 (2020), Paper No. 2. [20] A. Girouard、J. Lagac´e、I. Polterovich 和 A. Savo, *The Steklov spectrum of cuboids*, Mathematika 65 (2019), no. 2, 272–310. [21] A. Girouard、R. S. Laugesen 和 B. A. Siudeja, *Steklov eigenvalues and quasiconformal maps of simply connected planar domains* **219** 2016 903 936 , Arch. Ration. Mech. Anal. ( ), – . [22] A. Girouard 和 I. Polterovich, *On the Hersch–Payne–Schiffer inequalities for Steklov eigenvalues*, Funct. Anal. Appl. 44 (2010), 106–117. [23] A. Girouard 和 I. Polterovich, *Spectral geometry of the Steklov problem* **7** 2017 2, , J. 321 359 Spectr. Theory ( ), no. – . [24] P. Grisvard, *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*, SIAM, 费城, 2011. [25] C. Gui、Y. Hu 和 Q. Li, *A quantitative Pólya–Szegő theorem for tangential polygons*, 预印本, 2026, arXiv:2607.28768. [26] A. Henrot, *Extremum Problems for Eigenvalues of Elliptic Operators*, Frontiers in Mathematics, Birkh¨auser, 巴塞尔, 2006. [27] J. Hersch、L. E. Payne 和 M. M. Schiffer, *Some inequalities for Stekloff eigenvalues*, Arch. Rational Mech. Anal. 57 (1975), 99–114. [28] R. S. Laugesen 和 B. A. Siudeja, *Maximizing Neumann fundamental tones of triangles*, J. Math. Phys. 50 (2009), no. 11, Paper No. 112903. [29] R. S. Laugesen 和 B. A. Siudeja, *Sums of Laplace eigenvalues—rotationally symmetric maximizers in the plane* **260** 2011 1795 1823 , J. Funct. Anal. ( ), – . [30] M. Levitin、L. Parnovski、I. Polterovich 和 D. A. Sher, *Sloshing Steklov and corners: asymptotics of Steklov , , Proc. eigenvalues for curvilinear polygons* 3 **125** 2022 359 487 Lond. Math. Soc. ( ) ( ), – . [31] W. McLean, *Strongly Elliptic Systems and Boundary Integral Equations*, 剑桥大学出版社, 剑桥, 2000. [32] 偏微分算子尖锐特征值估计小型会议, *Open problems from the miniconference on sharp eigenvalue estimates for partial differential operators*, 2020年4月, 开放问题8（N. Nigam）。 [33] G. P´olya 和 G. Szeg″o, *Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics*, Annals of Mathematics Studies, no. 27, 普林斯顿大学出版社, 普林斯顿, NJ, 1951. [34] G. Szeg″o, *Inequalities for certain eigenvalues of a membrane of given area*, J. Rational Mech. Anal. 3 (1954), 343–356. [35] A. Tan, *The Steklov problem on rectangles and cuboids*, 预印本, 2017, arXiv:1711.00819. [36] H. Wang, *The Pólya–Szegő inequalities for polygons*, 预印本, 2026年11月17日, arXiv:2611.22305v1. [37] H. F. Weinberger, *An isoperimetric inequality for the N-dimensional free membrane problem*, J. Rational Mech. Anal. 5 (1956), 633–636. [38] R. Weinstock, *Inequalities for a classical eigenvalue problem*, J. Rational Mech. Anal. 3 (1954), 745–753.

School of Mathematics and Statistics HNP-LAMA Central South University Changsha Hunan , , , , , 410083 P. R. China
Email address: zhuo@outlook.cz

School of Mathematics and Statistics HNP-LAMA Central South University Changsha Hunan , , , , , 410083 P. R. China
Email address: yian93217@gmail.com