arXiv:2611.32051v1 [math.PR] 24 Nov 2026

自由广义逆高斯分布的扩展 Matsumoto–Yor 性质

那须修平 佐久间纪义

2026年11月17日

数学系，理学研究生院，大阪大学，丰中市，大阪 560-0043，日本

摘要

我们证明了自由广义逆高斯分布的 Matsumoto–Yor 性质的一个双参数扩展。该变换是一个已知矩阵杨–巴克斯特映射的倒数形式。我们的证明结合了矩阵广义逆高斯分布的保持独立性性质与渐近自由性。由于相关谱始终位于正半轴的紧子集中，借助连续函数演算和多项式逼近即可处理所有逆元。相同的论证还可推出自由泊松分布在所有正率下的自由 Matsumoto–Yor 性质，包括该分布在零点具有原子的情形。我们还讨论了两个参数之一趋于零时的极限：仅当率至少为一时，极限分布才是自由泊松分布；因此，对于较小的率，该极限无法恢复自由 Matsumoto–Yor 性质。

关键词： 自由广义逆高斯分布；Matsumoto–Yor 性质；杨–巴克斯特映射；渐近自由性。**2020年数学主题分类：** 46L54, 60B20, 60E10。

1 引言

Matsumoto–Yor 性质将一对相互独立的广义逆高斯（GIG）变量和伽马变量转换为另一对相互独立的变量（Matsumoto 和 Yor，2001；Letac 和 Wesołowski，2000）。克罗伊登和笹田（2020）发现了一个涉及两个自由广义逆高斯分布的双参数推广，并将其与离散 KdV 系统联系起来。笹田和鱼住（2024）将该变换归入四元有理杨–巴克斯特映射之列。Letac 和 Wesołowski（2024）证明了其矩阵独立性；Letac 等人（2026）建立了矩阵杨–巴克斯特方程及一个刻画结果。

我们证明了自由广义逆高斯分布所对应的保持自由性的性质。这推广了 Szpojankowski（2017）的自由 Matsumoto–Yor 性质。证明使用已知矩阵映射的倒数形式，该形式是三个逆元的线性组合。唯一的分析难点是在取随机矩阵极限时控制这些逆元。借助费拉尔谱界，可以直接使用多项式逼近论证。最后，我们证明了自由 Matsumoto–Yor 性质本身；对于所有率，它对应于 $\beta = 0$

$\lambda > 0$；此前已由 $\lambda > 1$ （Szpojankowski，2017）得知。我们还证明，只有当 $\lambda \geq 1$ 时，我们这一族的极限 $\beta \downarrow 0$ 才能恢复该性质的边缘分布。

2 保持自由性的性质

我们使用带有忠实态的迹 C^*-概率空间（$\mathcal{A}$ φ）。因此，自伴元素的谱等于其分布的支撑。对于正可逆元素，逆元通过连续函数演算定义。记 I 为单位元，记 $X \sim \mu$ 为 X 的分布；自由性以及混合矩意义下的收敛具有通常的含义（Nica 和 Speicher，2006）。

对于 $\kappa \in \mathbb{R}$ 和 $p,\ q > 0$，自由 GIG 分布 fGIG($\kappa,\ p,\ q$) 的密度为

$$\frac{1}{2\pi}\sqrt{(x-a)(b-x)}\left(\frac{p}{x}+\frac{q}{\sqrt{ab}\,x^2}\right)\mathbf{1}_{[a,b]}(x), \tag{1}$$

其中，$0 < a < b$ 由以下条件唯一确定：

$$1-\kappa+p\sqrt{ab}-\frac{q(a+b)}{2ab}=0, \qquad 1+\kappa+\frac{q}{\sqrt{ab}}-\frac{p(a+b)}{2}=0. \tag{2}$$

这就是 Hasebe 和 Szpojankowski（2019年）中的 $\mu(p,\ q,\ \kappa)$。如果 $X \sim \mathrm{fGIG}(\kappa,\ p,\ q)$ 且 $c > 0$，通过变量代换可得

$$X^{-1} \sim \mathrm{fGIG}(-\kappa, q, p), \qquad cX \sim \mathrm{fGIG}(\kappa, p/c, cq). \tag{3}$$

对于 $\alpha,\ \beta > 0$ 和正可逆 $X,\ Y$，令

$$\mathcal{T}_{\alpha,\beta}(X,Y) = (U,V), \qquad \begin{aligned} U &= \frac{\beta}{\alpha} Y^{-1} + \left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right)(\alpha X + Y)^{-1}, \\ V &= X^{-1} + (\beta - \alpha)(\alpha X + Y)^{-1}. \end{aligned} \tag{4}$$

即使（4）中的一个系数为负数，它们仍是正可逆自伴元。事实上，令$S = \alpha X + Y$，序不等式 $S^{-1} \le Y^{-1}$ 和 $\alpha S^{-1} \le X^{-1}$ 蕴含

$$U \ge \min\{1, \beta/\alpha\} Y^{-1}, \qquad V \ge \min\{1, \beta/\alpha\} X^{-1}. \tag{5}$$

定理 2.1。令 $\lambda \in \mathbb{R}$ 和 $\alpha, \beta, \gamma_1, \gamma_2 > 0$。若 X, Y是满足以下条件的自由自伴元

$$X \sim \mathrm{fGIG}(-\lambda, \alpha\gamma_1, \gamma_2), \qquad Y \sim \mathrm{fGIG}(\lambda, \gamma_1, \beta\gamma_2), \tag{6}$$

则 $(U, V) = \mathcal{T}_{\alpha,\ \beta}(X, Y)$ 相互自由，且满足

$$U \sim \mathrm{fGIG}(-\lambda, \alpha\gamma_2, \gamma_1), \qquad V \sim \mathrm{fGIG}(\lambda, \gamma_2, \beta\gamma_1). \tag{7}$$

对于 $\alpha = \beta$，该映射就是 $(Y^{-1},\ X^{-1})$。对于 $\alpha \ne \beta$，该定理给出了自由 Matsumoto–Yor 性质的一个非平凡扩展。

注 2.2。映射（4）已由 Letac 等人（2026年，注 2.2）给出。具体而言，如果

$$\phi^{(\alpha,\beta)}(x,y) = \big(y(I + \alpha xy)^{-1}(I + \beta xy),\ x(I + \beta yx)^{-1}(I + \alpha yx)\big)$$

并且 $\theta(x,\ y) = (x,\ y^{-1})$，那么 $\mathcal{T}_{\alpha,\ \beta} = \theta \circ \phi^{(\alpha,\beta)} \circ \theta$。该文中的杨–巴克斯特方程涉及 ϕ；我们不对这种倒数形式断言该方程成立。

3 通过多项式逼近证明

我们首先重 述证明中所使用的基本连续性论证。下一个引理中的状态和代数可能会随 e 而变化 a 可以随 n 变化。

引理 3.1. 对于每个 $n \ge 1$，设 (A_n, φ_n) 是一个含单位元的 C^*-概率空间，设 $(A\ \varphi)$ 是另一个这样的空间。分别用 I_n 和 I表示 A_n 和 A 的单位元。设 $A_n, B_n \in A_n$ 和 $A, B \in A$ 是自伴元素。假设满足以下条件。

1. 存在常数 $0 < c < C < \infty$，使得对所有充分大的 n，

$$cI_n \le A_n \le CI_n, \qquad cI_n \le B_n \le CI_n, \tag{8}$$

并且 $cI \le A \le CI$ 和 $cI \le B \le CI$。

2. 有序对 (A_n, B_n) 的混合矩收敛到 (A, B)，即当 $n \to \infty$ 时，$\varphi_n\big(P(A_n, B_n)\big) \to \varphi\big(P(A, B)\big)$，对每个非交换多项式 $P \in \mathbb{C}\langle x, y\rangle$ 均成立。

那么，对于每个固定的 $\alpha > 0$，元组 $(A_n, B_n, A_n^{-1}, B_n^{-1}, (\alpha A_n + B_n)^{-1})$ 关于 φ_n和 φ的混合矩收敛于 $\big(A, B, A^{-1}, B^{-1}, (\alpha A + B)^{-1}\big)$。

如果将关于 B_n 和 B 的假设替换为 $0 \le B_n \le CI_n$，$0 \le B \le CI$，而所有其他假设保持不变，那么 $\big(A_n, B_n, A_n^{-1}, (\alpha A_n + B_n)^{-1}\big)$ 关于混合矩收敛于$\big(A, B, A^{-1}, (\alpha A + B)^{-1}\big)$。

证明。固定 $\alpha > 0$ 并令

$$S_n = \alpha A_n + B_n, \qquad S = \alpha A + B, \qquad m = c\min\{1, \alpha\}, \qquad M = (\alpha + 1)C.$$

假设 (8) 和自伴性意味着

$$\sigma(A_n),\ \sigma(B_n),\ \sigma(S_n), \sigma(A),\ \sigma(B),\ \sigma(S) \subset [m, M],$$

其中， $\sigma(T)$ 表示 T 的谱。对于 $0<\varepsilon\le 1$，我们可以选择一个具有实系数的多项式 r_ε，使得

$$\sup_{t\in[m,M]}\left|r_\varepsilon(t)-t^{-1}\right|<\varepsilon.$$

对于每个 $T\in\{A_n,B_n,S_n,A,B,S\}$，连续函数演算给出

$$\|r_\varepsilon(T)-T^{-1}\|=\sup_{t\in\sigma(T)}\left|r_\varepsilon(t)-t^{-1}\right|<\varepsilon.$$

特别地，

$$\|T^{-1}\|\le m^{-1},\qquad \|r_\varepsilon(T)\|\le m^{-1}+\varepsilon\le m^{-1}+1.$$

固定一个长度为 $k\ge 1$ 的混合矩，记作 $\varphi_n(W_n)$，其中

$$W_n=X_{n,1}\cdots X_{n,k},\qquad X_{n,j}\in\{A_n,B_n,A_n^{-1},B_n^{-1},S_n^{-1}\}.$$

每个因子的选取在 n 变化时保持不变。令 $W=X_1\cdots X_k$ 表示由 A,B 构成的相应乘积。根据下式替换逆因子

$$A_n^{-1}\mapsto r_\varepsilon(A_n),\qquad B_n^{-1}\mapsto r_\varepsilon(B_n),\qquad S_n^{-1}\mapsto r_\varepsilon(S_n),$$

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$，保持 A_n,B_n 不变。将所得因子记为 $X_{n,j}$，其乘积记为 $W_n=X_{n,1}\cdots X_{n,k}$。$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ 以同样的方式根据 X_j 和 W 定义 X_j 和 W。令

$$L=\max\{C,m^{-1}+1\},$$

对于每个 n 和 j，我们都有，

$$\|X_{n,j}-\widetilde{X}_{n,j}\|\le\varepsilon,\qquad \|X_{n,j}\|,\ \|\widetilde{X}_{n,j}\|\le L,$$

$\widetilde{\ }$并且同样的估计对 X_j， X_j成立。

Rep逐个交错排列这些因子可得恒等式 tity

$$W_n-\widetilde{W}_n=\sum_{j=1}^{k}\widetilde{X}_{n,1}\cdots\widetilde{X}_{n,j-1}(X_{n,j}-\widetilde{X}_{n,j})X_{n,j+1}\cdots X_{n,k},$$

其中，空乘积表示单位元。因此

$$\|W_n-\widetilde{W}_n\|\le K\varepsilon,\qquad \|W-\widetilde{W}\|\le K\varepsilon,\qquad K=kL^{k-1}.$$

特别地， K 与 n 和 $0<\varepsilon\le 1$相互独立。

对于固定的 ε，存在一个非交换多项式 P_ε 使得

$$\widetilde{W}_n=P_\varepsilon(A_n,B_n),\qquad \widetilde{W}=P_\varepsilon(A,B).$$

因此，混合矩的收敛意味着 lies

$$\varphi_n(\widetilde{W}_n)\longrightarrow\varphi(\widetilde{W}).$$

由于态的范数为 1，

$$\begin{aligned}|\varphi_n(W_n)-\varphi(W)|&\le\|W_n-\widetilde{W}_n\|+\|\widetilde{W}-W\|\\&\quad+|\varphi_n(\widetilde{W}_n)-\varphi(\widetilde{W})|\\&\le 2K\varepsilon+|\varphi_n(\widetilde{W}_n)-\varphi(\widetilde{W})|.\end{aligned}$$

因此

$$\limsup_{n\to\infty}|\varphi_n(W_n)-\varphi(W)|\le 2K\varepsilon.$$

令 $\varepsilon\downarrow 0$ 即可证明每个混合矩都收敛。

最后，假设 $0\le B_n\le CI_n$ 和 $0\le B\le CI$。那么

$$\alpha cI_n\le S_n\le MI_n,\qquad \alpha cI\le S\le MI,$$

因此，A_n，S_n，A，S仍然具有属于 $[m, M]$的谱。对于因子属于 $\{A_n,\ B_n,\ A_n^{-1},\ S_n^{-1}\}$的乘积 W_n，仅将 A_n^{-1}和 S_n^{-1}分别替换为 $r_\varepsilon(A_n)$ 和 $r_\varepsilon(S_n)$，并保持 A_n，B_n 不变。估计式

$$\|B_n\|,\ \|B\| \le C \le L, \qquad \|r_\varepsilon(T) - T^{-1}\| < \varepsilon \quad (T \in \{A_n, S_n, A, S\})$$

由此可见，上述所有因子界仍然成立。因此，乘积恒等式和多项式矩收敛给出

$$\limsup_{n\to\infty} |\varphi_n(W_n) - \varphi(W)| \le 2kL^{k-1}\varepsilon$$

对每一个这样的乘积均成立。令 $\varepsilon \downarrow 0$ 即可证明最后一个断言。 □

设 Ω_N^+为实对称正定 $N \times N$矩阵构成的锥，并令 $\mathrm{tr}_N = N^{-1}\,\mathrm{Tr}$。若其在该锥上的密度为以下形式，则记作$Z_N \sim \mathrm{MGIG}_N^{\mathrm{F}}(\kappa, p, q)$

$$f_N(z) \propto (\det z)^{N\kappa/2-(N+1)/2} \exp\left\{-\frac{N}{2}\,\mathrm{Tr}(pz + qz^{-1})\right\}. \tag{9}$$

因子 $N/2$ 是实对称矩阵的归一化常数。其特征值密度的范德蒙德指数为 1，且外场为

$$V_N(x) = (1 + N^{-1} - \kappa)\log x + px + q/x \quad \text{in the factor } \exp\{-\tfrac{N}{2}\textstyle\sum_i V_N(x_i)\}.$$

因此 Féral（2006 年，第 1–3 定理及随后关于实数情形的说明）给出，几乎处处有 ，

$$\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \delta_{\lambda_j(Z_N)} \Longrightarrow \mathrm{fGIG}(\kappa, p, q), \qquad \lambda_{\min}(Z_N) \to a, \quad \lambda_{\max}(Z_N) \to b, \tag{10}$$

由 a，b式（2）得到。这些结论同样适用于（κ，p，q）随 N变化并收敛到一个满足p，$q > 0$的三元组的情形。特别地，这些谱最终都落在 $(0,\ \infty)$ 的某个固定紧子集中。

形如（9）的独立矩阵具有正交不变性。根据正交 Haar 渐近自由性（Collins 和 Śniady，2006，定理 5.2），因此它们几乎处处在混合矩意义下收敛到具有各自自由 GIG 分布的自由元素。为验证相关假设，先对特征值进行条件化，并使用独立的 Haar 正交特征向量矩阵。按递增顺序排列的对角特征值矩阵，由于其分位数函数的有界收敛而具有混合矩极限，并且在转置下保持不变。对于具有紧支撑确定性边缘极限和最终一致谱界的独立正交不变矩阵，同样的论证也适用，其中包括奇异 Wishart 矩阵。

最后，Letac 和 Wesołowski 的矩阵独立性（2024，定理 5.2）以 Letac 等人（2026年，定理 1.1 和注 2.2）的倒数形式表明，独立输入

$$X_N \sim \mathrm{MGIG}_N^{\mathrm{F}}(-\lambda, \alpha\gamma_1, \gamma_2), \qquad Y_N \sim \mathrm{MGIG}_N^{\mathrm{F}}(\lambda, \gamma_1, \beta\gamma_2) \tag{11}$$

给出独立输出 $(U_N,\ V_N) = \mathcal{T}_{\alpha,\ \beta}(X_N,\ Y_N)$，其中

$$U_N \sim \mathrm{MGIG}_N^{\mathrm{F}}(-\lambda, \alpha\gamma_2, \gamma_1), \qquad V_N \sim \mathrm{MGIG}_N^{\mathrm{F}}(\lambda, \gamma_2, \beta\gamma_1). \tag{12}$$

在后一个参考文献的记法中，取形状参数 $-N\lambda/2$ 和矩阵参数 $a = (N\gamma_1/2)I_N$，$b = (N\gamma_2/2)I_N$，并对第二个输入和输出取逆。

定理 *2.1* 的证明。 设 X_N 和 Y_N 是具有 (11) 中分布的独立随机矩阵。根据前述渐近自由性论证，它们的混合矩几乎必然收敛到 $(X,\ Y)$ 的混合矩，因为自由独立对的混合矩由其边缘分布决定。固定 $0 < c < C$，使开区间 $(c,\ C)$ 包含 (6) 中两个分布的支撑。由 (10) 可知，对于所有充分大的 N，X_N 和 Y_N的谱几乎必然包含于 $[c, C]$ 中；X 和 Y 的谱也包含于 $[c, C]$ 中。

因此，引理 3.1 对每个非交换多项式 P 都给出，

$$\mathrm{tr}_N\, P(U_N, V_N) \longrightarrow \varphi(P(U, V)) \quad \text{almost surely.}$$

另一方面，(12) 以及同一个渐近自由性结果表明，该极限就是两个分别具有 (7) 中相应分布的自由独立自伴元素的混合矩。因此，两个极限相等说明 U和 V分别具有 (7) 中的相应分布，且彼此自由独立。 □

注 3.2。 正谱下界是矩阵近似所必需的，而不仅仅是为了定义极限逆元。经验分布弱收敛到一个支撑远离零点的测度，并不能排除小型离群特征值。在这里，(10) 中的端点收敛恰好提供了这一界。没有使用联合算子范数收敛。定理 2.1 对非忠实迹态同样成立，只要明确假设 X，Y 为正且可逆：在包含它们实际谱的区间上应用相同的多项式逼近即可。

4 自由 Matsumoto–Yor 性质与极限情形

令 FP(λ, c) 表示率为 $\lambda > 0$ 、尺度为 $c > 0$ 的自由泊松分布：

$$\mathrm{FP}(\lambda, c) = (1-\lambda)_+ \delta_0 + \frac{\sqrt{(b-x)(x-a)}}{2\pi c x} \mathbf{1}_{[a,b]}(x)\,\mathrm{d}x,$$

其中 $a = c(1-\sqrt{\lambda})^2$，且 $b = c(1+\sqrt{\lambda})^2$。通常的自由 Matsumoto–Yor 性质由 Szpojankowski（2017，定理 3.3）针对 $\lambda > 1$ 证明。上述论证同样涵盖奇异范围，具体如下。

命题 4.1。 设 λ、p、$q > 0$。若 X、Y 是自由自伴元，且分别服从 $X \sim \mathrm{fGIG}(-\lambda, p, q)$ 和 $Y \sim \mathrm{FP}(\lambda, 1/p)$，则

$$(X+Y)^{-1} \quad and \quad X^{-1} - (X+Y)^{-1}$$

分别具有 $\mathrm{fGIG}(-\lambda, q, p)$ 和 $\mathrm{FP}(\lambda, 1/q)$ 的分布，并且彼此自由。

证明。 取整数 $k_N \geq 1$，满足 $k_N/N \to \lambda$，以及独立矩阵

$$X_N \sim \mathrm{MGIG}_N^{\mathrm{F}}(-k_N/N, p, q), \qquad Y_N = (Np)^{-1} G_N G_N^{\mathsf{T}},$$

其中 G_N 是一个 $N \times k_N$ 标准实高斯矩阵。矩阵 Matsumoto–Yor 性质（Letac 和 Wesołowski，2000）对奇异 Wishart 分布同样成立（Letac 等人，2026，式 (1.3)），它给出相互独立的输出 $U_N = (X_N + Y_N)^{-1}$ 和 $V_N = X_N^{-1} - (X_N + Y_N)^{-1}$，其中

$$U_N \sim \mathrm{MGIG}_N^{\mathrm{F}}(-k_N/N, q, p), \qquad V_N \overset{\mathrm{d}}{=} (Nq)^{-1} G_N G_N^{\mathsf{T}}.$$

这里，即使 $k_N < N$，Wishart 形状参数 $k_N/2$ 也仍然是可取的；所示等式仅确定边际分布。Féral 定理和 Wishart 谱极限（Marchenko 和 Pastur，1967；Bai 和 Yin，1993）给出了这两对变量的边际极限以及最终的一致上界。此外，$X_N \geq cI_N$ 几乎必然最终成立，其中某个 $c > 0$。因此，X_N 和 $X_N + Y_N$ 的逆元一致有界，即使 Y_N 是奇异的也如此。对输入对和输出对应用正交渐近自由性，并利用引理 3.1 的最后一个断言。像上文一样比较两个混合矩极限，即可证明结论。

□

区分这一性质与双 GIG 族的极限是有用的。根据 Hasebe 和 Szpojankowski（2019年，命题 2.13），当 $q \downarrow 0$ 时，

$$\mathrm{fGIG}(\kappa, p, q) \Longrightarrow L_{\kappa,p} := \begin{cases} \mathrm{FP}(\kappa, 1/p), & \kappa \geq 1, \\ \dfrac{1-\kappa}{2}\delta_0 + \dfrac{1+\kappa}{2}\mathrm{FP}\left(1, \dfrac{1+\kappa}{2p}\right), & -1 < \kappa < 1, \\ \delta_0, & \kappa \leq -1. \end{cases} \tag{13}$$

在定理 2.1 中，这给出 $Y_\beta \Longrightarrow L_{\lambda,\ \gamma_1}$ 和 $V_\beta \Longrightarrow L_{\lambda,\ \gamma_2}$，当 $\beta \downarrow 0$ 时。式 (4) 中的逆元项需要谨慎处理：由式 (3) 可知，

$$\beta Y_\beta^{-1} \sim \mathrm{fGIG}(-\lambda, \gamma_2, \beta\gamma_1) \Longrightarrow L_{-\lambda,\gamma_2}. \tag{14}$$

因此，系数趋于零本身并不能使这一项可以忽略。其极限分布恰好是 δ_0，当且仅当 $\lambda \geq 1$；这是关于分布的陈述，而非关于算子范数的陈述。

当 $\beta = 0$ 时，直接定义该映射为

$$U = (\alpha X + Y)^{-1}, \qquad V = X^{-1} - \alpha(\alpha X + Y)^{-1}. \tag{15}$$

无需对 Y 求逆。若 $X \sim$ fGIG$(-\lambda, \alpha\gamma_1, \gamma_2)$ 与 $Y \sim$ FP$(\lambda, 1/\gamma_1)$ 相互自由，则将命题 4.1 应用于 $\alpha X, Y$，可得到自由输出，其分布分别为 fGIG$(-\lambda, \alpha\gamma_2, \gamma_1)$ 和 FP$(\lambda, 1/\gamma_2)$，对任意 $\lambda > 0$ 均成立。对于

$\lambda \geq 1$，这些分布与双 GIG 族的边际极限一致。对于 $0 < \lambda < 1$，该族则具有式 (13) 中的混合极限。这种差异并不意味着自由 Matsumoto–Yor 性质失效。另一个极限 $\alpha \downarrow 0$，最简单的描述方式是通过倒数：

$$X_\alpha^{-1} \sim \mathrm{fGIG}(\lambda, \gamma_2, \alpha\gamma_1) \Longrightarrow L_{\lambda,\gamma_2}.$$

对于 $\lambda \geq 1$，极限分布在零点没有原子，因此 X_α 弱收敛于 FP(λ，$1/\gamma_2$) 的倒数；在 $\lambda = 1$ 处，该倒数分布具有无界支集。对于 $-1 < \lambda < 1$，质量 $(1-\lambda)/2$ 逃逸至无穷远；对于 $\lambda \leq -1$，全部质量都逃逸至无穷远。这些结论针对的是测度；当极限算子的谱支集触及零时，并不能据此推断该算子有界可逆。

致谢

作者感谢 Jacek Wesołowski 就本研究所进行的有益讨论并提出宝贵意见。

N. Sakuma 部分获得 JSPS KAKENHI Grant Numbers JP25H00593、JP23K03133 和 JP26K06828 的资助。S. Nasu 获得 JST SPRING Grant Number JPMJSP2138 的资助。

生成式人工智能的使用

在准备本手稿期间，作者使用 ChatGPT（OpenAI）协助进行英文编辑、改进数学解释的清晰度，以及核查参考文献和手稿的一致性。作者审阅并修订了经人工智能辅助生成的内容，并对文章内容承担全部责任。

参考文献

Bai, Z.D., Yin, Y.Q., 1993. 大维样本协方差矩阵最小特征值的极限。Ann. Probab. 21, 1275–1294. Collins, B., Śniady, P., 2006. 关于酉群、正交群和辛群上 Haar 测度的积分。Comm. Math. Phys. 264, 773–795. Croydon, D.A., Sasada, M., 2020. 离散 KdV 型和 Toda 型系统的细致平衡与不变测度。arXiv:2007.06203. Féral, D., 2006. 广义逆高斯随机矩阵模型的极限谱测度。C. R. Math. Acad. Sci. Paris 342, 519–522. Hasebe, T., Szpojankowski, K., 2019. 关于自由广义逆高斯分布。Complex Anal. Oper. Theory 13, 3091–3116. Letac, G., Piccioni, M., Wesołowski, J., 2026. GIG 随机矩阵与 Matsumoto–Yor 性质的 Yang–Baxter 扩展。arXiv:2602.12713. Letac, G., Wesołowski, J., 2000. GIG 分布与伽马分布乘积的一种独立性性质。Ann. Probab. 28, 1371–1383. Letac, G., Wesołowski, J., 2024. 关于 Matsumoto–Yor 性质的一种扩展。Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat. 60, 2075–2091. Marchenko, V.A., Pastur, L.A., 1967. 某些随机矩阵集合的特征值分布。Math. USSR-Sb. 1, 457–483. Matsumoto, H., Yor, M., 2001. 指数 Wiener 泛函的 Pitman 定理类比。II. 广义逆高斯分布的作用。Nagoya Math. J. 162, 65–86. Nica, A., Speicher, R., 2006. 《自由概率组合学讲义》。伦敦数学学会讲义系列 335。Cambridge University Press, Cambridge. Sasada, M., Uozumi, R., 2024. Yang–Baxter 映射与保持独立性质。Electron. J. Probab. 29, paper no. 49, 21 pp. Szpojankowski, K., 2017. 自由概率中的 Matsumoto–Yor 性质。J. Math. Anal. Appl. 445, 374–393.