识别潜在平面度数序列

ZheZhang Renwen TianSuki-Edu 数学科学学院 武汉，中国
北京师范大学，北京，中国
zz940521@gmail.com renwen.tian@mail.bnu.edu.cn

arXiv:2611.32060v1 [cs.CC] 24 Nov 2026

摘要

即使对于最小度至少为三且总和为 $6n-12$ 的可图 n 项度数列表，检验其是否存在简单平面实现仍然是强NP完全问题。两个 13 顶点的三角剖分具有排序后的度数列表，其中点是可图的，但没有平面实现；这排除了即使在总和为 66 时通过排序后的条目上的同时仿射不等式进行刻画的可能性。对于任意列表，仅基于度数的有序区间规则和有限差分分别给出了精确判据。对于 L 比特的输入，确定性的 $O(L)+2^{O(\sqrt{n})}$ 时间搜索可以找到一个实现，或判定其不存在。在 Bar-Noy 等人的稀疏界之后的前两个偶数总和处，我们对正可图列表中的所有例外进行了分类，从而在扩展范围内实现了字 RAM 上的线性时间识别。特别地，对于 $n \geq 8$，追加 $n-6$ 个度为二的顶点，就足以使每个最小度至少为三且总和为 $6n-12$ 的可图 n 项列表都成为潜在平面。

1 引言

Hakimi 提出疑问：哪些可图的列表（即由简单图实现的列表）允许平面实现 [4,附录 IV，问题 35]。这类列表称为潜在平面的，或称可平面化的。八面体实现了 (4^6)，其中指数表示重数。在相同的总和下，$(5^3, 3^3)$ 的三个全邻顶点迫使出现一个 $K_{3,\ 3}$。在列表末尾添加一个 2 后，该列表便可平面化（图 1）。在《平面度数实现》中，输入是一个明确的列表 $d = (d_1, \ldots, d_n)$，其中元素是以二进制表示的非负整数。见证是一个具有 $[n]$ 个顶点、在 i处度为 d_i 的简单平面图，其中允许存在孤立顶点和非连通图。

Böttger 和 Harders [5] 展示了一个满足 Hakimi 必要度条件 [14]、但没有平面实现的列表。Chvátal [7, 问题 24] 要求给出平面实现的充要条件，并引用了普通可图性的 Erdős–Gallai 判据。Schmeichel 和 Hakimi [26] 随后对最大度数获得了进一步限制。按边界顺序保留剩余度数，可得到一个精确的区间规则（定理 2.1）。一个十三顶点的中点反例排除了通过排序后的度数中的同时仿射不等式进行刻画的可能性（命题 2.2）。通过计数球面嵌入可得到一种非线性检验（定理 2.3）。
中点示例中使用的三角剖分和也允许从 3-划分进行归约。

定理 1.1。 平面度数实现 即使对于 $n \geq 4$、最小度至少为三且度数和为 $6n-12$ 的情形，仍然是强*NP*完全的。归约的每个输出都是可图的，并且具有一个3-连通实现。所产生的每个是实例都有一个叠置三角剖分实现。

在这个和下，每个平面实现都是一个三角剖分。Fanelli 和 Zaffiri [11] 研究了满足连通性或邻接约束的此类列表。第 4 节中的归约利用三角形面来编码指定邻接关系。在可图的输入上进行多项式时间识别将意味着 P = NP。对于两种答案都存在可在多项式时间内验证的证书；按照 Edmonds [9], 的意义，这样的良好刻画将意味着 NP =coNP。对于任意输入，加权分隔集限定了构造一个实现所需的边界数据。

定理 1.2。 在确定性多带图灵机上，平面度数实现可在 $O(L)+2^{O(\sqrt{n})}$ 时间内判定，其中 L 是带分隔符的二进制列表的比特长度。若存在实现，该算法会在相同的时间界内返回一个使用输入标签的实现的边。

列出阶为 n 的 $2^{\Theta(\sqrt{n})}$ 个可平面化度数多重集需要 $2^{O(\sqrt{n})}$ 总时间（推论 D.3）。

一个可图序列必须多么稀疏，才能保证存在平面实现？对于带有 ℓ 个度为二的顶点的正可图n项序列，Bar-Noy 等人 [2, 3] 证明了总和至多为 $4n-4-2\ell$ 即足够。到 $4n-2-2\ell$ 为止，他们尚未解决障碍是否可能含有一个叶或多于六个顶点的问题。只有 $(4^5, 2)$ 在那里不成立（定理 3.2），而定理 3.3 对下一层 $4n-2\ell$ 进行了分类。

增加两个度为二的顶点会使这一边界提高四，并使总和增加二。对于满足定理 1.1 且具有 $p=|h|\geq 8$ 的可图序列 h，在加入 $p-6$ 个度为二的顶点后达到该边界，所得序列是可平面化的（推论 3.4）。第 5 节探讨 $T(h)$（平面性所需的最小值）能够有多大。

2 一般度数列表的判据

2.1 有序区间判据

每一步移动都会更新剩余度数，就像 Havel–Hakimi 规则 [16, 13]一样。选择具有非确定性，并遵循圆盘边界上正剩余度数的顺序。丢弃零，从空行开始。移除一个未使用的度数 d，并选择一个包含 $k\leq d$ 个行条目的连续区块。对于 $k\geq 2$，每个严格内部条目都必须等于 1。将区块 a_1、……、a_k 替换为（a_1-1、$d-k$、a_k-1）。对于 $k=1$，从所选条目中减去 1，并在其两侧插入 $d-1$。对于 $k=0$，将 d 插入任意间隙，包括两端。每一步移动后都擦除零。

定理 2.1。一个非负整数列表具有简单平面实现，当且仅当存在一系列此类移动，消耗其全部正条目并最终得到空行。

证明。将部分图画在一个圆盘内，并按行序将仍需邻点的顶点置于圆盘边界上。在圆盘外添加一个新顶点，用非交叉扇将其与该块相连。严格内部的顶点由此获得最后一个邻点，因此将圆盘沿扇形区域向外扩展，即可得到新的一行。恢复孤立点后，接受运行便实现了该序列。

反过来，将正数项对应的平面实现补全为具有相同顶点集的平面三角剖分（阶小于三时显然成立）。将原始边染成红色。沿着从基边 $[8]$, 开始的规范序，记录外部路径上仍待加入的红色邻点数。先加入两个基顶点；若它们之间的边为红色，则将其计入。每个新顶点覆盖外部路径上的一个区间。此时，行中每个严格内部顶点都离开该路径，因此它唯一剩余的红色邻点就是这个新顶点。于是红色前驱构成一个合法的块，未选中的端点则分别保留在各自一侧。最后一个顶点加入后，该行便为空。

□

接受运行是一份多项式证书。根据定理 1.1，判定是否存在这样的证书是 NP 完全问题。自由排列将允许 $(5^3, 3^3)$。连接两个五度顶点，将它们移到一起，使每个三度顶点都与两者相连，然后将最后一个顶点与这五个顶点全部连接。所得图包含图 1 中强制出现的 $K_{3,\ 3}$。

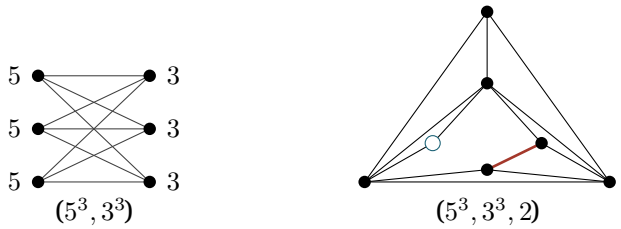


图 1：对于 $(5^3, 3^3)$，强制的 $K_{3,\ 3}$ 以及 $(5^3, 3^3, 2)$ 的平面实现。空心圆的度为二。粗边按照命题 3.5 将两个内部顶点配对。

2.2 十三个顶点上的中点障碍

区间规则维护一个边界顺序。Erdős–Gallai 检验 [10] 的可图性只使用排序后的度数。当总和为偶数时，其最小值展开为同时仿射不等式。

命题 2.2。 对于排序后的序列

$$h_j = (12, 7+j, 7-j, 5^5, 3^5), \qquad j = 0, 1, 2,$$

h_0 和 h_2 具有堆叠平面实现，而其中点 h_1 是可图的，但没有平面实现。因此，即使在长度为十三且总和为66的可图序列中，也不存在能够通过排序后的条目刻画平面可实现性的仿射不等式组。

证明。 每个序列的总和为 $66 = 6 \cdot 13 - 12$。每个平面实现都是一个三角剖分。删除其全邻顶点后，得到一个三角剖分的十二边形。对其边界进行锥化即可逆转这一操作。

对于 h_0，将一个七边形沿圆周依次标记为 0 到 6，绘制对角线 35、 36、26、 16，并在除 12 和 56 之外的每条边界边上各连接一个耳。对于 h_2，使用以 0 为中心的扇，并省略 23 和 45 上的耳。对图 2 中的两个多边形进行锥化，即可得到所述的度数。依次删除耳可将每个锥化图形化简为一个四面体，因此两个三角剖分都是堆叠的。

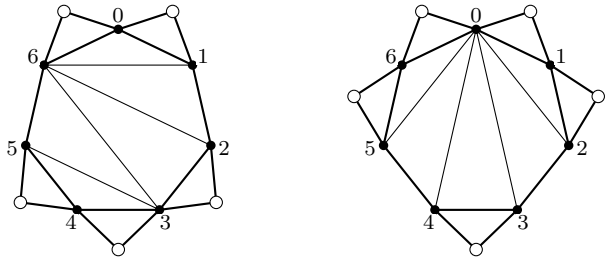


图 2：端点多边形的度数分别为 $(6^2, 4^5, 2^5)$（左）和 $(8, 4^6, 2^5)$（右）。实心顶点构成七边形，五个空心顶点是其添加的耳。

h_1 的多边形的度数应为 $(7, 5, 4^5, 2^5)$。移除其中五个两两不相邻的耳。将剩余七边形的两条边界边（ P 原先没有承载耳）称为裸边。如果 v连接着 b_v 条裸边，则其原度数为 $d_P(v) + 2 - b_v$。对于原度数为七的顶点 A， $d_P(A) = 5 + b_A \le 6$。如果 $b_A = 1$，则 P是 A处的一个扇。 A 处的裸边终止于一个二度扇顶点，而该顶点的原度数至多为三，低于所要求的四。

如果 $b_A = 0$，则 A 的五个邻点构成其链接路径 U。扇外唯一的顶点 X 在一条链接边 yz上形成一个耳。 X 处的两条边界边都承载着耳，因为其原度数至少为四。对于 $v \in \{y, z\}$，只有 yz以外的链接边可能是裸边。因此， $b_v \le d_U(v) - 1$以及 $d_P(v) = 2 + d_U(v)$。 y和 z 的原度数都至少为五，尽管目标除了 A之外只允许有一个这样的顶点。

要证明 h_1 是可图的，取 h_2的一个实现中度数分别为九和五的顶点 a， b。 a 的某个邻点 w 位于 $N(b) \cup \{b\}$之外，因此用 bw 替换 aw 即可实现 h_1。两个端点所满足的每个仿射不等式，其中点也满足。 □

十三阶是第一个在总和 $6n - 12$ 处出现缺失整数中点的阶。三阶是显然的。利用 `plantri` [6]，我们检查了四阶至十三阶中所有成对的不同有序三角剖分度数列表。十三阶的 947 个度数列表有五个不同的缺失中点。

2.3 度数中的一个算术判据

按面数计算嵌入会给出一个仅依赖度数的非线性检验。它区分了命题 2.2 中缺失的中点及其两个端点。

删去零，空列表也接受。对于剩余的 n 个条目，若拒绝度数至少为 n 或总和为奇数。记为 $2m=\sum_i d_i$。若 $m \le n-1$，则通过删叶法构造一片森林。当某个度数超过一时，删去一个度为一的节点，并将最大的度数减一。总和界保证存在一个度为一的节点，并且在每一步之后仍然成立。将剩余的度为一的节点配对，再通过添加叶节点反向执行这些步骤。对于 $n \ge 3$，拒绝 $m > 3n-6$。

设 B 为删除一行后的 K_n 有向关联矩阵。对于整数 $q \ge 1$，令X_i 为由独立可交换变量组成的 $q \times q$ 矩阵， ∂_i 为其逐项偏导数矩阵， C 为对角矩阵，其对角元为 $c_{ij}=\mathrm{tr}(X_iX_j)$，其中 $i<j$。

定理 2.3。 设 d 具有 n 个正整数项，且总和为偶数 $2m$，并且 $\max_i d_i < n$。假设$n \le m \le 3n-6$，并令 $f=m-n+2$。那么 d 存在简单平面实现，当且仅当

$$\sum_{q=1}^{f}(-1)^{f-q}\binom{f}{q}H_d(q)>0, \qquad H_d(q)=\left(\prod_i \mathrm{tr}(\partial_i^{d_i})\right)\det\begin{pmatrix} I+C & CB^{\mathsf T} \\ -B & 0 \end{pmatrix}\Bigg|_{X=0}.$$

提取球面项可得这一代数存在性判据（附录 B）。定理 1.2 中独立的面搜索可在 $O(L)+2^{O(\sqrt{n})}$ 时间内构造一个见证。

3 稀疏度数和下的精确识别

一个二度顶点就足以使命题 2.2 的中点 h_1 可平面化。在 h_2的平面实现中，取度数分别为十二、九和五的顶点 u， a， b。删除 ua，并沿着保留边 ub旁边，从 u 到 b 画一条新的两边路径。这样便得到 $(h_1,\ 2)$，因此 h_0， h_1， h_2 所需的二度顶点最少数目分别为 0，1，0。

为了一般性地计算所需的度为二的顶点数，去掉度为零的顶点，并将 $d=(h_1、\ldots\ldots、h_p、2^t、1^\ell)$ 写成 $h_i \ge 3$。令 $H=\sum_i h_i$、 $n=p+t+\ell$ 和 $S=H+2t+\ell$。当 $p=0$时，每个可图序列都是可平面化的，因为任意实现的每个连通分量都是一条路径或一个环。假设 $p \ge 1$ 和 $H+\ell$为偶数。令 $T(h、\ell)$ 为使 d可平面化的最小 t。我们将 $T(h)=T(h,\ 0)$ 写为。

当 $\ell > H$时，将 h_i 个独立的叶节点连接到顶点 i 上，并将剩余的叶节点两两配对。这样得到 $T(h、\ell)=0$。以下设 $\ell \le H$。令 $e=(H-\ell)/2$。考虑在这 p 个核心顶点上、恰有 e 条边且 $\deg_M(i) \le h_i$ 的平面多重图 M。允许存在自环和平行边，其中一个自环对其顶点度贡献二。令 $s(M)$ 统计不同顶点之间的不同相邻顶点对，并令 $\lambda(M)$ 按重数统计自环。

引理 3.1。 二度顶点的最小数量为

$$T(h,\ell)=e-\max_M\bigl(s(M)-\lambda(M)\bigr).$$

列表 $(h、2^t、1^\ell)$ 恰好在 $t \ge T(h、\ell)$ 时可平面化。

证明。 最大值取自一个有限且非空的集合。选择满足$2e$的整数 $0 \le r_i \le h_i$。用不相交边配对奇数需求，并用自环填补剩余的偶数需求。对于任意候选对象 M，将 $h_i-\deg_M(i)$ 个叶节点连接到顶点 i。从每个非自环平行类中保留一条边，并将每条额外的副本细分一次。将每个自环细分两次。所得结果是一个具有所需度数的简单平面图，其中使用了 $e-s(M)+\lambda(M)$ 个度为二的顶点。还可以沿单条边放置更多度为二的顶点。

反过来，取一个简单平面实现，舍弃完全由度为二的顶点组成的连通分量，并压缩经过其余度为二顶点的路径。在所得的平面多重图中，每个非自环平行类都至少需要为每个额外副本进行一次细分，而每个自环都至少需要两次。如果两个叶节点构成一条孤立边 uv，那么必定存在一条核心边 xy：若有 b 条叶节点—叶节点边，则核心有 $e+b$ 条边。将 uv, xy 替换为悬挂边 xu, yv，即使 $x=y$时也如此。叶节点可以画在它们新的端点处，而删除一条核心边不会增加所需的细分次数。重复此过程，直到所有叶节点都成为悬挂叶节点。移除它们后，剩下一个候选对象M，其细分代价至多为原来的 t。 □

对于一个不含 1 或 2，且 $H = 6p-12$的序列，零代价要求 $s(M)-\lambda(M) = 3p-6$。由于M恰有 $3p-6$ 条边，每条边都必须连接一对不同的顶点。因此，其支撑图是一个三角剖分。定理 1.1讨论的正是这一等号情形。

对于稀疏层，记为 $S = 4n-2\ell-2j$。代入得 $e-t = 2p-j$，因此当 $\ell \le H$ 时，引理 3.1 表示为

$$d \text{ is planaric} \quad\Longleftrightarrow\quad \max_{M}\bigl(s(M)-\lambda(M)\bigr) \;\ge\; 2p-j. \tag{1}$$

Bar-Noy 等人 [3, 定理 2] 证明，每个满足 $j \ge 2$ 的正可图序列都是可平面化的。对于$p \ge 1$，接下来的两层自动满足 $\ell \le H$，因为 $H-\ell = 4p+2t-2j$。它们在 (1) 中的目标值分别为 $2p-1$ 和 $2p$。以下结果精确地刻画了哪些可图序列不满足这些目标值。

定理 3.2。 一个满足 $S \le 4n-2-2\ell$ 的正可图序列是可平面化的，当且仅当 $d \neq (4^5,2)$，其中序列顺序不计。

Schmeichel 和 Hakimi [26, 定理 4] 指出了这个例外序列。这回答了 Bar-Noy 等人 [2, 第 4 节 4], [3, 第 7] 节提出的两个问题：在这个总和下，是否存在更大的无叶障碍，以及是否存在带叶障碍。

定理 3.3。 一个含有 $S = 4n-2\ell$ 的正可图序列没有平面实现，当且仅当在阶的意义下属于以下情形之一：

1. $p = 5$。
2. $p = 6$，且 h_i 中恰有三个为三。
3. d 为 $(\ell+5,\,4_4,\,3,\,1^{\ell})$、$(\ell+6,\,4_5,\,2,\,1^{\ell})$，或 $(\ell+6,\,5_2,\,3_4,\,1^{\ell})$，其中 $\ell \ge 0$ 为某个数。
4. d 为 $(5^5,3,2^2)$、(4^7) 或 $(6^3,3^4,2)$。

如果 $t \ge 3$，则只剩下前两种情形。可图例外情形 $(5^5,3,2^2)$ 表明，这种简化在 $t = 2$ 时就已经失效。附录 C 证明了两个边界定理。

推论 3.4。 在 $S = 4n-2\ell$ 上，每个具有 $p \ge 8$ 的正可图序列都是可平面化的。对于每个 ℓ，都存在一个具有 $p = 7$ 的例外。

证明。 这个例外序列 $(\ell+6,\ 5_2,\ 3_4,\ 1^{\ell})$ 是可图的：添加一个与 K_2 的全部六个顶点相邻的顶点，$_4$ 并将 ℓ 个叶节点连接到该顶点上。 □

通过 $S = 4n-2\ell$，在字 RAM 上进行识别需要确定性线性时间。在检查度数界和奇偶性之后，度数直方图及其前缀和就足以完成 Erdős–Gallai 检验 [19] 以及上述例外的检查。

设 h 是具有 $p \ge 8$、最小度至少为三且满足 $H = 6p-12$ 的可图序列。将一条边细分 $p-6$ 次，可得到在 $S = 4n$ 下的可图序列。因此，推论 3.4 给出 $T(h) \le p-6$，改进了 Bar-Noy 等人 [3] 的界 $p-4$。在这一类中，对于每个固定整数 $r \ge 1$，以及当 $29 \mid p$ 时的 $r = p/29-1$，判定 $T(h) \le r$ 是强NP完全的（定理 A.2）。读取输入后，使用二分搜索和定理 1.2，可在 $2^{O(\sqrt{p})}$ 时间内找到 $T(h)$ 及一个见证，其中对长度至多为 $2p-6$ 的序列调用 $O(\log p)$ 次。

命题 3.5。 对于每个 $p \ge 4$，从 0 到 $\lfloor (p-4)/2 \rfloor$ 的每个整数，都是长度为 p、最小度至少为三且度数和为 $6p-12$的可图序列 h 的 $T(h)$。事实上，令 $q = 2m+4$ 和 $k = p-q$，则可以取

$$h = \bigl((p-1)^2,\, q-1,\, 4^{k},\, 3^{q-3}\bigr).$$

构造及匹配下界见附录 A。

4 通过度数编码指定边

对于长度为 $n \geq 4$、最小度至少为三且度数和为 $6n-12$, $T(h)$ 的可图序列 h，当且仅当 h 可由球面三角剖分实现时，$=0$。球面三角剖分是嵌入球面且所有面均为三角形面的简单图。定理 1.1 的归约通过在三角形面中叠置一个顶点并将其与三个角点相连，以编码指定边。通过此类步骤从 K_4 构造出的三角剖分称为堆叠的。

4.1 由三角形面表示的箱

取一个 3-划分的一元实例，其中 $m \geq 1$、容量为 B，且有 $3m$ 个正物品大小 w_j满足

$$B/4 < w_j < B/2, \qquad \sum_j w_j = mB.$$

在这些界限和一元编码 [12]下，该问题仍为 NP 完全。我们首先构造一个度数列表 q，以及其位置上的一组 F 指定边。

图3展示了一个三角形面如何容纳一个箱。从面$R_iA_iC_i$开始，依次插入 B 个物品顶点，每个顶点都与 R_i、A_i 及其前驱相邻，其中 C_i 是第一个顶点的前驱。最后，一个封顶顶点 y_i 封住该链。每个物品顶点的度为四，封顶顶点的度为三，而三个角点分别增加 $B+1$，$B+1$，1 个邻点。

对于骨架 Q，取路径 $0,\dots,4m+2$的三次幂，即 Maffucci [23, 附录 A]中也使用的叠置三角剖分。前四个顶点构成一个四面体，之后的每个顶点都可以叠置在由其三个直接前驱构成的面上。对于箱 i，其中 $0 \leq i < m$，取

$$(R_i, A_i, C_i) = (4i, 4i+1, 4i+3).$$

当 $i=0$ 时，这个三角形是初始四面体的一个面；否则，它是在插入$4i+3$ 时创建的。由于它的三个标签并非连续，因此在整个构造过程中始终是一个面。箱面所用的顶点集合两两不相交，而根 R_i 在 Q 中两两不相邻。

要构成 q，取 Q 中各顶点的度，并加上前文所述箱角点处的增量。对于每个物品 j，添加一条由 w_j 个新顶点组成、目标度为四的路径；对于每个箱，添加一个目标度为三的封顶顶点。指定 Q 的边、每条物品路径内部的边，以及每个封顶顶点处的边R_iy_i。由于 Q 的最大度不超过六，指定的图的最大度不超过七。旧顶点处的增量总计为 $m(2B+3)$，新顶点的贡献为 $4mB+3m$。因此，q 的阶为 $s = 4m+3+m(B+1)$，且 $\mathrm{vol}(q) = 6s-12$。

引理 4.1。 度数列表 q 具有包含 F 的平面实现，当且仅当这些物品可以进行3装箱。在这种情况下，存在一个包含 F的叠置实现。对于每个源实例，单独的 q 都具有叠置实现。

证明。 给定一种装箱方式，将分配给每个箱的物品路径连接起来，同时保留每条路径上顶点的顺序。图3的构造实现了所有要求的度数，并且每条物品路径内部以及每个封顶顶点处的边都存在。如果只关注度数列表，我们可以将 mB 物品顶点任意分成大小为 B 的组，并应用相同的构造。

反之，假设一个平面实现包含 F。其骨架顶点恰好诱导出 Q，因为 Q 已经达到欧拉边界。由于连通性，每条物品路径，即使只包含一个顶点，也位于 Q 的一个开面内。路径到根的任何边都终止于该面的一个角点。由于这三个角点构成一个三角形，且根在 Q中彼此独立，因此其中至多有一个是根。封顶顶点 y_i 同样位于单个开面内，并且根据指定边 R_iy_i，其边界上有 R_i。因此，每个新顶点至多连接一个根。该

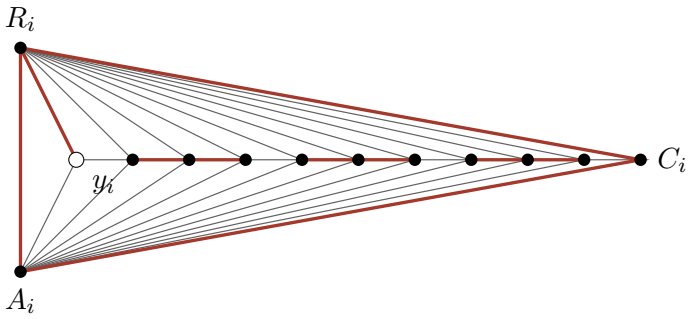


图3：一个容量为九的箱中装有三个尺寸为三的物品。粗边是该面中所有可见的指定边，包括三条骨架边、三条物品路径和盖边 $R_i y_i$。细边补全了三角剖分。从 C_i 朝 $R_i A_i$ 方向读取时，每个物品顶点会获得四个邻点，而封顶顶点 y_i 会获得三个邻点。

各根处的增量总和为 $m(B+1)$，即新顶点的数量，因此每个新顶点恰好连接一个根，并且同一物品的所有顶点连接的是同一个根。计入其封顶顶点后，每个根还剩下B 个邻点可分配给物品。由于 $B/4 < w_j < B/2$，这些邻点恰好属于三个物品。

□

4.2 反向读取层

列表 q 本身总是有叠置实现。为了通过度数强制得到边 F，我们使用一系列插入层，记录哪些角点属于跳过的面。设 π 有 $N \geq 4$ 个位置，每个位置的度至少为三，且 $\mathrm{vol}(\pi) = 6N - 12$。选取一组包含 $3t$ 个不同位置的集合 U。一轮操作生成列表 π'，如下所示

$$\pi'_v = 2\pi_v - \mathbf{1}_{v \in U} \quad (v \text{ old}), \qquad b = 2N - 4 - t \quad \text{new entries of degree three.} \tag{2}$$

由于 $3t \leq N$ 和 $N \geq 4$，我们有 $b \geq 3$，即使在 $t = 0$ 时也是如此。新的阶为 $N' = 3N - 4 - t > 4$，且 $\mathrm{vol}(\pi') = 6N\prime - 12$。当 $t = 0$ 时，将此全面插入面记作 $\mathcal{F}(\pi) = (2\pi,\ 3^{2N-4})$。

引理 4.2。令 π'、U 和 t 如(2)所述。从一个 π 的三角剖分出发，其中 U 是 t 个顶点不交面的角点并集，在每隔一个面中插入一个顶点，即可得到 π'的三角剖分。

反过来，取任意 π' 的平面实现，并以任意顺序将其顶点分配到度数相同的位置。在球面嵌入中，三价顶点彼此独立。删除所有这些顶点后，剩下的是一个位于旧位置上的三角剖分，其度数为 π。其中恰有 t个面未进行插入。这些面的顶点集两两不交，且并集为 U。

证明。将指定的面留空，并在其余每个面上各堆叠一次，则每个顶点v 会在其 π_v 个关联面中的每一个面获得一个邻点，但$v \in U$时唯一被跳过的面除外。例如，填充 K_4的三个面会将 (3^4) 变为 $(6, 5^3, 3^3)$。

反过来，按照所指示的位置为 π' 的一个三角剖分标记。由于每个旧顶点的度至少为五，新顶点恰好就是度为三的顶点。在阶大于四的简单球面三角剖分中，两个三价顶点不可能相邻。事实上，它们公共边两侧的两个面会使这两个顶点拥有相同的另外两个邻点，而这四个三角形在这对顶点处恰好构成一个完整的四面体球面。

因此，我们可以删除所有三价顶点，将每个三面扇替换为其边界三角形。剩余的三角剖分的阶为 N，而删除的扇会产生彼此不同的恢复的面。事实上，位于同一边界三角形相对两侧的两个扇会填满球面，只留下三个旧顶点。一个与具有相同边界的未填充面相对的扇，会填充一个阶为四的四面体球面。

将 a_v 记为剩余度，将 h_v 记为未进行插入的关联面的数量。在删除之前计算关联边，得到

$$2a_v - h_v = 2\pi_v - \mathbf{1}_{v\in U}.$$

由于 $h_v \geq 0$ 和度数均为整数，因此在每个顶点处都有 $a_v \geq \pi_v$。两个度数和都等于 $6N-12$，所以处处取等号，并且 $h_v = \mathbf{1}_{v\in U}$。准确地说，跳过了 t 个面，每个选定的位置都使用了一次，而其他位置未被使用。 □

通过多层读取度数。固定层的总数 R。假设一个位置 x 首次出现在第 j 轮，度数为 a；对于原始位置，$j=0$，对于插入的位置，$a=3$。如果 D_r 表示经过第 r 轮后的度数，而对于 $r>j$，$\varepsilon_r = \mathbf{1}_{x\in U_r}$，则由（2）可得

$$D_j = a, \qquad D_r = 2D_{r-1} - \varepsilon_r, \qquad D_R = 2^{R-j}a - \sum_{r=j+1}^{R} 2^{R-r}\varepsilon_r.$$

最后的度数决定了整个记录。在第 $r \geq 1$ 轮，值为 3 表明某个位置在该轮产生，因为每个仍存活的旧度数至少为 5。对于任何更大的值D，其奇偶性给出 ε_r，而 $\lceil D/2 \rceil$ 给出前一个度数。如果下降过程到达第 0 轮，剩余的值就是原始度数，而它本身可能为 3。因此，最终度数相同的位置具有相同的产生轮次、初始度数以及后续选择位。

4.3 消除指定边

在每条指定边上方放置一个标记点，使其仅有的两个原始邻点正好是该边的两个端点。为了仅根据度数恢复它们的身份，将不相交边分组成匹配，并对每个匹配中的边编号。每次应用引理 4.2 都会为选定的一组标记点强制确定关联关系。通过一次选择一个二进制位类，我们便能在每个匹配中以对数轮次确定每条边的两个端点。

引理 4.3（消除指定边）。固定一个非负整数 c。设 q 是一个位于 $s \geq 4$ 个位置上的列表，其具有 $3 \leq q_v < s$，且 $\mathrm{vol}(q) = 6s-12$；设 F 是这些位置上的一个简单图，其最大度至多为 c。在多项式时间内，可以写出一个普通度数多重集 d，其中所有条目至少为三，且总和为 $6|d|-12$，其条目数为 $|d|$。当且仅当某个度数为 q_v 的球面三角剖分包含 F 的全部边时，它才具有平面实现。

每个这样的三角剖分都可以通过面插入扩展为 d 的一个实现。从 d 的每个平面实现出发，删除三价顶点所在的层并识别保留下来的位置，即可恢复一个实现 (q,F) 的导出三角剖分。特别地，(q,F) 的堆叠见证可扩展为 d 的堆叠见证。

证明。若 F 没有边，则使用 q 中各项构成的多重集。任何平面实现都可以通过将顶点分配给度相同的位置，来赋予规定的位置。若 $|E(F)| > 3s-6$ 或某个 $\deg_F(v) > q_v$，我们可以输出 $(5^3, 3^3)$，其三个全邻顶点保证 $K_{3,\,3}$。以下假设这两个界限均未超出，且 F 有一条边。

构造。令 $\pi^{(0)} = q$。前三轮不跳过任何面。第一轮将每个原始面划分为三个三角形，每个三角形恰好与一条原始边相邻。第二轮中，在这样的三角形里插入一个顶点，以标记该边的两个端点。第三轮在从标记点到端点的每条边的两侧各提供一个新的第三个角。在此后的每一轮中，根据 (2)，保留下来的顶点的度的奇偶性记录其位置是否被选中。

为每条边 $e \in E(F)$预留一个不同的第二轮位置 m_e。这对每个 $s \geq 4$都可行，因为第二轮增加了 $6s-12$ 个顶点和 $|E(F)| \leq 3s-6$。在通过三个完整轮次还原出的任何三角剖分中，标记点两两不相邻，且每个标记点的两个原始邻点是某条原始边的端点。反过来，如果

一个度数为 q 的三角剖分包含 F，我们可以将 m_e 分配给第二轮中插入在 e 上的一个顶点。不同的边使用第一次细分中的不同三角形（图4）。

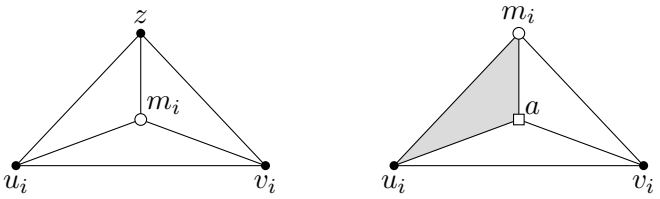


图4：测试指定边 u_iv_i的端点 u_i。左图中，第一轮顶点z 与该边围成一个面，第二轮会在其中插入标记点 m_i。右图放大显示了第三轮后的三角形 $u_iv_im_i$。跳过阴影面 u_im_ia 即可测试邻接关系 u_im_i。

贪心边染色将 F 划分为至多 $2c-1$ 个匹配，因为一条边的两个端点至多与 $2c-2$条其他边相接。按字典序依次取边，并为每条边分配第一个可用颜色。在每个非空匹配中，按该顺序将边写作 u_iv_i with$u_i < v_i$, $0 \le i < k$，并将它们的标记点写作 m_i。

对于这个匹配，先分别在 u侧和 v侧测试整个索引集。接着，将每个索引写成 $\lceil \log_2 k \rceil$ 比特。对于每一比特，分别在两侧测试其非空零类和非空一类。对于 $k=1$，测试整个集合两次即可。在侧 $\xi \in$ 测试 $J\,\{u,\ v\}$会指定另一个轮次 r with

$$U_r = \{m_i : i \in J\} \ \cup\ \{\xi_i : i \in J\} \ \cup\ A_r,$$

其中，A_r由第 $r-1$轮中生成的前 $|J|$个位置组成。事实上，$|J| \le s/2$，而前一轮在至少 s 个顶点上至多跳过了 $s/2$ 个面，因此插入了至少$2s-4-s/2 \ge s/2$ 个顶点。按颜色访问匹配，按从低到高的顺序访问比特，并在一类之前访问零类；在每个测试对中，先处理 u侧，再处理 v侧。在每一轮中，根据（2）由 $\pi^{(r-1)}$ 和 U_r 计算 $\pi^{(r)}$，并将新位置追加到末尾。输出 d 是最后一轮后 $\pi^{(R)}$ 中各项的多重集。

扩展指定实现。取一个包含 F 的 q 三角剖分，并按照上述方法选择每条指定边的第二轮标记点。假设第 r 轮在 ξ侧测试 J。对于每条满足 $i \in J$的边 $m_i\xi_i$，至少有一个关联面具有在第$r-1$轮生成的第三个角。在第一次测试中，两侧都刚刚进行了细分。在之后的每次测试中，前一轮跳过的是顶点不交面，因此不可能同时跳过这条边的两侧。边 $m_i\xi_i$ 两两不相交。一个新顶点只有三个较老邻点，因此不可能成为其中两条边的第三个角。将 A_r 中的名称赋给选定的第三个角，并跳过相应的面。这些新顶点的度都为三，这是它们第一次在测试中使用。在第 r 轮之后，它们太老，不能再充当辅助顶点。所有更早的赋值，尤其是标记点的赋值，都保持不变。迭代执行即可通过面插入构造 d的一个实现，并保持堆叠性。

恢复所有指定边。固定 d 的一个平面实现，以及从其顶点到 $\pi^{(R)}$ 的位置的保持度数的双射ϕ。当我们反向应用引理 4.2 时，将这个双射限制在存活顶点上。它们的度数历史决定每一轮应删除哪些位置，以及选中了哪些位置。因此，原始位置诱导出 q 的一个唯一三角剖分，所有测试均参照该三角剖分进行。

在测试 J 位于 ξ 侧的轮次中，$|J|$ 跳过的面将 U_r 划分开来。标记点和新辅助点都是大小为 $|J|$的独立集，因此每个面都包含一个标记点、一个辅助点和一个选定端点。删除后续层时，它的标记点–端点边仍然保留。应用两次整集合测试可知，m_i 在其匹配的两侧各有一个原始邻点。这些邻点是唯一的，因为两侧互不相交，而且 m_i 只有两个原始

邻点。对于 i 的每一位，对其数字类进行测试会迫使 ξ 侧的邻点具有相同的位。因此， m_i 的邻点是 u_i 和 v_i，而插入标记点的那条原始边就是 $u_i v_i$。对于利用 ϕ 恢复的三角剖分中的每一条指定边，这一结论都成立。

输出规模。大小为 k 的匹配最多使用 $2 + 4\lceil \log_2 k \rceil$ 次测试。非空情况下$c \geq 1$，因此

$$R \leq 3 + (2c - 1)(2 + 4\lceil \log_2 s \rceil), \qquad |d| \leq 3^R s.$$

每一层至多使最大度数翻倍。因此，各项最多有 $O(R + \log s)$ 比特，且对于固定的 c，生成后续列表需要多项式时间。在箱构造中$c = 7$，从而得到上界 $|d| = O(s^{1+52\log_2 3})$，指数约为 83。42。这里， s 表示由一元 3-划分构造出的指定边实例。

□

4.4 完成归约

我们将引理 4.3 应用于满足 $c = 7$ 的箱构造。为验证度数界，注意箱面两两顶点不相交，因此度数至多为六的骨架顶点至多增加$B + 1$ 个邻点。因此，对于每个骨架顶点都有 $q_v \leq B + 7 < s = mB + 5m + 3$，包括 $m = 1$ 的情况；其余各项为三或四。所有度数都至少为三。由于$s = O(mB)$ 关于一元输入长度是多项式，引理 4.1 和引理 4.3 给出了一个从 3-划分出发的多项式归约，并且每个是实例都有一个叠置实现。无效输入可以映射到 $(5^3, 3^3)$，它可由一个三角形与三个孤立顶点的三连通联图实现。

输出包含 n 个总和为 $6n - 12$的条目，因此其一元表示（包括分隔符）仅使用 $O(n)$个符号。这证明了强NP难性。对于属于NP这一点，带标记的边表允许我们直接检查简单性和输入度数，并在线性于图的规模的时间内测试平面性 [17]。

为了证明关于否实例的断言，从q的无限制叠置实现开始；由于每次插入都会将一个新顶点连接到三个旧顶点，因此该实现是三连通的。更一般地，给定当前列表 π的一个三连通简单实现，我们将通过为每个旧顶点 v附加 $\pi_v - \mathbf{1}_{v \in U}$ 个新邻点来扩展它。需求总和为 $3b$，且没有需求超过 b，因为 $3t \leq N$ 和 $N \geq 5$ 给出 $b \geq N - 1 \geq \pi_v$。 将 b 个新名称按相同的循环顺序重复三次，并将所得词切分成所需长度的块，每个旧顶点对应一个块。没有任何块重复名称，因此每个新顶点都有三个不同的旧邻点。删除至多两个顶点后，剩余的旧图仍然连通，并且包含每个剩余新顶点的一个邻点，因而满足定理 1.1的要求。

这些堆叠见证表明，平面3-树的度数列表问题是 NP 完全的（推论 A.1）。对于具有固定数量不同度数的显式列表，附录 A.1 中的面递推可以在多项式时间内识别叠置实现。

5 渐近细分预算

考虑长度为 h 、最小度至少为三且总和为 $6p - 12$ 的可图序列 $p \geq 8$。在这一类序列中，即使检验 $T(h) \leq p/29 - 1$，当 $29 \mid p$ 时也是强NP完全的（定理 A.2）。为了衡量对于每个阶为 p 的此类列表而言，多少个度为二的顶点才足够，令 $M(p) = \max_h T(h)$。命题 3.5 和推论 3.4 给出

$$\left\lfloor \frac{p-4}{2} \right\rfloor \;\leq\; M(p) \;\leq\; p - 6.$$

对称列表 $((p-1)^3,\ 3^{p-3})$ 达到下界（附录 A.3）。

开放问题。 确定 $M(p)$ 的首项渐近项。就 $M(p) = p/2 + o(p)$ 而言，三极列表是否渐近极值?

A 叠置实现与细分预算

A.1 叠置三角剖分

推论 A.1。 对于极大平面图和平面3-树，显式列出的度序列的识别问题都是 *NP* 完全的。

证明。 对于阶数为 $n \geq 4$ 的情形，平面3-树恰好是叠置三角剖分 [21, 节 2]。该归约在肯定实例上给出叠置实现，并排除否定实例中的所有平面实现。要证明属于 NP，只需验证度数，以及包含$3n-6$ 条边的平面边表，或来自 K_4 的堆叠顺序。较小的阶数显然成立。 □

对于一个含 n 个元素、具有 j 个不同度数的显式列表，输入之后，叠置识别需要 $(n+1)^{3j} n^{O(1)}$ 时间。对于每个内部顶点度数的子多重集，列出三角形面的有序角点处新邻点数量可能构成的三元组。空填充对应 (0，0，0)。首次插入度数为 k 的顶点会将该面分成三个面。新顶点处的计数之和为 $k-3$，而每个旧角点的度数增加其自身加上与之相邻的两个计数。反过来，将三个填充分别拼接到对应的面中。在 K_4 处，选择四个角点度数，并组合四个填充，使每个角点处的计数之和等于其度数减三。在至多 $(n+1)^j$ 个子多重集中，三个子多重集和 k 可确定其父多重集；而在 K_4 处，三个多重集和角点度数可确定第四个多重集。每个计数至多为 n。

A.2 具有指定细分预算的困难性

定理 A.2。 对于每个固定整数 $r \geq 1$，判定 $T(h) \leq r$ 是否为强*NP*完全问题，即使对于长度为 p、最小度至少为三且和为 $6p-12$ 的可图序列 h 也是如此。在具有 $29 \mid p$ 的同一类实例上，判定 $T(h) \leq p/29 - 1$ 也为强*NP*完全问题。

证明。 从定理 1.1 中具有 $n = |d| \geq r+3$ 的可图最大和实例 d 进行归约。省略有限多个阶不会影响困难性。令 $\pi^{(1)} = \mathcal{F}(d)$ 和 $\pi^{(2)} = \mathcal{F}(\pi^{(1)})$ 为两轮全面插入面，并令 $N = |\pi^{(2)}|$。标记 r 原始位置以及第一轮中新产生的 r 位置，其并集为 U。令 $b = 2N - 4 + 2r$，并取

$$h = \big((2\pi_i^{(2)} + 3\mathbf{1}_{i \in U})_{i=1}^{N},\, 3^b\big).$$

这个列表包含 $p = N + b$ 个条目，总和为 $6p-12$。在每个标记位置 i，仅凭边数，恢复出的度数就可能比 $\pi_i^{(2)}$ 多一。其下方的完整层迫使两个度数均为偶数，从而排除了多出的这一单位。

在 d 的三角剖分中，霍尔定理将标记的原始顶点匹配到互不相同的关联面。每个顶点至少邻接三个面，而每个面至多邻接三个标记顶点。第一轮将标记的新位置分配给相应的面中心。再进行两次完整插入，可保持所得匹配，并得到列表 $\mathcal{F}(\pi^{(2)})$。沿每条匹配边 xy 画出三条二边路径，并连接两个连续的内部顶点。这样会使两个端点的度数都增加三，并且每条边增加两个三价顶点和一个二度顶点，从而实现 $(h,\ 2^r)$。

反之，假设对于某个 $s \geq 0$，$(h,\ 2^s)$ 存在平面实现。 N 顶点所诱导的$\pi^{(2)}$ 边至多有 $3N-6$ 条，因此至少有 $2\sum_i \pi_i^{(2)} + 6r - 2(3N-6) = 3b$ 条边连接它们与其余顶点。这些跨越边构成一个简单二部平面图，因此$3b \leq 2(N+b+s) - 4$。由于 $3b = 2(N+b+r) - 4$，我们有 $s \geq r$。剩下的情况是$s = r$。此时两个边数上界都取等，因此旧顶点诱导出一个三角剖分。跨越图有 $2(N+b+r) - 4$ 条边，这是这些顶点上的任意二部平面图所能达到的最大边数。将一个旧顶点 i 移到割的另一侧。若它在旧三角剖分中的度为 g_i，则此举会增加 g_i 条跨越边，并移除 $\deg(i) - g_i$条边。新的割不可能更大，因此 $2g_i \leq \deg(i) = 2\pi_i^{(2)} + 3\mathbf{1}_{i \in U}$。

第二轮中新产生的位置，恰好是 h 中目标度数六的旧位置。它们在 $\pi^{(2)}$ 中未标记且为三价，而从 $\pi^{(1)}$ 继承的位置在其中的度至少为六。由于三角剖分的最小度为三，该不等式给出第二轮位置处的 $g_i = 3$ 。删除这些 $2|\pi^{(1)}| - 4$ 三价顶点后，无论是否还有其他三价顶点，都会像引理 4.2 中那样恢复出互不相同的面。它们的数量等于剩余三角剖分的完整面数，因此每个保留下来的顶点在其每个关联面中都有一个被删除的邻点。在每个这样的顶点处， g_i 及其第二轮目标 $\pi_i^{(2)}$ 都是偶数。在标记位置处，该不等式给出 $g_i \le \pi_i^{(2)} + 1$，根据奇偶性可进一步得出 $g_i \le \pi_i^{(2)}$。未标记位置处也满足相同的界。两个度数和等于 $6N - 12$，因此 $g = \pi^{(2)}$。现在反向进行两次完整插入，即可得到一个 d的三角剖分。

最后， h对每个源实例都是可图的。定理 1.1 证明中的循环赋值，从 x 的简单实现出发，实现了每个 $\mathcal{F}(x)$，同时保留原有的导出子图。第一轮之后，每个带标记的原始顶点至少有 $(2n - 4) - (n - 1) \ge r$ 个新的非邻接点。贪心地选择彼此不同的非邻接点，并将它们赋给带标记的新位置。再经过两轮完整轮次后，为每条这样的缺失边 xy 添加两个均与 x, y相邻的顶点。这样便实现了 h。由于 $|\mathcal{F}(x)| = 3|x| - 4$，输出核心的阶为 $p = 27n - 52 + 2r$。取 $r = n - 3$ 可得到 $p = 29(r + 1)$。 r 的两种选择都会产生具有线性阶和线性一元长度的输出。$(h, 2^r)$的平面实现证明了其属于 NP。

□

A.3 固定阶下细分预算的范围

命题 *3.5* 的证明。 前三个条目中的顶点 A、 B、 C在（h、 2^t）的任意平面实现中，至少将 $2(p - 1) + (q - 1) - 6 = 2p + q - 9$ 条边通过其割连接到另一侧。二部图平面界 $2(p + t) - 4$ 给出 $t \ge \lceil (q - 5)/2 \rceil = m$。

从 K_4开始，在 A、 B、 C、 u上绘制。在面 ABC内，沿每条边绘制 m 条内部不相交的二边路径。将 AB 和 BC 条带中的内部顶点从 AB 向内排序，然后再向外延伸至 BC。将它们按连续的成对连接，每一对位于各自的四边形内或中央面内。成对的 $2m$ 顶点为三度顶点，沿 CA的 m顶点为二度，每个角点的度为 $3 + 2m = q - 1$。

从 ABu开始逐个叠加 k 顶点，每次使用 AB 处的新面。每次插入都会使 A、 B 各增加一，令前一个三度顶点提升为四度，并增加一个三度顶点。这得到（h、 2^m）。若要单独实现 h，则将一个三角形连接到 $q - 3$ 个独立顶点，并从任意独立顶点开始进行相同的添加。其度数之和为 $6p - 12$。

□

对称列表 $g_p = ((p - 1)^3,\ 3^{p-3})$ 对每个 $p \ge 8$ 都满足 $T(g_p) = \lceil (p - 5)/2 \rceil$。偶数阶可通过取 $k = 0$ 得到。对于奇数 $p = 2m + 5$，同一个割给出 $t \ge m$。在配对条带顶点之前，在中心面中添加一个与 A、 B、 C 相邻的顶点。在条带内有 $3\lfloor m/2 \rfloor \ge m$ 个不相交连续对，因为 $m \ge 2$。在它们的四边形中连接任意 m 对后，会留下 m 个度为二的顶点，并使每个角点的度为 $4 + 2m = p - 1$。

B 算术判据的推导

定理 *2.3* 的证明。 对 $I + C$ 取 Schur 补，并应用加权矩阵树定理 [20]，其中边权为 $c_e/(1 + c_e)$。记 T 为 K_n 的一棵生成树，则行列式展开为

$$\sum_{T} \prod_{e \in T} c_e \prod_{e \notin T} (1 + c_e).$$

因此，每个简单图 G 的权重等于其生成树数。在零点处求导恰好保留度数列表为 d 的图。

在迹展开中， [18], 将匹配中的导数位置与关联边端点配对，从而为每个顶点选定一个循环顺序和一个起始端点。记 σ 为这些顺序下的端点排列，记 α 为边反转。由于 $\mathrm{tr}(X_i X_j)$ 将矩阵元素与索引反向的元素配对，

自由指标按 $\sigma\alpha$（即面置换）的每个环各出现一次。具有b 个面的连通旋转系统对 q^b有正的贡献。欧拉公式给出亏格为g时的 $1 \le b = f - 2g$ 。因此，常数项为零，而在零点处的第 f阶前向差分等于 $f!$乘以 q^f的系数，该系数计数的是带权球面系统。

行列式只统计连通图。如果一个平面实现不连通， $m \ge n$保证其中一个连通分量含有一个环。在它们的外面上，取出一条环边和另一连通分量中的一条边。删除这两条边，并在两个连通分量之间重新连接它们的端点，且不产生交叉。这样既保持了度数，也合并了连通分量，即使第二条边是桥也如此。重复此过程，即可得到上文统计的连通球面实现。 □

C 稀疏边界定理的证明

采用第3节的记号，令 $\delta = 4n - 2\ell - S$ 和 $j = \delta/2$。两个边界层分别有$j = 1$、0。我们先处理无叶列表（h、2^t），并将核心度数按降序记为 a、b、c，$\ldots$；p表示其数量， H 表示其总和。预算和度数界为

$$t = H/2 - 2p + j, \qquad U_{\max} = p + t - 1. \tag{3}$$

根据引理 3.1，(h、2^t) 可平面化，当且仅当存在一个度数为 h 的平面多重图 M，满足$s(M)$ $- \lambda(M) \ge 2p - j$。这里， $s(M)$ 统计不同的非环邻接，而 $\lambda(M)$ 按重数统计自环。

C.1 节给出了扩展较小实现的局部构造。它们给出了 $p \le 7$ 在 C.2 节中的所有无叶例外，以及归纳的基例。对于 $p \ge 8$，C.3 节成对地化简重复的核心度数，并分别恢复度为四和三的顶点。随后，C.4 节恢复叶节点，并追踪哪些例外得以保留。

我们还将使用一种在存在叶节点时的割计数。在 $j = 0$ 上，令 C 为核心，令 R 为其补图。将两部分的度数和相减，得到 $e(C) - e(R) = 2p$。因此，对于任意非空实现，都有 $p \ge 5$，而 $p = 5$ 迫使 K_5。对于 $p = 6$， $2e(C) \ge 24$。四个或更多的三将给出 $2e(C) \le 4{\cdot}3 + 2{\cdot}5 = 22$。恰好三个三会迫使 $2e(C) \le 3{\cdot}3 + 3{\cdot}5 = 24$ 中的等号成立： C 上的导出子图中，有三个顶点与其他每个核心顶点相邻，因此它包含$K_{3,3}$。

C.1 构造规则

引理 C.1。 假设 $p \ge 5$, H 为偶数， j 为非负整数， $p + j \ge 6$，且 $t = H/2 - 2p + j \ge 0$。那么 (h, 2^t) 是可图的，当且仅当 $a \le U_{\max}$。在这种情况下， $H - a - b \ge 2p + 2 - 2j$。

证明。 在 Erdős–Gallai 检验中， [10] 第一个不等式为 $a \le U_{\max}$，第二个不等式由 $H - a - b \ge H - 2U_{\max} = 2p + 2 - 2j$推出。对于 $3 \le k \le p$，右侧减去左侧至少为$k(k-1) + 6(p-k) + 2t - H = k^2 - 7k + 2p + 2j \ge 0$。对于 $k \ge p$和 $k \ge 3$，差值等于$k(k-5) + 2j \ge 0$。 □

引理 C.2。 在最小度至少为二的简单平面实现中，当将一个三添加到列表时，指定顶点可以增加一个邻点。如果满足 $m < 3n - 6$，则可以在所有原有度保持不变的情况下添加一个四。

证明。 第一步是在指定顶点 w 处取一条边 wu。在 u 处细分下一条边，并通过其间的扇区将新顶点连接到 w 。第二步是在一个面上取两条不相交边，将它们的四个端点连接到该面中的一个新顶点，并删除这两条边。不同连通分量中的边可以放置在外面上。在连通实现中，欧拉公式给出一个非三角面。其边界游走的每个连续三元组都包含三个不同的顶点（最小度为二）。如果每个连续四元组都会重复某个顶点，则该游走以三为周期；除非它是一个三角形，否则会两次使用同一条有向边。因此，所需的边对必然存在。

□

引理 C.3。从一个具有 $s \geq 2$ 的 $(h、\ 2^s)$ 的平面实现，可以为 $g \geq 3$ 实现 $(h、\ g、\ g、\ 2^{s+g-4})$。

证明。如果某个二度顶点有不相邻的邻点，就将其抑制。对于剩余的二度顶点 z，用 x 细分一条关联边，并沿着 zx 添加 $g-2$ 条平行二边路径。否则，删除一个邻点为 u、v 的二度顶点，沿着 uv 在一个狭窄扇区内粘合一份 K_4 的副本，并删除 uv。沿连接其两个新顶点的边，添加 $g-3$ 条平行二边路径。这两种操作都保持其他指定度数不变。 □

引理 C.4。如果 $p \geq 6$，那么对于每个 $h_i \geq 5$ 和 $t+5-j \leq a \leq U_{\max}$，$(h,\ 2^t)$ 在任一边界上都可平面化。

证明。具有 $q = p-1$ 个顶点的路径的平方图是外平面图，有 $2q-3$ 条边，且最大度为四。将其与一个顶点构成锥，并重复添加辐条以填满所有边缘目标值。顶点的度为 $H - a - 4q + 6$，因此在其上添加 $a - t - 5 + j$ 个自环即可补足度数。支撑图有 $3p-6$ 条边，代价为 $a - p + 1 \leq t$。 □

我们使用两条边加权规则。在完全多部图中，非负增量之和为 $2s$ 时，当且仅当每个部分所需的增量不超过 s，才能通过复制边实现：在需求量最大的两个部分中各选取一个单位。所有需求量为 s 的部分都会被选中，因此可以应用归纳法。对于平面双扇图 $K_2 \vee P_q$，令 $A \geq B$ 表示两个极点的剩余需求，R 表示路径上的剩余需求总量。假设总量为偶数、所有需求均非负，且 $R \geq A - B$。如果可以在路径容量范围内放置 $\max\{0,\ (R - A - B)/2\}$ 个路径边副本，就能补足各顶点的度数。对于 $R \geq A + B$，放置恰好这么多副本；对于$R < A + B$，复制极点边 $(A + B - R)/2 \leq B$ 次。此时剩余路径需求等于剩余极点需求总量，并且所有辐条都可用。

引理 C.5。令 $T(h)$ 表示所需额外度为二的顶点的最小数量。对于 $h = (a, b, c, d, e, f)$，若满足 $f \geq 4$ 且 H 为偶数，则 $T(h) = \max\{H/2 - 12, a - 5\}$，但 $T(6, 4^5) = 2$。

证明。这两个下界分别来自六顶点平面支撑图的最大边数，以及简单图的最大度。若 $a + f \leq H/2 - 4$，取 $K_{2,\ 2,\ 2}$，其部分为 $(a,\ f)$、$(b,\ e)$、$(c,\ d)$。每个顶点都需要补入其度数减四个额外副本。对于最后两个部分，$H - 2(b + e) \geq d + f \geq 8$ 和 $H - 2(c + d) \geq e + f \geq 8$。因此，每个部分至多需要 $(H - 24)/2$，而多部图规则给出的补全代价为 $H/2 - 12$。

设 $b \geq 5$ 和 $a \geq H/2 - 7$。要使锥顶的度为 a，我们需要一个含有 a个顶点的基底。从度数为 4、3、3、2、2 的三角剖分五边形开始，将 b放在度为四的顶点处。添加 $H - a - 19$ 个叶节点，使这五个度数达到 $b-1$、……、$f-1$。基底还需要 $(a-5) - (H - a - 19) = 2a - H + 14$ 个顶点。根据 a 的界，这个数非负；由于 H 为偶数，该数也是偶数。将这些顶点两两配对，并以一条边连接。对这个外平面基底进行锥化后，五边形之外的所有 $a-5$ 个顶点都会成为二度顶点。若 $b = 4$，则五个最小目标值均为四，因此 $H = a + 20$ 迫使 a 为偶数。我们将在证明末尾处理 $a = 6$。对于 $a = 4$，使用八面体。对于 $a \geq 8$，在五边形中添加一条弦，并在其三个度为二的顶点上各连接一个叶节点。在 $a-8$ 个顶点上添加孤立边，然后进行锥化。

在包含 $b \geq 5$ 的剩余情形中，我们有 $a + f \geq H/2 - 3$ 和 $a \leq H/2 - 8$。将 a，b 置于 $K_2 \vee P_4$ 的极点处。其中 $A = a - 5$、$B = b - 5$、$R = c + d + e + f - 14$ 以及 $R - (A - B) = H - 2a - 14 \geq 2$。如果 $a + b \geq H/2 - 2$，那么 $R \leq A + B$，并且双扇规则适用。否则 $a + b = H/2 - 3 = a + f$，从而 $b = c = d = e = f \geq 5$。现在 $R = A + B + 2$，任意路径边都可以容纳所需的那一份额外副本。

对于 $(6, 4^5, 2)$，六价顶点是全邻接的。在平面图中删除该顶点后，会使所有其他顶点位于同一个面上，并得到外平面度数序列 $(3^5, 1)$。删除其叶后，可得到一个具有五个顶点、七条边且最大度至多为三的外平面图。这样的图将五边形三角剖分，其中两条对角线共用一个四度顶点。反过来，在八面体的一个顶点处附加一个三角形即可实现 $(6, 4^5, 2^2)$。 □

C.2 度数至少为三的顶点至多有七个

命题 C.6。 对于任一边界上满足 $p \le 7$ 的无叶图序列，非可平面化序列如下。对于 $\delta = 2$，唯一的一个是 $(4^5, 2)$。对于 $\delta = 0$，所有满足 $p = 5$ 的序列都是不可平面化的。对于 $p = 6$，例外情况是恰好有三个核心项等于三的列表，以及 $(5, 4^4, 3)$、$(5^5, 3, 2^2)$ 和 $(6, 4^5, 2)$。对于 $p = 7$，它们是 (4^7)、$(6, 5^2, 3^4)$和 $(6^3, 3^4, 2)$。

当 $p \ge 3$ 时，支撑不等式 $s(M) - \lambda(M) \ge 2p - j$ 和欧拉界 $s(M) \le 3p - 6$ 表明，缺失的支撑边与自环的总数至多为 $p - 6 + j$。

五个核心顶点 对于 $p \le 4$，或对于 $p = 5$ 且某个核心度为三的情形，由于所需度数的分支顶点数量限制，任何实现都不可能包含 K_5 或$K_{3,\,3}$的细分。在上边界上，核心割计数排除了 $p \le 4$，并在 $p = 5$时迫使核心上存在 K_5。

在 $p = 5$的下边界情形，假设五个度数都至少为四。从K_5 中删除目标值为 d，e的两个顶点之间的边。所得图为完全多部图，这两个顶点位于同一部中，而目标值为 a，b，c的顶点分别位于三个单顶点部中。所需增量为 $a - 4$，$b - 4$，$c - 4$，$d - 3$，$e - 3$，其总和为 $2t = H - 18$。每个单顶点部至多需要 $a - 4 \le t$。除非所有项都为四，否则最后一部需要 $d + e - 6 \le t$：事实上，$H - 2(d + e) = (a - d) + (b - e) + c \ge 4$，且仅在这种情况下取等号，其数值为偶数。多部图规则在这个九边支撑图上提供额外的重数。当$h = (4^5)$时，$t = 1$，且补图的度序列为$(3, 1^5)$，其实现只能是$K_{1,\,3} \sqcup K_2$。原图是将一条边细分后的 K_5。

六个核心顶点 引理 C.5 讨论了两个边界上的最小度都至少为四的核心。记 r 为等于三的核心项数量。在上边界上 $t = H/2 - 12$。一个平面实现给出 $s(M) - \lambda(M) \ge 12$。六个顶点上的简单平面支撑图至多有十二条边，因此 $s(M) = 12$ 且 $\lambda(M) = 0$。这种三角剖分要么是八面体，要么是 $K_2 \vee P_4$。事实上，最小度为四会强制其为正则图，且补图中存在完美匹配。否则，移除一个三度顶点。所得三角剖分是 K_5 去掉一条边，即三角双锥；其所有面都是等价的。在一个面中插入一个顶点得到 $K_2 \vee P_4$。核心割计数确定了 $r \ge 3$，因此还需考虑 $r = 2$ 和 $r = 1$。

对于 $r = 2$ 令 $h = (a,\ b,\ c,\ d,\ 3,\ 3)$。我们有 $b \ge 5$，因为 $b = 4$ 会根据度数界迫使 $a \le 4$，进而得到 $H < 24$。将两个三放置在 P_4的两端。额外路径边的最大数量为 $d - 4$。根据双扇规则，$A = a - 5$，$B = b - 5$，$R \ge A - B$ 是度数界 $a \le H/2 - 7$，且 $(R - A - B)/2 = (c + d - a - b + 2)/2$。当且仅当 $(a - c) + b + d \ge 10$ 时，这至多为 $d - 4$。由于 $a \ge c$，$b \ge 5$ 和 $d \ge 4$，左侧至少为九，并且具有 H的奇偶性。

对于 $r = 1$，写作 $h = (a, b, c, d, e, 3)$。当 $b = 4$ 时，度数界和 $H \ge 24$ 迫使$h = (5, 4^4, 3)$。八面体的最小度为四，而双扇要求两个度至少为五的目标值。对于 $b \ge 5$ 阶，将路径容量排列为 $(0, d - 4, c - 4, e - 3)$。只有与第三个路径顶点相邻的两条边可以增加重数。它们共享该顶点的 $c - 4$ 单位容量，而它们的另一端合计提供 $d + e - 7$ 单位。因此，重数的最大值为 $\min\{c - 4, d + e - 7\}$。我们有 $R - (A - B) = H - 2a - 14 \ge 0$，这符合双扇规则。数量 $(R - A - B)/2 = (c + d + e - a - b - 1)/2$ 至多为 $d + e - 7$，因为 $(a - c) + b + d + e \ge 0 + 5 + 4 + 4 = 13$。只要 $a + (b - d) + (c - e) \ge 7$，它就至多为 $c - 4$。该数量为奇数且至少为五。等于五时，必有$h = (5^5, 3)$。此时两个极点都已饱和。三度目标值必须占据一个路径端点，因此除反向外，容量为 $(0, 1, 1, 2)$。它们需要增加两个重数，但最多只能增加一个。

在下边界 $t = H/2 - 11$。设 $1 \le r \le 3$。如果 $a = 4$，那么 $H = 24 - r$为偶数，因此 $r = 2$，删除一条八面体的边即可实现 $(4^4, 3^2)$。对于 $a \ge 5$，三个情况都使用以 x_0为顶点、以带有弦 x_1x_2的环 $x_1ux_2vwx_1$为底的锥。其按顺序的度数为 x_0、x_1、x_2、u、v、w，即 5、4、4、3、3、3。为 x_0、x_1、x_2指定目标值 a、b、c。对于 $r = 2$，将 d置于 u；对于 $r = 1$，置于

e、d 置于 v、w。其余所有目标值均为三。对于每个 r，从所示的完全多部子图中选择额外边副本。

r	部分	各部分的剩余需求
3	$\{x_0\}, \{x_1\}, \{x_2\}$	$a-5,\ b-4,\ c-4$
2	$\{x_0\}, \{x_1\}, \{x_2\}, \{u\}$	$a-5,\ b-4,\ c-4,\ d-3$
1	$\{x_0\}, \{x_1, v\}, \{x_2, w\}$	$a-5,\ b+e-7,\ c+d-7$

需求总和为 $H-22=2t$，因此多部图规则只要求每个部分的需求不超过 t。度数界给出全程均为 $a-5\le t$。对于 $r=2,3$，我们有$H-2b\ge c+9\ge 13$。由于 H 为偶数，$H-2b\ge 14$，或 $b-4\le t$，这也为 $c-4$提供了上界。对于$r=2$，我们有 $H-2d\ge a+b+6\ge 15$，因此 $H-2d\ge 16$，或 $d-3\le t$。对于 $r=1$，我们有$H-2(b+e)=(a-b)+(d-e)+c+3\ge 7$ 以及 $H-2(c+d)=(a-c)+(b-d)+e+3\ge 7$。两者都是偶数，因此都至少为八，符合要求。将这些需求两两配对，可得到 t个额外边副本，每个都细分一次。

对于 $r=4$，度数界迫使 $h=(a,\ a,\ 3_4)$，且 $t=a-5$。图 $K_2\vee(2K_2\sqcup tK_1)$ 实现了它，并且是双扇的子图。对于 $r\ge 5$，总和与最大度要求彼此不兼容：对于 $(a,\ 3_5)$，它们分别给出 $a\ge 7$ 和 $a\le 3$。

上边界上的七个核心顶点 首先，假设最小目标度数 g 至少为五，因此 $t=H/2-14$。若 $a=U_{\max}$，则从一个带有两条端点不相交且不交叉弦的六边形开始。给其顶点添加叶节点，直到每个顶点的度达到其目标度数减一。添加的叶节点数为 $H-a-22=a-6=t$。进行锥化即可得到所需的实现。

否则 $a\le H/2-9$。若 $a-g\ge 2$，则移除 g，并将核心中的 a 替换为 $a-g+4$。剩余六个目标值的总和为 $K=H-2g+4$，最大值至多为 $K/2-7$。对于改变后的目标值，这由 $a\le H/2-9$ 得出。对于未改变的目标值，只需界定 b：我们需要 $H-2(b+g)\ge 10$，而 $H-2(b+g)=(a-b)+(c-g)+d+e+f\ge 3g\ge 15$。六个目标值都至少为五，因此由引理 C.5 可得一个含有 $K/2-12$ 个度为二顶点的简单平面实现。将其中的二度路径压缩，得到一个平面多重图 M，满足 $s(M)-\lambda(M)\ge 12$。其简单支撑图至多有十二条边，因此它是一个三角剖分，且 M 没有自环。目标度数为 $a-g+4\ge 6$ 的顶点 w 至多有五个邻点，因此有一条边 wu 重复出现。固定支撑图的一个平面嵌入，并令 v 在 w处的循环顺序中紧接在 u 之后。将平行副本画成窄束，并取 wu 和 wv面向彼此的最外侧副本。在两条边之间的扇区中，将这两个副本都替换为 xu条 xw 的副本，并连接到一个新顶点 x。w 的度增加 $g-4$，而新顶点的度为 g。另一个 wu 副本仍然存在，因此支撑图中至多只有 wv 会消失。新增的三条边 xu、xv、xw 使支撑图至少有十四条边，其细分代价至多为 $H/2-14=t$。

若 $a-g\le 1$，使用顶点为 0,1、赤道环按此顺序为 2, 3, 4,5, 6 的五角双锥。其支撑图有十五条边。将哈密顿圈 02314560 的每条边各添加一个副本，可使每个顶点的度增加二。因此，将所有目标值都减二，直至最小值为五或六，即可将构造归约为以下基底。由于 H 为偶数，最小值为五时，六的个数必须为奇数；最小值为六时，七的个数必须为偶数。

按顶点顺序排列的目标值	额外边副本
$(6,5^6)$	06、23、45
$(6^3,5^4)$	06，12，23，45
$(6^5,5^2)$	06，14，45，23，23
(6^7)	06，16，23，23，45，45
$(7^2,6^5)$	06，06，23，23，14，15，45
$(7^4,6^3)$	06，06，23，23，23，14，15，45
$(7^6,6)$	06，06，45，45，23，23，23，14，15

如果最小值为 4，则针对 $a=U_{\max}$ 的构造仍然有效。对于 $a<U_{\max}$，移除一个 4。根据引理 C.1，剩余图仍然是可图的。在上边界上，剩余图具有

$m' = 2n'$，因此当且仅当 $n' \geq 7$ 时满足 $m' < 3n' - 6$。随后，引理 C.2 会在任意平面剩余图中恢复这个 4。如果 $n' = 6$，则全部 6 个顶点都是度至少为 4 的核心顶点，并且它们的度平均值为 4。这给出 (4^6)，从而得到父图 (4^7)。在所有核心度数至少为 4 的六核心剩余图中，引理 C.5 只留下 $(6, 4^5, 2)$ 这一种不可平面化的情况。表 2 实现了其父图 $(6, 4^6, 2)$。

对于（4^7），面数有一个简短的计数论证（另见 [26]）。实现必定是连通的，因为每个连通分量至少有五个顶点。其偶数度数使边可以分解为简单环。因此该图无桥，我们可以根据这些环围绕每个面的次数的奇偶性为面着色。跨过任意一条边都会改变颜色，因此每种颜色的面的长度总和都是边数 14。九个面的总长度为 28，并且由于该图是简单且无桥的，每个面的长度至少为三。恰有一个面是四边形。不包含该面的颜色给出 $3 \mid 14$，矛盾。

现在令 r 表示 3 的个数。若 $r \geq 5$，则最小的五个项之和为 15，小于引理 C.1 要求的 16。若 $r = 4$，写作 $h = (a,\ b,\ c,\ 3_4)$，其中 $c \geq 4$、$a \leq b + c - 4$ 和 $a + b + c \geq 16$。图 $K_2 \vee (P_3 \sqcup P_2)$ 的度数为（$6, 6, 4, 3^4$），前三个顶点构成一个三角形。按目标顺序将它们记为 $x_0,\ x_1,\ x_2$。$x_i x_j$ 上的额外重数为

$$m_{01} = (a + b - c - 8)/2, \quad m_{02} = (a + c - b - 4)/2, \quad m_{12} = (b + c - a - 4)/2.$$

它们的和为 t。若 $b \leq 5$，所示的两个约束迫使 $(a, b, c) = (6, 5, 5)$。对于 $b \geq 6$，第二个重数非负，因为 $a \geq b$ 且 $c \geq 4$。第三个非负，因为$a \leq b + c - 4$。如果第一个为负，则 $6 \leq a \leq a + b - c < 8$。由于 $a + b - c$与 H具有相同的奇偶性，它必定等于六，得到 $(6, 6, 6)$。

要排除 $(6, 5^2, 3^4)$，移除其全邻顶点。度数为 $(4^2, 2^4)$ 的外平面图会有八条边。它必定连通，因为六个顶点上由两个最小度为二的连通分量组成的图只能是两个三角形。删除一个割点后剩下五个顶点，且每个连通分量至少有两个顶点，因为原图的最小度为二。因此，这两个连通分量的阶分别为二和三。它们与割点一起分别诱导出至多有三条边和五条边的外平面图。等号成立时，必然是一个三角形与一个菱形图粘合在一起，得到度数为 $(5, 3, 2^4)$ 或 $(4, 3^2, 2^3)$ 的图。在剩余的二连通情形中，外边界是一个六边形，并且两条对角线都必须连接同一对度为四的顶点。

对于 $(6^3, 3^4, 2)$，如果这两个邻点不相邻，就压缩该二度顶点。这样会得到一个有七个顶点、含四个三度顶点的三角剖分。在任何顶点数超过四的三角剖分中，这些顶点彼此独立（因为若其中两个相邻，就会迫使四面体的四个面全部出现），因此它们的十二条关联边违反了二部平面图边数上界 $2 \cdot 7 - 4$。如果这两个邻点相邻，则删除该二度顶点，得到一个有七个顶点、十四条边的平面图，其中四个顶点的度至多为三。它们的度都不可能为二，因为删除其中一个，就会留下一个六顶点三角剖分，其中至少有三个顶点的度至多为三。唯一的六顶点三角剖分是八面体和 $K_2 \vee P_4$，其中度至多为三的顶点分别有零个和两个。因此，这两个邻点的度都为六，于是留下了先前排除的序列 $(6, 5^2, 3^4)$。

最后，假设 $1 \leq r \leq 3$。移除一个 3，并将一个最大项减 1。最大项至少为 5，而两个等于 $U_{\max}$ 的项会使其余五项仅剩 16；这五项的和至少为 $20 - r \geq 17$。剩余图的最大值至多为 $U_{\max} - 1$，因此根据引理 C.1，剩余图是可图的。引理 C.2 可将任意平面剩余图提升。将一个至少为 5 的最大项降低不会产生新的 3，因此剩余图含有 $r - 1 \leq 2$ 个 3。对于每个剩余的例外剩余核心，右栏列出了通过添加一个 3，并将旧项之一加 1，使其成为一个（可能并列的）最大项而得到的原像。

剩余核心	可能的父核心
$(6, 4^5)$	$(7, 4^5, 3)$
$(5, 4^4, 3)$	$(6, 4^4, 3^2)$，$(5^2, 4^3, 3^2)$
$(5^5, 3)$	$(6, 5^4, 3^2)$。

第一个带有一个二度顶点的核心，是通过取一个带有不相交弦 02、35 的六边形，在顶点 1 处连接一片叶，然后进行锥化得到的。第二行中的第一个原像，是在同一个六边形及其两条弦上取锥得到的。表 2 给出了另外两个。

下边界上的七个核心顶点 若出现一个度为三的顶点，就移除一个度为三的顶点，并将一个最大项减一。该项至少为四；若它等于 $U_{\max}$ ，则必为唯一项，因为 $H - 2U_{\max} = 14 < 3(7-2)$。剩余序列仍位于 $\delta = 2$ 上，且由引理 C.1 可知是可图的。六个核心顶点的情形可得到一个平面实现，并保留相同的 t个度为二的顶点。重新插入度为三的顶点即可完成。否则，每个核心顶点的度都至少为四，且 $t \geq 1$。若 $a = U_{\max}$，取一个带一条弦的六边形，然后添加叶节点，使其达到六个目标值各减一。叶节点的数量为 $H - a - 20 = t$；再进行锥化即可完成。若 $a < U_{\max}$，则移除一个度为二的顶点。上边界残余序列的最大值不超过 $U_{\max} - 1$ ，且由引理 C.1 可知是可图的。除非其核心为（4^7），否则我们可以将其平面实现中的一条边细分。对于该核心，在一个八面体的一条边上细分一次，然后对所得的七顶点图应用引理 C.2 的四重插入。这就证明了命题 C.6。

C.3 八个或更多核心顶点

命题 C.7。 如果 $p \geq 8$，则任一边界上的无叶图序列都是可平面化的 c.

所有核心度数至少为五时的上边界

引理 C.8。 设 a、b、c 是核心 h 中按降序排列的三个最大项，其中 $p \geq 8$ 且 $h_p \geq 5$。假设 H 为偶数且 $t = H/2 - 2p \geq 0$。如果 $a \leq t + 5$ 且 $a \leq U_{\max} = p + t - 1$，那么在以下任一情形下，$(h, 2^t)$ 均可平面化。

1. $b \geq p - 1$ *and* $a + b - c \geq 2p - 4$.
2. 所有核心项均互不相同。

证明。 将 a，b 置于 $K_2 \vee P_{p-2}$的极点处。它们的剩余需求分别为 $A = a - p + 1$ 和 $B = b - p + 1$。对于第二种情况，严格下降给出 $c \geq p + 2$，因此此处两个需求也都是非负的。路径顶点的剩余总和为 $R = H - a - b - 4p + 10$，且$R - (A - B) = 2(t + 5 - a) \geq 0$。根据双扇规则，只需放置额外的路径边，使剩余容量至多为 $A + B$。

设 $q = p - 2$，并将剩余目标度数减去四后写作 $w_1 \leq \cdots \leq w_q = c - 4$。我们可以任意安排这些容量在路径上的顺序。两端各自还有一个额外的容量单位。对于第一个断言，将连续的容量配对；当 q 为奇数时，最小的一个不参与配对。在每一对中，使用较小的容量来构造边副本。各对未使用的容量是有序列表中互不相交区间上的差值，因此总和至多为 $w_q - w_1$。当 q 为奇数时，未配对的顶点还会贡献 w_1。无论奇偶性如何，在计入两个端点单位之前，剩余单位至多为 w_q，并且 $w_q + 2 = c - 2 \leq A + B$。

对于第二个断言，考虑四个连续的容量 $\alpha < \beta < \gamma < \eta$。将它们依次配对后，会留下 $(\beta - \alpha) + (\eta - \gamma)$ 未使用。改为将路径上的顶点排列为 α、γ、η、β，并分别在首边和末边额外使用 α 和 β 个副本。这样两端都达到饱和，而中间顶点分别剩下 $\gamma - \alpha$ 和 $\eta - \beta$ 个单位。现在，中间边的副本可以各取一个单位，直到只剩下 $|(\eta - \gamma) - (\beta - \alpha)|$ 个单位。由于两侧的余量都是正整数，它们的绝对差至多为 $(\eta - \gamma - 1) + (\beta - \alpha - 1)$。令 s 为 q 除以四所得的余数。先留出最小的 s 个项，再按递增顺序对其余项应用分块构造，并在块之间的连接处使用零额外重数。对于 $s = 0$、1、2、3，剩下的小块未使用的容量分别可以是

$$0, \quad w_1, \quad w_2 - w_1, \quad |w_3 - w_2 - w_1|.$$

对于 $s=2$，差值 w_2-w_1 等于首个间隙超出 1 的部分再加 1。对于 $s=3$，将 w_3 放在中间。它的两条关联边总共可以各增加 $\min\{w_3,\ w_1+w_2\}$ 个副本，剩下 $|w_3-w_1-w_2|$ 个单位。由于 w_3-w_2 和 w_1 都是正整数，它们的绝对差至多为 $(w_3-w_2-1)+(w_1-1)$。用 $\Delta=w_q-w_1-(q-1)$ 表示所有间隙超额的总和。四项块和小块使用互不重叠的间隙。因此，在计入端点之前，未使用的容量至多分别为 Δ、$w_1+\Delta$、$1+\Delta$ 或 $w_1-1+\Delta$。由于 $w_1\ge 1$，这四个界都至多为 $w_1+\Delta$。加上两个端点单位，得到$w_1+\Delta+2=w_q-q+3=c-p+1\le A\le A+B$。在任一构造中，支撑图有$3p-6\ge 2p$ 条边，因此其代价至多为 t。

□

引理 C.9。在 $S=4n$ 上具有 $p\ge 6$ 和 $h_p\ge 5$ 的每个无叶图序列都有一个平面实现。

证明。选择一个使 p 尽可能小的反例。命题 C.6 排除了 $p=6,\ 7$，因此 $p\ge 8$。引理 C.4 给出 $a\le t+4$，而引理 C.8 排除了不同的核心度数。取最小的重复值 g。移除两个副本后，核心有 $p'=p-2\ge 6$ 个顶点，度数和为 $H'=H-2g\ge 5p'$。为了保持在上边界上，我们取 $t'=H'/2-2p'=t-g+4\ge\lceil p'/2\rceil\ge 3$。如果新的最大值 a' 至多为 $p'+t'-1=U_{\max}-g+2$，则根据引理 C.1，约化序列是可图的，并且由极小性可平面化。由于 $t'\ge 2$，引理 C.3 随后会恢复这个相等对。因此 $U_{\max}-g+2<a'\le a$。由于 $U_{\max}=p+t-1$，由整性可得 $a+g\ge p+t+2$。结合 $a\le t+4$，得到 $g\ge p-2$。

我们断言 $a\ge 2p-4$。当 $g\ge 2p-4$ 时结论立即成立。否则，移除一个最大项以及 g 的另一个副本。移除后剩下的项数为 $p-2$，其和为 $\sigma=H-a-g$。将 $2t=H-4p$ 代入 $2(a+g)\ge 2(p+t+2)$，得到 $a\ge\sigma-g-2p+4$。由于 $g\ge p-2\ge 6$ 是最小的重复值，五至多出现一次，因此 $\sigma\ge 6(p-2)-1$。利用 $g\le 2p-5$ 可得

$$a\ge\sigma-g-2p+4\ge 2p-4.$$

现在 $a+b-c\ge a\ge 2p-4$，因此当 $b\ge p-1$ 时，引理 C.8(1) 适用。由于 $b\ge g\ge p-2$，只剩下 $b=g=p-2$。于是 $a+g\ge p+t+2$ 和 $a\le t+4$ 迫使 $a=t+4$。

对于最后这种情况，取 $K_2\vee P_{p-2}$，并删除一条从第二个极点连到路径的边。此时第二个极点的度为 $p-2=b$。第一个极点还需要 $A=a-p+1$ 个关联，而路径顶点总共需要 $R=H-a-b-$（$4p-11$）个关联。由于 $a=t+4$ 且 $b=p-2$，因此有 $R-A=4$。每个路径顶点至少需要一个关联，因为其目标值至少为五，而当前度至多为四。将两条顶点不相交的路径边各加倍，并将路径上其余所有关联都放在通往第一个极点的辐条上。支撑图有 $3p-7\ge 2p$ 条边，因此由细分计数可得一个含有 t 个二度顶点的实现。 □

恢复上边界上的四度和三度 我们首先用 $p\ge 7$ 作归纳证明：上边界上核心度最小值至少为四的每个无叶图序列都是可平面化的，唯一例外是 (4^7)。命题 C.6 给出了基例 $p=7$。对于 $p\ge 8$，引理 C.9 涵盖核心度最小值至少为五的情况。于是设 $h_p=4$。若 $a=U_{\max}$，则将其余 $q=p-1$ 个核心顶点置于一个环上，并添加两条端点不相交的不交叉弦。该图的最大度为三。在环顶点上附加叶节点，使其度数达到对应目标值减一。由于 $a=q+t$，恰好需要 $H-a-3q-4=t$ 个叶节点。所得锥即为所需的简单平面图。对于 $a<U_{\max}$，移除一个四，留下 t 个度为二的顶点，且最大度至多为 $U_{\max}-1$。根据引理 C.1，约化序列是可图的。剩余图在上边界上有$n'\ge p-1\ge 7$ 个顶点和 $m'=2n'$ 条边。因此 $m'<3n'-6$，而引理 C.2 可在任意平面实现中恢复这个四。只有当 $p=8$ 且核心为 (4^7) 时，剩余图才可能不可平面化。一个正方反棱柱可实现 (4^8)。

现在允许出现度为三的顶点，并对 $p\ge 8$ 进行归纳。对于包含一个度为三的顶点的核心，将其删除，并将最大 a 减一。这不会改变度为二的顶点的数量 t。由于 $H\ge 4p$ 且核心包含一个度为三的顶点，我们有 $a\ge 5$。对于 $p\ge 9$，通用项是唯一的，因为两个相等于

$U_{\max}$ 会使总和 $H-2U_{\max}=2p+2<3(p-2)$。约化序列的最大值至多为 $U_{\max}-1$，且至少有八个核心项。因此，根据引理 C.1，它是可图的，并根据归纳假设是可平面化的。引理 C.2 恢复该度为三的顶点。

在 $p=8$，归约得到七个核心项，新的度数界为 $U_{\max}-1$。根据引理 C.1，剩余图是可图的，除非两个原始项等于 $U_{\max}$。在这种情况下，其余六项之和为 $H-2U_{\max}=18$，因此这六项全都是 3。原始序列的核心为 $(a,\ a,\ 3_6)$，且$t=a-7$。它可由 $K_2\vee(3K_2\sqcup tK_1)$ 实现，而后者是双扇的子图。如果剩余图是可图的但不可平面化，命题 C.6 给出了以下可能的约化核心及其原像。

约化核心	原始核心
(4^7)	$(5,4^6,3)$
$(6,5^2,3^4)$	$(7,5^2,3^5)$，$(6^2,5,3^5)$
$(6^3,3^4)$	$(7,6^2,3^5)$。

表 2 为四个原像中的每一个给出了一个实现及其所需的度为二的顶点。这就完成了上边界的归纳。

下边界 这里有 $t=H/2-2p+1$。当出现一个三时，将其删除，并将一个最大的项减一。我们有 $a\geq 4$。如果 $a=U_{\max}$，那么它是唯一的，因为 $H-2U_{\max}=2p<3(p-2)$。约化序列仍有 t 个度为二的顶点，其最大值至多为 $U_{\max}-1$；由于 $p-1\geq 6$，根据引理 C.1，它是可图的。利用命题 C.6 和引理 C.2 对 p 进行归纳，便可处理这种情况。

如果所有核心项都至少为四，则 $t\geq 1$。当 $a=U_{\max}$ 时，使用一个包含 $q=p-1$ 且带一条弦的环，通过添加 $H-a-3q-2=t$ 个叶节点，将其度补足到目标值减一，然后取锥。当 $a<U_{\max}$ 时，删除一个度为二的顶点。所得的上边界序列有 $t-1$ 个度为二的顶点，且最大值至多为 $U_{\max}-1$，因此根据引理 C.1，它是可图的。刚刚证明的上边界结果为 $p\geq 8$ 实现了它。对任意一条边进行细分即可恢复丢失的度为二的顶点，从而完成命题 C.7 的证明。

C.4 恢复叶节点

引理 C.10. *设一个正图序列包含一个 1，且其最大项 D 至少为 3。删除一个 1，将一个最大项减 1，然后重新排序。所得正序列是可图的。若它可平面化，则原序列也可平面化。*

证明. 在一个实现中，令所选叶节点 z 的邻点为 u，并选取一个度为 D 的顶点 v。若 $u\neq v$，则 $\deg(v)\geq\deg(u)$ 且 $|N(v)\setminus\{u\}|>|N(u)\setminus\{v,z\}|$。因此存在一个 $w\in N(v)\setminus\{u\}$，它既不与 u 相邻，也不与 z 相邻，且 $w\neq z$。将 zu,vw 替换为 zv,uw。各顶点的度数保持不变，现在可以删除 z。在逆向构造中，总能在平面嵌入中将一个叶节点连接到指定顶点。 □

定理 3.2 的证明. 当 $\delta\geq 4$ 时，结论由 Bar-Noy 等人给出，见 [3, 定理 2]。由奇偶性可知，只需考虑 $\delta=2$。我们对 ℓ 进行归纳。当 $\ell=0$ 时，命题 C.6 和 C.7 给出了唯一的例外（$4^5,2$）。取 $\ell>0$。若最大度至多为二，则每个实现都是平面图。否则，根据引理 C.10，可得到一个含有 $\ell-1$ 个叶节点且具有相同 δ 的图残序列，因为（n,S,ℓ）变为（$n-1,S-2,\ell-1$）。根据归纳假设，我们可以接回删除的叶节点，除非剩余图是（$4^5,2$）。要恢复被删除的最大项，我们唯一能增加的项是一个 4，因此原列表为（$5,4^4,2,1$）。要实现它，从 K_4 中删除一条边 ab，并将所得图绘制成所有顶点都位于外面的形式。在该面内将一个叶节点 x 连接到 a，对所得外平面图作锥化，然后再将一个新叶节点连接到 b。锥顶点的度为五，四个原始顶点的度为四，而 x 的度为二，符合要求。 □

定理 3.3 的证明。 我们对 ℓ 进行归纳。命题 C.6 和 C.7 给出了基底情形 $\ell=0$，而核心割计数确定了对于每个 ℓ，定理 3.3 的前两类情形。在这些情形之外

取 $\ell > 0$。由于 $H = 4p + 2t + \ell > 4p$，最大项至少为五。因此，引理 C.10 保持 $\delta = 0$、p、t 以及三的数量不变。如果剩余图是可平面化的，附加叶即可完成构造。根据归纳，我们只需考虑定理中最后两类的剩余图。

当 $\ell = 1$ 存在六个这样的剩余图时。在逆向删除过程中，可以将任意一个条目加 1，只要加 1 后它是最大值。表 1 列出了所有这类选择。中间一列给出了删除叶之前的度数，其中省略了那一个叶。最后一列中的每个序列，都是通过降低中间一列中的不同顶点得到的。在替代剩余图的平面实现中，将一个叶连接到刚刚降低的顶点上，即可得到前驱的平面实现。

表 1：六个剩余无叶例外的首批前驱。

端点	前驱，省略叶	替代剩余图
$(5, 4^4, 3)$	$(6, 4^4, 3)$	全邻顶点
	$(5^2, 4^3, 3)$	$(5^2, 4^2, 3^2)$
$(5^5, 3, 2^2)$	$(6, 5^4, 3, 2^2)$	$(6, 5^3, 4, 3, 2^2)$
$(6, 4^5, 2)$	$(7, 4^5, 2)$	全邻顶点
(4^7)	$(5, 4^6)$	$(5, 4^5, 3)$
$(6, 5^2, 3^4)$	$(7, 5^2, 3^4)$	全邻顶点
	$(6^2, 5, 3^4)$	$(6^2, 4, 3^4)$
$(6^3, 3^4, 2)$	$(7, 6^2, 3^4, 2)$	$(7, 6, 5, 3^4, 2)$

第一个替代剩余图由双扇 $K_2 \vee P_4$ 实现。按表中顺序，另外四个图的最大度分别为 6，5，6，7，其相应的度数界为 $U_{\max} = 7$，6，6，7。因此，根据引理 C.1，每个图都是可图的；根据无叶分类，每个图都是可平面化的。在每种情况下接上叶即可实现其前驱。

其余三个前驱开启了第 3 部分中的各个族。对于 $\ell \geq 2$，剩余图中仍有一个叶节点，因此根据归纳法，它属于这些族中的一个。其全邻顶点的度至少比其他任何顶点的度大 2。只有这一项可以提高，才能恢复一个最大值，从而得到同一族的下一个成员。反过来，通过将叶节点连接到无叶端点中度最大的顶点上，每个成员都是可图的。在每个实现中，最大度顶点都是全邻的，因此删除其叶节点即可恢复该端点。其非平面性排除了整个族存在平面实现的可能性。

□

表 2：约化的有限例外的球面旋转系统。

	顶点 v								
度序列	0	1	2	3	4	5	6	7	8 个面
$(6, 4^6, 2)$	4576	2653	4613	1542	0623	3160	512407	60	10
$(6, 5^4, 3^2, 2^2)$	162435	05326	14706	41508	23807	310	201	42	34 11
$(5^2, 4^3, 3^2)$	16352	02436	1054	4061	2531	420	301		9
$(5, 4^6, 3)$	36754	2576	3416	0426	5230	1407	1032	501	10
$(7, 5^2, 3^5)$	1543762	02345	10673	201	105	401	207	602	10
$(6^2, 5, 3^5)$	165724	032756	13407	214	302	106	501	201	10
$(7, 6^2, 3^5, 2)$	1764325	052678	150346	204	302	210	201	108	71 11

每列按循环顺序列出指定顶点的邻点。要追踪一个面，沿着（u，v）接着沿着（v，w）前进，其中在 v 的循环列表中，w 紧随 u。该置换的环数 f 显示在最后一列。由于每一行都满足 $n - m + f = 2$，用圆盘封住这些面边界游走即可得到球面嵌入。

D 通过读取三角形面寻找实现

D.1 状态

对于 $n \le 3$，枚举简单图。对于 $n \ge 4$，舍弃大于 $n-1$ 的项，以及总和为奇数或大于 $6n-12$ 的项。任何平面实现都可以扩展为同一组顶点上的边极大简单平面图 T，其中包括孤立点。极大性排除了同一面上存在不同连通分量的可能，也排除了割点处相邻且通向其删除后不同连通分量的边。因而，每个面边界都是一个环。在连续的四个角点中，连接交替角点的两条对角线不可能都位于面外，因此每个面都是三角形。将原始边着为红色，将添加的边着为蓝色。搜索逐一尝试可能的面和边颜色。一次完整运行会读取 $f = 2n-4$ 个面，并在每条红色边首次出现时对其计数。

目前仅被一个面使用的边是开放的，被使用两次的边是封闭的。活动顶点是开放边的端点。一个状态由以下数据组成。

1. 已读取的面数和已引入的顶点数，以及仍待分配的目标度数多重集。只有当一个顶点不再处于活动状态时，我们才会从该多重集中移除它的度。2. 活动顶点之间的所有开放边和封闭边。我们保留封闭边，以防后续的面创建出一条端点相同的第二条边。根据其关联的已读取面属于已读面对偶图的哪个连通分量，将开放边划分为若干块。3. 每个活动顶点累积的红度。一条红色边在首次出现时计入。

我们将保持这些数据的活动顶点双射视为相同状态。新发现的边的颜色只会影响其两个端点的计数，因此状态无需单独存储该颜色。

要添加一个面，选择三个互不相同的顶点，每个顶点都必须处于活动状态或此前未使用。仅当任意两个顶点之间都没有封闭边时，这种选择才是可行的。新面的任何开放边都将变为封闭边，而每条此前不存在的边都会成为一条开放边并获得其颜色。在已读面对偶图中，新面会跨越旧开放边与其接触到的所有块相连，因此我们合并这些块，并将新开放边纳入合并后的块中。如果它没有接触到任何块，就新建一个块。当某个块失去最后一条开放边后，就不能再有面附接到该块。因此，只有在最后一步且它是唯一剩余块时，才允许这种情况发生。

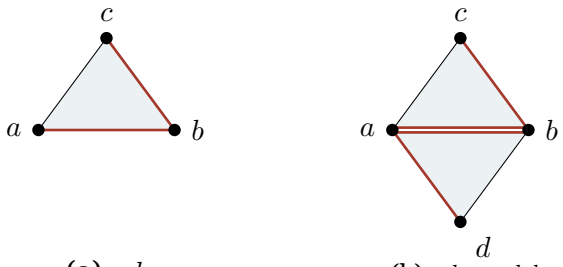
当一个顶点失去最后一条开放边时，其红度便已确定。我们从剩余多重集中移除一个该度数的副本；如果剩余多重集中没有这样的度数，就拒绝这一步。此时我们可以忘记与该顶点相连的所有封闭边，因为已退役的名称不会再被使用。搜索从空边界、完整输入多重集以及 n 个未使用名称开始。经过 f 步后，若唯一的面连通分量已闭合、所有 n 个名称均已使用且剩余多重集为空，则接受。图5展示了跨越一条公共边的转移。

D.2 接受运行代表什么

状态忘记了每个顶点处的循环顺序。为了在接受时恢复一个球面，我们必须排除多个在一个顶点处相交的不相交三角形扇。

引理 D.1。 对于任何红色子图具有输入度数的球面三角剖分，未受限制的转换都会接受其面片的每一种排列。反之，每个接受运行都会给出输入的一个简单平面实现。

证明。 在三角剖分中，顶点周围的面构成一个环。如果其中一些面已经被读取，而另一些尚未读取，那么该环会通过一条关联开放边从已读取的面穿过到尚未读取的面。因此，稍后需要的顶点仍然可用。完整的面对偶是连通的，因此



(a) abc (b) abc, abd

图5：四面体宿主的两个面。粗边为红色，细边为蓝色。读取 abd 后封闭 ab（双线），并引入一条红色边 ad。在面板 (b) 中，(a，b，c，d) 处的红色计数依次为 (2，2，1，1)，四条开放边构成一个块。公共边 ab 只计一次。

已读取面的每个真连通分量都有一条开放边。真实面序遵循所有过渡规则和退役规则。

反过来，沿着一个接受运行进行，为每个引入的顶点分配不同的永久名称。一对活动顶点不能重新开放一条封闭边，而带有退役端点的一对也不能再次出现。因此，每条边在闭合时恰好出现两次。转移测试确实允许两个面实例具有相同的角点无序三元组。这两个面会用尽三条边的全部两次出现，因此构成面对偶的一个完整连通分量。在接受时，面对偶是连通的，而且 $f = 2n - 4 \geq 4$，因此不会有三元组重复。

沿配对边粘合三角形，使其命名的端点相互对应。每条边的内部都有一个圆盘邻域。要考察一个顶点，考虑其链接：其中每个关联边对应一个顶点，每个面角对应一条边。由于每条边都出现两次，链接中的每个顶点的度都是二。因此，链接是圆的不交并。将原始顶点按每个圆分别分裂成一个副本后，每个副本都有一个圆盘邻域，并且共享一条边的面在分裂后仍然共享该边。因此，连通面对偶给出一个连通的闭曲面。

如果分裂增加了 h 个顶点，则该曲面有 $n + h$ 个顶点、$3f/2$ 条边和 f 个面。其欧拉示性数为

$$n + h - 3f/2 + f = 2 + h.$$

根据紧曲面分类，连通闭曲面的欧拉示性数至多为二，等号成立刻画了球面，无论是否假设其具有可定向性。因此，$h = 0$ 且粘合本身位于球面上。不同的角点以及配对规则给出一个简单图。其红色子图实现了输入，因为每条红色边在其每个端点处各计数一次，并且每个顶点恰好被弃用一次。

□

D.3 独立于宿主图的边界目录

给定的嵌入为曲面分解 [25] 提供边界。对于给定点集的三角剖分，Lingas [22] 和 Marx 与 Miltzow [24] 从给定点中选择分隔集。对于度实现，目录必须仅由 n 构建。

引理 D.2 (边界目录)。对于每个 $n \geq 4$，都存在一个确定性的 $2^{O(\sqrt{n})}$ 时间算法，该算法给定 n 后，列出至多 $2^{O(\sqrt{n})}$ 条记录，每条记录包含 $O(\sqrt{n})$ 比特。对于具有 n 个顶点的每个红蓝球面三角剖分，其面都可以排成一个序列，使得每个前缀都有一条匹配记录。匹配是从该前缀的活动顶点到该记录的双射，并且保持当前红度、开放边与保留的封闭边集合，以及开放边在已读面连通分量中的划分不变。

证明。选择阶。无权分隔集限制了我们必须记住的顶点数量。为每个顶点记录 $\lceil \log_2 n \rceil$ 比特，仍会使指数中保留一个对数因子

。我们仅为宿主图的顶点 v 记录 $c(v) = \lceil \log_2(2 + \text{度}_T(v)) \rceil$，这足以存储它可能达到的任何红度，并赋予其权重 $w(v) = c(v)^2$。由于 $c(v)^2 \le 9(\text{度}_T(v) + 1)$ 且 $\sum_v \text{度}_T(v) = 6n - 12$，我们有 $w(T) \le 63n$。

Aleksandrov 等人的顶点分隔定理 [1, 定理 2] 适用于任意具有非负顶点代价和权重的平面图 H。对于 $0 < t < 1$，该定理给出一个代价至多为 $4\sqrt{2 \sum_{v \in H} c(v)^2 / t}$ 的集合，移除该集合后，每个连通分量的权重至多为 $t\, w(H)$。采用上述权重并令 $t = 1/2$，代价至多为 $8\sqrt{w(H)}$。对剩余连通分量递归处理，并将每个被移除的顶点分配给移除它的节点。权重均为正，且每一步都会减半。因此，根到叶路径上各分隔集的代价总和有如下上界：

$$8\sqrt{w(T)} \sum_{i \ge 0} 2^{-i/2} = O(\sqrt{n}). \tag{4}$$

分配给互不可比节点的顶点，在移除它们最后一个共同分隔集后，位于不同的连通分量中。因此，一条边的两个端点属于可比较的节点，而一个面的三个角点所在的节点位于同一条路径上。将每个面分配给这些节点中最深的节点，并按深度优先顺序，在访问各子节点之前读取每个节点上的面。在读取 z 处的面时，已完成的侧枝中的每个顶点都已遍历其所有关联面，而尚未访问的子树中的每个顶点则一个关联面也未遍历。因此，活动顶点位于通往 z 的路径上的分隔集中。若有 b 个这样的顶点，且 r_v 是 v 当前的红度，则 $r_v \le \deg_T(v)$ 给出

$$b \le \sum_{v \text{ active}} \lceil \log_2(2 + r_v) \rceil = O(\sqrt{n}).$$

编码边界。 令 J 由 b 活动顶点上的保留边组成，其中 $s = |E(J)| \le 3b$。在边的中点处细分这些边。为在同一平面图中编码开放边划分，在已读面对偶图与 J 相交的地方将其割开。现在，每个割开的对偶连通分量只通过未保留的边连接已读面的中心，因此可以将其收缩，且不与 J 相交。保留与 J 关联的连通分量，并从每条保留边的中点向每个相邻已读面的连通分量画一条辐条。开放中点有一条辐条，封闭中点有两条辐条，重复的辐条予以省略。经过封闭中点，就恰好恢复了在那里切断的对偶邻接关系。因此，当且仅当两个开放中点对应的已读面彼此连通时，它们之间才存在一条由辐条构成的路径。该标记平面图有 $2s$ 条原始线段、至多 $2s$ 条辐条和 $O(b)$ 个顶点。

只要图仍不连通，就存在一个面，其边界上有来自两个不同连通分量的顶点。在该面内用一条弧连接这样一对顶点，并将新边标记为待删除。每一步都会使连通分量数减少一个，同时保持平面性。顶点数至多为 $b + 3s$，因此所得连通图仍只有 $e = O(b)$ 条边。选取一棵生成树和一个根角。沿生成树顺时针遍历时，为每条树边记录一个起始符号和一个结束符号，并在遍历中遇到的每个非树半边处放置一个占位符。沿生成树将球面切开后，得到一个圆盘，其边界沿着这次遍历延伸。非树边在圆盘内形成互不相交的弧，因此它们的端点构成占位符的一个非交叉匹配。在每条弧的第一个端点处写一个起始符号，在第二个端点处写一个结束符号，就能唯一记录该匹配，因为每个结束符号都与最近一个尚未匹配的起始符号配对。这两个符号串共同确定了生成树、每个占位符所在的角点，以及与该处关联的边。

在 ℓ symbols 的每个单词前加上 $1^{\ell}0$。有根巡游按照顶点和边首次出现的顺序为其编号，并将根顶点置于最前。在此顺序中，为每个顶点的类型（原始顶点、开放中点、封闭中点或对偶分量）附加两个比特，并为每条边的类型（原始线段、辐条或桥）附加两个比特。这两个单词和标记共占用 $O(e + 1)$ 比特。最后，对于每个活动顶点，附加 $r_v + 1$ 的 k_v 二进制数字，其前置为 $1^{k_v}0$，其中 $k_v = \lceil \log_2(2 + r_v) \rceil$。这些字段至多占用 $3 \sum_v k_v$ 比特。一个初始比特用于区分

空图。 e 和 (4) 的大小界给出了一个固定常数 C ，使得整个记录可以容纳在 $C\lceil\sqrt{n}\rceil$比特中。

枚举所有不超过此长度的字符串即可得到目录。每个字符串都必须能够完整解码为这两个词、它们的树遍历和匹配，以及所需的标记和计数器。删除桥后，每条原始线段都必须连接一个原始顶点和一个中点。每个中点恰好连接两条这样的线段，且它们的原始端点各不相同；此外，不能有两个中点对应同一对端点。每个原始顶点都必须连接一个开放中点。辐条连接中点与分量顶点：每个开放中点连一条辐条，每个封闭中点连一条或两条辐条，而每个分量顶点至少连一条辐条。在辐条子图的每个连通分量中，只要开放中点集合非空，这些开放中点就构成一个块。我们要求原始顶点不超过 n 个，并为每个原始顶点在 $[0, n-1]$ 中设置一个计数器。对每个字符串执行这些检查所需的时间为多项式时间。通过检查的记录（包括空边界）按任意固定顺序构成允许的表。多个记录可能表示同一个边界，而有些记录可能不会出现在任何三角剖分中。上述构造确保，所选面序的每个前缀在表中都有一条记录。

□

使用目录。 为每个提议的后继指定其首个同构记录的索引；若没有匹配项，则将其丢弃。假设两个前缀的计数和剩余多重集相同，且其活动数据同构。对于任意下一个面，该同构会对应其活动角点。未使用名称的数量相同，因此可以配对新角点，并为新边赋予相同的颜色。随后，两个步骤都会合并对应的块，移除相同的度数，并再次得到同构的活动数据。由归纳可知，这些前缀允许相同的后续延续，因此每个状态只需保留一段历史。每段保留的历史都由实际转移构成；若其接受，则引理 D.1 适用。

D.4 计数状态并恢复图

待比较的数据可以自然地表示为一个带颜色的关联图。该图的四个颜色类分别标识活动顶点、开放边、封闭边和块，其中第一个颜色类还按当前红度进一步细分。每个边顶点都与其两个端点相邻，每个开放边顶点还与其所属的块相邻。这些图的保色同构恰好对应于活动数据的等价关系。平面图还为这种比较提供了一个简短的路径分解。

设$K = 4C\lceil\sqrt{n}\rceil$为解码后的平面图和关联图大小的上界。对于真实边界，使用单位代价与权重将分隔定理应用于其平面图。按深度优先顺序访问递归树，在每个节点设置一个袋，其中包含该节点的分隔集及其所有祖先分隔集。某个顶点恰好在访问其子树期间出现，并且每条边的两个端点都共享同一个袋。于是，式（4）中的几何和将袋大小限制为$O(\sqrt{K})$。

为转到关联图，删除临时桥，并在每个包含某个中点的袋中将该中点拆分为两个副本。让一个副本关联两条原始线段，另一个副本关联其辐条。连接开放中点的两个副本，因为其边需要块关联。封闭中点的两个副本保持不连接。将辐条子图的每个连通分量收缩为一个顶点，但仅当其中包含开放中点时才将其保留为一个块。与某个连通子图相交的袋构成一个区间，因此收缩操作保持路径分解不变。拆分操作至多使袋大小翻倍。令 w 为 $8\sqrt{K}/(1-1/\sqrt{2})$的两倍向上取整值，即所得袋大小的上界。

按顶点最后出现的袋排序，平局时任意排序。在任何非空前缀的末尾，每个已处理顶点尚未处理的邻点都属于最近处理的顶点所在的最后一个袋。因此，该前缀至多有 w 个外部邻居。我们可以通过子集搜索找到具有此性质的顺序：每当扩展后的集合至多有 w 个外部邻居时，就向已到达的集合中添加一个顶点。每个已到达的集合保留一个顺序，代价为 $2^{O(K)}$

每个模式耗时。我们丢弃顶点数超过 K 的模式，以及不存在这种顺序的模式。完整性所需的每个边界都能通过这些测试。

要将一个存活模式 P 与一个候选对象 H进行比较，首先检查它们的阶和边数是否一致。对于每个 $X \subseteq V(H)$，计算保色同态 $P \to H[X]$。在 P的保存顺序 $v_1, \dots, v_k$中，令 $S_i = \{v_1, \dots, v_i\}$，并令 $B_i = N(S_i) \setminus S_i$为其外部邻居。对于 B_i上的每个赋值，存储扩展到 S_i 的扩展数，同时保持其中的颜色以及与 S_i关联的边不变。由于 $B_{i-1} \setminus \{v_i\} \subseteq B_i$，$B_i$ 上的一个赋值与对 v_i 像的选择共同给出前一张表的完整键。检查 v_i 的颜色及其与后续邻点相连的边，并对其可能的像求和。对于每个X，这需要 $K^{O(w+1)}$ 时间。

对 X 进行容斥原理，可计算映射到 $V(H)$ 上的映射数量。阶相等时，这些映射是双射；边数相等时，它们是同构。即使将容斥原理计算中的绝对值全部相加，对于 $K \geq 1$而言，其总和也至多为 $2^K K^K$。因此，每个整数只需$O(K \log(K+2))$比特。由于 $K = O(\sqrt{n})$ 和 $w = O(\sqrt{K}) = O(n^{1/4})$，袋因子为 $2^{O(n^{1/4} \log n)} = 2^{o(\sqrt{n})}$。一次比较，无论成功与否，都需要 $Q(n) = 2^{\Theta(K)} K^{O(w+1)} = 2^{O(\sqrt{n})}$ 时间。

剩余多重集中的正项构成一个不大于 $6n$ 的整数分拆，而零的个数最多有 $n+1$ 种取值。用 $p(m)$ 表示普通分拆数。Hardy–Ramanujan渐近公式 [15] 给出 $p(m) = \exp(O(\sqrt{m}))$，因此 $P(6n) = \sum_{m=0}^{6n} p(m) = 2^{O(\sqrt{n})}$。若 A 是允许表的长度，则可能的状态键数 S 至多为 $(f+1)(n+1)^2 P(6n) A = 2^{O(\sqrt{n})}$，其中包括已引入顶点的数量和零的重数。

共有 $f+1$ 层，按已读取的面数编索引，每层至多有 S 个键。每个键在 $[n]$中保留一条带永久标签的历史记录。每条历史记录至多有 $8n^3$ 种扩展，分别对应角点和边颜色的各种选择。查找第一个匹配的目录记录，每次扩展至多耗费 $AQ(n)$。该记录的索引、全局计数以及剩余多重集共同确定后继。扫描下一层以查找此键的成本为 $Sn^{O(1)}$，因为一条历史记录至多有 $2n-4$ 个面，复制或更新均可在多项式时间内完成。总计耗时为 $2^{O(\sqrt{n})}$。一条接受的历史记录会记录每条红色边首次出现时的情况。将最终度数与相等的输入项匹配，即可恢复给定标签上的边。

在确定性多带图灵机上，第一次扫描统计各项，以得到 n。第二次扫描跳过前导零，将全零项记为零，并在正数项的有效部分超过 $n-1$时立即拒绝。每项只需检查或存储 $O(\log(n+1))$ 个有效位。扫描耗时为 $O(L) + n^{O(1)}$ 步。后续所有表格和历史记录总共占用 $2^{O(\sqrt{n})}$ 比特，因此，即使每次访问表格都要完整扫描一次磁带，搜索时间也至多增加 $2^{O(\sqrt{n})}$倍。这就证明了定理 1.2。

推论 D.3。 n 个顶点上的潜在平面度多重集可以在总时间 $2^{O(\sqrt{n})}$ 内无重复地列出。其数量为 $2^{\Theta(\sqrt{n})}$。

证明。 通过按非递增顺序追加部件，生成不超过 $6n$ 且部件数不超过 n 的整数分拆。每个前缀本身都是同一范围内的一个分拆。补零后，对每个 $2^{O(\sqrt{n})}$ 个候选对象应用定理 1.2。对于 $n \geq 2$，仅树就给出 $p(n-2)$ 个不同的多重集。将 $n-2$ 的一个分拆补零至长度 n，并将所得各项作为普吕弗字中的标号重数。树的度数减一后即可恢复这些项。分拆渐近式 [15]给出了所需结论。 □

数据与致谢。 Lean 4 配套材料 [27]按定理编号索引形式化结果，并包含有限枚举的脚本。区间规则、搜索算法和算术判据分别将规范排序定理、代价权重平面分隔定理和加权矩阵树定理作为 Lean 中的明确假设。感谢 The Kai Project 成员就人工智能辅助验证所进行的讨论。

生成式人工智能使用声明。 我们使用了 OpenAI Codex（包括用于稀疏分类的 GPT-6.2 Astra）来开发和检查证明、检索文献、起草和编辑手稿，以及编写 Lean、Python 和 TikZ 代码。我们对本文内容承担责任。

参考文献

[1] L. Aleksandrov、H. Djidjev、H. Guo 和 A. Maheshwari，《带代价与权重的平面图划分》，ACM J. Exp. Algorithmics 11（2006 年卷，2007 年出版），文章 1.5，定义 1 和定理 2。[2] A. Bar-Noy、T. Böhnlein、D. Peleg、Y. Ran 和 D. Rawitz，《稀疏可图度序列具有平面实现》，载于 MFCS 2024，LIPIcs 306（2024），18:1–18:17。[3] A. Bar-Noy、T. Böhnlein、D. Peleg、Y. Ran 和 D. Rawitz，《稀疏可图度序列具有平面实现》，J. Graph Theory 113 （ 2026 ），571–594。[4] J. A. Bondy 和 U. S. R. Murty，《带应用的图论》，Macmillan，1976，附录 IV，问题 35。[5] G. Böttger 和 H. Harders，《关于 S. L. Hakimi 提出的一个无重边元素平面图问题的注记》，J. Soc. Indust. Appl. Math. 12（1964），838–839。[6] G. Brinkmann 和 B. D. McKay，《平面图的快速生成》，MATCH Commun. Math. Comput. Chem. 58（2007），323–357。`plantri`，版本 5.8。[7] V. Chvátal、D. A. Klarner 和 D. E. Knuth，《精选组合研究问题》，Stanford CS-TR-72-292（1972），问题 24。[8] H. de Fraysseix、J. Pach 和 R. Pollack，《如何在网格上绘制平面图》，Combinatorica 10（1990），41–51。[9] J. Edmonds，《将拟阵划分为独立子集的最小划分》，J. Res. Nat. Bur. Standards Sect. B 69B（1965），67–72。[10] P. Erdős 和 T. Gallai，《具有指定度数顶点的图》，Mat. Lapok 11（1960），264–274。[11] S. Fanelli 和 C. Zaffiri，《一种判定极大图划分非平面性的算法》，Calcolo 23（1986），305–326。[12] M. R. Garey 和 D. S. Johnson，《计算机与难解性》，W. H. Freeman，1979，第 4.2 节和问题 SP15。[13] S. L. Hakimi，《关于将一组整数实现为线性图顶点度数的可实现性。I》，J. Soc. Indust. Appl. Math. 10（1962），496–506。[14] S. L. Hakimi，《关于将一组整数实现为线性图顶点度数的可实现性，II：唯一性》，J. Soc. Indust. Appl. Math. 11（1963），135–147。[15] G. H. Hardy 和 S. Ramanujan，《组合分析中的渐近公式》，Proc. London Math. Soc. (2) 17（1918），75–115。[16] V. Havel，《关于有限图存在性的一则注记》，Časopis Pěst. Mat. 80（1955），477–480。[17] J. Hopcroft 和 R. Tarjan，《高效的平面性测试》，J. ACM 21（1974），549–568。[18] M. Kang 和 M. Loebl，《利用 Wick定理枚举平面图》，Adv. Math. 221（2009），1703–1724。[19] Z. Király，《识别图度序列并生成所有实现》，技术报告 TR-2011-11，布达佩斯 Egerváry研究组，2011。[20] S. Klee 和 M. T. Stamps，《用于带权生成树枚举的线性代数技术》，Linear Algebra Appl. 582（2019），391–402。[21] J. Kratochvíl 和 M. Vaner，《关于平面部分3-树的一则注记》，arXiv:1210.8113，2012。[22] A. Lingas，《用于最小权三角剖分及相关问题的亚指数时间算法》，载于第 10 届加拿大计算几何会议论文集，1998。[23] R. W. Maffucci，《构造若干类 3-多面体图》，J. Graph Theory 102（2023），484–501。[24] D. Marx 和 T. Miltzow，《剥离与啃食仙人掌图：用于计数三角剖分及相关问题的亚指数时间算法》，载于 SoCG 2016，LIPIcs 51，文章 52。[25] J. Rué、I. Sau 和 D. M. Thilikos，《曲面上的图的动态规划》，ACM Trans. Algorithms 10（2014），文章 8，1–26。[26] E. F. Schmeichel 和 S. L. Hakimi，《关于平面图度序列》，SIAM J. Appl. Math. 32（1977），598–609。[27] Z. Zhang 和 R. Tian，《识别潜在平面度数序列：Lean 4 证明与验证脚本》，2026，GitHub 修订版 `1571a7a24790`。