arXiv:2611.32072v1 [econ.TH] 24 Nov 2026

隐私保护信息披露与福利

Keita Kuwahara* Sho Mikami†

2026年11月22日

摘要

我们研究垄断者向多个买方销售商品的情形。平台观察到买方的偏好，并可以公开披露有关这些偏好的信息。然而，平台面临隐私约束：信息披露不得揭示任何单个买方的偏好。我们证明，在有无这一约束的情况下，可以实现的消费者剩余与生产者剩余组合完全相同。对于每一组这样的剩余组合，我们构造一种保护隐私的披露规则；在该规则下，标价机制能够实现这一组合，且没有其他可行的销售机制能够获得更高收益。

JEL 分类代码： D42、D82、D83。

关键词： 保护隐私的信息披露；垄断；价格歧视；信息设计；机制设计。

*东京大学经济学研究生院，日本东京文京区本乡7-3-1，邮编113-0033。电子邮件：kuke0303@g.ecc.u-tokyo.ac.jp。

†东京大学经济学研究生院，日本东京文京区本乡7-3-1，邮编113-0033。电子邮件：mikami-sho910@g.ecc.u-tokyo.ac.jp。

1 引言

有关买方支付意愿的信息使垄断者能够实行价格歧视，并影响消费者与卖方之间的剩余分配。然而，披露此类信息可能与保护个人隐私相冲突。本文探讨，要求公共信号不透露任何单个买方的支付意愿，是否会限制可实现的福利结果。关键在于，公共信号可以揭示买方估值之间的关系，而不透露任何单个买方的估值。

我们研究一位垄断者向多个买方销售同质商品的情形，其中不存在供给约束，且边际成本为零。每位买方都私下知晓自己的估值，且各买方的估值相互独立分布。平台在观察到买方估值之前承诺并宣布一项信息披露规则，随后根据该规则发布信号。然而，该信号必须与每位买方的估值统计独立。在观察到信号后，卖方承诺采用一种机制，在满足激励相容和个体理性的条件下，使条件期望收益最大化。

我们的主要结果是，这一隐私约束并不会减少可实现的消费者剩余与生产者剩余组合的集合。卖方可以将公共信号与其他买方的真实报告结合起来，从而推断某位买方估值的信息。这使卖方能够向每位买方提供一个不依赖于该买方自身报告的价格。对于每一对可实现的剩余组合，我们都构造出一项隐私保护披露规则，在该规则下，标价机制能够实现这一组合。我们证明，在该规则下，与所有可行销售机制相比，该机制使卖方的收益最大化。

可实现福利区域是各个买方剩余三角形的闵可夫斯基和。对于有界估值，每位买方的三角形都具有 Bergemann、Brooks 和 Morris（2015年）所刻画的形式。具体而言，消费者剩余必须非负，生产者剩余必须至少等于不进行信息披露时各买方的垄断收益之和，而总剩余不得超过有效交易带来的收益。对于不受隐私约束的有界估值，通过分别对每位买方应用单买方构造，即可实现该区域中的每一点。[1] 我们的结果也适用于无界估值。

[1]独立分割在给定披露区段的条件下保持买方估值的独立性。将每个买方的分配和转移支付对其他买方报告取平均，可得到一个保留期望收益、激励相容和个体理性的单买方机制。因此，披露区段中每个买方的垄断收益构成了从该买方获得的收益上限。在没有供给约束的情况下，卖方可以同时对每个买方采用所选的最优定价规则。在相应的独立分割下，这些定价规则实现了目标剩余对。

1.1 相关文献

Bergemann、Brooks 和 Morris（2015年）刻画了给定估值分布下，通过分段定价可实现的剩余三角形。Shen、Tang 和 Zeng（2018年）给出了明确的市场细分构造，使得该三角形中生产者剩余最低的两个顶点得以实现。Munagala、Shen 和 Xu（2026年）表明，对各细分市场可收取的价格加以限制，可能会缩小可实现福利区域。这些研究允许市场细分改变估值的条件分布，并考虑卖方在每个细分市场中设定最优价格的情形。相关地，Ichihashi 和 Smolin（2025年）研究了向一位卖方提供信息的情形：该卖方掌握有关买方二元估值的私人信息。他们表明，可实现福利区域可能小于设计者观察到卖方信息时所能实现的区域。

我们通过施加隐私约束来考虑一种不同的信息环境，该约束要求公共信号与每位买方的估值相互独立。此外，我们不再将卖方限定为采用标价，而是允许其使用一般的激励相容且个体理性的机制。尽管存在这些差异，我们证明，整个剩余三角形仍然可实现。此外，在相同披露规则下，我们构造的标价机制在所有可行销售机制中实现了卖方收益最大化。

本文也对隐私约束下的信息设计文献作出了贡献。Strack 和 Yang（2024a）刻画了与受保护信息相互独立的信号。在他们关于价格歧视的应用中，买方的群体成员身份受到保密，而有关其支付意愿的信息则可以披露。他们研究了这一隐私约束下的收入最大化市场细分。Strack 和 Yang（2024b）考虑了这样一种模型：卖方和买方各自拥有关于买方估值的私人信号。他们证明，要求买方的信号与卖方的信号相互独立，并不会缩小可实现福利区域。Fallah 等人（2024）研究了受隐私约束的价格歧视，该约束以概率方式掩盖消费者所属的市场分段。他们证明，在这种情况下，可实现福利区域可能不同于无隐私约束时可实现的剩余三角形。与这些研究不同，我们要求公共信号与每位买方自身的估值相互独立，同时允许向每位买方提供的价格取决于该信号以及其他买方的报告。

本文所用的信息结构也与完美样本隐私这一概念有关。该概念要求披露的信号与每个单个样本独立，但不一定与整个数据集独立（Rassouli、Rosas 和 Gündüz，2020）。在其定理5的证明中，他们通过将离散化分位数求和后对区间数量取模，构造出一种隐私保护信号。Renou 和 Tomala（2012，附录 A.2）以及 He、Sandomirskiy 和 Tamuz（2026，命题 1）也采用了类似的模构造。

此外，Ichihashi（2021，引理 1）研究了如何将一种信息结构划分为可分别购买的数据片段：每个片段单独都不会透露任何有关共同状态的信息，但合在一起则会透露该状态的信息。我们运用这类信息隐藏与恢复技术，在隐瞒个体估值的公共信号下实现最优定价。

在我们的模型中，买方的估值在事前相互独立，但在给定公共信号的条件下可能变得相关。在这方面，本文与 Crémer 和 McAfee（1988）的研究有关；他们通过利用买方估值之间的相关性，实现了完全剩余提取。本文也与 McAfee 和 Reny（1992）的研究有关；他们表明，在更一般的环境中，可以使信息租金任意小。关键区别在于，我们模型中的相关性是由平台的信息披露政策诱导产生的，而不是先验分布本身所具有的特征。

最后，本文还与将信息披露和买方报告相结合的机制实施研究有关。Krähmer（2020）表明，在特定条件下，对信息结构进行秘密随机化并对报告进行一致性检验，可以实现完全剩余提取。Zhu（2023）表明，在特定条件下，可以将各自不提供信息的私人信号结合起来，以恢复真实状态，从而使设计者获得与状态可被直接观测时相同的收益。相比之下，我们通过取决于公共信号和其他买方报告的挂牌价格来实现所需的剩余组合，而不依赖非均衡路径惩罚。

2 模型

2.1 环境

一名垄断者向 $n \geq 2$ 个买方出售同质商品。每个买方最多购买一单位商品。卖方不受供给约束，生产的边际成本为零。卖方和买方均为风险中性，并具有拟线性效用。

买方 i 私下观察到她的价值 $v_i \geq 0$。各个价值 $v = (v_1, \ldots\ldots, v_n)$ 相互独立。每个 v_i 都具有连续的累积分布函数（CDF） F_i: $[0, \infty) \to [0, 1]$，且满足 $F_i(0) = 0$，以及 $0 < \mathbb{E}[v_i] < \infty$。

对于买方 i，连续收益函数 $p[1 - F_i(p)] = p\Pr(v_i > p)$ 在 $p = 0$ 处为零，并且在某个 $p > 0$ 处为正，因为 $\mathbb{E}[v_i] > 0$。随着 $p \to \infty$，收益趋于零，因为收益不超过 $\mathbb{E}[v_i \mathbf{1}\{v_i > p\}] \to 0$。最大值 $r_i := \max_{p \geq 0} p[1 - F_i(p)]$

是卖方从该买方获得的垄断收益。我们假设使收益最大化的价格 p_i^*（称为买方 i的垄断价格）是唯一的。[2]

2.2 信息与时序

在观察 v 之前，平台作为信息设计者，承诺并宣布一个信息结构（S， σ），其中 S 是标准博雷尔信号空间，σ: $V \to \Delta(S)$ 是一个可测核， $V = [0,\infty)^n$，而 $\Delta(S)$ 是 S 上的博雷尔概率测度集合。观察 v 后，平台抽取并发布 $s \sim \sigma(\cdot \mid v)$。记 $\perp$ 表示在由先验分布和 σ 诱导的联合分布下的统计独立性，记 $\mathcal{L}(y)$ 表示 y 的分布，记 $\mathcal{L}(y \mid z)$ 表示给定 z 时 y 的正则条件分布。当该结构保护隐私 时，

$$s \perp v_i \ \ (i = 1, \dots, n). \tag{2.1}$$

卖方观察 s，并承诺实施一个在给定信号条件下使期望收益最大化的机制。随后，每个买方观察该机制以及（s， v_i），并选择行动方式。该机制决定分配和转移支付。每个买方的外部选项所带来的效用为零。

2.3 机制与激励

直接机制规定每位买方的分配概率 $x_i(s, \hat{v}) \in [0,1]$ 和预期转移支付 $t_i(s, \hat{v}) \in \mathbb{R}$。二者都关于信号 s 和报告向量 $\hat{v} \in V$联合可测。买方 i的效用为 $v_i x_i(s, \hat{v}) - t_i(s, \hat{v})$。下标 $-i$ 省略了买方 i；因此，$(\hat{v}_i, v_{-i})$ 仅将 v 的第 i 个分量替换为 $\hat{v}_i$。

根据启示原理，我们可以将注意力限制在激励相容且满足个体理性的直接机制上。下文中，我们假设买方参与直接机制的真实报告均衡。

对于每个 i，激励相容（IC）和个体理性（IR）要求：对概率为 1 的同一个可测集合 $A_i \subset S \times [0,\infty$ 中的每个 (s, v_i) 以及每个报告 $\hat{v}_i \geq 0$，以下不等式均成立。这些不等式中的条件期望必须良好

[2]许多常用的分布都满足这一假设，包括非负区间上的均匀分布、指数分布和贝塔分布。

定义于 v_{-i} 给定 $(s,\ v_i)$ 的一个固定正则条件分布之下。

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}[v_i x_i(s,(v_i,v_{-i})) - t_i(s,(v_i,v_{-i})) \mid s, v_i] \\ &\quad \geq \mathbb{E}[v_i x_i(s,(\hat{v}_i,v_{-i})) - t_i(s,(\hat{v}_i,v_{-i})) \mid s, v_i], \qquad (2.2)\\ &\mathbb{E}[v_i x_i(s,(v_i,v_{-i})) - t_i(s,(v_i,v_{-i})) \mid s, v_i] \geq 0. \qquad (2.3)\end{aligned}$$

如果一个机制满足激励相容条件（2.2）、个体理性条件（2.3），并且在如实报告时转移支付绝对可积[3]，则该机制是可行的：

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} |t_i(s,v)|\right] < \infty.$$

如果对于每个可行机制（$\tilde{x},\ \tilde{t}$），卖方最优可行机制（$x,\ t$）都满足

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} t_i(s,v) \,\middle|\, s\right] \geq \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} \tilde{t}_i(s,v) \,\middle|\, s\right]$$

几乎处处 s。

在标价机制中，每位买方 i 面对一个可测的非负价格，该价格可以取决于（$s,\ \hat{}v_{-i}$），但不取决于她自己的报告。如果她报告的数值不低于价格，就会获得一单位商品并支付该价格；否则，她不会获得商品，也无需支付任何费用。通过如实报告，买方恰好在价格不高于其估值时购买，因此可以使自己的收益最大化。

2.4 福利

给定（$S,\ \sigma$）并选定一个卖方最优机制（$x,\ t$），消费者剩余为 u，生产者剩余为 π：

$$u \coloneqq \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} (v_i x_i(s,v) - t_i(s,v))\right],\ \pi \coloneqq \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} t_i(s,v)\right]. \qquad (2.4)$$

无披露垄断收入和有效总剩余分别为

$$\pi^* \coloneqq \sum_{i=1}^{n} r_i,\ w^* \coloneqq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[v_i]. \qquad (2.5)$$

[3]绝对可积性确保预期转移支付有限，并且在均值有限的情况下，预期剩余也有限。仅凭激励约束和参与约束并不能推出绝对可积性。

在 p_i^* 处，销售概率为正，且无原子性给出 $\mathbb{E}[v_i] \geq \mathbb{E}[v_i \mathbf{1}\{v_i > p_i^*\}] > p_i^* \Pr(v_i > p_i^*) = p_i^*[1 - F_i(p_i^*)]$。对买方求和可得 $0 < \pi^* < w^*$。

在没有信息披露的情况下，独立性使我们能够对每位买方的分配和转移支付按照其他买方的报告取平均值，同时保持期望收益、激励相容和个体理性。在由此得到的单个买方问题中，标准的包络论证（Myerson，1981）表明，设定垄断价格能够使收益最大化。

3 剩余三角形

定理 1。 存在一个隐私保护信息结构 (S, σ) 和一个卖方最优机制 (x, t)，使消费者剩余为 u、生产者剩余为 π，当且仅当

$$u \geq 0, \qquad \pi \geq \pi^*, \qquad u + \pi \leq w^*. \tag{3.1}$$

此外，每一组这样的剩余均可通过卖方最优的标价机制实现。

图1展示了定理 1 中的剩余三角形：买方特定剩余三角形的闵可夫斯基和。

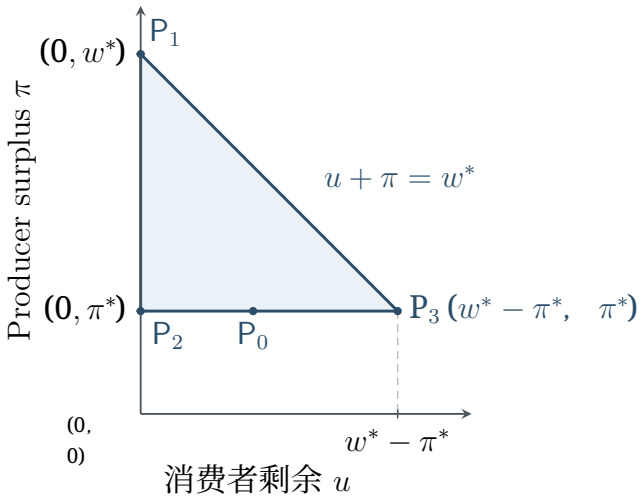

图1　　：总可达福利区域。P_0 的位置仅为示意　　.

在没有信息披露的情况下，公布先验垄断价格会得到点 P_0，，消费者剩余为 $\sum_i \mathbb{E}[\max\{v_i - p_i^*, 0\}]$ 生产者剩余为 π^*。如果交易本来就是有效率的，点 P_0 可以与 P_3 重合。在 $P_1 = (0, w^*)$，所有可获得的剩余都归卖方所有：该机制实现了完全剩余提取。在 $P_2 = (0, \pi^*)$，卖方获得无披露基准

收益 π^*，而买方没有获得任何剩余。由于 $\pi^* < w^*$，该顶点处的交易是无效率的。在 P$_3 = (w^* - \pi^*,\ \pi^*)$，交易有效率，且在卖方获得相同收益 π^*后，买方获得剩余剩余。

3.1 信息披露与最优标价

为构造披露规则，对于每位买方 i 选择一个可测映射 $g_i\colon [0,\infty) \to [0,1)$，使得键 $k_i = g_i(v_i)$服从均匀分布：

$$k_i \coloneqq g_i(v_i), \qquad k_i \sim \mathrm{Unif}[0,1). \tag{3.2}$$

密钥 k_1，……，k_n 彼此独立，因为 v_1，……，v_n 彼此独立。对于实数z，定义 z 模 1 $:= z - \lfloor z \rfloor \in [0,1)$，其中 $\lfloor z \rfloor$ 是不大于 z的最大整数。对于两个买方，公共信号为 $s = (k_1 + k_2)$ 模 1。如果买方 2 报告 $\hat{}v_2$，卖方可以计算 $g_2(\hat{}v_2)$，并构造 $(s - g_2(\hat{}v_2))$ 模 1。当买方 2 如实报告时，计算出的值等于买方 1 的密钥。卖方可以根据买方 1 的价值在给定恢复密钥条件下的条件分布，向买方 1 提供一个垄断价格，而无需使用买方 1 自己的报告。

一般而言，平台会发布所有买方密钥之和模一的结果：

$$s \coloneqq \left(\sum_{i=1}^{n} k_i \right) \bmod 1. \tag{3.3}$$

固定 i；由于 $n \geq 2$，我们可以选择 $j \neq i$。在给定 v_{-j} 的条件下，(3.3) 中的信号是 k_j 模一意义下的固定平移。由于 k_j 服从均匀分布且独立于 v_{-j}，$\mathcal{L}(s \mid v_{-j}) = \mathrm{Unif}[0,1)$ 几乎必然成立。由于 v_i 是 v_{-j} 的一个分量，因此 $\mathcal{L}(s \mid v_i) = \mathrm{Unif}[0,1)$ 几乎必然成立，所以 $s \perp v_i$。固定一个正则条件分布 $Q_i(k) \coloneqq \mathcal{L}(v_i \mid k_i = k)$。[4] 映射 g_i 可以将同一个密钥分配给不同的值。

对于 $[0,\infty$ 上的任意概率分布 Q)，其垄断收益为

$$\rho(Q) \coloneqq \sup_{p \geq 0} pQ([p,\infty)).$$

达到该上确界的价格称为 Q的垄断价格。

[4]卖方不必知道信息披露规则是如何用密钥表示的。先验分布和公布的规则将 $\mathcal{L}(v_i \mid s, v_{-i})$ 确定到零测集为止。该分布几乎必然等于 $Q_i(k_i)$：给定 v_{-i} 后，信号与密钥可以相互确定，并且 v_{-i} 独立于 (v_i, k_i)。因此，卖方可以根据其他买方的报告计算条件分布，并为该分布选择一个垄断价格。

如果某个分布将概率一赋予一个可数集合，则称该分布具有可数支撑。下一个命题给出了以公共信号为条件的期望收益上界。该上界等于各买方以其相应密钥为条件的期望垄断收益之和。

命题 1。 对于每个买方 i，假设其条件价值分布 $Q_i(k)$ 对于几乎处处的 $k \in [0,1)$均为可数支撑，并令 $p_i\colon\ [0,1) \to [0,\infty)$ 为一个可测函数，在几乎处处的 k处为 $Q_i(k)$ 选取一个垄断价格。在公共信号 s 下，根据(3.3)，考虑向每个买方 i 提供价格 $p_i(\kappa_i)$的机制，其中

$$\kappa_i := \left(s - \sum_{j \neq i} g_j(\hat{v}_j) \right) \bmod 1. \tag{3.4}$$

Thi该标价机制是所有可行机制中卖方最优的 $ms.$

证明。归约为单买方问题。 固定一个竞争性可行机制 (x,t) 和买方 i，并令 $s_{-i} = (\sum_{j\neq i} g_j(v_j)) \bmod 1$。由于各价值相互独立，且 k_i 仅取决于 v_i ， s_{-i} 仅取决于 v_{-i}，因此数对 (v_i, k_i) 与 (v_{-i}, s_{-i}) 相互独立。通过在矩形集上检验概率可知，给定 (k_i, s_{-i}) 时 (v_i, v_{-i}) 的条件分布，等于给定 k_i 时 v_i 的分布与给定 s_{-i}时 v_{-i} 的分布之乘积。给定 k_i 后，信号 s 和 s_{-i} 可相互确定。当 $k_i = k$ 时代入 $s_{-i} = (s-k) \bmod 1$，可得对于几乎处处的 (s,k)，

$$\mathcal{L}(v_i, v_{-i} \mid s, k_i = k) = Q_i(k) \otimes \mathcal{L}(v_{-i} \mid s_{-i} = (s-k) \bmod 1).$$

对（s， v_i）进行条件化，同样等价于对（s_{-i}， v_i）进行条件化，因为 $k_i = g_i(v_i)$。由同一独立性，在 $k = g_i(v_i)$ 处的第二个因子给出了在（s， v_i）条件下 v_{-i} 的分布的一个版本。对于（2.2）和（2.3）中使用的条件分布，我们有

$$\mathcal{L}(v_{-i} \mid s, v_i) = \mathcal{L}\big(v_{-i} \mid s_{-i} = (s - g_i(v_i)) \bmod 1\big)$$

几乎必然成立。

为在每个原子上应用激励相容和个体理性，令 G 为 A_i 的可测子集，在该子集上此测度恒等式成立。因此，对于每个报告，激励相容均成立；个体理性在 G 上成立，且 G 的概率为一。由于（s， v_i）几乎必然成立，且 $g_i(v_i) = k_i$，在边缘分布 $Q_i(k)$ 下对（s， k_i）进行条件化，可得 $Q_i(k)(\{z\colon\ (s,\ z) \in G,\ \ g_i(z) = k\}) = 1$ 对几乎所有（s， k）成立。

固定一对 $(s,\ k)$，使得 $Q_i(k)$ 具有可数支撑，乘积分布和前述概率为一的陈述成立，且条件绝对转移期望有限。记 $Q = Q_i(k)$ 和 $H = \mathcal{L}(v_{-i} \mid s_{-i} = (s-k) \bmod 1)$，并令 $T = \{z \geq 0\colon\ Q(\{z\}) > 0\}$。由于 Q 具有可数支撑，其在 T 中的原子点承载了其全部质量。前述

概率为一的陈述具有 Q-质量一，且每个原子点的质量均为正，因此每个 $z \in T$都满足 $(s, z) \in G$ 且 $g_i(z) = k$。因此， T 中的每种类型都面对其他买方真实报告的相同分布 H 。

根据乘积分布，

$$\sum_{z\in T} Q(\{z\}) \int |t_i(s,(z,w))|\, H(dw) = \mathbb{E}[|t_i(s,v)| \mid s, k_i = k] < \infty.$$

因此，每个报告 $z \in T$处的转移支付都是 H-可积的，因为 $Q(\{z\}) > 0$。令 $\bar{x}(z)$ 和 $\bar{t}(z)$ 分别表示在报告 z 下对 H取平均后的分配和转移支付；则 $\sum_{z\in T} Q(\{z\})|\bar{t}(z)| < \infty$。由于对于每个真实类型 $z \in T$，激励相容性对每个报告都成立，因此特别适用于任意偏离报告 $z' \in T$。利用共同分布 H，激励相容性和个体理性对于所有 z， $z' \in T$ 变为：

$$z\bar{x}(z) - \bar{t}(z) \geq z\bar{x}(z') - \bar{t}(z'), \qquad z\bar{x}(z) - \bar{t}(z) \geq 0.$$

我们已将条件问题化简为普通的单买家激励相容性和个体理性问题。

收益上界。可数集未必允许递增枚举，因此先从一个有限子集开始。将 T 的任意非空有限子集按 $z_1 < \cdots < z_m$ 排序。在 z_{j-1} 和 z_j 之间双向相加激励相容不等式，得到

$$(z_j - z_{j-1})[\bar{x}(z_j) - \bar{x}(z_{j-1})] \geq 0.$$

为 $j \geq 2$ 设定 $\Delta_1 = \bar{x}(z_1)$ 和 $\Delta_j = \bar{x}(z_j) - \bar{x}(z_{j-1})$。这些增量均为非负数。在 z_1 处的个体理性约束给出 $\bar{t}(z_1) \leq z_1\Delta_1$，而类型 z_j 针对报告为 z_{j-1} 的激励相容约束给出$\bar{t}(z_j) - \bar{t}(z_{j-1}) \leq z_j\Delta_j$。求和得到 $\bar{t}(z_j) \leq \sum_{h=1}^{j} z_h\Delta_h$。由此可得

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{m} Q(\{z_j\})\bar{t}(z_j) &\leq \sum_{j=1}^{m} Q(\{z_j\}) \sum_{h=1}^{j} z_h\Delta_h \\
&= \sum_{h=1}^{m} z_h\Delta_h Q(\{z_h, \ldots, z_m\}) \\
&\leq \sum_{h=1}^{m} z_h\Delta_h Q([z_h, \infty)) \\
&\leq \rho(Q) \sum_{h=1}^{m} \Delta_h = \rho(Q)\bar{x}(z_m) \leq \rho(Q).
\end{aligned}$$

若 T 是有限的，则取有限子集为 T的全集。

若 T 是无限的，则取有限集 $T_m \uparrow T$。将每个 T_m 中的元素按值排序后，对其应用有限子集界，可得对每个 m，$\int \bar{t}(z)\mathbf{1}_{T_m}(z)\ Q(dz) \le \rho(Q)$。截断转移支付几乎必然收敛到 $\bar{t}\ Q$，且其绝对值不超过平均转移支付的绝对值；在 Q下，平均转移支付可积。根据控制收敛定理，$\int \bar{t}(z)\ Q(dz) = \lim_{m\to\infty} \int \bar{t}(z)\mathbf{1}_{T_m}(z)\ Q(dz) \le \rho(Q)$。

Thus

$$\mathbb{E}[t_i(s,v) \mid s, k_i = k] = \sum_{z\in T} Q(\{z\})\bar{t}(z) \le \rho(Q).$$

由于 $s \perp v_i$ 和 $k_i = g_i(v_i)$，给定 s 时每个密钥都服从均匀分布，因此对密钥取平均，并对买方求和，可得前述几乎处处成立的界：

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} t_i(s,v) \,\middle|\, s\right] \le \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 \rho(Q_i(k))\,dk \tag{3.5}$$

对几乎所有 s成立。

挂牌价格的实现。 在如实报告 $\kappa_i = k_i$ 下，给定 $(s, k_i = k)$ 时，购买概率为 $Q_i(k)([p_i(k),\infty))$。由于 $p_i(k)$ 是垄断价格，买方 i 的条件期望支付对几乎所有 (s,k) 都为 $\rho(Q_i(k))$。对给定 s 的每个均匀密钥积分可知，该机制达到了式 (3.5) 中的上界，因而是卖方最优的。

□

3.2 三个顶点的密钥

首先考虑分布假设符合第 2 节的单个买方。记 F 为其价值 v 的连续累积分布函数，p^* 为其唯一的垄断价格，$r = p^*[1 - F(p^*)] > 0$为卖方向该买方获得的垄断收益。对于定义域为 D 的非递减函数 C，定义 $C^{-1}(y) = \inf\{v \in D : C(v) \ge y\}$。

这三个引理分别为完全提取顶点 P_1 以及两个最小收益顶点构造密钥：消费者剩余为零的 P_2 和具有有效交易的 P_3 。

引理 1。 存在一个均匀密钥 $k = g(v)$ 和一个可测价格函数 $p\colon [0,1) \to [0,\infty)$，使得对于几乎处处的 $k \in [0,1)$，条件分布 $\mathcal{L}(v \mid k)$ 在垄断价格 $p(k) = F^{-1}(k)$处为点质量。公布 $p(k)$ 可获得期望收益 $\mathbb{E}[v]$，且消费者剩余为零。

证明。 设 U服从 (0，1) 上的均匀分布。根据累积分布函数的右连续性，$F^{-1}(U) \le x$ 当且仅当 $U \le F(x)$，因此 $F^{-1}(U)$ 的分布为 F。由 F 的连续性可知，对每个$y \in (0，1)$，都有 $F(F^{-1}(y)) = y$。因此 $F(v)$ 服从均匀分布，且 $F^{-1}(F(v)) = v$ 几乎必然成立，因为 v具有相同的

分布，即 $F^{-1}(U)$。令 $g(v) = F(v)$，但当 $F(v) = 1$ 时，$g(v) = 0$。在 $\{F(v)$ 上的替换只影响一个零事件，因此键在 $[0, 1)$ 上服从均匀分布。价格函数$p(k) = F^{-1}(k)$ 是可测的，因为它是非递减的。由于 $v = p(k)$ 几乎必然成立，给定 k 的条件分布是在 $p(k)$ 处的点质量。设定 $p(k)$ 的价格可使收益最大化：买方在价格相等时购买，价格较低会带来更少收益，而价格较高则收益为零。因此，收益为 v，且消费者剩余几乎必然为零。

□

引理 2。 存在均匀密钥 $k = g(v)$ 和可测价格函数 p：$[0, 1) \to [0, \infty)$，使得对于几乎处处的 $k \in [0, 1)$，条件分布 $\mathcal{L}(v \mid k)$ 具有可数支撑，且 $p(k)$ 是一个垄断价格，等于其原子集合中的最大估值。设定 $p(k)$ 可获得期望收益 r，且消费者剩余为零。

引理 3。 存在均匀密钥 $k = g(v)$ 和可测价格函数 p：$[0, 1) \to [0, \infty)$，使得对于几乎处处的 $k \in [0, 1)$，条件分布 $\mathcal{L}(v \mid k)$ 具有可数支撑，且 $p(k)$ 是一个不高于其原子集合中任何估值的垄断价格。设定 $p(k)$ 可获得期望收益 r 和期望消费者剩余 $\mathbb{E}[v] - r$。

附录 A 证明了引理 2 和引理 3。

3.3 定理 1 的证明

证明。达到各顶点。对于每个顶点，令 g_i 和 p_i 为对 F_i 应用相应的单买方引理后得到的买方 i 的密钥和价格函数。对于 P_1, ，使用引理 1。在模信号下，命题 1 表明，将恢复出的值作为价格发布是卖方最优的。每个买方几乎必然进行交易并支付其价值，因此消费者剩余为零，收益为 w^*。

对于 P_2，对每个买方应用引理 2；对于 P_3，对每个买方应用引理 3。在每种情况下，都通过 (3.3) 合并密钥。两个引理均提供了命题 1 所要求的可测价格，因此标价机制是卖方最优的。将各买方的剩余对相加，即可分别得到所需的顶点。

混合这些构造。令 s_1、s_2、s_3 分别为 P_1,P_2, 和 P_3, 的构造所对应的模信号。平台独立于 v 抽取 $J \in \{1、2、3\}$，并发布 $(J、 s_J)$，以便卖方知道应解决哪个定价问题。对于任意买方 i、索引 j 以及信号值的博雷尔集 B，

$$\Pr(J = j,\ s_J \in B \mid v_i) = \Pr(J = j) \Pr(s_j \in B),$$

几乎必然，因为第 j 个构造保留了隐私。因此，组合信号也保留了隐私。

对于每个满足 $\Pr(J = j) > 0$ 的 j，给定 $J = j$ 时，(v, s_j) 的联合分布与单独采用构造 j 时相同，因为 J 的抽取独立于 v。因此，限制在该组成部分上的竞争性可行机制面临相同的条件分布，并保留概率为一的激励相容和个体理性约束以及转移支付可积性。因此，对于几乎所有 s_j，竞争者在组成部分 j 上的条件期望收益不高于相应卖方最优机制的收益。观察到 (J, s_J) 后，卖方按照构造 J 在 $(s_J, \hat{v}_{-i})$ 下规定的价格，向每位买方 i 报价。每个价格都是可测的，且仅取决于 $(J, s_J, \hat{v}_{-i})$，因此，组合规则构成一个可行的卖方最优标价机制。期望剩余是各组成部分结果按概率加权后的总和，因此，平台通过改变其披露规则中 J 的概率，可以使三个顶点的任意凸组合都能够实现。

无隐私约束下的界。对于任何信息结构，即使不存在隐私约束，卖方也可以提供固定的不披露信息时的垄断价格并忽略信号。该机制是可行的，并根据迭代期望，在期望意义下获得 π^*。卖方最优性给出 $\pi \geq \pi^*$，IR 给出 $u \geq 0$，而分配上界 $x_i(s, v) \leq 1$ 给出$u + \pi = \mathbb{E}[\sum_i v_i x_i(s, v)] \leq w^*$。这三个上界在没有隐私约束时均成立，而上述构造在该约束下实现了整个三角形，因此无论是否存在该约束，都可以实现相同的剩余区域。

□

4 讨论

我们的结果表明，禁止披露有关个体买家的估值的信息，并不一定会限制卖方进行价格歧视的能力。结果还表明，隐私约束并不一定能够保护消费者。关键在于公共信号与其他买家报告之间的互补性。对于任意给定的买方，隐私约束使公共信号无法提供有关该买方估值的信息。估值的独立性使其他买家的真实报告单独来看也无法提供信息。然而，信号与这些报告结合起来，却可以准确揭示该买方的估值。本文表明，正是这种信息互补性，使得卖方无需直接披露个体买家的估值，也能够进行价格歧视。

这种信息互补性依赖于卖方在定价时利用其他买方报告的能力。假设每位买方的分配与转移支付仅取决于公共信号和她自己的报告。由于隐私约束使每位买方在给定公共信号条件下的估值分布保持不变，不披露信息时的垄断价格仍将是最优的。该价格的唯一性意味着，几乎

必然，所有这类卖方最优机制的分配与支付都与报出该价格相同。因此，可实现福利区域将收缩为单点 P_0。因此，由于卖方可以利用通过其他买方报告获得的信息，整个剩余三角形在隐私约束下仍然可以实现。

这种区别也可以从隐私约束的强度来理解。我们的论文要求公共信号与每个买方的估值相互独立，但不要求在以其他所有买方的估值为条件时，公共信号仍与某个买方的估值相互独立。反之，假设我们施加更强的隐私约束

$$s \perp v_i \mid v_{-i}$$

要求对每个买方都成立。在乘积先验下，该条件意味着，给定估值向量时，任何信号事件的概率在对任一坐标取平均后都保持不变。依次对所有坐标取平均，便得到该事件的无条件概率，因此信号与整个估值向量相互独立。由此，公共信号无法向卖方提供任何额外信息，可实现福利区域将收缩为单点 P_0。

最后，估值的独立性也很重要。当估值相关时，即使没有信息披露，其他买方的报告也可能提供有关某个买方估值的信息。例如，若几乎必然所有买方的实现估值都相同，卖方就能根据其他买方的真实报告准确识别每个买方的估值。此时，无论采用何种披露规则，都可以实现完全剩余提取，而可实现福利区域会收缩为一个点。更一般地，当估值相关时，卖方可能获得高于基于边际分布计算的垄断收益之和的收益。因此，由边际分布界定的三角形未必能刻画可实现福利区域。

A 关键构造的证明

在下面的构造中，在公式未定义或超出$[0,1$的范围时，令 $g(v)=0$ ，其中$[0,1$是一个测度为零的估值博雷尔集。同样，在公式未定义或超出 $[0,\infty$的范围时，令 $p(k)=0$，其中 $[0,\infty$是一个勒贝格测度为零的密钥博雷尔集。

A.1 具有恒定条件垄断收益的键

引理 A1。若 $v\geq 0$ 具有连续累积分布函数 F、有限均值、垄断收益 $r>0$和唯一的垄断价格 p^*，则存在一个可测密钥 $k=g(v)$，其在 $[0,1)$上服从均匀分布，并且对于几乎所有密钥 k，条件分布 $\mathcal{L}(v\mid k)$ 具有可数支撑，且其垄断收益 r在 p^*处达到。构造该密钥时， p^*上方的划分可以从任意有限的 $b_0>p^*$开始。

证明。划分价值空间。保持每个区间的概率质量不变，可将价格位于 $(a,\bar{a})$ 时的收益限制在 $\underline{a}[1-F(a)]$以内。为使这一界在 r处仍成立，对于给定的下端点 a ，将区间上端点构造为

$$\bar{a}:=\frac{r}{1-F(\underline{a})}.$$

由此得到的每个区间都满足

$$\bar{a}[1-F(\underline{a})]\leq r. \tag{A.1}$$

在 p^*以下，从 a_0 开始：$=0$ 并令 $a_{j+1}=r/[1-F(a_j)]$ ，同时满足 $a_j<p^*$。于是 $a_j<a_{j+1}\leq p^*$，因为 $a_j[1-F(a_j)]<r=p^*[1-F(p^*)]$ 且 $F(a_j)\leq F(p^*)$。在 p^*以上，任选一个有限的起始点 $b_0>p^*$。选择 b_0 的自由度使我们可以将下一条证明中的截断值设为划分端点。对于向上的步进，令 $c_0=b_0$ ，并令 $c_{j+1}=r/[1-F(c_j)]$ ，同时满足$F(c_j)<1$。由 p^* 的唯一性可得 $c_{j+1}>c_j$。对于从 b_0开始的向下步进，令

$$b_{j+1}:=F^{-1}\left(1-\frac{r}{b_j}\right).$$

p^* 的唯一性表明，只要 $b_j>p^*$，就有 $F(p^*)=1-r/p^*<1-r/b_j<F(b_j)$。由连续性可得 $p^*<b_{j+1}<b_j$ ，且 $F(b_{j+1})=1-r/b_j$。端点递推和连续性表明，无限端点序列的任意有限极限 c 都满足 $c[1-F(c)]=r$ 。因此， $c=p^*$。 a_j 和 b_j 这两个序列都会到达或收敛于 p^*。 c_j 序列要么在某个没有上尾部质量的点停止，要么发散至无穷大。

两条端点规则在（A.1）中都给出等式。可数多个端点及其可能的聚点 p^* 的质量均为零，停止端点之后的尾部也是如此。

因此，连续端点之间的区间覆盖了 F-几乎处处的值。用 $I_j = (\alpha_j, \beta_j)$ 为正概率区间编索引。

使用每个区间内的秩。对于 $v \in I_j$，定义

$$g(v) \coloneqq \frac{F(v) - F(\alpha_j)}{F(\beta_j) - F(\alpha_j)}. \tag{A.2}$$

(A.2) 中的秩在给定 $v \in I_j$ 的条件下服从均匀分布。因此，对于每个博雷尔集 $S \subset (0,\ 1)$，

$$\Pr(v \in I_j,\ g(v) \in S) = \big[F(\beta_j) - F(\alpha_j)\big] \int_S dk.$$

对各区间求和表明，该键服从均匀分布，并且与包含 v 的区间的索引相互独立。在 $v \in I_j$ 上，广义逆几乎必然恢复该值，即

$$F^{-1}\big((1-k)F(\alpha_j) + kF(\beta_j)\big).$$

对于 $0 < k < 1$，累积水平严格位于 $F(\alpha_j)$ 和 $F(\beta_j)$ 之间，因此恢复的值位于 I_j 中。为了计算附加限制 v 落在博雷尔集 T 中时的联合概率，将 S 限制为恢复值落在 T 中的密钥。所得联合概率确定了几乎每个密钥处的条件分布： I_j 中的原子具有概率$F(\beta_j) - F(\alpha_j)$。

检验最优性。固定一个满足该条件分布描述的密钥 k 。对于原始划分中任一区间 $(a, \bar{a})$ 内的任意价格 p ，包括概率为零的区间，条件原子均不位于端点处，并且 $\Pr(v \geq a \mid k) = 1 - F(a)$。因此

$$p \Pr(v \geq p \mid k) \leq \bar{a}[1 - F(\underline{a})] \leq r.$$

对于端点 $p > 0$，取 $p_m \uparrow p$ 穿过区间内部，并使用 $\Pr(v \geq p_m \mid k) \downarrow \Pr(v \geq p \mid k)$。在 $p = 0$ 处以及任何尾部为零的停止端点之后，收益为零。

由于没有区间跨越 p^*， $p^* \Pr(v \geq p^* \mid k) = p^*[1 - F(p^*)] = r$。 □

A.2 在最低收益下使消费者剩余为零的键

引理 *2* 的证明。选择截断点和混合权重。为了使消费者剩余为零，我们构造这个键，使得买方每次获得商品时，卖方都向她收取其全部价值。为了获得收益 r，该构造恰好服务于一个总价值为

r 的上尾部。通过以下方式选择其截断值 b

$$\int_{[b,\infty)} v\, dF(v) = r. \tag{A.3}$$

取满足条件的最小截断值。存在有限的 $b > p^*$ ：尾部价值积分是连续的，趋于零，并且在 p^* 处大于 r，两者之差为正积分 $\int_{[p^*,\infty)}(v - p^*)\ dF(v)$。该尾部的质量为 $r/p^* > 0$，且在 p^*处没有原子。令 $L = 1 - r/b$。由于 p^* 是唯一的垄断价格，且 $b > p^*$,

$$F(p^*) = 1 - \frac{r}{p^*} < L < F(b).$$

我们选择 v_0，使先验分布在其上方的质量为 r/b。在每个条件分布中取相同的尾部质量时，严格介于 v_0 和 b 之间的价格至多带来 r的收益。令引理 A1 中的划分从 $b_0 = b$ 开始。第一次向下取步长得到端点 $v_0 = F^{-1}(L)$，它位于 (p^*, b) 内，并且由连续性可知满足 $F(v_0) = L$。

在每个条件分布中，将概率 r/x 分配给顶部取值 $x \geq b$，使得仅向价值为 x 的买方销售可获得 r。保留下方区间I_j（定义如下）的原有质量，总计为 L。将剩余概率 $r/b - r/x$ 分配给 (v_0, b) 内的单一取值。这三个概率之和为一。

定义键。对于 $x \geq b$，定义累积分布函数

$$B(x) \coloneqq \frac{1}{r}\int_{[b,x]} v\, dF(v), \qquad M(x) \coloneqq \frac{r}{b}B(x) - F(x) + F(b).$$

两个函数均连续且单调不减，其增量为

$$dB(x) = \frac{x}{r}dF(x), \qquad dM(x) = \left(\frac{x}{b} - 1\right) dF(x).$$

此外， $B(\infty) = 1$，而 $M(\infty) = F(b) - L$是中间区域（v_0， b）的概率。

在下文中使用此划分的正概率区间 $I_j = (\alpha_j,\ \beta_j)$ v_0。由于 v_0 已经是一个端点，因此无需切分任何区间。直接定义键为

$$g(v) \coloneqq \begin{cases} \dfrac{F(v) - F(\alpha_j)}{F(\beta_j) - F(\alpha_j)}, & v < v_0,\ v \in I_j, \\ B(M^{-1}(F(v) - L)), & v_0 < v < b, \\ B(v), & v \geq b,\ B(v) < 1. \end{cases} \tag{A.4}$$

验证均匀性和条件分布。令 $p(k) = B^{-1}(k)$，并取博雷尔集$S \subset (0,1)$ 和 $T \subset [0, \infty)$。连续累积分布函数 B将无原子

测度 $dB = (v/r)dF(v)$ 映射为 $(0,1)$ 上的勒贝格测度 dk，且 $B^{-1}(B(v)) = v$ 对 dB-几乎处处的 v成立。消去权重 v/r 可得

$$\Pr(v \geq b,\ g(v) \in S,\ v \in T) = \int_S \mathbf{1}\{p(k) \in T\} \frac{r}{p(k)}\, dk.$$

在 $v_0 < v < b$ 上，$F(v) - L$ 的未归一化分布是 $(0, F(b) - L)$ 上的勒贝格测度。因此，$x = M^{-1}(F(v) - L)$ 的未归一化分布为 dM，且 $M(x) = F(v) - L$ 几乎必然成立。由于 $dM = (r/b - r/x)dB$ 相对于 dB 绝对连续，因此在 dM 下，$B^{-1}(B(x)) = x$ 也几乎必然成立。结合 $k = B(x)$，我们于是有 $x = p(k)$，原始值几乎必然为 $F^{-1}(L + M(p(k)))$。现在将 B 应用于 x 的分布，得到

$$\Pr(v_0 < v < b,\ g(v) \in S,\ v \in T) = \int_S \mathbf{1}\{F^{-1}(L + M(p(k))) \in T\} \left(\frac{r}{b} - \frac{r}{p(k)}\right) dk.$$

由连续性可知，对 $0 < k < 1$ 有 $B(p(k)) = k$，这意味着 $(b, p(k)]$ 和 $(p(k), 1)$ 中都具有正的 F-测度，因此 $p(k) > b$。由于 $dM(x) = (x/b - 1)dF(x)$，我们有 $0 < M(p(k)) < F(b) - L$。因此，中间原子严格位于 (v_0, b) 内，且其权重 $r/b - r/p(k)$ 为正。每个下方区间贡献的质量，等于其原始概率乘以满足以下条件的密钥的勒贝格测度：在 S 中，根据引理 A1 恢复的值落在 T 内。取 $T = [0, \infty)$ 后，各密度之和为一，因此 k 服从均匀分布。每个下方区间有一个原子，v_0 以上有两个原子，因此条件分布具有可数支撑。价格 $p(k)$ 是可测的。

验证价格最优性和支付。对于几乎所有键 k，条件分布中的最大估值为 $p(k)$，其概率为 $r/p(k)$，因此以 $p(k)$定价可获得 r，且消费者剩余为零。

对于 $q < v_0$，每个下方区间 I_j 都保留其原始质量，且 v_0以上的总质量为 $1 - F(v_0) = r/b$。因此，任意下方区间左端点 α_j 以上的条件尾部质量仍为 $1 - F(\alpha_j)$。于是引理 A1 中的界仍然适用；对于端点，按照该引理从下方取价格即可。对于其余价格，

$$\begin{aligned} q \Pr(v \geq q \mid k) &\leq q\, r/b \leq r && (v_0 \leq q < b), \\ q \Pr(v \geq q \mid k) &= q \frac{r}{p(k)} \mathbf{1}\{q \leq p(k)\} \leq r && (q \geq b). \end{aligned}$$

由于没有下方区间 I_j 跨越 p^*，且 v_0 以上的原始质量保持不变，因此 $p^* \Pr(v \geq p^* \mid k) = r$ 也同样成立。 □

A.3 以最低收益实现效率的一个键

引理 *3* 的证明。选择截断值和混合权重。对于候选截断值 $a \in [0, p^*]$和低估值 $0 \le \ell < a$，令 $m := 1 - F(a)$；将概率 $m\ell/r$ 分配给下文构造的高估值成分后，其对收益的贡献为 p^*，等于以价格 ℓ以概率一销售所得的收益 ℓ。

为保留原有的低价值质量 $dF(\ell)$，按其对应低值索引的密钥的测度必须具有质量元素 $dF(\ell)/(1 - m\ell/r)$：每个与 ℓ 配对的密钥仅将 $1 - m\ell/r$ 的比例分配给该值。因此，对于 $0 \le a \le p^*$，低值密钥所需的总概率为

$$A(a) := \int_{[0,a)} \frac{dF(v)}{1 - v[1 - F(a)]/r}. \tag{A.5}$$

对于 $a < p^*$，分母在 $[0, a)$ 上严格为正，因为 $a[1 - F(a)] < r$。对于$a_0 \in (0, p^*)$，取 $0 < \epsilon < \min\{a_0, p^* - a_0\}$ 足够小，使得 $(a_0 + \epsilon)[1 - F(a_0 - \epsilon)] < r$。这为 $v < a$ 上的分母提供了一个共同的正下界，其中 $|a - a_0| < \epsilon$。对于 $v \ge a$，将被积函数延拓为零；除 $v = a_0$ 外，它们逐点收敛，而该点的概率为零，因此由控制收敛可得连续性。当 a 趋近于零时，$A(a) \le F(a)/(1 - a/r)$ 对于 $a < r$成立，而该值趋于零。

通过对 $v < p^*$ 上可能为无穷的积分定义 $A(p^*)$。由于 $a \uparrow p^*$ 扩展后的被积函数在每个 $v < p^*$ 处都收敛，Fatou 引理给出 $\liminf_{a \uparrow p^*} A(a) \ge A(p^*)$。若 $A(p^*) \le 1$，则选择$a = p^*$：在几乎每个未配对的密钥处，发布 p^* 后以概率 1 进行交易。否则，选择一个更低的截断值，使得与低值配对的密钥用尽所有可用质量。Fatou 界给出某个 $c < p^*$，满足 $A(c) > 1$。由连续性，$A(a) = 1$ 在 $[0, c]$ 中的解构成一个非空闭集，因此选择其中最小的元素。最小解为正，因为当 $a \downarrow 0$ 时，$A(a) \to 0$。

构造条件混合分布。对于选定的截断值，令 $m := 1 - F(a)$，并令$\gamma := m/r$。于是 $\gamma a \le 1$。令 $H := \mathcal{L}(v \mid v \ge a)$。其垄断收益为 $r/m = 1/\gamma$，其唯一的垄断价格仍为 p^*。至少为 a 的价格所产生的收益，是其原始收益除以 m；而价格为 $p < a$ 时可获得 $p < a \le r/m$。分布 H 是无原子的，因此引理 A1 给出一个均匀密钥 $h(v)$，满足 H。对于几乎每个秩 η，在 H 下给定 $h(v) = \eta$ 的条件分布具有垄断收益 $1/\gamma$，并在 p^* 处达到。

对于每个低价值 $\ell < a$，考虑如下形式的条件分布

$$(1 - \gamma\ell)\delta_\ell + \gamma\ell\widetilde{H}_\ell. \tag{A.6}$$

~这里， δ_ℓ 是在 ℓ处的点质量，而 H_ℓ 是条件分布 $\mathcal{L}(v \mid v \geq a,\, h(v) = \eta)$之一，对应于具有以下性质的秩 η。该秩将在下文指定。对于任意价格 $q \leq \ell$，买方以概率 1 购买，因此收益至多为 ℓ，并在 ℓ处取等。对于 $q > \ell$，只有高价值成分能够产生销售，其对收益的贡献满足

$$\gamma\ell\, q\, \widetilde{H}_\ell([q,\infty)) \leq \gamma\ell\, \rho(\widetilde{H}_\ell) = \ell.$$

~在 p^* 处等式同样成立，因为 $p^* \geq a > \ell$ 且 p^* 在 H_ℓ下使收益最大化。定义键。对于 $0 \leq v \leq a$，令

$$E(v) \coloneqq \int_{[0,v)} \frac{dF(w)}{1-\gamma w}, \qquad D(v) \coloneqq E(v) - F(v) = \int_{[0,v)} \frac{\gamma w}{1-\gamma w} dF(w).$$

因此， $E(a) = A(a)$，且 $D(a) = A(a) - F(a) \leq m$。函数 $D(v)$给出了使低值低于 v时所需匹配的高价值质量。在匹配的高价值分支上， D^{-1}将未归一化高价值秩映射到相应的低值，而 E 为相应的低值分配一个键。利用 h，定义

$$g(v) \coloneqq \begin{cases} E(v), & v < a,\ E(v) < 1, \\ E(D^{-1}(mh(v)))\,, & v \geq a,\ mh(v) < D(a), \\ mh(v) + F(a), & v \geq a,\ mh(v) \geq D(a). \end{cases} \tag{A.7}$$

验证均匀性和条件分布。在高值区域上设 $\eta = h(v)$，并在 $0 < k < A(a)$上设 $\ell(k) = E^{-1}(k)$。将引理 A1给出的条件分布写作 $H_\eta = \mathcal{L}(v \mid v \geq a,\ h(v) = \eta)$。由于即使在 $a = p^*$、E 和 D 是有限无原子测度的连续累积分布函数时， $E(a) = A(a) \leq 1$ 仍成立。因此， $0 < \ell(k)$在$(0, A(a))$上 $< a$ 。连续累积分布函数 E 将 dE 映射到$(0, A(a))$上的勒贝格测度 dk ，并且对于 dE-几乎处处的 v， $E^{-1}(E(v)) = v$。因此，对于博雷尔 $S \subset (0, A(a))$和 $T \subset [0,\infty)$，利用 $dF = (1-\gamma v)dE$可得

$$\Pr(v < a,\ g(v) \in S,\ v \in T) = \int_S \mathbf{1}\{\ell(k) \in T\}(1 - \gamma\ell(k))\, dk.$$

如果 $D(a) > 0$，则在匹配的高价值分支上， $m\eta$ 的未归一化分布是 $(0,\ D(a))$ 上的勒贝格测度。映射 D^{-1} 将该测度映射为 $dD = \gamma v\, dE$，而 E 随后将其映射为 $\gamma\ell(k)\, dk$。由于 $D(D^{-1}(m\eta)) = m\eta$ ，并且根据相对于 dE 的绝对连续性，在 dD 下通过 E^{-1} 进行恢复同样成立，因此原始秩在

匹配分支上几乎必然为给定恢复的高价值秩的条件下，得到

$$\Pr(v \geq a,\ g(v) \in S,\ v \in T) = \int_S \gamma \ell(k)\, H_{D(\ell(k))/m}(T)\, dk.$$

映射 $k \mapsto D(\ell(k))/m$ 将 $\gamma \ell(k)\ dk$ 映射到区间 $(0, D(a)/m)$ 上。由于 $\gamma \ell(k) > 0$ 在 $(0, A(a))$ 上成立，因此对几乎所有高秩都成立的性质，在该区间内几乎对所有键都成立。若 $D(a) = 0$，则该分支为空。取 $T = [0, \infty)$ 可知，这两个~贡献在 $(0, A(a))$ 上的总密度为一；对于一般的 T，它们给出 (A.6)，其中 $H_{\ell(k)} = H_{D(\ell(k))/m}$ 对几乎所有匹配的键 k都成立。

在剩余分支上，由 (A.7) 可得 $k = m\eta + F(a)$。当 $m\eta$ 从 $D(a)$ 变化到 m时，k 从 $A(a)$ 变化到 1，而该分支的质量为 $1 - A(a)$。对于 Borel $S \subset (A(a),1)$，在给定 η 的条件下并代入 $dk = m\, d\eta$，可得 $g(v) \in S$ 和$v \in T$的联合概率为 $\int_S H_{(k-F(a))/m}(T)\ dk$。对于 $T = [0, \infty)$，积分给出 S的长度，从而完成对 k 服从均匀分布的证明。

验证价格最优性和支付。如果 $A(a) < 1$，那么 $a = p^*$。剩余条件分布是根据引理 A1 从上文得到的 H 在给定 $h(v)$ 时的条件分布：对于几乎每个剩余键，它们在 $[a, \infty)$ 上具有可数支撑，并且其垄断价格为 a。对于几乎每个匹配键，条件分布也具有可数支撑：它在 H的可数支撑条件分布上增加一个低估值原子点。定义可测价格 $p(k)$，使得对于 $0 < k < A(a)$，有 $p(k) = E^{-1}(k)$；而对于剩余分支上的 $A(a) \leq k < 1$，有 $p(k) = a$。对于几乎每个键，$p(k)$ 都是一个垄断价格，且不高于条件分布原子集合中的任何估值。

原价格 p^* 对几乎每个键仍然是最优的。因此

$$\mathbb{E}[\rho(\mathcal{L}(v \mid k))] = \mathbb{E}[p^* \Pr(v \geq p^* \mid k)] = p^* \Pr(v \geq p^*) = r. \tag{A.8}$$

买方几乎必然以价格 $p(k)$ 获得一单位商品，因此预期分配价值为 $\mathbb{E}[v]$，预期消费者剩余为 $\mathbb{E}[v] - r$。 □

参考文献

Bergemann, Dirk, Benjamin Brooks, 和 Stephen Morris. 2015. “《价格歧视的局限》。”《美国经济评论》105(3): 921–957. https://doi.org/10.1257/aer.20130848.

Crémer, Jacques, 和 Richard P. McLean. 1988. “《贝叶斯拍卖和占优策略拍卖中的剩余完全提取》。”《计量经济学》56(6): 1247–1257. https://doi.org/10.2307/1913096.

Fallah, Alireza, Michael I. Jordan, Ali Makhdoumi, 和 Azarakhsh Malekian. 2024. “《隐私约束下价格歧视的界限》。” arXiv:2402.08223. https://arxiv.org/abs/2402.08223. He, Kevin, Fedor Sandomirskiy, 和 Omer Tamuz. 2026. “《私人私人信息》。”《政治经济学杂志》134(5): 1561–1606. https://doi.org/10.1086/739833. Ichihashi, Shota. 2021. “《数据外部性的经济学》。”经济理论杂志196: 105316. https://doi.org/10.1016/j.jet.2021.105316. Ichihashi, Shota, 和 Alex Smolin. 2025. “《向知情卖方提供数据》。”博弈与经济行为153: 131–144. https://doi.org/10.1016/j.geb.2025.06.002. Krähmer, Daniel. 2020. “《机制设计中的信息披露与完全剩余提取》。”经济理论杂志187: 105020. https://doi.org/10.1016/j.jet.2020.105020. McAfee, R. Preston, 和 Philip J. Reny. 1992. “《相关信息与机制设计》。”《计量经济学》60(2): 395–421. https://doi.org/10.2307/2951601. Munagala, Kamesh, Yiheng Shen, 和 Renzhe Xu. 2026. “《区间规制价格歧视的界限》。” 收录于《网络与互联网经济学（*WINE 2025*）》，《计算机科学讲义》16266: 90–107. https://doi.org/10.1007/978-3-032-18660-7_6. Myerson, Roger B. 1981. “《最优拍卖设计》。”运筹学数学6(1): 58–73. https://doi.org/10.1287/moor.6.1.58. Rassouli, Borzoo, Fernando E. Rosas, 和 Deniz Gündüz. 2020. “《完美样本隐私下的数据披露》。” *IEEE* 信息取证与安全汇刊15: 2012–2025. https://doi.org/10.1109/TIFS.2019.2954652. Renou, Ludovic, 和 Tristan Tomala. 2012. “《机制设计与通信网络》。”理论经济学7(3): 489–533. https://doi.org/10.3982/TE921. Shen, Weiran, Pingzhong Tang, 和 Yulong Zeng. 2018. “《垄断定价中买方信号方案的闭式刻画》。” 收录于《第*17*届自主智能体与多智能体系统国际会议论文集（*AAMAS*）》，1531–1539. https://www.ifaamas.org/Proceedings/aamas2018/pdfs/p1531.pdf. Strack, Philipp, 和 Kai Hao Yang. 2024a. “《隐私保护信号》。”《计量经济学》92(6): 1907–1938. https://doi.org/10.3982/ECTA22017. Strack, Philipp, 和 Kai Hao Yang. 2024b. “《利用买方信息应对价格歧视》。” 工作论文。https://www.economics.utoronto.ca/conferences/index.php/cetc/2024/paper/viewFile/1845/497. Zhu, Shuguang. 2023. “《多智能体私人披露》。”经济理论杂志212: 105705.https://doi.org/10.1016/j.jet.2023.105705.