arXiv:2611.32080v1 [math.AG] 24 Nov 2026

无爆破映射的消失循环的陈类

XIA LIAO

Abstract. 我们研究无爆破映射的邻近循环与消失循环。对于至多具有孤立完全交奇点的复流形之间的全纯映射，我们证明，陈类中的黎曼–赫尔维茨缺陷由米尔诺数可构造函数的陈类变换所补偿。

1. introduction

可以肯定地说，黎曼–赫尔维茨公式凭借其简洁性、优美性和实用性，是代数几何学生最先学习的定理之一。本文的一项主要成果，是将黎曼–赫尔维茨公式推广到至多具有孤立完全交奇点（孤立完全交奇点）的复流形之间的映射。

回忆一下，全纯映射芽 $g:(\mathbb{C}^m,\ 0)\ \to(\mathbb{C}^n,\ 0)$ 称为在 $0\in\mathbb{C}^m$ 处定义了一个维数为 $m-n$ 的孤立完全交奇点，当且仅当 n 个坐标函数 $g_1,\ \cdots,\ g_n$ 在 $\mathscr{O}_{\mathbb{C}^m,\ 0}$ 中构成一个正则序列，且穿孔纤维 $(g^{-1}(0)\ \setminus 0,\ 0)$ 是光滑的。这等价于以下两个条件中的任意一个:

(1) $\mathscr{O}_{\mathbb{C}^m,\ 0}$ 通过 g^* 是一个平坦的 $\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,\ 0}$-模，且 $(g^{-1}(0)\ \setminus 0,\ 0)$ 是光滑的。(2) $m\geq n$ 和 g 具有有限奇性类型 [26,，参见第 630] 页练习 2。

根据 Hamm [6]（另见 [12]），在 $0\in\mathbb{C}^m$ 处存在一个局部米尔诺纤维化，其光滑纤维 F_0 与球面的花束同伦等价。也就是说，

$$F_0\simeq S^{m-n}\vee\cdots\vee S^{m-n}.$$

若 μ_g 是花束中出现的 $(m-n)$ 维球面的个数，且 χ_g 是 F_0 的拓扑欧拉示性数，则

$$\chi_g=1+(-1)^{m-n}\mu_g.$$

现在考虑复流形之间的全纯映射 $f\colon M\to N$，其中维数为 $M=m$，且维数为 $N=n$。假设对任意 $x\in M$，芽 $f_x:(M,x)\ \to(N,f(x))$ 定义一个维数为 $l=m-n$ 的孤立完全交奇点，因此 x 处的局部米尔诺纤维化产生数值 $\chi_f(x)$ 和 $\mu_f(x)$。作为 M上的函数，χ_f 和 μ_f是可构造的（见 §2.2 和推论 3.7）。此外，令

$$\bar{c}_i(f)=c_i(TM-f^*TN)$$

是映射 f 的虚 Chern 类。令 $c_*(\mu_f)$ 表示可构造函数 $\mu_f:\ M\ \to\mathbb{Z}$ 的陈类变换，或称其陈-施瓦茨-麦克弗森类（CSM类）及米尔诺数。我们将在 §2.2 简要回顾陈类（CSM类）的必要背景。我们的主定理给出了 μ_f 的 CSM类的一个普适表达式:

主定理。令 $f\colon\ M \to N$ 是相对维数为 $l = m - n \geq 0$ 的复流形之间的平坦全纯映射，其纤维至多具有孤立奇点。那么

$$(-1)^l c_*(\mu_f) = \Big(c(f^*TN)\cdot(1+\bar{c}_1(f)+\cdots+\bar{c}_l(f)) - c(TM)\Big)\cap[M] \qquad (*)$$
$$= \Big(-c(f^*TN)\cdot\sum_{i=l+1}^{\infty}\bar{c}_i(f)\Big)\cap[M].$$

注 1.1. 事实上，*Toru Ohmoto* 早在二十年前研究映射奇点的高阶 *Thom* 多项式时，就基于其等变 *CSM* 类理论猜想了这一公式，详情见 [17, 18, 19] 。特别地，函数μ_f 的高阶 *Thom* 多项式，是与该映射相关的虚 *Chern* 类的幂级数形式下 *Segre-Schwartz-MacPherson* 类的通用表达式：

$$tp^{\mathrm{SM}}(\mu) = (-1)^{l+1}(1+c_1+c_2+\cdots)(\bar{c}_{l+1}+\bar{c}_{l+2}+\cdots).$$

上述定理证实了这一表达式。

由于

$$\bar{c}_i(f) = 0$$

对于 $i \geq l+1$，当 f 处处为淹没时，公式右侧的直观含义是用源空间和目标空间的陈类来衡量映射 f 未能处处成为淹没映射的程度（若 f 是适当映射，则即为未能处处构成 C^∞ 纤维丛）。粗略地说，

$$c(f^*TN)\cdot(1+\bar{c}_1(f)+\cdots+\bar{c}_l(f))$$

可以看作底空间与一般纤维的陈类之积。随后，这个等式通过米尔诺数可构造函数的陈类变换来表达这种失效。

推论 1.2 ([16])。如果 M 和 N 也都是紧的，那么

$$(-1)^l\int\mu_f = \chi(N)\chi(F) - \chi(M)$$

其中 F 是一般纤维，χ 是拓扑欧拉示性数。

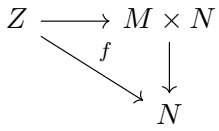
证明。对等式 (∗) 取次数，得到

$$(-1)^l\int\mu_f = c_n(TN)\cap f_*(\bar{c}_l(f)\cap[M]) - \chi(M).$$

令 $f_*(\bar{c}_l(f)\cap[M]) = d[N]$。将此等式限制到 N 的一个开子集上，在该子集上，f 是以 F 为纤维的平凡丛，于是得到 $d = \chi(F)$。推论立即得证。□

当 $m = n = 1$ 时，这个推论就成为经典的 Riemann-Hurwitz 公式，因为$\chi(F) =$ deg f，并且在任意 $x \in M$ 处都有 $\mu_f(x) = e_x - 1$，其中 e_x 是分歧指数。因此，我也将等式 (∗) 右侧称为陈类中的 Riemann-Hurwitz 缺陷。

主定理证明中最关键的一步，是构造 χ_f在 $T^*(M\times N)$ 中的特征循环，其中 χ_f通过图嵌入 $M \to M\times N$ 被视为定义在 $M\times N$ 上的可构造函数。若将奇异空间也允许作为 f 的源空间，那么在更广阔的背景下理解这一构造会更为清晰。从现在起，设 Z是 $M\times N$ 中的闭不可约解析子集，并设 $f\colon Z \to N$ 是由投影 $M\times N \to N$诱导的映射。假设 f是开映射，并且在适当意义下满足无爆破条件（见定义 2.5）。在新的设定中，我们不再假设 $m \geq n$。



为了在 Z上定义可构造函数 $\mathrm{Eu}_f^\vee$，我们需要无爆破条件。这个函数最初由 Sabbah 在 [23] 中、当 $\dim N = 1$时引入，随后又在[22] 中于其他条件下引入。当 Z 是一个平坦全纯映射 $f\colon M \to N$的图，且该映射至多具有孤立完全交奇点时，我们有 $\chi_f = (-1)^{m-n}$ $\mathrm{Eu}_f^\vee$。为了说明 $\mathrm{Eu}_f^\vee$是什么，设 Z° 是 Z 中满足 Z 光滑且 df 的秩为 n的 Zariski开子集。我们将相对余法空间 T_f^*M与 f 关联起来；它是以下集合在 $T^*M \times N$中的闭包

$$\{(x,\alpha,y) \mid (x,y) \in Z^\circ \text{ and } \alpha \in T_x^*M \text{ is conormal to the fibre } f^{-1}(f(x,y)) \subset M\}.$$

将 $\mathrm{Eu}_f^\vee(z)$ 定义为 $z \in Z$处局部距离函数的微分图在 $T^*(M \times N)$ 中与循环 $[T_f^*M]$ 的局部交数，并乘以符号因子 $(-1)^n$ 进行修正。这个定义本质上与 [22]，中给出的定义相同，但我们选择稍作不同的表述，以强调它与特征循环理论中一个众所周知的构造之间的类比：通过类似的交数，从锥形拉格朗日循环构造出可构造函数。除非在非常特殊的情形下，$[T_f^*M]$ 并非锥形拉格朗日循环，但关键在于，我们可以通过有限次法锥变形运算，将 $[T_f^*M]$ 变形为锥形拉格朗日循环，同时保持所关注的局部交数不变。

定理 1.3（命题 3.5 和命题 3.6）。 假设 f 在余维0处无爆破。 $[T_f^*M]$与锥形拉格朗日循环 L在 $T^*(M \times N)$ 中等价，即它们都是 $T^*(M \times N)$ 中某个循环解析族的成员。特别地， $[T_f^*M]$与 L同调等价。 $M \times N$上与 L 对应的可构造函数是 $(-1)^n\mathrm{Eu}_f^\vee$。

余维 0 处无爆破条件（见定义 2.1）比上文提到的无爆破条件弱。较弱的条件足以保证变形的存在以及局部交数的不变性。严格来说，在较弱条件下我们总能定义可构造函数 $\mathrm{Eu}_f^\vee$，但要赋予 $\mathrm{Eu}_f^\vee$拓扑意义，则需要较强的条件。

例 1.4. [23, 定理 4。5] 当 维数 $N = 1$时，存在一个局部有限族（可能为空），由不可约解析子集 $Z_i \subset Z$ 和正整数 m_i组成，使得 f 在每个 Z_i 上均为常数，并且

$$\mathrm{Eu}_f^\vee = -\mathrm{Eu}_Z^\vee + \sum_i m_i \mathrm{Eu}_{Z_i}^\vee$$
$$-[T_f^*M] \sim -[T_Z^*(M \times N)] + \sum_i m_i [T_{Z_i}^*(M \times N)],$$

其中 $\sim$ 表示，两侧的循环可以包含在由 $\mathbb{P}^1$参数化的 $T^*(M \times N)$ 中的解析循环族内。该解析族由法锥变形生成。这一等价性是证明 [10]中的全纯交公式的关键要素。

致谢。 我谨向 Toru Ohmoto 致以最深切的谢意。2015年，我是高等研究院的博士后研究员。对未来的不确定感使我陷入了深度抑郁。2015年年底前后的一天，我查看了电子邮件——这是一个完全正常的行为，但抑郁症使我数月无法进行这件事——并发现了一封 Ohmoto 邀请我参加会议的邮件。尽管由于我的延误，会议已经结束了，他还是再次邀请我去拜访他。2016年3月我在北海道与他相处期间，他将自己的手稿交给了我，其中包含以猜想公式形式给出的主定理，以及在更强条件下的拓扑证明；他鼓励我寻找代数证明。该手稿中的部分材料现发表于 [19, §4.2.2]。这一公式激发了我过去十年的研究。2022年，我写了一份手稿，其中包含了本文所呈现的大部分数学内容，但由于卡在两个技术引理的证明上，我一直将其私下保存。这个缺口由 ChatGPT 6.0 弥补了，它给出了引理 3.4 和引理 3.9 的证明。我还要感谢 J¨org Schurmann 和 Claude Sabbah，在本工作的各个阶段给予我的宝贵意见和鼓励。作者受到中国国家自然科学基金（项目编号11901214）的资助。

2. PERLIMINARIES

2.1. 无爆破条件。我们汇集了有关无爆破条件的必要背景知识。本小节的基本参考文献为 [7, 21, 23]。

设 M 是一个复流形， S 是一个既约解析空间， Z 是 $M \times S$ 的一个闭解析子集。投影 $\pi\colon M \times S \to S$ 诱导出一个映射 $f\colon Z \to S$。

$$\begin{array}{ccc} Z & \longrightarrow & M \times S \\ & \searrow^{f} & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ & & S \end{array}$$

我们始终假设存在 Z 的一个扎里斯基开稠密子集 Z°，使得 $f|_{Z^\circ}$ 是光滑的，且具有 d 维纤维。根据纤维维数的上半连续性，我们知道，对于任意 $x \in Z$，$\dim\ f^{-1}f(x) \geq d$。我们将相对余法空间 $T^*_f M$ 定义为逐纤维余法丛 $T^*_{f|_{Z^\circ}} M$ 在 $T^*M \times S$ 中的闭包。集合 $T^*_f M$ 是 $T^*M \times S$ 中的闭解析子集；若 Z 不可约，则该集合也不可约。若 S 是一个点，该集合就简记为 $T^*_Z M$。令 $\tau_f\colon T^*_f M \to Z$ 为由 $T^*M \times S \to M \times S$ 诱导的自然投影。

定义 2.1 ([7, 定义 4.1.1])。 *f 若复合映射 $f \circ \tau_f\colon T^*_f M \to S$ 的所有非空纤维维数均为 m，则称其在余维 0 处无爆破。*

定义 2.1 是对 [7] 中原始定义的修改。事实上，原始定义要求映射 f 满射到 S 上。在我们的设定中， f 的像不一定是 S 的解析子集。然而，由于该定义显然蕴含对所有 $x \in Z$ 都有 $\dim\ f^{-1}f(x) = d$，根据雷默特秩定理， f 的局部像是 S 的局部闭解析子集 [11, p.295], 因此，采用这一修改后的定义来涵盖稍微一般一些的情形并无妨碍。此外，将纤维维数的上半连续性应用于 $f \circ \tau_f$，该定义还蕴含 $f \circ \tau_f$ 的所有纤维均为纯维数 m。

余维零处无爆破这一条件在基变换下保持稳定。设 $h\colon\ S' \to S$是一个全纯映射。考虑下面的纤维积方块，其中假设 f 在余维 0 处无爆破。

$$\begin{array}{ccc} T_f^*M \times_S S' & \longrightarrow & T_f^*M \\ \downarrow{\scriptstyle \tau_f'} & & \downarrow{\scriptstyle \tau_f} \\ Z \times_S S' & \longrightarrow & Z \\ \downarrow{\scriptstyle f'} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ S' & \xrightarrow{\quad h \quad} & S \end{array}$$

命题 2.2。 [7, 推论 4.2。1] 设 Γ 是 $T_f^*M \times_S S'$的一个不可约分支。则 Γ 可识别为映射 $\tau_f'(\Gamma) \to S'$的相对余法空间。

就本文而言，最有趣的情形是 S' 为单点集。设Γ 是 $(f \circ \tau_f)^{-1}(s)$的一个不可约分支，其中 s 是 S中的任意一点。该命题表明， Γ 是 $\tau_f(\Gamma)$的绝对余法空间。证明 $(f \circ \tau_f)^{-1}(s)$ 是锥形拉格朗日的另一种方法，是应用 [28,命题 1.2.6]中的拉格朗日特化原理。

余维 0 处无爆破这一条件在法锥变形下也以如下意义保持稳定。当 S是一个复流形时，$T_Z^*(M \times S)$ 和 $M \times T^*S$都是 $T^*(M \times S)$ 的解析子集。设 $\mathscr{C}(Z, S)$ 是.....的正规锥

$$\Big(M \times T^*S\Big) \cap T_Z^*(M \times S)$$

$T_Z^*(M \times S)$ 中的。

命题 2.3。 [23, 命题 3。3] 假设 f 余维零处无爆破，且 S 是一个复流形。设 $\mathscr{C}_i$ 是 $\mathscr{C}(Z, S)$ 的一个不可约分支，并设 Z_i 是其在 Z中的像。则 $f|_{Z_i}$ 余维零处无爆破，且 $\mathscr{C}_i \cap (T^*M \times S) = T^*_{f|_{Z_i}} M$。此外，对于任意 $x \in Z_i$，若我们缩小 Z_i，使其经 f 映射后的像成为 S中的一个局部闭解析子集 T_i，则 $\mathscr{C}_i$ 可在局部识别为 $T^*_{f|Z_i}M \times_{T_i} T^*_{T_i}S$中支配 Z_i的唯一不可约分支。

注 2.4. 命题的最后一个断言意味着， Z_i 是 Z 的解析子集的局部有限族，且不同的 $\mathscr{C}_i$ 投影到不同的 Z_i。

定义 2.5 ([21, 27])。 我们称映射 $f: Z \to S$ 没有爆破，若 Z 具有一个满足惠特尼条件且任意一对相邻层之间满足 *Thom* a_f 条件的分层。

Lˆe 将这种分层称为 [27, p.398]，中的良好分层，但他只考虑了 $S = \mathbb{C}$ 的情形，其他作者并未采用这一术语。例如，在 [7] 中，良好分层指满足下文命题 2.6 条件的分层。我们沿用 Sabbah 在 [21] 中的术语。不过，Sabbah 要求

(1) f 是分层的。(2) S 的分层是惠特尼正则的。(3) Z 的相邻层对满足 Thom a_f 条件。(4) 只有 Z 中位于 S 同一层之上的相邻层对才满足惠特尼条件。

这是因为 Sabbah 考虑的是局部于 S 的消失循环理论，因此需要满足条件以应用第二各向同性引理；而我们主要关注 Z，所以无需了解 S 的分层。换言之，我们选择将 Lˆe 的

条件嫁接到 Sabbah 的术语中。根据以下结果，无爆破意味着余维 0 处无爆破。

命题 2.6。 [7, 定理 7.1.1，等价条件 (a) 和 (c)] 映射 f 在余维 *0* 处无爆破，当且仅当 Z 具有一个分层，使得 f 在每个层上具有常余秩，并且对于任意层 Z_i，若其闭包是 Z的一个不可约分支，则对任意Z_α 满足 $Z_\alpha \subset Z_i$，对偶 (Z_i, Z_α) 满足 *Thom* ^{a_f} 条件。

注 *2.7.* 在这两种情形下，无论 f 无爆破还是在余维 *0* 处无爆破， Z上的分层都会在任意纤维 $f^{-1}(s)$ 上诱导出一个分层，其中任意 $s \in f(Z)$，记为$f^{-1}(s) = \cup_\alpha S_\alpha$。在较弱的余维 *0* 处无爆破条件下，我们已经可以推出 $|(f \circ \tau_f)^{-1}(s)| = \cup_\alpha T^*_{S_\alpha} M$。如果 f无爆破，则可以推出 $\{S_\alpha\}$是 *Whitney* 分层。对于任意 $z \in f^{-1}(s)$，我们可以找到一个以 z为中心的小球 $B_\epsilon \subset M$，使得 ∂B_ϵ 与每个层 S_α横截。于是 *Thom*^{a_f} 条件保证∂B_ϵ 也与 $f^{-1}(s')$的分层横截，其中 s' 包含在以 $f(z)$为中心的充分小球 B_η 内。

例 2.8. *(i)*：全纯映射 $f : Z \to \mathbb{C}$ 若其限制在 Z 的任意不可约分支上都非常数，则根据 [27]，它没有爆破。*(ii)*：主定理中的全纯映射没有爆破。事实上，M 的任意 *Whitney* 分层，只要临界空间 $C(f)$是若干层的并，且 $M \setminus C(f)$是一个层，就满足定义 *2.5* 的要求。由于 $f|_{C(f)}$ 的纤维是离散的，只要 $S_\alpha \subset C(f)$， $f|_{S_\alpha}$ 的纤维也都是离散的。因此，*Thom* ^{a_f} 条件显然成立。

2.2. **局部欧拉障碍与陈类变换**。 在复代数簇范畴中（该范畴的态射是代数簇之间的适当态射），我们可以考虑两个函子。它们分别是函子 F（将可构造函数群赋给一个簇）以及 Borel-Moore 同调函子H_*。MacPherson [13]引入了陈类变换，它是一个自然变换 c_*：$F \rightsquigarrow H_*$。随后，这一理论在 [8]，中被推广到特征 0 的代数闭域上的代数簇，并在 [9]中被推广到可嵌入复流形的复解析空间。下面列出可构造函数演算中的几个核心定义。关于可构造函数和特征循环理论的一般参考文献见 [25, 15]。

令 M 为一个 m维复流形。

定义 2.9。 一个（锥形）拉格朗日循环是一个求和式

$$\sum_i a_i [T^*_{Z_i} M]$$

其系数为整数，其中 Z_i是 M的闭不可约解析子集的局部有限族。该求和式被视为 H_{2m}（$\bigcup_i T^*_{Z_i} M$）中的一个元素。

定义 2.10。 设 Z 为一个复解析空间。 Z 上的构造函数 α 是一个取整数值的函数 α：$Z \to \mathbb{Z}$，满足对于任意 $k \in \mathbb{Z}$， α^{-1}（k）是 Z 的一个可构造子集。

令 Z 为 M的一个不可约闭解析子集。对于任意 $z \in Z$，在 M中取一个以 z为中心、坐标为 z_1，……， z_m的坐标邻域。令 r 为平方欧氏距离函数，即 $r(z) = |z_1|^2 + \ldots + |z_m|^2$。由应用于 Z的分层的Whitney (b)条件，

$$dr(B_\epsilon) \cap T^*_Z M = (z, 0) \in T^* M$$

每当 $0 < \epsilon \ll 1$。这里 $dr(B_\epsilon)$ 是 dr在 B_ϵ 上的图，视为 T^*M 的子集。

定义 2.11。 对偶局部欧拉障碍 $\mathrm{Eu}_Z^\vee$ 是 Z 上的可构造函数，其在 z 处的值为局部交数

$$\#_z\Big([dr(B_\epsilon)]\cap[T_Z^*M]\Big).$$

该值与上述所作的所有选择无关。局部欧拉障碍 Eu_Z 定义为

$$\mathrm{Eu}_Z=(-1)^{\dim Z}\mathrm{Eu}_Z^\vee.$$

注 2.12。 $dr=2\sum_i(x_idx_i+y_idy_i)$ </style}是实余切丛的一个局部截面。通过遗忘复结构，将余法空间 视为实余切丛的子集。交乘积要求指定定向。、和 的定向均为规范的复定向。拓扑交的详细含义见 第286]页。

注 2.13。 $\mathrm{Eu}_Z^\vee(z)=(-1)^{\dim Z}$，如果 z是 Z上的非奇异点。

A任意可构造函数 α 在 M 上都可唯一表示为一个局部有限和

$$\alpha=\sum_i a_i\mathrm{Eu}_{Z_i}^\vee M$$

其中， $a_i\in\mathbb{Z}$ 和 Z_i分别是M的一个局部有限族的不可约闭解析子集。因此，对于每个可构造函数 α ，我们可以关联一个特征循环

$$\mathrm{CC}(\alpha)=\sum_i a_i[T_{Z_i}^*M].$$

反过来，对于任意拉格朗日循环 L，我们可以关联一个可构造函数 $\mathrm{Eu}^\vee(L)$，其在 z 处的取值为

$$\mathrm{Eu}^\vee(L)(z)=\#_z\Big([dr(B_\epsilon)]\cap L\Big).$$

这两个构造互为逆运算，即对于任意可构造函数 α，$\mathrm{Eu}^\vee(\mathrm{CC}(\alpha))=\alpha$。

令 $\pi_M\colon\mathbf{P}(T^*M)\to M$为投影，并令

$$0\to\xi_M\to\pi_M^*T^*M\to\zeta_M\to0$$

为 $\mathbf{P}(T^*M)$ 上的欧拉正合列，其中 ξ_M为典范子丛， ζ_M为典范商丛。 α的陈类变换记作 $c_*(\alpha)$，可由下式计算：

$$c_*(\alpha)=(-1)^m(\pi_M)_*\Big(c(\zeta_M^\vee)\cap\mathbf{P}(\mathrm{CC}(\alpha)\oplus1)\Big).$$

3. Characteristic cycles for relative dual Euler obstructions

3.1. 相对对偶局部欧拉障碍。令 $f\colon Z\to N$ 为一个全纯映射。假设 f 是开映射，且余维零处无爆破， N 是一个复流形，并且 f 经由 $M\times N$分解。任取一点 $z\in Z$。与局部欧拉障碍的定义一样，我们建立一个以 $z=$为中心的局部坐标系 x， y，其坐标为 $(z_1,\ldots\ldots,z_m,\ w_1,\ldots\ldots,\ w_n)$。令 $r_M=|z_1|^2+\cdots+|z_m|^2$、 $r_N=|w_1|^2+\cdots+|w_n|^2$和 $r=r_M+r_N$。此外，令 B_ϵ， B_η为 M、 N中分别以 x、 y为中心的充分小开球。

定义 3.1. 相对对偶局部欧拉阻碍是函数 $\mathrm{Eu}_f^\vee\colon\ Z\to\mathbb{Z}$，其定义如下：

$$\mathrm{Eu}_f^\vee(z)=(-1)^n\cdot\#_{(x,y)}\Big([dr(B_\epsilon\times B_\eta)]\cap[T_f^*M]\Big).$$

由于交乘积中的两个循环的实维数均为 $2(m+n)$，而环境空间 $T^*(M\times N)$ 的实维数为 $4(m+n)$，因此只要能够证明对于充分小的正数 ϵ，η，局部交数就有定义，

$$dr(B_\epsilon\times B_\eta)\cap T_f^*M=\{z\}.$$

设 $(x',\ y',\ \alpha,\ \beta)\in T_f^*M$ 为满足 $\alpha\in T_{x'}^*M$ 和 $\beta\in T_{y'}^*N$ 的任意点。根据 T_f^*M 的定义，我们必然有 $\beta=0$。因此，如果 $(x',\ y',\ \alpha,\ \beta)$ 也位于 $dr(B_\epsilon\times B_\eta)$ 上，则必然有 $y'=0\in B_\eta$。所以 $(x,\ \alpha)\in(f\circ\tau_f)^{-1}(y)$，根据命题 2.2，后者是 T^*M 中余法空间的局部有限并。因此，根据定义 2.11 之前的段落，$x'=0$ 且 $\alpha=0$。

将 N 替换为 $f(Z)$ 后，我们可以假设 f 是满射的。根据 [2, 推论 4.3，13] 以及余维零处无爆破的假设，映射 $f\circ\tau_f$ 定义了一个由 N 参数化的循环的解析族。将位于 $y\in N$ 上的循环记为 $[T_f^*M]_y$。根据命题 2.2，它是一个锥形拉格朗日循环。

Prop命题 3.2. 若 $f:Z\to N$ 是开映射且在余维 n 处无爆破，则

$$\mathrm{Eu}_f^\vee(z)=\mathrm{Eu}^\vee([T_f^*M]_y)(x)$$

证明。为简化记号，我们可以将 r_M 视为定义在 B_ϵ 上的函数，并将 r_N 视为定义在 B_η 上的函数。因此，$dr_M\colon B_\epsilon\to T^*M$ 是 T^*M 的局部截面，而 $dr_N\colon B_\eta\to T^*N$ 是 T^*N 的实局部截面。我们需要证明

$$(-1)^n\cdot\#_{(x,y)}\Big([dr(B_\epsilon\times B_\eta)]\cap[T_f^*M]\Big)=\#_x\Big([dr_M(B_\epsilon)]\cap[T_f^*M]_y\Big).$$

由投影公式可得

$$\begin{aligned}\#_{(x,y)}\Big([dr(B_\epsilon\times B_\eta)]\cap[T_f^*M]\Big)&=\#_{(x,y)}\Big([dr_M(B_\epsilon)\times dr_N(B_\eta)]\cap[T_f^*M]\Big)\\&=\#_{(x,y)}\Big([dr_M(B_\epsilon)\times B_\eta]\cap(dr_N)^*[T_f^*M]\Big).\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc}(f\circ\tau_f)^{-1}(y) & \longrightarrow & T_f^*M\\ \downarrow & & \downarrow\\ \{y\} & \longrightarrow & N\\ \downarrow & & \downarrow\\ B_\eta & \xrightarrow{dr_N} & T^*N\end{array}$$

考虑上方的笛卡尔图。若我们在局部用 $d\omega_1,\cdots,d\omega_n$ 将 T^*N 平凡化，并通过取复化微分形式的实部，将全纯余切丛与实余切丛等同，则 $dr_N=\sum\bar\omega_i d\omega_i$，因此

$$dr_N(B_\eta)\cap[N]=(-1)^n[y].$$

这里，交数 $(-1)^n$ 是映射 $dr_N\colon\mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{R}^{2n}$ 的雅可比矩阵的行列式，用复变量表示为 $(\omega_1,\cdots,\omega_n)\mapsto(\bar\omega_1,\cdots,\bar\omega_n)$。因此可得

$$(dr_N)^*[T_f^*M]=(-1)^n[T_f^*M]_y$$

命题的表述得证。 □

现在假设 $f\colon Z \to N$ 没有爆破。由注 2.7 可知，这意味着我们可以找到 $0 < \eta \ll \epsilon \ll< 1$，使得对于任意 $y' \in B_\eta$，∂B_ϵ 都横截于纤维 $f^{-1}(y')$ 的诱导分层。如果将 $f^{-1}(y)$ 的分层记为 $\{T_\beta\}$，则

$$dr_M(\partial B_\epsilon) \cap \Big(\bigcup_\beta T^*_{T_\beta} M \Big) = \emptyset.$$

命题 3.3。若 $f\colon Z \to N$ 是开映射且无爆破，则有

$$\begin{aligned} \mathrm{Eu}^\vee_f(z) &= \#_x \Big([dr(B_\epsilon)] \cap [T^*_f M]_y \Big) \\ &= \int [dr(B_\epsilon)] \cap [T^*_f M]_{y'} \\ &= \chi\Big(f^{-1}(y') \cap B_\epsilon, \mathrm{Eu}^\vee([T^*_f M]_{y'}) \Big) \end{aligned}$$

证明。第二个等式由引理 3.4 中所解释的交数在小扰动下的不变性得出，第三个等式则由交公式 [25, 定理 4.2] 得出。作为补充说明，若 Z° 是 Z 的开稠密子集，且$f|_{Z^\circ}$在其中光滑并满足 $y' \in B_\eta \cap f(Z^\circ)$，那么 $[T^*_f M]_{y'}$是 $f^{-1}(y')$在 M中的余法空间，重数为 1；因此在这种情况下，$\mathrm{Eu}^\vee_f(z)$是邻近纤维 $f^{-1}(y)$的对偶欧拉障碍的欧拉积分 $\cap B_\epsilon$。□

交数的不变性基于以下一般性观察。专家们对此众所周知，但我们在文献中找不到相关出处。

引理 3.4。设 W 为维数 n的复流形，X_s 为由拓扑空间 S参数化的 W 中的解析 k-循环连续族，Y 为 W 中的闭定向C^∞ 子流形，其实维数为 $2n-2k$。假设存在一个紧子集 $K \subset W$，使得对于每个 $s \in S$都有 $|X_s| \cap Y \subset K$。那么交数 $Y \cdot X_s$ 在 S上局部常值。

证明。设 U 为 W 中包含 K的相对紧开子集。对于任意 $s \in S$，令$X'_s = X_s|_U$，$Y' = Y \cap U$。由交换图可得

$$\begin{array}{ccc} H^{2k}(W, W \setminus Y) & \longrightarrow & H^{2k}(U, U \setminus Y') \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^{2k}(|X_s|, |X_s| \setminus K) & \xrightarrow{\cong} & H^{2k}(|X'_s|, |X'_s| \setminus K) \end{array},$$

Y 在 W 中的托姆类与 Y' 在 U 中的托姆类，经由$H^{2k}(|X_s|,\ |X_s| \setminus K) \cong H^{2k}(|X'_s|, |X'_s| \setminus K)$限制后具有相同的像。因此 $Y \cdot X_s = Y' \cdot X'_s$。设 V为包含 K 的相对紧开邻域，使得 $V \subset U$。存在 Y'在 U中的管状邻域T，使得 $T \cap |X_s| \subset V$。事实上，由于

$$Y \cap |X_s| \cap (\bar{U} \setminus V) = \emptyset,$$

且 $|X_s| \cap (U \setminus V)$ 是紧的，因此它有一个开邻域 A，使得 $A \cap Y = \emptyset$。我们可以令 T为 Y'的任意一个与 $\bar{A}$不相交的管状邻域。由于 $\bar{T} \cap (\bar{U} \setminus V)$ 也是紧的，

$$|X_{s'}| \cap \bar{T} \cap (\bar{U} \setminus V) = \emptyset,$$

根据 [2, 命题 4.2.9(1)]，对于 s' s 的一个邻域。由 [3, 命题 6.25], ，我们可以找到一个支撑于 T 中的微分 $2k$-形式 φ，代表 T 的托姆类

Y'。此外，取一个截断函数 $\chi \in C_c^\infty(U)$，使得 $\chi|_V = 1$。那么，对于 s' 同一邻域中的 s ，我们有

$$Y' \cdot X'_{s'} = \int_{X'_{s'}} \varphi = \int_{X'_{s'}} \chi\varphi$$

因为 $\mathrm{supp}(\varphi) \cap |X'_{s'}| \subset T \cap |X'_{s'}| \subset V$。对于 s'，在 s的一个可能更小的邻域内，根据 [2, 定理 4.2.44]，最后一个积分与 s' 无关。□

3.2. **变形算法**。 在假设 $f\colon Z \to N$ 是开集且余维零处无爆破的情况下，我们将通过归纳应用命题 2.3，为 $T_f^* M$ 构造一个变形。在下文中，如果复流形 W 上的两个解析循环 X 和 Y 属于同一个循环的解析族，我们记作 $X \sim Y$。

步骤 0：存在一个由法锥变形给出的循环的解析族，将$T_Z^*(M \times N)$连接到 $\mathscr{C}(Z,\ N)$。根据命题 2.3， $\mathscr{C}(Z,\ N)$中支配 Z的不可约分支的并集为 $T_f^* M$。因此

$$[T_f^* M] \sim [T_Z^*(M \times N)] + \sum_{i \in I_0} m_{0i}[\mathscr{C}_{0i}] \tag{1}$$

其中 $\mathscr{C}_{0i}$ 是 $\mathscr{C}(Z,\ N)$ 的其他不可约分支，而 m_{0i} 是负整数。令 $Z_{0i} = \tau_f(\mathscr{C}_{0i})$。根据注 2.4， Z_{0i} 是 Z 中互不相同的解析子集，且 $\dim Z_{0i} < \dim Z$，它们构成一个局部有限族。对于任意 $z \in Z_{0i}$，用 z 的一个小邻域替换 Z_{0i}，并令 $T_{0i} = f(Z_{0i})$ 为局部像，则 $\mathscr{C}_{0i}$ 可识别为 $T^*_{f|_{Z_{0i}}}(M)$ 的支配 Z_{0i} 的不可约分支 $\times_{T_{0i}} T^*_{T_{0i}} N$。

步骤 1：对于每个 $i \in I_0$，法锥变形给出一个以 $\mathbb{P}^1$ 为参数、连接 $T^*_{Z_{0i}}(M \times N)$ 与 $\mathscr{C}(Z_{0i},\ N)$ 的循环的解析族。令 $\mathscr{C}'_{0i}$ 为 $\mathscr{C}(Z_{0i},\ N)$ 中支配 Z_{0i} 的唯一不可约分支，并令 $\mathscr{C}_{0ij}$ 为其他不可约分支。因此

$$[\mathscr{C}'_{0i}] \sim [T^*_{Z_{0i}}(M \times N)] + \sum_j n_{0ij}[\mathscr{C}_{0ij}]$$

对于某些负整数 n_{0ij}。根据命题 2.3 $f|_{Z_{0i}}$ 在余维 0 处无爆破，因此由将同一命题应用于 $f|_{Z_{0i}}$ 可知， $\mathscr{C}'_{0i}$ 在局部上可识别为 $T^*_{f|_{Z_{0i}}}(M)$ 中支配 Z_{0i} 的不可约分支 $\times_{T_{0i}} T^*_{T_{0i}} N$。因此， $\mathscr{C}'_{0i} = \mathscr{C}_{0i}$。将这些族按重数相加，得到

$$\sum_{i \in I_0} m_{0i}[\mathscr{C}_{0i}] \sim \sum_{i \in I_0} m_{0i}[T^*_{Z_{0i}}(M \times N)] + \sum_{i \in I_0} \sum_j m_{0i} n_{0ij}[\mathscr{C}_{0ij}]. \tag{2}$$

（尽管 [2, p.376] 只说明了两个族的相加，但很容易将其推广到无穷多个族的相加，前提是对于参数空间中的每一点，被加项构成一个局部有限的循环族。如果每个被加项族都是解析的，那么最终求和族的解析性由 [2, 原理 4.3.5] 得出。）

对于每个 $i \in I_0$，将 (2) 代入 (1)，合并各项并重新标记不可约分支 $\mathscr{C}_{0ij}$'s，得到

$$[T_f^* M] \sim [T_Z^*(M \times N)] + \sum_{i \in I_0} m_{0i}[T^*_{Z_{0i}}(M \times N)] + \sum_{i \in I_1} m_{1i}[\mathscr{C}_{1i}] \tag{3}$$

其中，对于每个 $i \in I_0$，都有 $m_{0i} < 0$；对于每个 $i \in I_1$，都有 $m_{1i} > 0$。我们提醒读者，作为等价关系 (3) 基础的解析族由两个 $\mathbb{P}^1$ 的一点并参数化。设 Z_{1i} 是 $\mathscr{C}_{1i}$ 在 Z 中的像。族 $\{Z_{1i}\}_{i \in I_1}$ 具有以下性质

（1） $\{Z_{1i}\}_{i \in I_1}$ 是局部有限的。

（2）根据命题 2.3，$f|_{Z_{1i}}$ 在余维 0 处无爆破。（3）根据命题 2.3，对于某个 $j \in I_0$，每个 Z_{1i} $(i \in I_1)$ 都是 Z_{0j} 的真解析子集，因此对于任意 $i \in I_1$，$\dim Z_{1i} < \dim Z - 1$。

这些性质使我们能够反复使用上述策略。例如，在下一步中，我们将 $T^*_{Z_{1i}}(M \times N)$ 变形为 $\mathscr{C}(Z_{1i},\ N)$。

步骤 k：我们有

$$[T_f^* M] \sim [T_Z^*(M \times N)] + \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i \in I_j} m_{ji} [T^*_{Z_{ji}}(M \times N)] + \sum_{i \in I_k} m_{ki} [\mathscr{C}_{ki}]$$

其中，对任意 $0 \le j \le k$ 和 $i \in I_j$，$(-1)^{j+1} m_{ji} > 0$。令 Z_{ki} 为 $\mathscr{C}_{ki}$ 在 Z 中的像。族 $\{Z_{ki}\}_{i \in I_k}$ 满足与上述类似的性质 (i)–(iii)，但 $\dim Z_{ki} < \dim Z - k$ 除外。

如果对任意 $i \in I_k$，集合 $\mathscr{C}(Z_{ki},\ N)$ 都不可约，则该过程将在步骤 $k+1$ 终止。换言之，

$$\mathscr{C}(Z_{ki}, N) = \mathscr{C}_{ki} = T^*_{f|_{Z_{ki}}} M; \quad \mathscr{C}_{ki} \sim T^*_{Z_{ki}} M.$$

例如，如果映射 $f|_{Z_{ki}}$ 是到 N 的某个子流形上的分层浸没，就会出现这种情况。该过程可能在达到 $\dim Z$ 步之前就终止。例如，当 $\dim N = 1$ 时，构造在步骤 0 终止。总之，令 $I_{-1} = \{\bullet\}$ 为单点集，$Z_{-1\bullet} = Z$, $m_{-1\bullet} = 1$，我们有

命题 3.5。存在一个整数 l，满足 $-1 \le l <$ 维数 Z，以及一个非空指标集 I_j 和一个不可约解析子集的局部有限族 $\{Z_{ji}\}_{i \in I_j}$，对任意 $-1 \le j \le l$，使得

$$[T_f^* M] \sim \sum_{j=-1}^{l} \sum_{i \in I_j} m_{ji} [T^*_{Z_{ji}}(M \times N)]. \tag{4}$$

此外，$f|_{Z_{ji}}$ 在余维 0 处无爆破，$(-1)^{j+1} m_{ji} > 0$，并且对任意 $i \in I_j$，维数 $Z_{ji} <$ 维数 $Z - j$。该等价关系背后的解析族由一串 $l+1$ $\mathbb{P}^1$ 参数化。

3.3. **相对障碍的特征循环**。令 L 为与 $[T_f^* M]$ 同调等价且出现在命题 3.5 中的拉格朗日循环。对于任意 $z = (x,\ y) \in Z$，令 r、B_ϵ、B_η 为定义 3.1 中的那些对象。我们将证明

命题 3.6。

$$\mathrm{Eu}_f^\vee(z) = (-1)^n \cdot \#_z \Big([dr(B_\epsilon \times B_\eta)] \cap L \Big).$$

推论 3.7。$\mathrm{Eu}_f^\vee$ 是一个可构造函数。

由于 L 是通过归纳构造的，以下结果蕴含命题 3.6。

命题 3.8。设 $f\colon\ Z \to N$ 是一个在余维 0 处无爆破的全纯映射（这里我们不假设 f 是开集）。则

$$\#_z \Big([dr(B_\epsilon \times B_\eta)] \cap [T_Z^*(M \times N)] \Big) = \#_z \Big([dr(B_\epsilon \times B_\eta)] \cap [\mathscr{C}(Z, N)] \Big)$$

证明。考虑从 $T_Z^*(M \times N)$ 到 $\mathscr{C}(Z,\ N)$ 的变形，并将该变形的总空间记为 $\Gamma \subset T^*(M \times N) \times \mathbb{P}^1$（见 [4, 第 5] 章）。到 $\mathbb{P}^1$ 的投影给出了一个映射 $\Gamma \to \mathbb{P}^1$，使得 $\Gamma_1 = T_Z^*(M \times N)$ 和 $\Gamma_\infty = \mathscr{C}(Z,\ N)$。令 $I = \mathbb{R}_{\ge 1} \cup \infty \subset \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$。将 $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$-族限制到 I，得到一个由 I 参数化的循环的连续族，该族

仍记为 Γ_t。我们将在接下来的两个引理中证明，存在充分小的正数 ϵ， η，使得

$$dr(B_\epsilon \times B_\eta) \cap |\Gamma_t| = \{z\}$$

对于任意 $t \in I$。结论可由引理 3.4 得出。 □

Lemma 3.9. 存在 $\epsilon, \eta > 0$，使得 $|\Gamma_t| \cap dr(B_\epsilon \times B_\eta) = \{z\}$ 对于任意 $t \in \mathbb{R}_{>0}$.

证明。将 $M \times N$ 替换为以 $z = (0, 0)$ 为中心的乘积坐标邻域。任取 $(x', y', \alpha, \beta) \in T^*(M \times N)$。根据变形空间 Γ 的构造，$(x', y', \alpha, \beta) \in |\Gamma_1|$ 当且仅当 $(x', y', t\alpha, \beta) \in |\Gamma_t|$。因此，$(x', y', dr_M(x')\ dr_N(y')) \in |\Gamma_t|$ 当且仅当 $(x', y', \frac{1}{t} dr_M(x'))\ dr_N(y')) \in |\Gamma_1|$。利用齐次性，这也等价于 $(x', y', \frac{1}{1+t} dr_M(x'))\ \frac{t}{1+t} dr_N(y')) \in |\Gamma_1|$。定义加权距离函数为 $r_a = ar_M + (1-a)r_N$。于是

$$(dr)^{-1}(|\Gamma_t|) = (dr_{\frac{1}{1+t}})^{-1}(|\Gamma_1|).$$

假设找不到任何 ϵ, η。因此，我们可以找到一个收敛于 z 的点序列 $p_i \in Z \setminus \{z\}$ 和一个数列 $t_i > 0$，使得对于所有 i，都有 $p_i \in (dr)^{-1}(|\Gamma_{t_i}|)$。令 $a_i = \frac{1}{1+t_i} \in (0,1)$，我们有

$$p_i \in (dr_{a_i})^{-1}(|\Gamma_1|), \quad \forall i.$$

取 Z 的一个子解析惠特尼分层。由该分层的局部有限性，并取一个子序列，我们可以假设存在一个层 S，使得对于所有 i 都有 $p_i \in S$，且 $\lim a_i = a_0 \in [0, 1]$。由于集合

$$F = \{(p, a) \in (S \setminus z) \times (0, 1) \mid p \in (dr)_a^{-1}(|\Gamma_1|)\}$$

在 $Z \times \mathbb{R}$ 中是子解析的，并且 $(z, a_0) \in F$，根据曲线选择引理，我们可以选取一条从 (z, a_0) 出发的实解析曲线 $(x(s)\ y(s)\ a(s)) \in F$。由于对于所有 s 都有 $(x(s)\ y(s)) \in S$，切向量 $(x'(s)\ y'(s))$ 与 S 相切，因此根据惠特尼（a）条件，它被指向 Z 的任意余法向量湮灭。特别地

$$0 = \mathrm{Re}\Big(dr_{a(s)}(x(s), y(s)) \cdot (x'(s), y'(s))\Big) = \frac{a(s)}{2}\frac{dr_M(t)}{ds} + \frac{1-a(s)}{2}\frac{dr_N(s)}{ds}, \tag{5}$$

其中 $r_M(s) = \sum_{j=1}^m \|x_j(s)\|^2$ 且 $r_N(s) = \sum_{j=1}^n \|y_j(s)\|^2$。这就产生了矛盾。事实上，不失一般性，假设 $x(s) \not\equiv 0$，并写作 $x(s) = s^k u(s)$，其中 $k > 0$ 且 $u(0) \neq 0$。于是

$$\frac{dr_M(s)}{ds} = \frac{d}{ds}\Big(\|u(s)\|^2 s^{2k}\Big) = 2k\|u(s)\|^2 s^{2k-1} + O(s^{2k}) > 0$$

对于 $0 < s \ll 1$。类似地，$\frac{dr_N(s)}{ds} \geq 0$（因为 $y(s)$ 的阶可能为 0，所以此处不能取严格不等式）。另一方面，当$s > 0$时，权重 $a(s)\ 2$ 和 $1-a(s)\ 2$ 严格为正，因此当 $0 < s \ll 1$ 时，等式 (5) 右边严格为正。□

引理 3.10. 存在正数 ϵ_∞ 和 η_∞，使得 $|\Gamma_\infty| \cap dr(B_{\epsilon_\infty} \times B_{\eta_\infty}) = \{z\}$。

证明。将 $M \times N$ 替换为以 $z = (0, 0)$ 为中心的乘积坐标邻域后，我们可以假设 $\mathscr{C}(Z, N)$ 只有有限个不可约分支 $\mathscr{C}_1, \ldots, \mathscr{C}_s$。令 Z_i 和 T_i 分别为 $\mathscr{C}$ 在 $M \times N$ 和 N 中的像。根据命题 2.3 $\mathscr{C}_i \subset T^*_{f|Z_i} M \times_{T_i} T^*_{T_i} N$，因此只需证明对于 $0 < \epsilon_\infty \ll \epsilon$ 和 $0 < \eta_\infty \ll \eta$，$dr(B_{\epsilon_\infty} \times B_{\eta_\infty}) \cap T^*_{f|Z_i} M \times_{T_i} T^*_{T_i} N = (0, 0, 0, 0)$。假设 $(x', y', dr_M(x')\ dr_N(y')) \in T^*_{f|Z_i} M \times_{T_i} T^*_{T_i} N$，那么 $(y', dr_N(y')) \in T^*_{T_i} N$。根据定义 2.11 之前的段落，我们可以选取一个足够小的 η_∞，使得当 $(y', dr_N(y')) \in T^*_{T_i} N$ 且 $y' \in B_{\eta_\infty}$ 时，$y' = 0$ 成立。固定这个选择 η_∞，于是我们可以

假设 $y' = 0$ 且 $(x', dr_M(x')) \in |(T^*_{f|Z_i} M)_0|$（$0 \in B_{\eta_\infty}$上方的纤维）。根据命题 2.3 $f|Z_i$，其在余维零处无爆破，因此根据命题 2.2 |，$T^*_{f|Z_i} M\ _0|$ 是余法空间的并。再次根据定义 2.11 之前的段落，如果我们选取一个足够小的 ϵ_∞ 并要求 $x' \in B_{\epsilon_\infty}$，就有 $x' = 0$。□

注 *3.11*。从以 $\mathbb{P}^1$ 为参数的循环的解析族限制到以 I 为参数的循环的连续族，这对于证明命题 *3.8* 至关重要，因为不能指望对于所有 $z \in \mathbb{P}^1$，$dr(B_\epsilon \times B_\eta) \cap |\Gamma_t|$ 都包含在某个紧集中。例如，设 $Z = \{y = x^2\} \subset \mathbb{C}^2$、$N = \mathbb{C}$ 和 $f: Z \to N$ 由 $(x, y) \mapsto y$ 给出。映射 $dr: \mathbb{C}^2 \to T^*\mathbb{C}^2$ 由 $(x, y) \mapsto (x, y, \bar{x}, \bar{y})$ 给出。简单计算可知，当 $t = -\frac{1}{|x|^2}$ 时，$(x, y, \bar{x}, \bar{y}) \in \Gamma_t$。因此，当 t 沿着 $\mathbb{R}_{<0} \subset \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ 趋于无穷时，不良交点将进入任意一个足够小的 $(0, 0)$ 邻域。

4. Chern classes for nearby and vanishing cycles

In 在第 §3 节中，我们已经详细讨论了 $(-1)^n[T^*_f M]$。将等价关系 (4) 重写为

$$(-1)^{\dim Z}[T^*_Z(M \times N)] \sim (-1)^{\dim Z}[T^*_f M] + (-1)^{\dim Z - 1} \sum_{j=0}^{l} \sum_{i \in I_j} m_{ji}[T^*_{Z_{ji}}(M \times N)]. \quad (6)$$

在 f 在余维 0 处无爆破这一一般假设下，这可以看作是将 $(-1)^{\dim Z}[T^*_Z(M \times N)]$ 虚拟分解为邻近分量和消失分量。在本节中，我们将进一步讨论前面在例 2.8 中提到的特殊情形下的这一分解：

(i) $\dim N = 1$，(ii) $f: M \to N$ 是两个流形之间相对维数为 $l = m - n \geq 0$ 的平坦全纯映射，其纤维至多具有孤立奇点。我们将 M 与 $Z = gr(f) \subset M \times N$ 等同起来。

在这两种情形下，米尔诺纤维都有良好定义，因此根据定理 1.3 和命题 3.3，$(-1)^n[T^*_f M]$ 除差一个符号外，可作为邻近循环 χ_f 的特征循环的替代物。

情形 (i) 已在文献中得到广泛研究，这里的分解是对例 1.4 中各项的重新排列。在情形 (ii) 中，根据注 2.13，$(-1)^m[T^*_Z(M \times N)]$ 对应于常值函数 1_M；根据定理 1.3 和命题 3.3，$(-1)^m[T^*_f M]$ 对应于函数 $\chi_f = (-1)^l \mathrm{Eu}^\vee_f$。根据米尔诺数的定义，$1_M = \chi_f + (-1)^{l-1}\mu_f$；将各项与等式 (6) 比较可知

$$(-1)^{m-1} \sum_{j=0}^{l} \sum_{i \in I_j} m_{ji}[T^*_{Z_{ji}}(M \times N)] = \mathrm{CC}\Big((-1)^{l-1}\mu_f\Big). \quad (7)$$

我们的下一个目标是写出 $c_*(\mathrm{Eu}^\vee_f)$ 的一般公式，以及情形 (ii) 中 $c_*(\chi_f)$、$c_*(\mu_f)$ 的公式。令 ξ 和 ζ 分别为 $\mathbf{P}(T^*(M \times N)|_Z)$ 上的典范子丛和商丛，并令 $\pi: \mathbf{P}(T^*(M \times N)|_Z) \to Z$ 为投影。

推论 4.1 (定理 1.3 的推论)。

$$c_*(\mathrm{Eu}^\vee_f) = (-1)^{m+n-1}\pi_*\Big(c(\zeta^\vee) \cap \big((-1)^n \mathbf{P}(L)\big)\Big) = (-1)^{m-1}\pi_*\Big(c(\zeta^\vee) \cap [\mathbf{P}(T^*_f M)]\Big)$$

证明。第一个等式是标准结果。定理 1.3 中的 L 是命题 3.5 中出现的拉格朗日循环。由于从 $[T^*_f M]$ 到 L 的变形显然保留了 $\mathbb{C}^*$

在 $T^*(M\times N)$上的作用， $[\mathbf{P}(T^*_f M)]$和$\mathbf{P}(L)$也可以置于一个解析族中，因此它们也与 [2, p.420]同调等价。第二个等式成立，是因为这是同调类的等式，而不是循环的等式。□

从现在起，考虑特殊情形 (ii)。为便于下文讨论，我们引入更多记号并作一些说明。

- ξ_M和 ζ_M分别是$\mathbf{P}(T^*M)$上的典范子丛和商丛， ξ_N和ζ_N分别是$\mathbf{P}(f^*T^*N)$上的典范子丛和商丛， ξ和 ζ分别是$\mathbf{P}(T^*M\oplus f^*T^*N)$上的典范子丛和商丛。
- π_M、 π_N和 π是从$\mathbf{P}(T^*M)$、$\mathbf{P}(f^*T^*N)$和$\mathbf{P}(T^*M\oplus f^*T^*N)$到 M的投影。
- $\mathbf{P}(T^*(M\times N)|_Z)$可与$\mathbf{P}(T^*M\oplus f^*T^*N)$等同。余法空间$T^*_Z(M\times N)$可识别为 $-df$的图: $f^*T^*N\to T^*M$。
- 令 $C(f)$ 为 f 的临界空间。典范态射
$$df: f^*T^*N\to T^*M$$
restri化为 $M\setminus C(f)$ 上的向量丛单射。令 $(f^*T^*N)^\circ$ 为.....的闭包
$$df\Big(f^*T^*N\Big|_{M\setminus C(f)}\Big)$$
在 T^*M 中，并将其在 $\mathbf{P}(T^*M)$ 中的射影化记为 $\mathbf{P}(f^*\overline{T^*N)^\circ}$。可以看出，$(f^*T^*N)^\circ$ 与相对余法空间 $T^*_f M$ 重合。
- 从 $T^*_Z(M\times N)$ 到 $\mathscr{C}(Z,N)$ 的变形，可视为将图族 $\Gamma_t = gr(tdf)\subset T^*M\oplus f^*T^*N$ 变形，使得 $\Gamma_1 = T^*_Z(M\times N)$ 和$\Gamma_\infty=\mathscr{C}(Z,N)$。
- 在 $\mathbf{P}(f^*T^*N)$ 上，将复合 $\xi_N\to\pi_N^*f^*T^*N\xrightarrow{df}\pi_N^*T^*M$ 记为 $\widetilde{df}$。我们将图族 $gr(tdf)\subset\pi_N^*T^*M\oplus\xi_N$ 记为 γ_t，此族由 γ_1 变形为正规锥 $C_{\gamma_1\cap\xi}\gamma_1$。
- η和 τ是$\mathbf{P}(\pi_N^*T^*M\oplus\xi_N)$上的典范子丛和商丛。注意， η也是 ξ在$\mathbf{P}(\pi_N^*T^*M\oplus\xi_N)$上的限制。

推论 4.2。
$$c_*(\chi_f)=(-1)^{n-1}c(f^*TN)\cap(\pi_M)_*\Big(c(\zeta_M^\vee)\cap\overline{\mathbf{P}(f^*T^*N)^\circ}\Big)$$

证明。 由于 $\mathbf{P}(T^*_f M)$ $=\overline{\mathbf{P}(f^*T^*N)^\circ}$完全包含于 $\mathbf{P}(T^*M)$ 中，我们有 e
$$\zeta\Big|_{\overline{\mathbf{P}(f^*T^*N)^\circ}}\cong\zeta_M\oplus\pi_M^*T^*N,$$
and
$$\begin{aligned}c_*(\chi_f)&=(-1)^{m-n}c_*(\mathrm{Eu}_f^\vee)\\&=(-1)^{n-1}\pi_*\Big(c(\zeta_M^\vee\oplus\pi_M^*f^*TN)\cap[\overline{\mathbf{P}(f^*T^*N)^\circ}]\Big)\\&=(-1)^{n-1}(\pi_M)_*\Big(c(\zeta_M^\vee\oplus\pi_M^*f^*TN)\cap[\overline{\mathbf{P}(f^*T^*N)^\circ}]\Big)\\&=(-1)^{n-1}c(f^*TN)\cap(\pi_M)_*\Big(c(\zeta_M^\vee)\cap\overline{\mathbf{P}(f^*T^*N)^\circ}\Big).\end{aligned}$$

□

注 4.3。 推论 *4.2* 的公式也适用于情形 *(i)*，但需额外假设 $Z = gr(f)$ 对于流形之间的非恒定全纯映射 $f\colon M \to N$ 成立。事实上，上述证明中的论证只用到了以下事实：*(1)* Z 是这样的一个图；*(2)* 在 M的每一点都存在局部米尔诺纤维化。在此背景下，$\mathbf{P}(f^*T^*N)^\circ$ 可视为$\widetilde{\mathrm{Bl}_{C(f)}}M$，它自然嵌入于$\mathbf{P}(T^*M)$中，而$C(f)$ 在文献中有时称为雅可比子概形。该公式可用 $C(f)$ 在 M中的对偶塞格雷类来表示。令 $h = c_1(\xi_M^\vee)$。

$$\begin{aligned} c_*(\chi_f) &= c(TM \oplus f^*TN) \cap (\pi_M)_*\Big((1+h)^{-1} \cap [\mathrm{Bl}_{C(f)}M]\Big) \\ &= c(TM \oplus f^*TN) \cap (\pi_M)_*\Big([\mathrm{Bl}_{C(f)}M] - (1 - h + h^2 - \ldots) \cap [C_{C(f)}M]\Big) \\ &= c(TM \oplus f^*TN) \cap \Big([M] + (-1)^m \check{s}(C(f), M)\Big). \end{aligned}$$

这个计算应当与 [1, 定理 1。4] 和 [20, 推论 2。4] 中得到的超曲面陈-施瓦茨-麦克弗森类公式进行比较。假设 $N = B_\eta \subset \mathbb{C}$。注意， [20, §2] 中的函数 χ 和 μ 是支撑在超曲面 $f^{-1}(0)$上的可构造函数，而我们的 χ_f支撑在环境空间 M上。因此，$\mu_f = (-1)^{m-1}(\chi_f - 1)$ （按我们的记号）等于 μ （按 [20] 的记号），但 $\chi_f \neq \chi$。考虑到记号上的差异，不难看出，当 $N = B_\eta$时，上述计算恢复了 [20, 推论 2。4]。

为了计算 $c_*(\mu)$，将陈类与特征循环关联起来的标准过程给出

$$c_*(\mu_f) = (-1)^{(m+n-1)}\pi_*\Big(c(\zeta^\vee) \cap [\mathbf{P}(\mathrm{CC}(\mu_f))]\Big)$$

并且 $\mathrm{CC}(\mu_f)$ 由表达式 (7) 中相当复杂的式子给出。然而，为了得到 $c_*(\mu_f)$，在上面的公式中，我们可以将循环 $[\mathbf{P}(\mathrm{CC}(\mu_f))]$ 替换为 $H_{2(m+n-1)}(\mathbf{P}(T^*(M\times N)|_Z))$ 中与之同调等价的任意循环。重新整理 (1) 中的各项，得到

$$(-1)^{\dim Z}[T^*_Z(M \times N)] \sim (-1)^{\dim Z}[T^*_f M] + (-1)^{\dim Z - 1}\sum_{i \in I_0} m_{0i}[\mathscr{C}_{0i}].$$

与 (6) 和 (7) 比较可得

$$\mathrm{CC}(\mu) \sim (-1)^{n-1}\sum_{i \in I_0} -m_{0i}[\mathscr{C}_{0i}].$$

因此

$$c_*(\mu) = (-1)^m \pi_*\Big(c(\zeta^\vee) \cap \sum_{i \in I_0} -m_{0i}[\mathbf{P}(\mathscr{C}_{0i})]\Big). \tag{8}$$

注意，$-\sum_{i\in I_0} m_{0i}[\mathscr{C}_{0i}]$ 是 $[\mathscr{C}(Z,N)]$ 中与 $[T^*_f M]$ 互补的循环（回顾 $m_{0i} < 0$），因此我们只需要进行一次法锥变形。

下面我们将说明一个关于 $c_*(\mu)$ 的更好的公式，而无需引用图嵌入 $gr(f) \subset M \times N$。为此，我们需要

命题 4.4。 存在一个真修改 $\kappa\colon \mathbf{P}(\pi_N^*T^*M \oplus \xi_N) \to \mathbf{P}(T^*M \oplus f^*T^*N)$，具有以下性质。

(i) κ保持法锥变形。换言之，如果 $\gamma \subset \mathbf{P}(\pi_N^*T^*M \oplus \xi_N) \times \mathbb{P}^1$是族 γ_t的变形的全空间，并且 $\Gamma \subset \mathbf{P}(T^*M \oplus f^*T^*N) \times \mathbb{P}^1$对于 Γ_t 也是如此，那么 $(\kappa \times id_{\mathbb{P}^1})|_\gamma\colon \gamma \to \Gamma$ 是一个真修改。特别地，对于任意 $t \in \mathbb{P}_1$，有 $\kappa_*([\mathbf{P}(\gamma_t)]) = [\mathbf{P}(\Gamma_t)]$。

(ii) $\kappa^*\xi = \eta$。

证明。 $\mathbf{P}(\pi_N^*T^*M \oplus \xi_N)$ 上的一个点由以下三元组组成

- 一个点 $z \in M$,
- 一个一维向量空间 $l_1 \subset f^*T^*N(z)$,
- 另一个一维向量空间 $l_2 \subset T^*M(z) \oplus l_1$。

真修改 κ 由 $(z, l_1, l_2) \mapsto (z, l_2)$ 给出。关于 κ 的大多数陈述都可由这一集合论描述直接看出。陈述 $\kappa_*([\mathbf{P}(\gamma_t)]) = [\mathbf{P}(\Gamma_t)]$ 由真推前与 Gysin 拉回的交换性得出，见定理 6.2]。□

以下图表最能概括这一情形。

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{P}(\pi_N^*T^*M \oplus \xi_N) & \xrightarrow{\kappa} & \mathbf{P}(T^*M \oplus f^*T^*N) \\ \downarrow a & & \downarrow \pi \\ \mathbf{P}(f^*T^*N) & \xrightarrow{\pi_N} & M \end{array} \tag{9}$$

我们有

$$[\mathbf{P}(\gamma_\infty)] = [\mathbf{P}(C_{\gamma_1 \cap \xi}\gamma_1)] = [\mathbf{P}(\tilde{C} \oplus \xi_N\big|_{Z(\tilde{df})})] + [\mathrm{Bl}_{Z(\tilde{df})}\mathbf{P}(f^*T^*N)]$$

~根据 [4, 例 18.1.6(d)]。这里， $Z(df) \subset \mathbf{P}(f^*T^*N)$是由 df的~零点定义的解析子空间，或者等价地说，理想层$\mathscr{I}_{Z(\tilde{df})}$是$\pi_N^*TM \otimes \xi_N \to \mathscr{O}_{\mathbf{P}(f^*T^*N)}$的像。~锥 C 定义为

$$\tilde{C} := \mathrm{Spec}\Big(\bigoplus_{i\geq 0}\big(\mathscr{I}^i_{Z(\tilde{df})}/\mathscr{I}^{i+1}_{Z(\tilde{df})}\big) \otimes \xi_N^{-i}\Big)$$

它自然是$\pi_N^*T^*M\big|_{Z(\tilde{df})}$的一个子锥，并且不是 $Z(\tilde{df})$在$\mathbf{P}(f^*T^*N)$中的正规锥；后者定义为

$$C := C_{Z(\tilde{df})}\mathbf{P}(f^*T^*N) = \mathrm{Spec}\Big(\bigoplus_{i\geq 0}\mathscr{I}^i_{Z(\tilde{df})}/\mathscr{I}^{i+1}_{Z(\tilde{df})}\Big).$$

不过，请注意，

$$\mathbf{P}(\tilde{C} \oplus \xi_N\big|_{Z(\tilde{df})}) = \mathbf{P}(C \oplus 1).$$

根据上面的命题，我们有

$$\begin{aligned} \kappa_*([\mathbf{P}(\gamma_\infty)]) &= [\mathbf{P}(\Gamma_\infty)] \\ &= [\mathbf{P}(\mathscr{C}(Z, N))] \\ &= [\overline{\mathbf{P}(f^*T^*N)^\circ}] + \sum_{i\in I_0} -m_{0i}[\mathbf{P}(\mathscr{C}_{0i})]. \end{aligned}$$

由于 $\mathrm{Bl}_{Z(\tilde{df})}\mathbf{P}(f^*T^*N)$ 和 $\mathbf{P}(f^*T^*\overline{N)^\circ}$均与 $\overline{\mathbf{P}(f^*T^*N)}\kappa_*$[双有理，故有 $\mathrm{Bl}_Z\mathbf{P}(f^*T^*N)$] $= [\mathbf{P}(f^*T^*N)^\circ]$。因此，

$$\kappa_*[\mathbf{P}(C \oplus 1)] = \sum_{i\in I_0} -m_{0i}[\mathbf{P}(\mathscr{C}_{0i})]. \tag{10}$$

~ ~**命题 4.5.** 维数 $Z(df) = n - 1$，使得 df 是一个正则截面，并且

$$C = f^*T^*M \otimes \zeta_N^\vee\Big|_{Z(\tilde{df})}.$$

证明。 我们首先将临界轨迹 $C(f)$ 分解为连通可构造子流形的局部有限不交并

$$C(f) = \bigcup_{i\in I} V_i$$

使得 $f|_{V_i}$ 具有常秩，另见 [5, 第26]页。令 $\{W_j\}$ $(j \in J_1)$ 为 $C(f)^\circ$ （ $C(f)$ 的非奇异部分）的连通分支族，并令 V_j $(j \in J_1)$ 为 W_j 中 $f|_{W_j}$ 具有最大秩的稠密开子集。根据 [11, 第265],页的定理 1，$W_j \setminus V_j$ 在 M中是可构造的。因此，该集合

$$C(f)_1 = \bigcup_{j\in J_1} (W_j \setminus V_j) \cup C(f)^*$$

是 M的一个闭解析子集，且 $\dim\ C(f)_1 < \dim\ C(f)$（此处 $C(f)^*$表示 $C(f)$ 的奇异轨迹）。用 $C(f)_1$替代 $C(f)$，重复此过程，并归纳地定义 $V_j(j \in J_2, J_3, \ldots\ldots)$。该构造将在有限步内终止。最后，令 $I = \cup J_k$，我们得到 $C(f)$ 所需的分层。

由于 $f|_{C(f)}$具有离散纤维， $f|_{V_i}$也具有离散纤维，这意味着秩 $f|_{V_i}$ =$\dim V_i$。集合

$$S_i = \{(x,\beta) \in V_i \times_N T^*N \mid \beta \text{ annihilates } df(T_xV_i)\}$$

因此维数为 n。另一方面，集合

$$S = \{(x,\beta) \in C(f) \times_N T^*N \mid \beta \text{ annihilates } df(T_xM)\}$$

$\sim$ $\sim$包含于$\cup_{i\in I} S_i$中，因此 $\dim\ S \le n$。由于 $Z(df)$是 S的射影化，$\dim\ Z(df) \le n-1$。因为 $Z(df)$是定义在 $(m+n-1)$ 维底空间$\mathbf{P}(f^*T^*N)$上的秩为 m的向量丛 $\pi_N^*T^*M \otimes \xi_N^\vee$的一个截面的零点集， $Z(df)$的每个不可约分支

$\sim$ $\sim$的维数都不小于 $n-1$。因此， $Z(df)$具有纯维数 $n-1$，这意味着根据 [14, 定理 17.3，17.4]，$\sim Z(df)$是 Cohen–Macaulay。该命题的结论由 [4,命题 7.1]得出。□

注记 4.6。 如果 f 是 *Thom*横截 [12, 4。10], 那么映射芽 $f : (M, x) \to (N, f(x))$ 在每一点 $x \in M$ [12, 命题 4。12], 处都是稳定的，并且 $Z(df)$ 是 $C(f)$的一个奇点消解。

定理 4.7。

$$c_*(\mu_f) = (\pi_N)_*\Big(c(\zeta_N^\vee) \cap [Z(\widetilde{df})]\Big)$$

证明。 由方程 (8)、(10) 以及图表 (9) 可知

$$\begin{aligned}
c_*(\mu) &= (-1)^m \pi_{N*} a_*\Big(\frac{c(a^*\pi_N^*TM)c(a^*\pi_N^*TN)}{c(\xi^\vee)} \cap [\mathbf{P}(C\oplus 1)]\Big)\\
&= (-1)^m \pi_{N*} a_*\Big(\frac{c(a^*\pi_N^*TM)c(a^*\pi_N^*TN)}{c(\eta^\vee)} \cap [\mathbf{P}(C\oplus 1)]\Big)\\
&= (-1)^m \pi_{N*} a_*\Big(\frac{c(a^*\pi_N^*TM)c(a^*\xi_N^\vee)}{c(\eta^\vee)} \cdot \frac{c(a^*\pi_N^*TN)}{c(a^*\xi_N^\vee)} \cap [\mathbf{P}(C\oplus 1)]\Big)\\
&= (-1)^m \pi_{N*} a_*\Big(c(\tau^\vee)c(a^*\zeta_N^\vee) \cap [\mathbf{P}(C\oplus 1)]\Big).
\end{aligned}$$

根据命题 4.5,

$$\mathbf{P}(C\oplus 1) = \mathbf{P}(\pi_N^*T^*M \oplus \xi_N)\Big|_{Z(\widetilde{df})}.$$

另一方面，根据 [4, 例 3.3。4]我们有

$$a_*\Big(c(\tau^\vee)\cap[\mathbf{P}(\pi_N^*T^*M\oplus\xi_N)\Big|_{Z(\widetilde{df})}]\Big)=(-1)^m[Z(\widetilde{df})].$$

将这些方程合并，并利用投影公式，即可证明该定理。 □

利用定理 4.7 和命题 4.5，主定理的证明就成了交叉理论中的一道简单练习。为简化记号，令 $h=c_1(\xi_N^\vee)$，$E=TM$，$F=TN$，在拉回向量丛时，我们默认省略书写 f^* 和 π_N^*。

$$\begin{aligned}
c_*(\mu)&=(\pi_N)_*\Big(c(\zeta_N^\vee)\cap[Z(\widetilde{df})]\Big)\\
&=c(F)\cap(\pi_N)_*\Big((1+h)^{-1}c_m(E^\vee\otimes\xi_N^\vee)\cap[\mathbf{P}(f^*T^*N)]\Big)\\
&=c(F)\cap(\pi_N)_*\Big(\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^ih^i\sum_{j=0}^{m}c_{m-j}(E^\vee)h^j\cap[\mathbf{P}(f^*T^*N)]\Big)\\
&=c(F)\cap(\pi_N)_*\Big(\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k+j=m+i}(-1)^ic_k(E^\vee)h^j\cap[\mathbf{P}(f^*T^*N)]\Big)\\
&=c(F)\cap(\pi_N)_*\Big(\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k+j=m+i}(-1)^{i+k}c_k(E)h^j\cap[\mathbf{P}(f^*T^*N)]\Big)\\
&=c(F)\cap\Big(\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k+j=m+i}(-1)^{i+k}c_k(E)s_{j-(n-1)}(F^\vee)\cap[M]\Big)\\
&=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k+j=m+i}(-1)^{l+1}c(F)c_k(E)s_{j-(n-1)}(F)\cap[M]\\
&=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^{l+1}c(F)c_{m+i-(n-1)}(E-F)\cap[M]\\
&=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^{l+1}c(F)c_{l+1+i}(E-F)\cap[M].
\end{aligned}$$

References

[1] Paolo Aluffi。奇异超曲面的陈类。

Trans. Amer. Math. Soc. 351 10 3989 4026, , ( ): – 。[2] Daniel Barlet 和 1999 J´on Magn´usson。 *Complex analytic cycles. I. Basic results on complex geometry and foundations for the study of cycles* 356 *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften* , 第 卷。Springer，Cham；*[Fundamental Principles of Mathematical Sciences]* 法国数学会，巴黎， [2019] ©2019。由 Alan Huckleberry 从 2014 年法文原版翻译。[3] Raoul Bott 和 Loring W. Tu。

Differential forms in algebraic topology 82 *Graduate Texts in* , 第 卷。Springer-Verlag, *Mathematics* 1982 纽约-柏林。[4] William Fulton。 *Intersection theory*，第 2 卷， *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]* 1998 。Springer-Verlag，柏林，第二版，。[5] Christopher G. Gibson、Klaus Wirthm

Topolog- uller、Andrew A. du *ical stability of smooth mappings* 552 Plessis 和 Eduard J. N. Looijenga。[6] 。数学讲义，第 卷。Springer-Verlag，柏林-纽约，1976年。[6] Helmut Hamm。复¨空间的局部拓扑性质。 *Math. Ann.*，191：235–252，1971年。

[7] J. P. Henry、M. Merle 和 C. Sabbah。关于复解析映射的严格 Thom 条件。 *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 17(2)：227–268，1984年。[8] Gary Kennedy。奇异代数簇的 MacPherson陈类。 *Comm. Algebra*，18(9)：2821–2839，1990年。[9] Micha˙l Kwieci´nski。MacPherson图构造。载于 *Algebraic geometry (Ankara, 1995)*，第 193 卷，*Lecture Notes in Pure and Appl. Math.*，第 135–155 页。Dekker，纽约，1997年。[10] Xia Liao。混合结式的全局全纯交公式与局部欧拉障碍。*Int. Math. Res. Not. IMRN*，(10)：8363–8376，2024年。[11] Stanis˙law ˙Lojasiewicz。*Introduction to complex analytic geometry*。Birkh¨auser Verlag，巴塞尔，1991年。Maciej Klimek 从波兰语译出。[12] Eduard J. N. Looijenga。

Isolated singular points on complete intersections 5 *Surveys of*，第 卷。*Modern Mathematics* International Press，Somerville，马萨诸塞州；高等教育出版社，北京，第二版，2013年。[13] R. D. MacPherson。奇异代数簇的陈类。 *Ann. of Math. (2)*，100：423–432，1974年。[14] Hideyuki Matsumura。

Commutative ring theory 8 *Cambridge Studies in Advanced Mathe-*，第 卷。剑桥大 *matics* 1989
学出版社，剑桥，第二版，。M. Reid 从日语译出。[15] Laurent¸iu G. Maxim 和 J¨org Sch¨urmann。复几何及其应用中的可构造层复形。载于 *Handbook of geometry and topology of singularities III*，第 679–791 页。Springer，Cham，[2022] ©2022。[16] Isao Nakai。分层映射的初等拓扑。载于 *Singularities—Sapporo 1998*，第 29 卷，*Adv. Stud. Pure Math.*，第 221–243 页。纪伊国屋，东京，2000年。[17] Toru Ohmoto。群作用下奇异代数簇的等变陈类。 *Math. Proc.*，( )：–。

Cambridge Philos. Soc. 140 1 115 134, 2006
[18] Toru Ohmoto。映射奇点与特征类。载于 *School on real and complex singularities in São Carlos 2012* 68 *Adv. Stud. Pure Math.* 191 265 ，，第 卷，，第 – 页。日本数学会，

[ ], 东京。[19] 2016
Toru Ohmoto。映射奇点的 Thom 多项式。载于 *Handbook of geometry and topology of singularities VIII* 375 440 [2026] 2026 ，第 – 页。Springer，Cham，©。[20] Adam Parusi´nski 和 Piotr Pragacz。超曲面的特征类与特征循环。*J. Algebraic Geom.*，10(1)：63–79，2001年。[21] C. Sabbah。无爆破解析分层映射与消失循环。载于，，，第 卷，，第 – 页。法国数学会，巴黎，1983年。[22] C. Sabbah。双变余法丛空间。预印本，可在作者主页获取，1984年。[23] C. Sabbah。关于余法丛空间几何的几点备注。第 130 号，第 161–192 页。微分系统与奇点（吕米尼，1983年）。[24] J¨ ¨ *Topology of singular spaces and constructible sheaves* 63 *Instytut Matem-* org *atyczny Polskiej Akademii Nauk. Monografie Matematyczne (New Series) [Mathematics Institute of the Polish Academy of Sciences. Mathematical Monographs (New Series)]* ¨ 2003
Schurmann。，第 卷。Birkhauser Verlag，巴塞尔，。[25] J¨ ¨ *Topics in cohomological* org *studies of algebraic varieties* 175 201 ¨ 2005
Schurmann。关于可构造函数特征类的讲义。载于，数学趋势，第 – 页。Birkhauser，巴塞尔，。笔记由 Piotr Pragacz 和 Andrzej Weber 整理。[26] Bernard Teissier。判别式几何中的不变量探寻。载于 *Real and complex singularities (Proc. Ninth Nordic Summer School/NAVF Sympos. Math., Oslo, 1976)* 565 678 ，第 – 页。Sijthoff & Noordhoff，Alphen aan den Rijn，1977年。[27] L ̂e D ung Tr´ang。关于相对 *Real and complex singularities (Proc. Ninth Nordic Summer School/NAVF Sympos. Math., Oslo, 1976)* 397 403
单值化的几点备注。载于，第 – 页。Sijthoff & Noordhoff，Alphen aan den Rijn，1977年。[28] L ̂e D ung Tr´ang 和 Bernard Teissier。解析几何中切空间的极限。*Comment.*，( )：–。

Comment. 63 4 540 578, 1988
Math. Helv. 63 4 540 578, 1988

Department of Mathematical Sciences
, Huaqiao University, Chenghua North Road 269 , Quanzhou, Fujian, China*Email address*: xliao@hqu.edu.cn