arXiv:2611.32112v1 [math.DG] 24 Nov 2026

具有非负里奇曲率和欧氏体积增长的可缩4-流形

JUNHYUN AN 和 SEUNGHWAN YOON

摘要。我们证明，每个承认具有非负里奇曲率和欧氏体积增长的完备黎曼度量的可缩光滑4-流形，都与 $\mathbb{R}^4$ 同胚。更准确地说，每个紧子集都包含于某个连通紧正则区域的内部，且该区域的补集是单连通的。关键构造产生了边界具有正标量曲率的紧区域，并且这些区域是全局严格三凸莫尔斯穷竭函数的正则次水平集。当外部基本群不含非阿贝尔自由子群并满足由此得到的边界、同调及相对胞腔假设时，一个拓扑判据迫使该群为平凡群；在几何应用中，该群是有限群。其证明采用了 Gerstenhaber–Rothaus 定理的胞腔表述以及一个光滑填充障碍。所得补集在无穷远处单连通，而 Freedman 的识别定理完成了论证。

1. 引言

仅凭可缩性无法确定一个开4-流形的拓扑。尽管每个环路都能在环境流形中收缩，但远离某个紧集的环路未必能在避开该紧集的情况下收缩。因此，控制无穷远处的这种行为，是将可缩四维流形识别为 $\mathbb{R}^4$ 的关键。在此背景下，Semola 猜想，任何具有非负里奇曲率和欧氏体积增长的完备度量的可缩四维流形，都与 $\mathbb{R}^4$ [28, 猜想 5。8] 同胚。我们证明了这一猜想。

条件 1（几何假设）。设 M 是一个无边界的光滑四维流形，并配备光滑黎曼度量 g。假设 M 可缩，$(M,\ g)$ 完备，且 $\mathrm{Ric}_g \geq 0$。固定 $p \in M$，并假设

$$\mathrm{AVR}(g) := \lim_{R\to\infty} \frac{\mathrm{Vol}_g B_R^g(p)}{\omega_4 R^4} > 0,$$

其中，ω_4 是 $\mathbb{R}^4$中欧几里得单位球的体积。特别地，M 是连通且非紧的。

关键词和短语。里奇曲率、正标量曲率、Morse理论。

定理 1.1。 在条件 *1*下， $M \cong_{\mathrm{top}} \mathbb{R}^4$。

更准确地说，我们得到以下对紧补集的控制，其中记 $O_\Gamma = M \setminus \Gamma$。

定理 1.2 （共尾单连通补集）。 在条件 *1*下，对于每个紧致 $Q \subset M$，存在一个连通紧正则区域 Γ，满足$Q \subset \operatorname{int}\Gamma$ 且外部单连通 O_Γ。

这里，紧正则区域是具有非空光滑边界的紧余维零子流形。定理 1.2 给出了无穷远处单连通性：在充分大的紧区域之外，环路可以在避开任意给定紧子集的情况下填充。随后，Freedman 的识别定理推出定理 1。1 [10, 推论 1。2]。该论证确定了 M 的同胚类型，但并未证明其与标准 $\mathbb{R}^4$微分同胚。

Chodosh、Máximo 和 Mukherjee 的一项相关结果 [6, 定理 1。2]表明，如果一个紧可缩光滑 4-流形的内部承载一致正标量曲率完备度量，那么它与 4-球同胚。在本文的情形下，曲率和体积增长假设无需紧化假设，即可对无穷远端提供控制。主要构造产生紧切片，其边界具有正标量曲率，并且这些切片是全局严格三凸莫尔斯穷竭函数的正则次水平集（定理5.12）。因此，可以对同一批区域同时控制边界几何和外部拓扑。

定理 6.14 提出了一个判据，用于判断此类域的外部是否单连通。其假设见条件2，涉及边界、相对胞腔模型、同调以及外部基本群。群假设仅排除了同构于 F_2 的子群，因此尤其适用于有限外部群或可和外部群。该判据独立于原有的 Ricci 曲率和体积增长假设；只要其他几何构造验证了所有这些切割条件，同样可以使用该判据。因此，该论证既给出了一个识别结果，也提供了一个可独立于本文所采用的解析构造而应用的判据。

在预备知识之后，第 3–4 节构造解析数据并建立外部有限性。第 5 节构造切割，第 6–7节发展外部判据并证明拓扑识别。详细证明见附录。

2. 预备知识

所有流形均为 Hausdorff 且第二可数。除非另有说明，同调和上同调均取整数系数。我们在 $\Delta = \sum_i \partial_i^2$欧氏坐标中采用使圆球面具有正截面曲率的曲率约定。

2.1. **域与几何记号**。

定义 2.1（紧正则区域）。紧正则区域$K \subset M$是一个紧致嵌入余维零子流形，且具有非空光滑边界。

定义 2.2（两个外部）。设

$$Y_K = \partial K, \qquad O_K = M \setminus K, \qquad E_K = M \setminus \operatorname{int} K.$$

带边界流形 E_K 的内部为 O_K。因此，边界领圈使包含映射 O_K , $\to E_K$ 成为同伦等价 [17, 定理 9.25– 9.26]。

定义 2.3（微分算子与曲率）。对于黎曼度量 q，记

$$\operatorname{Hess}_q f = \nabla^q df, \qquad \Delta_q f = \operatorname{tr}_q \operatorname{Hess}_q f, \qquad \operatorname{Scal}_q = \operatorname{tr}_q \operatorname{Ric}_q .$$

对于对称双线性形式 S 和子空间 P,

$$\operatorname{tr}^q_P S = \sum_{i=1}^{\dim P} S(e_i, e_i),$$

其中，(e_i) 是 P 的 q-标准正交基。张量不等式是指二次型 [26,Chapter 2–3] 中的不等式。

定义 2.4（平均曲率与正则层）。令 ν_q 为 Y_K 的外单位法向量，设

$$\mathrm{II}_q(V, W) = q(\nabla^q_V \nu_q, W), \qquad H_q(Y_K) = \operatorname{tr}^q_{TY_K} \mathrm{II}_q.$$

若 f 在 Y_K 附近光滑，且在此处有 $K = \{f \le s\}$，并在 Y_K 上有 $df \neq 0$，则局部有 $Y_K = \{f = s\}$ ，且

$$\nu_q = \frac{\nabla_q f}{|df|_q}, \qquad H_q(Y_K) = \frac{\operatorname{tr}^q_{TY_K} \operatorname{Hess}_q f}{|df|_q}.$$

严格平均凸性是指 $H_q(Y_K) > 0$。

定义 2.5（正标量曲率）。若流形具有一个标量曲率为正的光滑度量，则称其具有正标量曲率。对于 Y_K，该度量不必是诱导度量。一致正性是指存在一个全局正下界。

2.2. **共形公式**。对于四维中的 $\widetilde{q} = e^{2h} q$,

$$|V|_{\widetilde{q}} = e^h |V|_q, \qquad |\alpha|_{\widetilde{q}} = e^{-h} |\alpha|_q,$$

对于向量 V 和余向量 α，以及

$$\begin{aligned}
\operatorname{Hess}_{\widetilde{q}} f &= \operatorname{Hess}_q f - dh \otimes df - df \otimes dh + \langle dh, df \rangle_q \, q, \\
\operatorname{Ric}_{\widetilde{q}} &= \operatorname{Ric}_q - 2 \operatorname{Hess}_q h + 2 dh \otimes dh - (\Delta_q h + 2 |dh|^2_q) q, \\
\operatorname{Scal}_{\widetilde{q}} &= e^{-2h} (\operatorname{Scal}_q - 6 \Delta_q h - 6 |dh|^2_q).
\end{aligned}$$

对于超曲面的同一向外侧,

$$H_{\widetilde{q}} = e^{-h} (H_q + 3 \nu_q h).$$

联络、Ricci 和标量曲率变换见 [26, 练习 4.7.14(1)、(4) 和 (5)]。Hessian公式由联络变换推出；对变换后的第二基本形式取迹，可在我们的外法向约定下得到平均曲率公式。

2.3. **穷举函数与Morse拓扑**。

定义 2.6 （穷竭函数与Morse记号）。 穷竭函数是一个下有界且具有紧次水平集的连续函数。对于光滑函数 f，记 Crit $f = \{df = 0\}$。若其临界Hessian非退化，则称其为莫尔斯函数；$\mathrm{ind}_x f$ 表示Hessian负特征值的个数。

定义 2.7 （三凸性）。 对于 4 维内积空间 (V, q) 上的对称型 S，令

$$\lambda^q_{(3)}(S) := \min_{\dim P=3} \mathrm{tr}^q_P S = \lambda^q_1(S) + \lambda^q_2(S) + \lambda^q_3(S),$$

其中，特征值按递增顺序排列。 f 的严格三凸性和弱三凸性分别表示

$$\lambda^q_{(3)}(\mathrm{Hess}_q f) > 0, \qquad \lambda^q_{(3)}(\mathrm{Hess}_q f) \geq 0.$$

严格三凸的莫尔斯函数的指标至多为二，且其正则子水平集的边界严格平均凸。

在紧致的4维莫尔斯带中，指标为r 的临界点贡献一个 r柄，并在同伦意义下贡献一个相对 r胞腔 [22, 定理 3.2], [23,定理 3.13–3.14]。反转该带会使柄指标变为 $4 - r$，因为临界Hessian矩阵变号。相对胞腔维数的上界针对附着到边界上的胞腔，而非整个模型的维数。

2.4. **体积比较与Green势**。

定义 2.8 （体积增长）。对于一个连通的完备4维流形，且 $\mathrm{Ric}_g \geq 0$,

$$\theta := \mathrm{AVR}(g) = \lim_{R\to\infty} \frac{\mathrm{Vol}_g B^g_R(p)}{\omega_4 R^4}, \qquad \omega_4 = \frac{\pi^2}{2},$$

与 p无关。欧氏体积增长意味着 $\theta > 0$。Bishop–Gromov 比较定理 [26, 引理 7.1.4]给出

$$\theta\omega_4 r^4 \leq \mathrm{Vol}_g B^g_r(x) \leq \omega_4 r^4 \qquad (x \in M,\ r > 0).$$

定义 2.9 （Green势）。正对称的格林核$G_g(x,\ y) = G_g(y,\ x)$ 对于 $-\Delta_g$ 在对角线之外光滑、局部可积，并且满足对每个 $\eta \in C^\infty_c(M)$,

$$\int_M G_g(x,y)(-\Delta_g \eta(x))\, d\,\mathrm{Vol}_g(x) = \eta(y).$$

对于非负源 f，记作

$$P_f(x) = \int_M G_g(x,y) f(y)\, d\,\mathrm{Vol}_g(y)$$

其中有限；格林核约定见 [19,第 5]节和 [18, 引言] 。此处所用正核的存在性已在命题 3.1中得到证明。

2.5. **群约定**。 记 F_r 为秩为 r 的自由群，记 $G *_A H$为指定同态 $A \to G$ 和 $A \to H$的推出。

如果群中的每个非单位元都能在到某个有限群的同态下保持非单位元，则称该群为剩余有限群。正则置换表示将每个有限群嵌入酉群。因此，有限维酉表示能够区分剩余有限群中的元素。

3. 格林势与三凸穷竭函数

我们构造一个格林势，由此得到两个完备共形度量：一个具有一致正标量曲率和加权里奇曲率下界，另一个则容许严格三凸莫尔斯耗尽函数。本节中的论证仅用到四维情形下的完备性、非负里奇曲率和正渐近体积比；不需要可缩性。

命题 3.1 （牛顿势）。 设（M, g）为一个无边界的连通完备光滑黎曼四维流形，满足$\mathrm{Ric}_g \geq 0$ 且$\mathrm{AVR}(g) > 0$。固定 $p \in M$，并令 ρ（x）$= 1 + d_g$（p, x）。存在一个光滑正源项 f 以及常数 $c, C > 0$，使得

$$\frac{c}{\rho^3} \leq f \leq \frac{C}{\rho^3}.$$

存在 $-\Delta_g$ 的最小正格林核 G_g，且牛顿势

$$P_f(x) := \int_M G_g(x, y) f(y)\, d\,\mathrm{Vol}_g(y)$$

处处有限，并定义了一个光滑正函数 $u = P_f$。存在常数 $L, U, D > 0$，使得

$$-\Delta_g u = f, \qquad \frac{L}{\rho} \leq u \leq \frac{U}{\rho}, \qquad |du|_g \leq \frac{D}{\rho^2}. \tag{3.1}$$

这些估计给出了如下共形数据。

命题 3.2 （共形数据）。 设 u 为命题 *3.1*中构造的势函数。存在常数 m, $B > 0$ 使得，令

$$\varphi = \log u, \qquad \bar{g} = u^2 g = e^{2\varphi} g,$$

度量 $\bar{g}$ 是完备的，$\sup_M \varphi < \infty$，且 $-\varphi$ 是一个穷竭函数。此外，

$$\begin{gathered} -\Delta_g u \geq m u^3, \qquad |d\varphi|^2_{\bar{g}} \leq B, \qquad \mathrm{Scal}_{\bar{g}} \geq 6m, \\ \mathrm{Ric}_{\bar{g}} + 2\,\mathrm{Hess}_{\bar{g}}\, \varphi + d\varphi \otimes d\varphi \geq m \bar{g}. \end{gathered} \tag{3.2}$$

同一势函数也为第二个完备共形度量给出了一个严格三凸莫尔斯耗尽函数。由此得到的指标上界将限制切割外部中相对胞腔的维数。

定理 3.3（三凸莫尔斯穷竭函数）。对于命题 u 中的势函数 *3.2*，令

$$\psi = \frac{\varphi}{3} = \frac{\log u}{3}, \qquad q = u^{2/3} g = e^{2\psi} g.$$

则（M、q）是完备的，并且具有一个满足下式的光滑莫尔斯穷竭函数 F

$$\lambda^{q}_{(3)}(\mathrm{Hess}_q F) > 0 \qquad on\ M.$$

特别地，

$$\mathrm{ind}_x F \le 2 \qquad (x \in \mathrm{Crit}\, F).$$

中指数的选取将加权里奇估计与三凸性联系起来。为说明这一点，设 b 是对应于 $\bar{g}$的射线布塞曼函数，并设 h 是引理A.2中构造的光滑局部下支撑之一。在接触点处，$|dh|_{\bar{g}} = 1$ 且$\mathrm{Hess}_{\bar{g}}\, h$（$\nabla_{\bar{g}} h$，$\nabla_{\bar{g}} h$）$= 0$。因此，共形海森公式给出

$$\mathrm{tr}^{q}_{\ker dh} \mathrm{Hess}_q\, h = e^{4\varphi/3} \left(\Delta_{\bar{g}} h - 2\langle d\varphi, dh \rangle_{\bar{g}} \right).$$

利用（3.2）的指标型估计可知，括号中的表达式为正。因此，该指数与加权里奇曲率界所提供的漂移系数相匹配。

仅在 $\ker dh$ 上的正性尚不能控制每个三维平面。递增的凸重参数化 χ 贡献正项 $\chi''(h)\, dh \otimes dh$ 到 Hessian矩阵中；在连续的紧集上选取足够大的 χ''/χ'，即可在所有三维平面上得到正性。根据引理 A.1中的环带直径估计，Busemann函数是真函数。随后，Shen 的逼近引理给出光滑严格三凸 Morse 穷竭函数 [29, 第 3.1 节，引理 5]。附录A.3证明了逼近所需的支集构造和局部一致估计。

注。对于 $\mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$上的欧几里得模型，取 $u = r^{-1}$，其中 $r = |x|$。令 $t = \log r$ 并取 $s = \frac{3}{2} r^{2/3}$后，共形度量变为

$$\bar{g} = dt^2 + g_{S^3}, \qquad \mathrm{Scal}_{\bar{g}} = 6, \qquad q = ds^2 + \left(\frac{2s}{3}\right)^2 g_{S^3}.$$

此外，

$$\mathrm{Hess}_q\, t = \frac{3}{2s^2}(q - 2\, ds \otimes ds), \qquad \lambda^{q}_{(3)}(\mathrm{Hess}_q\, t) = \frac{3}{2s^2} > 0.$$

此模型展示了两种共形度量的不同作用，且仅在原点以外加以考察。

4. 有限外部基本群

我们保留定理 q 中的完备度量3.3。对 q 的每个严格三凸莫尔斯耗尽函数，都会产生一个共尾族，其中包含连通的平均凸核，且其外部基本群的阶一致有限。证明结合了 [7, 定理 4.8] 中的环带估计，以及莫尔斯指标界所提供的外部满射；参见附录 B。

我们对任意穷竭函数陈述该结果 H，因为第 5 节同时使用了上述构造的穷竭函数 F 以及与所选切割相关联的全局定义函数 G。

定理 4.1 (有限外部基本群)。在条件 *1* 下，设 q 为上述固定的完备度量，并设 H 为 q的任意光滑严格三凸 *Morse* 穷竭函数。存在严格递增的正则值 $t_i \to \infty$，满足 $H(p) < t_1$。设 D_i 为包含 $\{H \le t_i\}$的连通分支 p。每个 D_i 都是连通紧正则区域，并且 Y_{D_i}和 O_{D_i} 均为道路连通。存在一个常数 $N_H \in \mathbb{N}$ 使得

$$
\begin{aligned}
&D_i \subset \operatorname{int} D_{i+1} \quad (i \ge 1), \qquad \bigcup_{i\ge 1} \operatorname{int} D_i = M,\\
&H_q(Y_{D_i}) > 0 \quad (i \ge 1),\\
&|\pi_1(O_{D_i})| \le N_H \quad (i \ge 1),\\
&\pi_1(O_{D_j}) \twoheadrightarrow \pi_1(O_{D_i}) \quad (j \ge i \ge 1).
\end{aligned} \tag{4.1}
$$

界 N_H 可选为仅依赖于(M, g)，而与H无关。所示映射由实际嵌入及相容的基点路径诱导。

对于穷竭函数 F 定理 3.3的 s_i 和 C_i ，我们将这些层和核心记为上述符号；从现在起它们保持不变。

5. 正标量曲率切割

我们构造边界具有正标量曲率、且是全局严格三凸莫尔斯穷竭函数的正则次水平集的紧致区域。恒等式 $\Gamma = \{G \le 0\}$ 使得外部有限性定理能够应用于同一穷竭函数的更大核心。

在本节中，固定共形数据、Morse 数据以及 C_i 定理 3.3–4.1中的紧正则区域。特别地，度量 q 保持不变。

5.1. **边界连通性与基本群**。我们首先记录用于获得连通性以及基本群上的满射性的边界定理。

定理 5.1 （谱边界定理）。 设（M, g）是一个光滑黎曼四维流形，且 $K \subset M$ 是一个连通紧正则

区域。假设 $v > 0$ 在 K 附近光滑，并且

$$(-\Delta_g v)g + v\,\mathrm{Ric}_g > 0 \quad on\ K,$$
$$H_g(Y_K) + v^{-1}\nu_g v \geq 0 \quad on\ Y_K.$$

于是 Y_K 是连通的，且包含映射诱导出满射

$$\pi_1(Y_K) \twoheadrightarrow \pi_1(K).$$

这是 [1, 定理 2], 在 $n = 4$ 和 $\gamma = 1$情形下的紧致情况。张量不等式等价于 $-\Delta_g v + v\lambda^g$ 最小值$(\mathrm{Ric}g) > 0$； K 的紧性保证了完备性和一个紧边界分支，而 $1 \leq (4-1)/(4-2) = 3/2$处于允许范围内。

推论 5.2 (平均凸边界群)。 对于固定的共形数据，每个满足 $H_q(Y_K) > 0$ 的连通紧正则区域 K 都具有连通边界，且包含映射诱导出满射

$$\pi_1(Y_K) \twoheadrightarrow \pi_1(K).$$

证明。我们有

$$(-\Delta_g u)g + u\,\mathrm{Ric}_g \geq mu^3 g > 0.$$

由于 $q = u^{2/3}g$，共形平均曲率公式给出

$$H_q(Y_K) = u^{-1/3}(H_g(Y_K) + \nu_g \log u). \tag{5.1}$$

应用定理 5.1 与 $v = u$。 □

5.2. **强迫与最外层正标量曲率边界**。 强迫函数提供边界屏障以及由稳定性推导正标量曲率所需的正性。

命题 5.3 (晚期正强迫)。 对于每个 i，存在 $j > i$ 以及一个正函数 $h \in C^\infty(M)$，使得，对于

$$A = C_i, \qquad B = C_j, \qquad k = u^{2/3}h,$$

我们有

$$\begin{aligned} A \subset \mathrm{int}\, B, \qquad & h^2 - 2|dh|_{\bar{g}} \geq -m, \\ H_q(Y_A) < k, \qquad & H_q(Y_B) > k. \end{aligned} \tag{5.2}$$

此外，

$$\mathrm{Scal}_q + \frac{4}{3}k^2 - 2|dk|_q > 0. \tag{5.3}$$

定义 5.4 （弱外最紧正则区域）。 设 $(M,\ q)$ 是一个光滑黎曼四维流形，设 B 是一个紧正则区域，并设 $k \in C^\infty(M)$ 在 B 上为正。若紧正则区域 $T \subset \mathrm{int}\ B$ 对于 $H_q \leq k$ 在 B 中是弱最外层的，则若 $H_q(Y_T) \leq k$，并且满足以下性质：每个满足条件的紧正则区域 L

$$T \subseteq L \subset \mathrm{int}\, B, \qquad H_q(Y_L) \leq k$$

必须等于 T。

对于正标量曲率边界以及下文的包壳捕获论证，我们都使用以下存在性定理。

定理 5.5（最外层预设平均曲率区域）。设(M, q)是一个完备连通定向黎曼四维流形，且 $A \subset$ 内部 B 是紧正则区域。设 $\psi \in C^\infty(M)$ 在 B上为正，并假设

$$H_q(Y_A) < \psi, \qquad H_q(Y_B) > \psi.$$

那么存在一个紧正则区域 E，使得

$$A \subset \operatorname{int} E, \qquad E \subset \operatorname{int} B, \qquad H_q(Y_E) = \psi,$$

其中包含满足以下条件的每个紧正则区域 D

$$A \subseteq D \subset \operatorname{int} B, \qquad H_q(Y_D) \leq \psi.$$

这由 [8, 定理 5.1]（初始数据张量为 $(\psi/3)q$；参见附录 C。

命题 5.6（最外层正标量曲率边界）。对于 A、B、k在命题 5.3中，存在一个紧正则区域 T，其对于 $H_q \leq k$ 在 B中是弱最外层的，使得

$$A \subset \operatorname{int} T, \qquad T \subset \operatorname{int} B, \qquad H_q(Y_T) = k.$$

其边界 Y_T 具有正标量曲率。

推论 5.7（包含内部核心的连通分支）。令 K 为 T 中包含 A的连通分支。那么 K 是一个紧正则区域，并且

$$A \subset \operatorname{int} K, \qquad H_q(Y_K) > 0.$$

边界 Y_K 是连通的并具有正标量曲率，且包含映射诱导出

$$\pi_1(Y_K) \twoheadrightarrow \pi_1(K).$$

证明。边界 Y_K是 Y_T的若干连通分支的并，且 H_q（Y_K） $= k > 0$。应用推论 5.2。□

5.3. **内向领圈**。足够小的向内位移会保持严格平均凸性以及边界的微分同胚类型。我们在包壳捕获论证中利用这一自由度。

引理 5.8 (向内领域切割)。设 K 为推论 5.7中的连通分支。存在一个连通紧正则区域 Γ 使得

$$A \subset \operatorname{int} \Gamma, \qquad \Gamma \subset \operatorname{int} K, \qquad H_q(Y_\Gamma) > 0,$$

且 Y_Γ 与 Y_K微分同胚。因此，Y_Γ 是连通的并具有正标量曲率，且包含映射诱导出

$$\pi_1(Y_\Gamma) \twoheadrightarrow \pi_1(\Gamma).$$

5.4. 切割的全局定义莫尔斯水平集。对于非空紧集 K，将其弱三凸包定义为

$$\widehat{K}_3^q = \left\{ x \in M : \begin{array}{l} v(x) \le \max_K v \text{ for every } v \in C^\infty(M) \\ \text{with } \lambda^q_{(3)}(\mathrm{Hess}_q\, v) \ge 0 \end{array} \right\}.$$

这是环境光滑的 p-凸包 [14, 定义 3。1], 其中 $p = 3$ 采用 [14, 定义 2。2′]。包络相等性意味着，任何位于 K 之外的点都可以与 K 通过弱三凸光滑函数分离。这是一种环境分离性质；仅有内部的三凸性并不能保证这种相等性。

下面的最大值原理提供了一种有用的方法，无需逐一构造分离函数，即可检测这种分离性质。

定义 5.9（相对最大值原理）。对于闭集 S 和开集 Ω，若每个在 S 处于 $x \in S \cap \Omega$ 上取得局部最大值的光滑局部测试函数 ψ，都存在某个三维平面 $P \subset T_xM$ 使得，则记作 $\mathrm{MP}^q(S;\Omega)$

$$\mathrm{tr}^q_P \,\mathrm{Hess}_q\, \psi(x) \le 0.$$

利用在接触点附近恒等于一的截断函数，可以将局部测试函数延拓为全局光滑函数，两者等价。

引理 5.10（直接紧捕获）。设 A、B、k、T为命题 5.6中的障碍函数和最外域，并设 K 为包含A的连通分支。设 $\Gamma \subset \mathrm{int}\, K$ 为一个内向领圈切割。假设 M 具有一个光滑严格三凸穷竭函数 F，并选取一个光滑领圈定义函数 r 以及一个满足条件的数 $c < 0$：

$$\Gamma = \{x \in K : r(x) \le c\},$$

并且在整个 $K \setminus \Gamma$ 中，

$$dr \neq 0, \qquad \mathrm{tr}^q_{(\nabla_q r)^\perp} \mathrm{Hess}_q\, r > 0.$$

每个满足 MP^q（S； $M \setminus \Gamma$） 的紧致集 $S \subset B$ 都包含于 Γ 中。

关键在于，仅利用 k的正下界、 B上的环境几何，以及 Γ 与 Y_T之间的分离来固定一个保护半径；参见引理 C.2。随后扩大 T 以包含 S，并仅在 S的一个更小邻域内增强强迫项。给定平均曲率定理给出一个包围域 E，其边界利用相同的保护估计保持在该邻域之外。因此，在新的边界上有 H_q（Y_E） $= k$，而原有的最外性迫使 $E = T$。穷竭函数排除了 T的其他连通分支，而对领圈坐标进行凸重参数化则排除了 $S \setminus \Gamma$。完整证明，包括一致的保护估计，见附录 C。

弱包满足相对最大值原理，而穷竭函数使其成为紧致集。对于此处构造的切割，包含F 的一个包围正则水平集也会将包置于 B之内。引理 5.10 因此给出以下环境包络相等性。

引理 5.11（向内切割的包捕获）。引理 *5.8* 中的向内领圈构造可以作如下安排：

$$\widehat{\Gamma}_3^q = \Gamma.$$

结合严格平均凸性，这一分离性质使领圈定义函数能够延拓为全局严格三凸穷竭函数：通过凸重参数化使局部定义函数变为严格的，再利用凸包分离函数和平滑最大值，将其与边界之外的穷竭函数拼接起来。随后，在零水平集附近固定不变的精细莫尔斯逼近便能保持所选区域不变。

定理 5.12 (具有全局定义莫尔斯水平集的正标量曲率切割**)。** 在条件 *1*下，保留定理 *3.3–4.1*的固定数据。对于每个紧致$Q \subset M$，存在一个连通紧正则区域 Γ 以及一个光滑严格三凸莫尔斯穷竭函数 G，定义在 q 上，且满足

$$Q \subset \operatorname{int}\Gamma, \qquad H_q(Y_\Gamma) > 0.$$

边界 Y_Γ 是连通的，且承载正标量曲率；包含映射诱导

$$\pi_1(Y_\Gamma) \twoheadrightarrow \pi_1(\Gamma).$$

该区域及其边界由下式给出

$$\Gamma = \{G \le 0\}, \qquad Y_\Gamma = \{G = 0\},$$

在 Y_Γ 上使用 $dG \neq 0$。此外，

$$\lambda^q_{(3)}(\operatorname{Hess}_q G) > 0 \quad on\ M,$$
$$\operatorname{ind}_x G \le 2 \quad for\ x \in \operatorname{Crit} G.$$

定义域 Γ 和函数 G 可以依赖于 Q，而 q 保持固定。

凸包捕获引理和全局定义水平集定理的证明见附录C。

6. 从莫尔斯带到单连通外部

本节给出一个拓扑判据，用于判断正标量曲率切割是否具有单连通外部。莫尔斯带提供了一个相对胞腔模型；在几何应用中，它还给出一个有限外部群。该判据本身只要求外部群不包含任何与自由群 F_2 同构的子群。正标量曲率边界分解、Gerstenhaber–Rothaus定理的胞腔形式以及光滑填充障碍，进而确定范坎彭定理所需的边界群映射。

该判据在定理6.14的条件2下陈述，且独立于第5节中的几何构造。详细证明汇集于附录D。

对于一个群 G，记 $H_i(G;\mathbb{Z})$ 为 $= H_i(BG;\mathbb{Z})$，其中 BG 是一个基本群为 G 且具有可缩万有覆盖的连通 CW 复形。特别地，$H_1(G;\mathbb{Z}) = G/[G,G]$。对于一个空间 X，群 $H_2(X)$ 和

H_2（π_1（X）；$\mathbb{Z}$）不一定相同；下面的比较使用霍普夫同调满射 [4, 节 0]。

6.1. **莫尔斯带提供的拓扑数据**。

定义 6.1（平均凸带莫尔斯数据）。 设 (M, q) 是一个光滑黎曼四维流形，且 $K \subset \operatorname{int} B$ 是紧正则区域。若存在 $a \in C^\infty(M)$，其位于 $B \setminus \operatorname{int} K$ 内的临界点均具有非退化海森矩阵，则记为 $\mathrm{Band}^q(K, B)$。其边界值以及对该带内每个 x 所要求的逐点条件必须满足

$$\begin{aligned} a|_{Y_K} = 0, \qquad & a|_{Y_B} = 1, \\ \operatorname{ind}_x a \le 2 \qquad & \text{if } da_x = 0, \\ \operatorname{tr}^q_{(\nabla_q a)^\perp} \operatorname{Hess}_q a(x) > 0 \qquad & \text{if } da_x \neq 0. \end{aligned} \tag{6.1}$$

对 a 的内部取值不施加范围限制。

引理 6.2（带数据的边界定向）。 假设 $\mathrm{Band}^q(K, B)$ 且$H_q(Y_K)$ $H_q(Y_B) > 0$。任何 a 实现这些带数据的函数都满足

$$da \neq 0 \quad on\ Y_K \cup Y_B,$$

且 $\nabla_q a$ 同时指向 K 和 B 的外侧。

定义 6.3（相对胞腔模型）。 在 Y_K 上固定一个有限 CW 结构。(E_K, Y_K) 的相对 0、1、2胞腔模型 由一个 CW 复形 X、一个将 Y_K 与 X 的子复形识别起来的保胞腔识别 j，以及一个同伦等价 $e\colon X \to E_K$ 组成，使得

$$e \circ j = (Y_K \hookrightarrow E_K).$$

复形 X 由 $j(Y_K)$ 通过附加维数为 0、1、2 的相对胞腔得到，且不必是有限的。

命题 6.4（莫尔斯切割的相对拓扑）。 在条件 *1*下，设H 和 D_i 如定理 *4.1*所述。假设 $K \subset \operatorname{int} D_j$ 是一个边界连通的连通紧正则区域，$H_q(Y_K)$ > 0，且 带$^q(K, D_j)$。那么 O_K 道路连通，且包含映射诱导一个满射

$$\pi_1(O_{D_j}) \twoheadrightarrow \pi_1(O_K),$$

and

$$H_\ell(M, K) = 0 \quad (\ell \ge 3), \qquad H_2(M, K) \text{ is torsion-free.} \tag{6.2}$$

每个定义在 Y_K 上的有限 *CW* 结构都可扩展为一个相对胞腔模型，如定义 *6.3* 所述。

推论 6.5 (同调与外部有限性)。 在命题 *6.4*的假设下，$H_1(K)$是无挠的，并且

$$|\pi_1(O_K)| \le N_H, \qquad H_2(K) = H_3(K) = 0,$$

其中，N_H 是定理*4.1*中的界。

证明。 外部群是 $\pi_1(O_{D_j})$ 的商。 M 的可缩性以及 (M, K) 的正合列给出

$$H_2(K) \cong H_3(M, K) = 0,$$
$$H_3(K) \cong H_4(M, K) = 0,$$
$$H_1(K) \cong H_2(M, K).$$

这些断言由命题 6.4 推出。 □

我们汇总这些推论，以及拓扑论证所需的边界数据。

条件 2 （拓扑切割假设）。 设 M 是一个可缩光滑4-流形， $K \subset M$ 是一个具有连通边界的连通紧正则区域。记 $Y = Y_K$、 $O = O_K$ 和 $E = E_K$。假设 Y 具有正标量曲率， O 道路连通，并且 $\pi_1(O)$ 不含与 F_2 同构的子群。还假设 $H_1(K)$ 无挠，且

$$\pi_1(Y) \twoheadrightarrow \pi_1(K), \qquad H_2(K) = H_3(K) = 0. \tag{6.3}$$

所示的边界群映射由包含映射诱导。还假设命题 6.7 中的同时边界数据可以选取为使所得的有限 CW 结构 Y 可扩展为定义 6.3 中所述的相对胞腔模型。只要求这一选定的 CW 结构满足该条件。

排除 F_2 尤其适用于有限群和可 amenable 群。在几何应用中，推论 6.5给出了有限性，而命题 6.4 为每个有限边界 CW 结构（因此也为此处所需的结构）提供了一个相对模型。

引理 6.6 (边界同调映射)。 设 M 为一个可缩光滑4-流形， $K \subset M$ 为一个具有连通边界的连通紧正则区域。若 $H_2(K) = H_3(K) = 0$ 且 $H_1(K)$ 无挠，则包含映射诱导

$$H_1(Y_K) \xrightarrow{\cong} H_1(K), \qquad H_2(Y_K) \xrightarrow{\cong} H_2(E_K),$$
$$H_1(E_K) = 0. \tag{6.4}$$

尤其是， $H_1(Y_K)$ 无挠。

6.2. **正标量曲率边界胞腔与辅助填充**。 接下来的构造记录了同一正标量曲率连通和分解的两个推论。无环子复形保留同调球面连通和项的群，而边界手术则去除 $S^1 \times S^2$ 连通和项。式（6.5）中指定的连接同态将所得填充的同调与 K的同调联系起来。

命题 6.7 （正标量曲率边界胞腔和辅助填充）。 设 K 是一个单连通光滑四维流形中的连通紧正则区域。假设 $Y = \partial K$ 是连通的，具有正标量曲率，并且 H_1（Y） 无挠。令 P 表示庞加莱同调球面。

可以同时构造以下数据。

（*1*） Y 上的一个有限 *CW* 结构，其中包含一个三胞腔且没有更高维胞腔，以及一个有限连通无环子复形

$$A \subset Y^{(2)}, \qquad \dim A \le 2.$$

存在一族选定的开二维胞腔 $e_1^2, \dots, e_s^2$，其附着映射在 A 的点处为常值。其他所有二维胞腔均属于 A。群 $\pi_1(A)$ 是剩余有限的。

(2) 辅助光滑四维流形中的一个连通紧正则区域 D，以及一个连续嵌入 $f\colon K \hookrightarrow D$，使得对于某些整数 $r, v \ge 0$，

$$\partial D \cong \#_{\ell=1}^{v} (\pm P), \qquad \pi_1(\partial D) \cong \pi_1(A),$$
$$\pi_1(Y) \cong \pi_1(\partial D) * F_r, \qquad H_1(Y) \cong \mathbb{Z}^r.$$

每个直和项都带有 P 的两种定向之一，而空和为 S^3。

(3) 在书写有序对 (D, K) 时，将 K 与 $f(K)$ 等同，

$$H_1(D, K) = 0, \qquad H_2(D, K) \cong \mathbb{Z}^r.$$

对于连接同态 $\delta\colon H_2(D, K) \to H_1(K)$，存在 $H_2(D, K)$ 的一组基 $(e_1, \dots, e_r)$，以及 $H_1(Y)$ 的一组基 $(b_1, \dots, b_r)$，使得

$$\delta e_i = (Y \hookrightarrow K)_* b_i \qquad (1 \le i \le r). \tag{6.5}$$

该构造使用正标量曲率分类 [6, 命题 2.2 和推论 2。3]，脊存在性和正则邻域结果 [30,定理 2.5 和 2。1]，以及以下述内容为模型的边界手术 W_2 见 [27,例 8.26(i)]，其中有 $m = 3$ 以及 $i = 1$。

6.3. **无环边界子复形的单射性**。以下定理是 Gerstenhaber–Rothaus定理 [12,定理 1(ii)] 的胞腔重述。在二阶同调假设消失、且解取自同一个酉群的情况下，相应的可解性陈述也见于 [25, 引理 2.1(1)]。剩余有限性将这一延拓性质转化为子复形群的单射性。外部判据将这一延拓性质与边界胞腔及光滑填充障碍结合起来。

定理 6.8 (Gerstenhaber–Rothaus定理的胞腔形式)。 设 (Z, A) 是一个有限 *CW*对，其中 A 和 Z 连通。假设所有相对胞腔的维数为0、1、2，且 $H_2(Z, A) = 0$。对于每个整数 $d \ge 1$ 以及每个表示 $\rho\colon \pi_1(A) \to U(d)$，存在一个表示 $\widetilde{\rho}\colon \pi_1(Z) \to U(d)$满足

$$\widetilde{\rho} \circ i_* = \rho, \qquad i : A \hookrightarrow Z.$$

如果 $\pi_1(A)$ 是剩余有限的，那么 i_* 是单射。

推论 6.9 (二维复形的无环子复形)**.** 设 Z 是一个连通的、维数至多为二的 *CW* 复形（可以是无限的），且满足$H_2(Z) = 0$。设 $A \subset Z$ 是一个有限连通子复形，满足 $H_1(A) = 0$，并且 $\pi_1(A)$ 是剩余有限的。那么包含映射诱导一个单射

$$\pi_1(A) \hookrightarrow \pi_1(Z).$$

尤其是，如果 π_1（Z）是有限的，那么 π_1（A）也是有限的。

命题 6.7 中的选定球面胞腔给出了外部的第二同调。将它们移除后，便得到推论 6.9 所适用的二维复形。

引理 6.10 （删除后的二维复形）。 在条件 *2*下，选取边界 *CW* 结构以及命题 *6.7* 中的同步数据，使所需的相对胞腔模型存在。令 A为其无环子复形。选取这样一个相对胞腔模型 （X， j， e），并令

$$Z := X^{(2)} \setminus \bigcup_{\alpha=1}^{s} j(e_\alpha^2).$$

于是 Z 是一个维数至多为二的连通 *CW* 复形，其中包含 j（A）作为子复形，而且

$$H_2(Z) = 0, \qquad \pi_1(Z) \cong \pi_1(E_K).$$

因此，包含映射和比较映射诱导出一个单射

$$\pi_1(A) \hookrightarrow \pi_1(E_K) \cong \pi_1(O_K).$$

6.4. **从辅助填充到自由边界群**。 剩余的障碍来自光滑四维拓扑。对于定向光滑流形，自旋结构的障碍是 $w_2(TD) \in H^2(D; \mathbb{Z}/2)$[9, 第 2.4 节和第 3.2] 节。我们用 $\sigma(D)$表示其交叉形式的签名；特别地， $H_2(D;\mathbb{R}) = 0$ 意味着 $\sigma(D) = 0$ [27, 第 6 节。4]

定理 6.11 (Rokhlin)。 设 D 是一个边界为整同调球面 Σ的紧致光滑自旋*4*维流形。那么

$$\sigma(D) \equiv 8\mu(\Sigma) \pmod{16},$$

其中 μ（Σ） $\in \mathbb{Z}/2$是*Rokhlin*不变量。此外， μ（P） $= \mu$（$-P$） $= 1$ [9,第 3.8–3.9] 节。

命题 6.12 （自由边界群）。 在条件 *2*下，选择命题 *6.7* 中的、与该条件下的相对胞腔模型相容的同时数据 A、 D、 r、 v 。那么 $v = 0$、 $\partial D \cong S^3$，并且

$$\pi_1(A) = 1, \qquad \pi_1(\partial D) = 1, \qquad \pi_1(Y) \cong F_r, \tag{6.6}$$
$$H_1(D) = H_2(D) = 0.$$

事实上， $\pi_1(A)$是由 v 个二元二十面体群$\pi_1(P)$自由积而成的，并嵌入到 $\pi_1(O_K)$中。两个或更多这样的因子包含 F_2，因此群假设迫使 $v \le 1$。辅助填充的第一

同调和第二同调均为零，而罗赫林定理排除了剩下的情形$\partial D = \pm P$。这是唯一用到外部群限制的一步。

6.5. **从边界群到外部。** 一旦边界群是自由群，其到 $\pi_1(K)$ 的由包含映射诱导的满射便由已确定的同调所决定。

引理 6.13 (同调核平凡的自由群满射)。 设$r \geq 0$，且 $a\colon F_r \twoheadrightarrow G$ 是群满同态。若 $H_1(a;\mathbb{Z})$ 是单射，且 $H_2(G;\mathbb{Z}) = 0$，则 a 是同构。

定理 6.14 (单连通外部的判据)。 在条件 *2*下，O_K 是单连通的。

证明。 由命题 6.12， $\pi_1(Y) \cong F_r$。对于由包含映射诱导的满射

$$a : \pi_1(Y) \twoheadrightarrow \pi_1(K),$$

引理 6.6 使 $H_1(a;\mathbb{Z})$ 成为同构。霍普夫同调满射 [4,第 0] 节给出

$$0 = H_2(K) \twoheadrightarrow H_2(\pi_1(K);\mathbb{Z}).$$

引理6.13 因此表明 a 是一个同构。

带领圈的范坎彭推出现在给出

$$1 = \pi_1(M) \cong \pi_1(K) *_{\pi_1(Y)} \pi_1(E_K) \cong \pi_1(E_K). \tag{6.7}$$

由于 $O_K \simeq E_K$ 和 O_K 是道路连通的， O_K 是单连通的。 □

7. 共尾性与识别

现在我们将拓扑判据应用于第 5 节中的切割。每个切割的定义穷竭函数提供了此次应用所需的莫尔斯带和有限外部群。

命题 7.1 （定义层级提供一个莫尔斯带）。 设 Γ， G 如定理 *5.12* 中所述，并将定理 *4.1* 应用于 $H = G$。在所得正则序列中，取充分大的正层级 s ，令 B 为$\{G \leq s\}$ 中包含 p的连通分支。则

$$\Gamma \subset \operatorname{int} B, \qquad H_q(Y_B) > 0, \qquad |\pi_1(O_B)| < \infty.$$

此外，带$q(\Gamma, B)$ 成立，且由以下对象实现

$$a = \frac{G}{s}, \qquad a|_{Y_\Gamma} = 0, \qquad a|_{Y_B} = 1.$$

因此， Γ 满足条件*2*。

证明见附录E。

定理的证明 *1.2*。 给定一个紧集 $Q \subset M$，定理 5.12给出 Γ， G其中 $Q \subset \operatorname{int}\Gamma$。命题 7.1 验证了该 对象满足条件 2 Γ。因此，定理 6.14使 O_Γ 成为单连通的。 □

定义 7.2（无穷远处单连通）。 若一个非紧流形M满足以下条件，则称其为无穷远处单连通： 对每个紧 $Q \subset M$，都存在一个紧 $L \supset Q$，使得 $M \setminus L$ 中的每个环路都可以延拓为 $M \setminus Q$中的一个圆盘。

命题 7.3。 在条件 *1*下， M 在无穷远处单连通。

证明。 给定紧致集 Q，选取 Γ，取自定理 1.2，并取 $L = \Gamma$。中的每个环路 $M \setminus L = O_\Gamma$ 都可在其中收缩，因此也可在 $M \setminus Q$中收缩。这些连通补集构成无穷远邻域的一个共尾族，因此 M 也只有一个端。 □

定理 7.4 (可缩开四维流形识别)。 一个在无穷远处单连通的可缩开拓扑四维流形同胚于$\mathbb{R}^4$ [10, 推论 1.2，第 366]页。

定理 *1.1* 的证明。 在条件 1下， M 是一个开可缩四维流形；特别地， $\pi_1(M) = 1$并且 $H_2(M;\ \mathbb{Z}) = 0$。命题 7.3和定理 7.4 因此得到 $M \cong_{\mathrm{top}} \mathbb{R}^4$。 □

8. 结论

这一论证将切割的几何构造与其外部的拓扑识别区分开来。第 3节中的解析构造不要求可缩性。在可缩的情形下，引理 5.10 给出了识别环境三凸包所需的紧集捕获，而定理 5.12则将由此得到的正标量曲率切割实现为全局严格三凸莫尔斯穷竭函数的一个正则次水平集。这样的实现使同一域的边界几何与外部莫尔斯拓扑都得以应用。

只要定理 6.14 的边界、同调和相对胞腔假设成立，且外部群不含与 F_2 同构的子群，就可以独立使用该定理。因此，它涵盖有限外部群和可和外部群。胞腔版 Gerstenhaber–Rothaus 定理提供了代数输入；它与边界胞腔结构及光滑填充障碍相结合，才导出了外部判据。这里得到的是拓扑识别。若要得出微分同胚的结论，还需要对光滑结构加以额外控制。

AI 使用情况

作者使用了 ChatGPT（OpenAI；主要为 GPT-6.1 Sol，偶尔使用 GPT-6.1 Terra）和 Claude（Anthropic；Opus 5.5）。这些工具协助进行文献检索、数学探索、论证和计算的检查，以及常数和参数选择的完善。它们还协助进行英文翻译、编辑、LaTeX 排版和参考文献准备。由人工智能生成的参考文献条目均由第一作者核查。作者对本文内容承担全部责任。

参考文献

[1] G. Antonelli、Y. Li、P. Sweeney Jr.，《谱里奇下界和平均凸边界下的刚性与柔性》，arXiv:2605.11384v1（2026）。doi:10.48550/arXiv.2605.11384。[2] D. Azagra、J. Ferrera、F. López-Mesas、Y. Rangel，《黎曼流形上利普希茨函数的光滑逼近》，J. Math. Anal. Appl. 326（2007），第2期，1370–1378。doi:10.1016/j.jmaa.2006.03.088。[3] F. Berlai，《自由积的剩余性质》，Comm. Algebra 44（2016），第7期，2959–2980。doi:10.1080/00927872.2015.1065858。[4] K. S. Brown，《群上同调讲义》，载于《群上同调与代数K理论》，Adv. Lect. Math.（ALM），第12卷，International Press，Somerville，MA，2010，第131–166页。作者版本。[5] J. S. Calcut、R. E. Gompf，《端和与无穷远处的1-柄的唯一性》，Algebr. Geom. Topol. 19（2019），第3期，1299–1339。doi:10.2140/agt.2019.19.1299。[6]O. Chodosh、D. Máximo、A. Mukherjee，《具有一致正标量曲率的完备黎曼4-流形》，arXiv:2407.05574v1（2024）。doi:10.48550/arXiv.2407.05574。[7]A. Cucinotta、M. Magnabosco、D. Semola，《具有非负里奇曲率的空间的新拓扑限制》，arXiv:2601.14231v1（2026）。doi:10.48550/arXiv.2601.14231。[8] M. Eichmair，《广义视界的存在性、正则性与性质》，Comm. Math. Phys. 294（2010），第3期，745–760。doi:10.1007/s00220-009-0970-6。[9] S. Finashin、V. Kharlamov，《罗赫林符号可除性定理概览》，arXiv:2012.06389v1（2020）。doi:10.48550/arXiv.2012.06389。[10] M. H. Freedman，《四维流形的拓扑》，J. Differential Geom. 17（1982），第3期，357–453。doi:10.4310/jdg/1214437136。[11] G. J. Galloway、R. Schoen，《霍金黑洞拓扑定理向高维的推广》，Comm. Math. Phys. 266（2006），第2期，571–576。doi:10.1007/s00220-006-0019-z。[12] M. Gerstenhaber、O. S. Rothaus，《群中的方程组的解》，Proc. Natl. Acad. Sci. USA 48（1962），第9期，1531–1533。doi:10.1073/pnas.48.9.1531。[13] D. Gilbarg、N. S. Trudinger，《二阶椭圆型偏微分方程》，第2版，数学经典，Springer，2001年（1998年版本的重印）。doi:10.1007/978-3-642-61798-0。[14] F. R. Harvey、H. B. Lawson, Jr.，p-凸性、p-多重次调和性与莱维问题，Indiana Univ. Math. J. 62（2013），第1期，149–169。doi:10.1512/iumj.2013.62.4886。[15] A. Hatcher，《代数拓扑》，剑桥大学出版社，2002年。作者在线版本。[16] M. W. Hirsch，《微分拓扑》，数学研究生教材，第33卷，Springer，1976年。doi:10.1007/978-1-4684-9449-5。[17] J. M. Lee，《光滑流形导论》，第2版，数学研究生教材，第218卷，Springer，2012年。doi:10.1007/978-1-4419-9982-5。[18] P. Li、L.-F. Tam，《完备流形上的对称格林函数》，Amer. J. Math. 109（1987），第6期，1129–1154。doi:10.2307/2374588。[19] P. Li、S.-T. Yau，《薛定谔算子的抛物型核》，Acta Math. 156（1986），153–201。doi:10.1007/BF02399203。

[20] R. C. Lyndon、P. E. Schupp，《组合群论》，数学经典，Springer，2001年（1977年版本的重印版）。doi:10.1007/978-3-642-61896-3。[21] J. Malestein、A. Putman，《曲面群下中心列深处曲线的自交》，Geom. Dedicata 149（2010），第1期，73–84。doi:10.1007/s10711-010-9465-z。[22] J. Milnor，《Morse理论》，数学研究年刊，第51卷，Princeton University Press，1963年。doi:10.1515/9781400881802。[23] J. Milnor，《h-余边界定理讲义》，数学札记，第1卷，Princeton University Press，1965年。1965年版本扫描件。[24] L. Ni、Y. Shi、L.-F. Tam，《完备Kähler流形上的Poisson方程、Poincaré–Lelong方程与曲率衰减》，J. Differential Geom. 57（2001），第2期，339–388。doi:10.4310/jdg/1090348114。[25] M. Nitsche、A. Thom，《群方程的普遍可解性》，J. Group Theory 25（2022），第1期，1–10。doi:10.1515/jgth-2019-0167。[26] P. Petersen，《黎曼几何》，第3版，《数学研究生教材》，第171卷，Springer，2016年。doi:10.1007/978-3-319-26654-1。[27] A. Ranicki，《代数与几何手术》，牛津数学专著，Oxford University Press，2002年。作者修订后的电子版（2014年3月）。[28] D. Semola，《具有非负里奇曲率和欧氏体积增长的完备4-流形的大尺度结构》，Indag. Math.（N.S.）37（2026年），第3期，764–798。doi:10.1016/j.indag.2025.04.003。[29] Z. Shen，《关于具有非负 kth-里奇曲率的完备流形》，Trans. Amer. Math. Soc. 338（1993），第1期，289–310。doi:10.1090/S0002-9947-1993-1112548-6。[30] A. Yu. Vesnin、S. V. Matveev、E. A. Fominykh，《3-流形复杂性理论的新方面》，Russian Math. Surveys 73（2018），第4期，615–660。doi:10.1070/RM9829。

附录

附录 A. 第 3

在本附录中，$(M,\ g)$ 和 p 满足命题3.1的假设；不作可缩性假设。

A.1. **命题3.1的证明。**

证明。 我们首先构造一个光滑正源项 f，使其满足

$$c\rho^{-3} \le f \le C\rho^{-3}.$$

由于 M 是第二可数的，且 d_g 诱导其流形拓扑，$(M,\ d_g)$ 是可分的。此外，

$$|\rho(x)^{-3} - \rho(y)^{-3}| \le 3|\rho(x) - \rho(y)| \le 3d_g(x,y),$$

所以 ρ^{-3} 是利普希茨的。

固定 $0 < \varepsilon < 1$。将 [2, 定理 1] 应用于 ρ^{-3}，并取正连续误差项 $\varepsilon\rho^{-3}$，可得 $f \in C^\infty(M)$，使得

$$|f - \rho^{-3}| \le \varepsilon\rho^{-3}.$$

因此，

$$0 < (1-\varepsilon)\rho^{-3} \le f \le (1+\varepsilon)\rho^{-3}$$

令 $c = 1-\varepsilon$ 和 $C = 1+\varepsilon$。

记 $\theta = \mathrm{AVR}(g) > 0$。对于每个 $x \in M$ 和 $t > 0$，由 Bishop–Gromov 比较定理 [26, 引理 7.1。4]可得

$$\theta\omega_4 t^4 \le \mathrm{Vol}_g(B_t^g(x)) \le \omega_4 t^4.$$

令 H_g 为通过狄利克雷穷竭得到的热核，并固定$0 < \eta < 1$。由 [19, 推论 3。1]，，存在 $A > 0$ 使得

$$H_g(x,y,t) \le \frac{A}{\mathrm{Vol}_g(B^g_{\sqrt{t}}(x))} \exp\left(-\frac{d_g(x,y)^2}{(4+\eta)t}\right).$$

因此，对于 $x \ne y$，

$$\begin{aligned} G_g(x,y) &:= \int_0^\infty H_g(x,y,t)\,dt \\ &\le \frac{A}{\theta\omega_4}\int_0^\infty t^{-2}\exp\left(-\frac{d_g(x,y)^2}{(4+\eta)t}\right)dt \\ &= \frac{A(4+\eta)}{\theta\omega_4 d_g(x,y)^2} < \infty. \end{aligned}$$

因此，热核表示给出了 $-\Delta_g$的正对称格林核，与狄利克雷穷竭构造 [19,第 5] 节一致：在每个有界穷竭域上，狄利克雷格林核是其狄利克雷热核关于时间的积分，而单调收敛则确定了两个穷竭极限相同。

现在 [19, 定理 5。2], 结合体积界，可得

$$G_g(x,y) \ge C_{10}\int_{d_g(x,y)^2}^{\infty} \frac{dt}{\mathrm{Vol}_g(B^g_{\sqrt{t}}(x))} \ge \frac{C_{10}}{\omega_4 d_g(x,y)^2},$$
$$G_g(x,y) \le C_{11}\int_{d_g(x,y)^2}^{\infty} \frac{dt}{\mathrm{Vol}_g(B^g_{\sqrt{t}}(x))} \le \frac{C_{11}}{\theta\omega_4 d_g(x,y)^2}.$$

Thus

$$a\, d_g(x,y)^{-2} \le G_g(x,y) \le b\, d_g(x,y)^{-2}, \qquad x \ne y,$$

其中 $a = C_{10}/\omega_4$ 和 $b = C_{11}/(\theta\omega_4)$。

定义源平均值

$$k_f(x,t) = \frac{1}{\mathrm{Vol}_g(B^g_t(x))}\int_{B^g_t(x)} f(y)\, d\,\mathrm{Vol}_g(y).$$

极坐标体积比较 [26, 引理 7.1。2] 对于任意 $s > 0$，可得

$$\int_{B^g_s(p)} f(y)\, d\,\mathrm{Vol}_g(y) \le 4C\omega_4 \int_0^s \frac{r^3}{(1+r)^3}\, dr \le 4C\omega_4 s.$$

如果 $t \le \rho(x)/2$，那么在 $B^g_t(x)$ 上， $\rho(y) \ge \rho(x)/2$。如果 $t > \rho(x)/2$，那么 $B^g_t(x) \subset B^g_{3t}(p)$。因此，

$$k_f(x,t) \le \begin{cases} 8C\rho(x)^{-3}, & 0 < t \le \rho(x)/2, \\ 12C\theta^{-1}t^{-3}, & t > \rho(x)/2. \end{cases}$$

对这两个范围进行积分得到

$$\begin{aligned} \int_0^\infty t\, k_f(x,t)\, dt &\le \frac{C(1+24/\theta)}{\rho(x)}, \\ \int_0^\infty k_f(x,t)\, dt &\le \frac{C(4+24/\theta)}{\rho(x)^2}. \end{aligned} \tag{A.1}$$

Set

$$P_f(x) = \int_M G_g(x,y) f(y)\, d\,\mathrm{Vol}_g(y).$$

根据托内利定理和 $d_g(x,y)^{-2M} = 2\int_{d_g(x,y)}^{\infty} t^{-3}\, dt$,

$$\begin{aligned} P_f(x) &\le 2b\int_0^\infty t^{-3}\int_{B^g_t(x)} f(y)\, d\,\mathrm{Vol}_g(y)\, dt \\ &\le 2b\omega_4 \int_0^\infty t\, k_f(x,t)\, dt \le \frac{U}{\rho(x)} \end{aligned}$$

对于某个 $U > 0$。特别地， P_f 处处有限。

对于下界，在 $B^g_{\rho(x)}(x)$ 上，我们有 $d_g(x,y) < \rho(x)$ 且 $\rho(y) < 2\rho(x)$。因此

$$P_f(x) \ge \frac{ac}{8\rho(x)^5}\mathrm{Vol}_g(B^g_{\rho(x)}(x)) \ge \frac{ac\theta\omega_4}{8\rho(x)} = \frac{L}{\rho(x)}.$$

狄利克雷耗尽核 G_g 是最小正格林核；特别地， M 是非抛物的。体积界和格林界给出，其中$\sigma = \max\{1,\ b\omega_4,\ (a\theta\omega_4)^{-1}\}$，

$$\sigma^{-1}\frac{d_g(x,y)^2}{\mathrm{Vol}_g(B^g_{d_g(x,y)}(x))} \le G_g(x,y) \le \sigma\frac{d_g(x,y)^2}{\mathrm{Vol}_g(B^g_{d_g(x,y)}(x))}, \qquad x \neq y.$$

再结合 $\int_0^\infty k_f(p,t)\,dt < \infty$ （见 A.1），这些验证了[24,定理 1。1]。

令 w 为在那里构造的解，满足 $\Delta_g w = f$ 和 $w(p) = 0$。由于

$$\int_M |G_g(p,y) - G_g(x,y)|f(y)\,d\,\mathrm{Vol}_g(y) \le P_f(p) + P_f(x) < \infty,$$

[24, 方程 (1.13)]之前的格林表示给出

$$\begin{aligned} w(x) &= w(x) - w(p) \\ &= \int_M (G_g(p,y) - G_g(x,y))f(y)\,d\,\mathrm{Vol}_g(y) \\ &= P_f(p) - P_f(x). \end{aligned}$$

我们明确说明初始的 C^2 正则性。选取一个包含 p的光滑有界穷竭函数 Ω_j ，并令 G_j 为其正狄利克雷格林核。归一化经典狄利克雷势

$$w_j(x) = \int_{\Omega_j} (G_j(p,y) - G_j(x,y))f(y)\,d\,\mathrm{Vol}_g(y) \qquad (x \in \Omega_j)$$

满足 $\Delta_g w_j = f$。由于 $0 \le G_j \le G_g$,

$$|w_j(x)| \le P_f(p) + P_f(x) \le 2U.$$

对两个非负势函数应用单调收敛，并利用$G_j \uparrow G_g$，可得在每个固定的 x处，$w_j(x) \to w(x)$。在嵌套的相对紧坐标球上， Δ_g 的系数光滑且一致椭圆，并且f 光滑。内部 Schauder 估计 [13, 定理 6.2] 因此给出任意固定 $0 < \alpha < 1$下的局部一致 $C^{2,\,\alpha}$ 界；在更小的球上，某个子序列在 C^2 中收敛到相同的逐点极限 w。因此 $w \in C^2(M)$。

因此 $u = P_f(p) - w = P_f$满足 $-\Delta_g u = f$。由于 f和 g光滑，内部椭圆正则性 [13, 定理 6.17] 给出 $u \in C^\infty(M)$。前述估计给出

$$\frac{L}{\rho} \le u \le \frac{U}{\rho},$$

因此 u 为正。

最后， [24, 定理 1.3(i)] 给出一个常数 $K = K(4,\ \sigma) > 0$ ，使得

$$|du|_g(x) = |dw|_g(x) \le K\int_0^\infty k_f(x,t)\,dt \le \frac{KC(4 + 24/\theta)}{\rho(x)^2},$$

其中最后一个不等式由（A.1）得出。取 $D = KC$（$4 + 24/\theta$）即可证明（3.1）。□

A.2. **命题的证明3.2**。

证明。沿用命题3.1中的势函数和常数。令

$$m = \frac{c}{U^3}, \qquad B = \frac{D^2}{L^4}, \qquad \varphi = \log u, \qquad \bar{g} = e^{2\varphi} g.$$

Then

$$-\Delta_g u = f \geq \frac{c}{\rho^3} \geq m u^3.$$

我们使用第 2 节回顾的共形恒等式。对于 $\tilde{g} = e^{2\eta} g$ 和光滑函数 h，它们给出

$$\operatorname{Hess}_{\tilde{g}} h = \operatorname{Hess}_g h - d\eta \otimes dh - dh \otimes d\eta + \langle d\eta, dh \rangle_g \, g. \tag{A.2}$$

在四维中，

$$\operatorname{Ric}_{\tilde{g}} = \operatorname{Ric}_g - 2 \operatorname{Hess}_g \eta + 2 d\eta \otimes d\eta - (\Delta_g \eta + 2 |d\eta|_g^2) g, \tag{A.3}$$

and

$$\operatorname{Scal}_{\tilde{g}} = e^{-2\eta} (\operatorname{Scal}_g - 6 \Delta_g \eta - 6 |d\eta|_g^2). \tag{A.4}$$

对于 $\bar{g} = u^2 g$，我们取 $\eta = \varphi = \log u$。求导可得

$$\begin{aligned} d\varphi &= u^{-1} du, \\ \operatorname{Hess}_g \varphi &= u^{-1} \operatorname{Hess}_g u - u^{-2} du \otimes du, \\ \Delta_g \varphi &= u^{-1} \Delta_g u - u^{-2} |du|_g^2 = -\frac{f}{u} - u^{-2} |du|_g^2, \\ |d\varphi|_g^2 &= u^{-2} |du|_g^2. \end{aligned} \tag{A.5}$$

将 $\eta = \varphi$ 代入（A.3），并将 $h = \varphi$ 代入（A.2），可得

$$\begin{aligned} \operatorname{Ric}_{\bar{g}} &= \operatorname{Ric}_g - 2 \operatorname{Hess}_g \varphi + 2 d\varphi \otimes d\varphi - (\Delta_g \varphi + 2 |d\varphi|_g^2) g \\ &= \operatorname{Ric}_g - \frac{2}{u} \operatorname{Hess}_g u + \frac{4}{u^2} du \otimes du - \left(\frac{\Delta_g u}{u} + \frac{|du|_g^2}{u^2} \right) g, \\ \operatorname{Hess}_{\bar{g}} \varphi &= \operatorname{Hess}_g \varphi - 2 d\varphi \otimes d\varphi + |d\varphi|_g^2 g \\ &= u^{-1} \operatorname{Hess}_g u - 3 u^{-2} du \otimes du + u^{-2} |du|_g^2 g. \end{aligned}$$

将这些恒等式相加后，海森项相互抵消：

$$\begin{aligned} \operatorname{Ric}_{\bar{g}} + 2 \operatorname{Hess}_{\bar{g}} \varphi + d\varphi \otimes d\varphi &= \operatorname{Ric}_g - d\varphi \otimes d\varphi - \Delta_g \varphi \, g \\ &= \operatorname{Ric}_g + \frac{f}{u} g + u^{-2} (|du|_g^2 g - du \otimes du) \\ &\geq m u^2 g = m \bar{g}. \end{aligned} \tag{A.6}$$

最后一个不等式使用了 $\operatorname{Ric}_g \geq 0$ 和

$$(|du|_g^2 g - du \otimes du)(V, V) = |du|_g^2 |V|_g^2 - du(V)^2 \geq 0.$$

对于标量曲率，(A.4) 和 (A.5) 得出

$$\begin{aligned}\mathrm{Scal}_{\bar{g}} &= u^{-2}(\mathrm{Scal}_g - 6\Delta_g\varphi - 6|d\varphi|_g^2)\\ &= u^{-2}\left(\mathrm{Scal}_g - 6\frac{\Delta_g u}{u} + 6\frac{|du|_g^2}{u^2} - 6\frac{|du|_g^2}{u^2}\right)\\ &= u^{-3}(-6\Delta_g u + \mathrm{Scal}_g\, u)\\ &= u^{-3}(6f + \mathrm{Scal}_g\, u) \geq 6m.\end{aligned} \tag{A.7}$$

此外，

$$|d\varphi|_{\bar{g}}^2 = e^{-2\varphi}|d\varphi|_g^2 = u^{-4}|du|_g^2 \leq \frac{\rho^4}{L^4}\frac{D^2}{\rho^4} = B.$$

为确保完备性，设 $\alpha\colon [0,1] \to M$ 是一条从 p 到 x 的分段光滑曲线。由于 ρ 关于 d_g 是 1-Lipschitz，$\rho\circ\alpha$ 是绝对连续的，并且

$$|(\rho\circ\alpha)'| \leq |\alpha'|_g \quad \text{almost everywhere.}$$

Thus

$$\mathrm{Length}_{\bar{g}}(\alpha) \geq L\int_0^1 \frac{|(\rho\circ\alpha)'|}{\rho\circ\alpha}\,dt \geq L\log\rho(x),$$

因此

$$d_{\bar{g}}(p,x) \geq L\log\rho(x). \tag{A.8}$$

因此，每个以 p 为中心的闭 $\bar{g}$-球都是某个紧致 g-球的闭子集。这里我们用到 g 和 $\bar{g}$ 诱导相同拓扑这一事实。Hopf–Rinow 定理证明了 $(M,\ \bar{g})$ [26, 的完备性。定理 5.7.1]。

最后，

$$\varphi \leq \log U, \qquad -\varphi \geq \log\rho - \log U.$$

因此 $-\varphi$下有界，且次水平集紧致。 □

A.3. **定理 3.3 的证明。** 在本小节中，保留命题3.2 中的数据，并令

$$\psi = \frac{\varphi}{3}, \qquad q = u^{2/3}g = e^{2\psi}g = e^{-4\varphi/3}\bar{g},$$
$$\Phi = \log U, \qquad \delta = \frac{m}{8}e^{-\sqrt{B}} > 0.$$

对于这次共形变换，取 $\eta = \psi = \varphi/3$ 在（A.2）和（A.4）中。由于 $d\psi = d\varphi/3$ 且 $\Delta_g\psi = \Delta_g\varphi/3$,

$$\begin{aligned}\mathrm{Hess}_q h &= \mathrm{Hess}_g h - \frac{1}{3}\left(d\varphi\otimes dh + dh\otimes d\varphi - \langle d\varphi, dh\rangle_g g\right),\\ \mathrm{Scal}_q &= u^{-2/3}\left(\mathrm{Scal}_g - 2\Delta_g\varphi - \frac{2}{3}|d\varphi|_g^2\right).\end{aligned} \tag{A.9}$$

引理 A.1（适当射线 Busemann 函数）。 设 $\gamma\colon [0,\infty) \to M$ 是一条$\bar{g}$-单位速射线，且 $\gamma(0) = p$。那么

$$b(x) = \lim_{t\to\infty}\left(t - d_{\bar{g}}(x,\gamma(t))\right)$$

对于 $d_{\bar{g}}$ 是1-利普希茨的，下有界，且次水平集紧致。

证明。 我们首先证明一个一致的环形区域直径界。

光滑四维情形的 [7, 定理4。8]对所有充分大的 r，给出一个路径连通集 C_r 使得

$$B^g_{4r}(p) \setminus B^g_{3r}(p) \subset C_r \subset B^g_{5r}(p) \setminus B^g_{2r}(p).$$

记 $\theta = \mathrm{AVR}(g) > 0$。若 $z_1, \ldots\ldots, z_N \in C_r$ 彼此 $r/4$-分离，则球$B^g_{r/8}(z_i)$两两不交，且包含于 $B^g_{41r/8}(p)$ 中。由体积比较可得

$$N\theta\omega_4(r/8)^4 \le \mathrm{Vol}_g(B^g_{41r/8}(p)) \le \omega_4(41r/8)^4.$$

因此 $N \le 41^4/\theta$，且与 r 无关。

选取一个极大的此类分离集。其 $r/4$-球覆盖 C_r，并且相对于 C_r，该覆盖的交图是连通的。对于 $a, b \in C_r$满足 $d_g(a, b) < r$ 的两点之间，连接它们的最短 g-线段始终位于 $B^g_r(p)$ 外部。因此

$$d_{\bar g}(a, b) \le \frac{U}{1+r}\, d_g(a, b) < U.$$

有限覆盖图中的一条简单链至多使用 $N-1$ 条边。因此，加上两个端点到中心的线段，得到

$$\mathrm{diam}_{\bar g}(C_r) \le D_0, \qquad D_0 = (\lceil 41^4/\theta \rceil + 2)U,$$

且与 r 无关。对于每个充分大的 R，取 $r = R/3$。由于度量球是开集，

$$\{x : d_g(p, x) = R\} \subset B^g_{4r}(p) \setminus B^g_{3r}(p) \subset C_r.$$

因此，每个这样的距离球面的 $\bar g$-直径至多为 D_0。

b 的定义极限存在，因为其定义项单调不减，且被 $d_{\bar g}(p, x)$ 从上方有界。三角不等式还给出

$$|b(x) - b(y)| \le d_{\bar g}(x, y).$$

射线 γ 逃逸出每个紧集，因此 $d_g(p, \gamma(t)) \to \infty$。对于固定紧集之外的 x，选择 $s \ge 0$ 使得

$$d_g(p, \gamma(s)) = d_g(p, x).$$

Then

$$d_{\bar g}(x, \gamma(s)) \le D_0, \qquad d_{\bar g}(p, x) \le s + D_0,$$

因此

$$b(x) \ge s - D_0 \ge d_{\bar g}(p, x) - 2D_0 \ge L \log \rho(x) - 2D_0.$$

结合其在剩余紧集上的连续性，这就证明了其下有界性以及所有子水平集的紧性。□

引理 A.2 (加权下支撑)。 设 b 如引理 *A.1*所述。对于任意紧集 $K \subset M$，存在 $H_K > 0$ 使得每个 $x \in K$ 都存在一个光滑局部下支撑 h，它对应于 b:

$$h \le b \ near\ x, \qquad h(x) = b(x).$$

在接触点处，

$$
\begin{aligned}
|dh|_{\bar{g}} = 1, \qquad & \operatorname{Hess}_{\bar{g}} h(\nabla_{\bar{g}} h, \nabla_{\bar{g}} h) = 0, \\
\Delta_{\bar{g}} h - 2\langle d\varphi, dh\rangle_{\bar{g}} \geq \delta, \\
|\operatorname{Hess}_{\bar{g}} h|_{\bar{g}} \leq H_K.
\end{aligned} \tag{A.10}
$$

证明。正如从 [26, 命题 7.38] 的证明中可以直接看出的，渐近射线构造只使用了完备性。选取 $t_j \to \infty$和极小化的 $\bar{g}$-线段 σ_j：从 x 到 $\gamma(t_j)$ 的 $[0, a_j] \to M$，其中 $a_j = d_{\bar{g}}(x, \gamma(t_j)) \to \infty$。初始单位向量的一个子列收敛，从而得到一条从 x出发的 $\bar{g}$-单位速射线 σ。对于固定的 $s \geq 0$ 以及充分大的 j,

$$
t_j - d_{\bar{g}}(\sigma_j(s), \gamma(t_j)) = t_j - a_j + s.
$$

由于逼近的 Busemann函数是 1-Lipschitz 的，我们可以使用 $\sigma_j(s) \to \sigma(s)$ 取极限，并得到

$$
b(\sigma(s)) = b(x) + s.
$$

我们的 Busemann函数与 Petersen 的约定相反；该论证不使用关于 $\bar{g}$ 的任何 Ricci 曲率假设。令

$$
\varphi_\sigma(s) = \varphi(\sigma(s)), \qquad T = \max\left\{2, \frac{32 e^{\Phi - \varphi(x) + \sqrt{B}}}{m}\right\},
$$

并且对于 $0 \leq s \leq T$，置

$$
\ell(s) = 1 - \frac{s}{T}, \qquad \zeta(s) = e^{(\varphi_\sigma(s) - \varphi_\sigma(0))/2} \ell(s).
$$

我们有

$$
\varphi_\sigma \leq \Phi, \qquad |\varphi_\sigma'| \leq \sqrt{B}, \qquad \zeta(0) = 1, \qquad \zeta(T) = 0.
$$

令 Π_s： $T_x M \to T_{\sigma(s)} M$ 为 $\bar{g}$的平行移动。对于充分小的 $v \in T_x M$，定义

$$
\begin{aligned}
c_v(s) &= \exp^{\bar{g}}_{\sigma(s)}(\zeta(s) \Pi_s v), \\
h(\exp^{\bar{g}}_x v) &= b(x) + T - \operatorname{Length}_{\bar{g}}(c_v).
\end{aligned}
$$

对于充分小的 v，曲线 c_v 具有非零速度，因此其长度关于 v光滑变化。它们的初始点和终点分别为 $\exp^{\bar{g}}_x v$ 和 $\sigma(T)$。由于 $b(\sigma(T)) = b\, x(+T)$，且 b 是 1-Lipschitz 的,

$$
h(\exp^{\bar{g}}_x v) \leq b(\sigma(T)) - d_{\bar{g}}(\exp^{\bar{g}}_x v, \sigma(T)) \leq b(\exp^{\bar{g}}_x v).
$$

在 $v = 0$处等号成立。

选取与 $\bar{g}$ 正交归一的平行场 E_1, E_2, E_3，使其垂直于 $\dot{\sigma}$，并令

$$
I_i = \int_0^T \left(\zeta'^2 - \zeta^2\, \bar{g}(R^{\bar{g}}(E_i, \dot{\sigma})\dot{\sigma}, E_i)\right) ds.
$$

一阶与二阶变分公式 [26, 引理 5.4.2 和定理 6.1。4]在 x 处给出，

$$\begin{aligned}\nabla_{\bar g} h &= \dot\sigma(0),\\ \operatorname{Hess}_{\bar g} h(\dot\sigma(0),\dot\sigma(0)) &= 0,\\ \Delta_{\bar g} h &= -\sum_{i=1}^{3} I_i.\end{aligned}$$

这里端点加速度项消失：初始端点沿一条测地线变化，而终端点固定。对于每个正交向量场 ζE_i，速度的一阶变分逐点消失，因此长度的二阶变分与能量 $\frac12\int_0^T |\dot c|_{\bar g}^2\,ds$ 相等。为清晰起见，径向赫斯矩阵恒等式可直接由切向变分得到。将 σ 略微向后延拓，我们有

$$c_{\tau\dot\sigma(0)}(s) = \sigma(s+\tau\zeta(s)).$$

对于充分小的 $|\tau|$, $1+\tau\zeta'(s) > 0$，因此

$$\operatorname{Length}_{\bar g}(c_{\tau\dot\sigma(0)}) = \int_0^T (1+\tau\zeta'(s))\,ds = T-\tau.$$

因此 $h(\exp_x^{\bar g}(\tau\dot\sigma(0))) = b(x) + \tau$。

沿着 σ，（A.6）给出

$$\operatorname{Ric}_{\bar g}(\dot\sigma,\dot\sigma) \ge m - 2\varphi_\sigma'' - (\varphi_\sigma')^2.$$

因此，分部积分得到

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{3} I_i + 2\varphi_\sigma'(0) &\le \int_0^T \left(3\zeta'^2 - 4\varphi_\sigma'\zeta\zeta' + (\varphi_\sigma')^2\zeta^2 - m\zeta^2\right) ds\\ &= \int_0^T e^{\varphi_\sigma-\varphi_\sigma(0)}\left(4\ell'^2 - \left(\ell' + \frac{\varphi_\sigma'\ell}{2}\right)^2 - m\ell^2\right) ds.\end{aligned}$$

由于 $T \ge 2$，在 $[0,1]$ 上我们有

$$\ell \ge \frac12, \qquad e^{\varphi_\sigma-\varphi_\sigma(0)} \ge e^{-\sqrt{B}}.$$

因此，

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{3} I_i + 2\varphi_\sigma'(0) &\le \frac{4e^{\Phi-\varphi_\sigma(0)}}{T} - \frac{m}{4}e^{-\sqrt{B}}\\ &\le -\frac{m}{8}e^{-\sqrt{B}} = -\delta.\end{aligned}$$

Thus

$$\Delta_{\bar g} h - 2\langle d\varphi, dh\rangle_{\bar g} = -\sum_{i=1}^{3} I_i - 2\varphi_\sigma'(0) \ge \delta.$$

对于 $x \in K$，所选长度 T 均一致有界。所有相应的共射线段都位于一个紧致的 $\bar g$-邻域内。在此邻域上，曲率有界，而 ζ 和 ζ' 均一致有界。更多

具体地，令 T_K 界定 T，令 Z_0，Z_1 界定 $|\zeta|$，$|\zeta'|$，并令 K_0 界定此紧致邻域上的截面曲率绝对值。对于 $v \in T_xM$，写作 $v^\perp = v - \bar{g}(v,\ \dot\sigma(0))\dot\sigma(0)$。长度的二阶变分仅取决于这一垂直部分，并给出

$$\begin{aligned}|\mathrm{Hess}_{\bar g}\, h(v,v)| &\le \int_0^T (\zeta'^2 + K_0\zeta^2)|v^\perp|_{\bar g}^2\, ds \\ &\le T_K(Z_1^2 + K_0 Z_0^2)|v|_{\bar g}^2.\end{aligned}$$

在四维中，张量范数至多为算子范数的两倍，因此$H_K = 2T_K(Z_1^2 + K_0Z_0^2) + 1$ 是（A.10）中的一个可接受上界。□

引理 A.3（递增重参数化）**.** 存在一个光滑严格递增函数 $\chi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，使得 $\chi \circ b$ 是真映射、下有界，并且属于 *Shen* 的类 C（3） q。

证明。对每个 x，固定一条校准余射线和引理 h_x 中构造的下支撑函数 A.2，并在后续过程中始终沿用这些选择。以度量 $\bar g$ 为基度量、以共形指数 $-2\varphi/3$为共形指数应用（A.2），因为 $q = e^{-4\varphi/3}\bar g$。由此得到

$$\mathrm{Hess}_q\, h = \mathrm{Hess}_{\bar g}\, h + \frac{2}{3}\left(d\varphi \otimes dh + dh \otimes d\varphi - \langle d\varphi, dh\rangle_{\bar g}\bar g\right).$$

在接触点，选取一个 $\bar g$-标准正交标架 e_0，e_1，e_2，e_3，满足 $e_0 = \nabla_{\bar g} h$，并记

$$A_{ij} = \mathrm{Hess}_q\, h(e_i, e_j).$$

由（A.10），

$$A_{11} + A_{22} + A_{33} = \Delta_{\bar g} h - 2\langle d\varphi, dh\rangle_{\bar g} \ge \delta. \tag{A.11}$$

取 b 的一个下界 b_*，并令

$$K_n = \{x : b(x) \le b_* + n + 2\}, \qquad n = 0, 1, \ldots.$$

这些集合是紧致的。引理A.2 以及 φ 的梯度界给出了常数 $C_n \ge 1$，使得

$$|A_{ij}| \le C_n \qquad (x \in K_n).$$

将它们扩大，使得 C_n 单调不减。

我们使用以下初等矩阵估计。若 A 是对称的，$|A_{ij}| \le C_n$，且 $A_{11} + A_{22} + A_{33} \ge \delta$，则

$$\lambda \ge 4C_n + \frac{6C_n^2}{\delta} \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{tr}_P^{\bar g}(\mathrm{Hess}_q\, h + \lambda\, dh \otimes dh) \ge \frac{\delta}{2} \tag{A.12}$$

对每个三维平面 $P \subset T_xM$。事实上，令 $S = A_{11} + A_{22} + A_{33}$，并令$\nu = (\nu_0, \nu')$ 为 P 的一个 $\bar g$-单位法向量。由柯西–施瓦茨不等式和杨氏不等式可得

$$\sum_{i,j=1}^{3} \nu_i A_{ij} \nu_j \le 3C_n|\nu'|^2,$$

$$2\left|\nu_0 \sum_{i=1}^{3} A_{0i}\nu_i\right| \le \frac{\delta}{2}\nu_0^2 + \frac{6C_n^2}{\delta}|\nu'|^2.$$

由于 $A_{00} \geq -C_n$,

$$\begin{aligned}
&\operatorname{tr}_P^{\bar{g}}(\operatorname{Hess}_q h + \lambda\, dh \otimes dh) \\
&\quad = S\nu_0^2 + (S + A_{00} + \lambda)|\nu'|^2 - \sum_{i,j=1}^{3} \nu_i A_{ij} \nu_j - 2\nu_0 \sum_{i=1}^{3} A_{0i}\nu_i \\
&\quad \geq \frac{\delta}{2}\nu_0^2 + \left(\delta + \lambda - 4C_n - \frac{6C_n^2}{\delta}\right)|\nu'|^2 \\
&\quad \geq \frac{\delta}{2}.
\end{aligned}$$

选取一个光滑正函数 $\Lambda : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, 使得对每个$n = 0,1, \ldots,$

$$\Lambda(t) \geq 4C_n + \frac{6C_n^2}{\delta} \qquad \text{for } b_* + n \leq t \leq b_* + n + 1.$$

这样的函数存在：对这些局部有界的分段常数取一个光滑主函数即可。定义

$$\chi'(t) = \exp\left(\int_{b_*}^{t} \Lambda(s)\, ds\right),$$
$$\chi(t) = b_* + \int_{b_*}^{t} \chi'(s)\, ds.$$

于是 $\chi' > 0$ 和 $\chi''/\chi' = \Lambda$ 在 $\mathbb{R}$上。对每个 $t \geq b_*$, 我们还有

$$\chi'(t) \geq 1, \qquad \chi(t) \geq t.$$

特别地, $\chi \circ b$ 下有界，且具有紧次水平集。

由于 χ 是递增的, $\chi \circ h$ 是 $\chi \circ b$的光滑局部下支撑。在其接触点处,

$$\operatorname{Hess}_q(\chi \circ h) = \chi'(b(x))\left(\operatorname{Hess}_q h + \frac{\chi''(b(x))}{\chi'(b(x))}\, dh \otimes dh\right).$$

与 q对应的正交标架为 e_i , 因此 $e^{2\varphi(x)/3}e_i$。于是由（A.12）可得

$$\operatorname{tr}_P^q \operatorname{Hess}_q(\chi \circ h) \geq \frac{\delta}{2} e^{4\varphi(x)/3}\chi'(b(x)) > 0 \qquad (\dim P = 3).$$

固定 $x_0 \in M$, 并选取一个开邻域 W , 使得 $W \subset \operatorname{int} K_N$, 其中 N。在每个 $x \in W$ 处, 选取上文的下支撑函数 h_x, 并令$S_x = \operatorname{Hess}_q(\chi \circ h_x)_{x_0}$。由三维平面估计和系数界可得

$$\operatorname{tr}_P^q S_x \geq \eta_0, \qquad |S_x(v, v)| \leq A_0 |v|_q^2,$$

对于每个 $x \in W$、每个三维平面 $P \subset T_xM$ 以及每个 $v \in T_xM$。这些常数在 W 上是一致的；可以取

$$\eta_0 = \min_{K_N} \frac{\delta}{2} e^{4\varphi/3}\chi'(b) > 0,$$
$$A_0 = 1 + \max_{K_N} e^{4\varphi/3}\chi'(b)\big(4C_N + \Lambda(b)\big).$$

事实上，$|A_{ij}| \le C_N$蕴含 $|\mathrm{Hess}_q\, h_x(v,\ v)| \le 4C_N e^{4\varphi(x)/3}|v|_q^2$，并且 $|dh_x|_q^2 = e^{4\varphi(x)/3}$。

我们详细阐述 [29, 第 3.1 节引理 6]的扰动论证。取

$$0 < \varepsilon \le \min\left\{\frac{1}{6}, \frac{\eta_0}{18A_0}\right\}.$$

对于任意三元组 $v_1, v_2, v_3 \in T_xM$，若 $|q(v_i, v_j) - \delta_{ij}| < \varepsilon$，其 Gram矩阵 G 满足 $\|G - I\|_{\mathrm{op}} \le 3\varepsilon \le 1/2$。这些向量

$$w_i = \sum_{j=1}^{3} v_j (G^{-1/2})_{ji}$$

是 q-正交归一的。令 $T = (S_x(w_i, w_j))$，可得

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{3} S_x(v_i, v_i) &= \mathrm{tr}(TG) \\ &\ge \mathrm{tr}\, T - 3\|T\|_{\mathrm{op}}\|G - I\|_{\mathrm{op}} \\ &\ge \eta_0 - 9A_0\varepsilon \ge \frac{\eta_0}{2}.\end{aligned}$$

沿 q-测地线对光滑下支撑函数作泰勒展开，可得

$$\begin{aligned}C^q_{\chi\circ b}(x; v) &:= \liminf_{t\to 0} \frac{(\chi\circ b)(\exp^q_x(tv)) + (\chi\circ b)(\exp^q_x(-tv)) - 2(\chi\circ b)(x)}{t^2} \\ &\ge S_x(v, v).\end{aligned}$$

因此，对于每个 $x \in W$ 以及每个这样的三元组，

$$\sum_{i=1}^{3} C^q_{\chi\circ b}(x; v_i) \ge \frac{\eta_0}{2} > \frac{\eta_0}{4}.$$

函数 b 对于 $\bar g$是 1-Lipschitz 的。因此，对 q 和 $\bar g$ 的局部比较以及 χ 的光滑性表明，$\chi\circ b$ 对于 q是局部利普希茨的。这些正是定义 $C(3)$ 的局部一致条件，见 [29, 第 3 节1]。因此，$\chi \circ b \in C(3)$ 在 M上成立。□

定理 *3.3* 的证明。 使用命题 u中的同一个势函数 3.2。由于$u \le U$，

$$q = u^{-4/3}\bar g \ge U^{-4/3}\bar g.$$

因此，

$$d_q(p, x) \ge U^{-2/3} d_{\bar g}(p, x).$$

闭 q球包含于一个紧致的闭 $\bar g$球中，并且在它们共有的流形拓扑下是闭集。因此它是紧致的，而 Hopf–Rinow 定理给出了 q的完备性。

由于 $(M,\ \bar g)$ 是完备且非紧的，取一条从 p出发的 $\bar g$单位速射线 γ，并令 b为其 Busemann函数。

由引理 A.1 和引理 A.3，函数 $\chi\circ b$ 是真函数、下有界，并且属于 $C(3)$对 q。应用 [29, 第 3.1 节，引理 5]，其中

近似误差等于 1。我们得到一个光滑的真莫尔斯函数 F，使得

$$|F - \chi \circ b| < 1, \qquad F \in C(3).$$

误差界使 F 下有界，因此 F 是一个穷竭函数。对于光滑函数，Shen 的 $C(3)$ 条件等价于

$$\lambda^q_{(3)}(\operatorname{Hess}_q F) > 0.$$

在临界点处，三个 Hessian负特征值将与此不等式矛盾。因此

$$\operatorname{ind}_x F \le 2 \qquad (x \in \operatorname{Crit} F).$$

□

附录 B. 第 4 节的证明

B.1. 定理的证明4.1。

引理 B.1（基本群像的交集）。设 $X = U \cup V$，其中 U 和 V 是 X 的开子集，且 U、V 和 $U \cap V$ 道路连通。对于共同基点 $z \in U \cap V$，

$$\begin{aligned}\operatorname{im}\big(\pi_1(U,z) \to \pi_1(X,z)\big) \cap \operatorname{im}\big(\pi_1(V,z) \to \pi_1(X,z)\big)\\ = \operatorname{im}\big(\pi_1(U \cap V, z) \to \pi_1(X,z)\big).\end{aligned}$$

证明。范坎彭定理将 $\pi_1(X, z)$ 识别为群推出 [15, （定理 1.20]）。记

$$A = \pi_1(U,z), \qquad B = \pi_1(V,z), \qquad C = \pi_1(U \cap V, z),$$

并将该推出记为 P。令 A、B、C 为它们在 P 中的实际像，并设

$$P' = \overline{A} *_{\overline{C}} \overline{B}.$$

这些像的包含映射给出同态 $P' \to P$。反过来，映射 $A \to A \to P'$ 和 $B \to B \to P'$ 在 C 上相同，因此原有的泛性质给出 $P \to P'$。这些复合映射在其生成顶点群上均为恒等映射，故互为逆同构。定义 P' 的边映射均为单射。因此，所需的等式由 amalgamated 自由积的范式定理得出（第 IV 章，定理 2.6，第 187] 页）：若 $a \in A \setminus C$ 和 $b \in B \setminus C$ 表示同一个元素，那么 ab^{-1} 就会是一个长度为二、表示恒等元的约化字，这与该定理矛盾。□

定理*4.1*的证明：设 H 是 q 上的光滑严格三凸 Morse 耗尽函数。三个负的临界点海森矩阵特征值将与 $\lambda^q{}_{(3)}(\operatorname{Hess}_q H) > 0$ 矛盾，因此每个临界指标至多为二。选取严格递增的正则值 $t_i \to \infty$，使得 $H(p) < t_1$，并令

$$K_i = \{H \le t_i\}, \qquad Z_i = M \setminus K_i.$$

令 D_i 为 K_i 中包含 p的连通分支。每个 K_i 都是紧正则区域（可能不连通），而每个 D_i 都是连通紧正则区域。

由于 $t_i < t_{i+1}$,

$$D_i \subset \operatorname{int} D_{i+1}.$$

对于任意 $x \in M$，选择一条从 p 到 x的路径。其像是紧致的，因此当 i 足够大时，它包含于 $\{H < t_i\}$ 中。于是

$$\bigcup_{i\geq 1} \operatorname{int} D_i = M.$$

第 2 节中回顾的莫尔斯把手分解将每个 K_i构造成由有限个指标为 0、1、2 的把手组成。每个连通分支都有连通边界： 0-把手从 S^3 开始，1-把手合并或保持连通边界，而沿圆进行 2-把手手术不会使连通的三维流形断开。因此 Y_{D_i} 是连通的。

移除有限个彼此不相交且具有连通边界的紧致域后，剩下的补集是道路连通的。事实上，取一条连接两个外部点且横截其边界的路径。它与边界只有有限个交点；将每次穿过被移除域的部分替换为其连通边界中的一条路径，并将其略微推入外侧领圈中。这证明了Z_i 是道路连通的。填充 K_i 中除 D_i 之外的连通分支表明，O_{D_i} 也是道路连通的。

选择一条从 p 出发的最小化 g射线 η 以及严格递增的时刻 τ_i ，使得

$$K_i \subset B^g_{\tau_i}(p).$$

令 $x_i = \eta(\tau_i)$。于是

$$\eta([\tau_i, \infty)) \subset Z_i \subset O_{D_i}.$$

在下面所有的基点变换中，我们都使用这些点及相应的射线线段。

将 t_i 与 t_j 之间的莫尔斯余 bordism 反向处理，会用一个指标为 λ 的把手替换一个指标为 $(4-\lambda)$ 的把手。所有这些对偶指标都至少为二，因此附加它们不会产生基本群生成元。利用边界领圈和所选的基点路径，我们得到

$$\pi_1(Z_j, x_j) \twoheadrightarrow \pi_1(Z_i, x_i) \qquad (j \geq i).$$

这就是 [5, 证明命题 4.3] 时所用的反向把手论证。

类似地，将 K_i 中除 D_i 之外的每个连通分支上下翻转，可得到一个相对于边界的把手分解，其指标为 2、3、4。因此，填充这些连通分支得到

$$\pi_1(Z_i, x_i) \twoheadrightarrow \pi_1(O_{D_i}, x_i).$$

由于 $Z_j \subset O_{D_j}$，复合满射分解为

$$\pi_1(Z_j, x_j) \longrightarrow \pi_1(O_{D_j}, x_j) \longrightarrow \pi_1(O_{D_i}, x_i).$$

因此

$$\pi_1(O_{D_j}, x_j) \twoheadrightarrow \pi_1(O_{D_i}, x_i) \qquad (j \geq i). \tag{B.1}$$

在 [7], 的体积增长归一化中，参数为 $v = \theta\omega_4$，因为 $\lim_{R\to\infty}\mathrm{Vol}_g(B_R^g(p))/R^4 = \theta\omega_4$。[7,定理 4.8] 的光滑四维情形对环状分支 $C_r \subset B_{5r}^g(p) \setminus B_{2r}^g(p)$ 的基本群像给出了界，该环状分支包含 $B_{4r}^g(p) \setminus B_{3r}^g(p)$。如同 [7, 命题 6.6], 的证明开头那样，选取一个包含该较小环带的开道路连通 $A_r \subset C_r$。因此，对每个充分大的 r，有

$$B_{4r}^g(p) \setminus B_{3r}^g(p) \subset A_r \subset B_{5r}^g(p) \setminus B_{2r}^g(p)$$

并且，通过将包含映射分解经过 C_r,

$$|\mathrm{im}\,[\pi_1(A_r, z) \longrightarrow \pi_1(B_{6r}^g(p) \setminus B_r^g(p), z)]| \leq N, \qquad (z \in A_r), \tag{B.2}$$

其中 $N = \lceil C(4,\ v)\rceil$ 与 r 和 H 无关。固定 $R_0 > 0$，使得对每个 $r > R_0$，这一构造都适用。

固定 i，并取任意有限子集 $S \subset \pi_1(O_{D_i}, x_i)$。选取代表其中各元素的带基点环路，并取足够大的 $r > R_0$，使得

$$D_i \subset B_r^g(p), \qquad \tau_i < 3r,$$

且所有这些环路都位于 $B_{3r}^g(p)$ 中。令 $z = \eta(7r/2)$，并定义

$$\mathcal{U}_r = (A_r \cup B_{4r}^g(p)) \setminus D_i,$$
$$\mathcal{V}_r = A_r \cup (M \setminus \overline{B_{3r}^g(p)}).$$

这些是 O_{D_i} 的开子集，满足

$$\mathcal{U}_r \cup \mathcal{V}_r = O_{D_i}, \qquad \mathcal{U}_r \cap \mathcal{V}_r = A_r.$$

这两个集合都是道路连通的。事实上，$\mathcal{U}_r \setminus A_r$ 中的每一点到 p 的 g-距离都小于 $3r$，而 $\mathcal{V}_r \setminus A_r$ 中的每一点到 p 的距离都至少为 $4r$。用 O_{D_i} 中的一条路径将这样的点与 z 相连，并在路径首次与半径为 $7r/2$ 的球面相交处停止。在第一种情形中，初始线段位于$B_{4r}^g(p) \setminus D_i$ 中；在第二种情形中，它位于 $M \setminus B_{3r}^g(p)$ 中。停止点属于 A_r，且可在 A_r 内与 z 相连。

沿射线线段将 S 运送到 $\pi_1(O_{D_i}, z)$。其选定的代表元（包括它们的基点路径）都位于 $\mathcal{U}_r$ 中。

取 $j \geq i$ 使得

$$\overline{B_{4r}^g(p)} \subset \mathrm{int}\, D_j.$$

由于 $D_j \subset K_j \subset B_{\tau_j}^g(p)$，我们有 $\tau_j > 4r$。根据 (B.1)，同一批传输类在 O_{D_j} 中有代表元，它们通过从 z 到x_j的射线线段与 z 相连。由于 O_{D_j} 位于 $B_{4r}^g(p)$ 之外，且这条射线线段的径向坐标至少为 $7r/2$，所得代表元位于 $\mathcal{V}_r$ 中。

引理B.1 因此将 S 中的每个传输元素置于

$$\mathrm{im}(\pi_1(A_r, z) \to \pi_1(O_{D_i}, z)).$$

后一个映射分解为

$$A_r \subset B^g_{6r}(p) \setminus B^g_r(p) \subset O_{D_i}.$$

因此（B.2）给出 $|S| \leq N$。由于 S 是一个任意的有限子集，

$$|\pi_1(O_{D_i}, x_i)| \leq N.$$

同一个 N 适用于每个 i，因此 $N_H = N$ 可以选取得仅依赖于（M，g），而与 H 无关。

最后，$Y_{D_i} \subset H^{-1}(t_i)$ 是一个正则水平集，其外法向量为 $\nabla_q H/|dH|_q$。因此

$$H_q(Y_{D_i}) = \frac{\mathrm{tr}^q_{(\nabla_q H)^\perp} \mathrm{Hess}_q H}{|dH|_q} \geq \frac{\lambda^q_{(3)}(\mathrm{Hess}_q H)}{|dH|_q} > 0.$$

□

附录 C. 第 5 节的证明

在本节中，保留上述构造的共形数据、Morse 数据以及紧正则区域 C_i。特别地，q 和 $\bar{g}$ 是完备的，并且 F 是 q上的光滑严格三凸 Morse 穷竭函数。

C.1. 命题5.3的证明。

证明。选择 $\sigma \in C^\infty(\mathbb{R})$ 使得

$$0 \leq \sigma \leq 1, \qquad \sigma(t) = 0 \quad (t \leq 1/3), \qquad \sigma(t) = 1 \quad (t \geq 2/3),$$

并令 $C_\sigma = \sup_{\mathbb{R}} |\sigma'|$。选择

$$R > \max\left\{6, \frac{2\pi C_\sigma}{\sqrt{m}}\right\}.$$

这一选择与下文的平台值无关。

令 $A = C_i$ 并且

$$r_A(x) = \inf_{y \in A} d_{\bar{g}}(x, y).$$

$\bar{g}$ 的完备性和 A 的紧性意味着$\{r_A \leq R + 2\}$ 是紧致的。选择 $j > i$ 使得

$$\{r_A \leq R + 2\} \subset \mathrm{int}\, C_j,$$

并令 $B = C_j$。因此 $r_A > R + 2$ 在 Y_B上。

距离函数 r_A 是 1-Lipschitz 的。黎曼度量 $\bar{g}$ 诱导第二可数流形拓扑，因此（M，$d_{\bar{g}}$）是可分的。应用 [2,定理 1]，常值误差为 1，利普希茨损失容许量为 1。存在 $r \in C^\infty(M)$，使得

$$|r - r_A| \leq 1, \qquad |dr|_{\bar{g}} \leq 2.$$

因此，

$$r \leq 1 < R/3 \quad \text{on } A, \qquad r > R + 1 > 2R/3 \quad \text{on } Y_B.$$

选择常数 a_0, a_1 使得

$$a_0 > \max_{Y_A} u^{-2/3} H_q(Y_A),$$
$$0 < a_1 < \min\left\{a_0, \min_{Y_B} u^{-2/3} H_q(Y_B)\right\}.$$

根据定理，第二个极小值为正4.1。令

$$\beta_\ell = \arctan\frac{a_\ell}{\sqrt{m}} \quad (\ell = 0, 1),$$
$$\beta(t) = (1 - \sigma(t/R))\beta_0 + \sigma(t/R)\beta_1,$$

并定义

$$a(t) = \sqrt{m}\,\tan\beta(t), \qquad h = a \circ r.$$

由于

$$0 < \beta_1 \le \beta(t) \le \beta_0 < \pi/2,$$

两个函数都是光滑且正的。此外,

$$a = a_0 \quad (t \le R/3), \qquad a = a_1 \quad (t \ge 2R/3).$$

因此, $h = a_0$ 在 A 上且 $h = a_1$ 在 Y_B上，从而得到

$$H_q(Y_A) < u^{2/3} h, \qquad H_q(Y_B) > u^{2/3} h.$$

由于 $|\beta_0 - \beta_1| < \pi/2$,

$$|\beta'| \le \frac{\pi C_\sigma}{2R} < \frac{\sqrt{m}}{4}.$$

Thus

$$a' = \frac{a^2 + m}{\sqrt{m}}\,\beta', \qquad |a'| \le \frac{a^2 + m}{4}.$$

利用 $|dr|_{\bar g} \le 2$，我们得到

$$2|dh|_{\bar g} = 2|a'(r)|\,|dr|_{\bar g} \le h^2 + m.$$

这就证明了（5.2）。

为证明（5.3），令

$$z = u^{-4/3}|du|_g, \qquad k = u^{2/3} h.$$

第2节中的共形标量曲率公式，结合$-\Delta_g u = f$，得到

$$\begin{aligned}\mathrm{Scal}_q &= u^{-2/3}\,\mathrm{Scal}_g + 2fu^{-5/3} + \frac{4}{3}u^{-8/3}|du|_g^2 \\ &\ge 2mu^{4/3} + \frac{4}{3}z^2.\end{aligned}$$

此外,

$$\begin{aligned}|dk|_q &\le \frac{2}{3}hu^{-2/3}|du|_g + u^{1/3}|dh|_g \\ &= \frac{2}{3}kz + u^{4/3}|dh|_{\bar g}.\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}\mathrm{Scal}_q + \frac{4}{3}k^2 - 2|dk|_q &\geq \frac{4}{3}\left(z - \frac{k}{2}\right)^2 + u^{4/3}(2m + h^2 - 2|dh|_{\bar{g}}) \\ &\geq mu^{4/3} > 0.\end{aligned}$$

□

C.2. **定理5.5的证明。**

证明。 固定 M 的给定定向。在我们的应用中，由于 M 是可缩的，因此存在一种定向。令 $\mathsf{p} = (\psi/3)q$。对于每个超曲面$\Sigma \subset B$,

$$\mathrm{tr}^q_{T\Sigma}\,\mathsf{p} = \psi > 0, \qquad |\,\mathrm{tr}^q_{T\Sigma}\,\mathsf{p}| = \psi.$$

将 [8, 定理 5.1] 应用于完备初始数据集（M, q, p），其中 $n = 4$ 和

$$\Omega = \mathrm{int}\, B \setminus A, \qquad \partial_1\Omega = Y_B, \qquad \partial_2\Omega = Y_A.$$

沿 Y_B 指向 Ω 外部的法向量是 B 的外法向量，而沿 Y_A 指向 Ω 内部的法向量是 A 的外法向量。因此，假设为

$$H_q(Y_B) > \psi, \qquad H_q(Y_A) \leq \psi.$$

定理给出一个开集 Ω′ ⊂Ω，满足

$$\partial\Omega' = Y_B \sqcup \Sigma',$$

其中， Σ' 是一个嵌入的 $C^{2,\,\alpha}$ 超曲面，相对于指向 Ω′内部的法向量满足 $H_q = \psi$ 。由于 $\psi > 0$，方程中的绝对值就是 $|\,\mathrm{tr}^q_{T\Sigma'}\,\mathsf{p}| = \psi$，不会损失正则性。在局部图坐标中， $C^{2,\,\alpha}$ 图函数在较小邻域上满足一个拟线性一致椭圆方程。沿该图取其系数，得到 $C^{1,\,\alpha}$系数和右端项。线性内部正则性定理 [13,定理 6.17] 首先给出 $C^{3,\,\alpha}$ 正则性；由于 q和 ψ 光滑，迭代即可得到光滑性。

Put

$$E = \mathrm{int}\, B \setminus \Omega'.$$

在 Y_B附近，光滑区域 Ω′ 占据 Y_B的内侧。由紧性可得一个内向领圈，其 Y_B 包含于 Ω′中。因此， E 远离 Y_B ，且在 M中紧致。此外，

$$A \subseteq E \subset \mathrm{int}\, B, \qquad Y_E = \Sigma',$$

并且 E 的外法向量指向 Ω′内部。因此， E 是一个 $= \psi(Y_E)$ H_q的紧正则区域。其边界非空，因为 $\varnothing \neq A \subseteq E \neq M$，且 M 是连通的。

设 D 是一个紧正则区域，其

$$A \subseteq D \subset \mathrm{int}\, B, \qquad H_q(Y_D) \leq \psi.$$

Then

$$\Omega'' = \mathrm{int}\, B \setminus D \subset \Omega$$

边界为 $Y_B \sqcup Y_D$，且指向 Ω'' 的法向量是 D的外法向量。 [8, 定理 5。1] 中的最外层性质给出 $\Omega' \subset\Omega''$，因此 $D \subseteq E$。

最后， Y_A 的紧性以及严格不等式 $H_q(Y_A) < \psi$ 给出了一个充分小的 $t > 0$, 使得

$$A_t = \{x : d_q(x, A) \le t\}$$

是$\operatorname{int} B$ 中的紧正则区域，并且满足 $H_q(Y_{A_t}) < \psi$。包围性质给出 $A_t \subseteq E$，从而 $A \subset \operatorname{int} E$。□

C.3. **命题5.6的证明。**

证明。 函数 $k = u^{2/3}h$ 为正，并且（5.2）给出

$$H_q(Y_A) < k, \qquad H_q(Y_B) > k.$$

定理 5.5，应用于 $\psi = k$，可得一个紧正则区域 T，其满足

$$A \subset \operatorname{int} T, \qquad T \subset \operatorname{int} B, \qquad H_q(Y_T) = k,$$

包含每个满足 L的紧正则区域

$$A \subseteq L \subset \operatorname{int} B, \qquad H_q(Y_L) \le k.$$

此外，若 $T \subseteq L$，则 $L \subseteq T$，因此 $L = T$。于是 T按照定义 5.4的意义是弱最外层。

我们验证 Y_T的每个连通分支 Σ 上的正标量曲率。记 $q_\Sigma = q|_{T\Sigma}$，并令 ν 为 T的向外 q单位法向量。在速度为 η的法向变分下，

$$H_q' = -\Delta_{q_\Sigma}\eta - (\operatorname{Ric}_q(\nu,\nu) + |\mathrm{II}_q|^2_{q_\Sigma})\eta,$$
$$k' = \eta\,\nu k.$$

因此， $H_q - k$ 的线性化为

$$\mathcal{L}_\Sigma\eta = -\Delta_{q_\Sigma}\eta - (\operatorname{Ric}_q(\nu,\nu) + |\mathrm{II}_q|^2_{q_\Sigma} + \nu k)\eta.$$

其第一特征值非负。事实上，若第一特征值为负，则其正特征函数将给出一个 Σ 的微小向外变形，使得 $H_q - k < 0$。保持其他边界分支不变，将得到一个更大的可容许紧正则域，这与弱最外性矛盾。这就是 [11,定理 2 的证明1], 中主特征函数变分论证直接应用于 $H_q - k$ 及自伴算子 $\mathcal{L}_\Sigma$的情形。下文关于正标量曲率的结论由我们展示的稳定性不等式及式（5.3）推出。

由此可得，对每个 $\eta \in C^\infty(\Sigma)$,

$$\int_\Sigma \left(|d\eta|^2_{q_\Sigma} - (\operatorname{Ric}_q(\nu,\nu) + |\mathrm{II}_q|^2_{q_\Sigma} + \nu k)\eta^2\right) d\operatorname{Vol}_{q_\Sigma} \ge 0.$$

高斯方程和 $H_q(\Sigma) = k$ 给出

$$2\operatorname{Ric}_q(\nu,\nu) = \operatorname{Scal}_q - \operatorname{Scal}_{q_\Sigma} + k^2 - |\mathrm{II}_q|^2_{q_\Sigma}.$$

利用

$$|\mathrm{II}_q|^2_{q_\Sigma} \geq k^2/3, \qquad \nu k \geq -|dk|_q,$$

我们得到

$$\int_\Sigma \left(2|d\eta|^2_{q_\Sigma} + \mathrm{Scal}_{q_\Sigma}\,\eta^2\right) d\,\mathrm{Vol}_{q_\Sigma} \geq \int_\Sigma \left(\mathrm{Scal}_q + \frac{4}{3}k^2 - 2|dk|_q\right)\eta^2 d\,\mathrm{Vol}_{q_\Sigma}\,.$$

由紧性及（5.3），

$$\delta_\Sigma = \min_\Sigma \left(\mathrm{Scal}_q + \frac{4}{3}k^2 - 2|dk|_q\right) > 0.$$

将非负项 $6\int_\Sigma |d\eta|^2_{q_\Sigma}\, d\mathrm{Vol}_{q_\Sigma}$ 加到左边，得到

$$\int_\Sigma \left(8|d\eta|^2_{q_\Sigma} + \mathrm{Scal}_{q_\Sigma}\,\eta^2\right) d\,\mathrm{Vol}_{q_\Sigma} \geq \delta_\Sigma \int_\Sigma \eta^2\, d\,\mathrm{Vol}_{q_\Sigma}\,.$$

因此，共形拉普拉斯算子

$$-8\Delta_{q_\Sigma} + \mathrm{Scal}_{q_\Sigma}$$

的第一特征值为 $\lambda_\Sigma \geq \delta_\Sigma > 0$。设 $\zeta > 0$ 是相应的光滑特征函数。由三维共形标量曲率公式可得

$$\mathrm{Scal}_{\zeta^4 q_\Sigma} = \zeta^{-5}(-8\Delta_{q_\Sigma}\zeta + \mathrm{Scal}_{q_\Sigma}\,\zeta) = \lambda_\Sigma \zeta^{-4} > 0.$$

因此， Y_T 的每个连通分支都具有正标量曲率。 □

C.4. **引理 5.8的证明**。

引理C.1 (向内领圈数据)。 设 K 是一个连通紧正则区域，满足 $H_q(Y_K) > 0$，且 $A \subset \mathrm{int}\, K$ 是紧致的。存在一个连通紧正则区域 Γ、 $r \in C^\infty(M)$以及 $c < 0$，使得

$$K = \{r \leq 0\}, \qquad \Gamma = \{r \leq c\},$$
$$A \subset \mathrm{int}\,\Gamma, \qquad \Gamma \subset \mathrm{int}\, K.$$

两对(Γ, Y_Γ) 和(K, Y_K) 微分同胚，并且在 $K \setminus \mathrm{int}\ \Gamma$上，

$$dr \neq 0, \qquad \mathrm{tr}^q_{(\nabla_q r)^\perp} \mathrm{Hess}_q\, r > 0. \tag{C.1}$$

证明。 取 Y_K 的一个管状邻域，配备带符号的 q距离坐标s，其中内部为负。由紧性和 $H_q(Y_K) > 0$，可选取领域，使其平行层严格平均凸：这些层的第二基本形式随领域参数光滑变化。光滑领域构造是标准的 [17, 定理9.25]; 此处严格平均凸性由紧性和连续性得以保持。缩小该领域，使其与 A不相交。

将带符号坐标延拓为光滑函数 r，使其在 K 的更深处内部为常数且为负，并在外侧领圈之外为常数且为正，使得 $K = \{r \leq 0\}$。选择充分接近零的 $c < 0$，使得

$$\Gamma = \{r \leq c\}$$

在其内部包含 A，并且在整个 $\{c \le r \le 0\}$ 中包含 $r = s$。于是 $\Gamma \subset \operatorname{int} K$，并且在闭领圈 $K \setminus \operatorname{int}\Gamma$ 上，

$$dr \neq 0, \qquad \operatorname{tr}^q_{(\nabla_q r)^\perp} \operatorname{Hess}_q r > 0.$$

特别地，Y_Γ 是光滑且严格平均凸的。

对领圈坐标进行递增变换，使其在两端附近恒等并将 c映至 0；该变换可通过在其余部分取恒等映射延拓为环境微分同胚，将$(\Gamma,\ Y_\Gamma)$映至$(K,\ Y_K)$。这证明了连通性以及所断言的微分同胚。□

引理的证明 *5.8*。应用引理C.1 于推论 K 中的连通分支 5.7。边界微分同胚将正标量曲率度量从 Y_K 传递至 Y_Γ。方程（C.1）给出

$$H_q(Y_\Gamma) = \frac{\operatorname{tr}^q_{(\nabla_q r)^\perp} \operatorname{Hess}_q r}{|dr|_q} > 0.$$

推论5.2 于是给出

$$\pi_1(Y_\Gamma) \twoheadrightarrow \pi_1(\Gamma).$$

□

C.5. **相对最大值原理的统一保护**。

注记 （定量秩一修正）。设 S 是黎曼4-空间上的一个对称型，$\xi \neq 0$ 是一个余向量。假设

$$\operatorname{tr}^q_{\ker \xi} S \ge \delta > 0, \qquad \|S\|_{\mathrm{op},q} \le C, \qquad |\xi|_q \ge \alpha > 0.$$

设 $n = \xi^\sharp / |\xi|_q$。对于三维平面 P的单位法向量 $z = an + v$，若 $v \perp n$和 $\tau = |v|_q^2 = 1 - a^2$，则有

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}^q_P(S + L\xi \otimes \xi) &= \operatorname{tr}^q_{n^\perp} S + S(n,n) - S(z,z) + L|\xi|_q^2 \tau \\ &\ge \delta - 2C\sqrt{\tau} - 2C\tau + L\alpha^2 \tau \\ &\ge \frac{\delta}{2} + \left(L\alpha^2 - 2C - \frac{2C^2}{\delta} \right) \tau. \end{aligned}$$

最后一步用到了 $2C\sqrt{\tau} \le \delta/2 + 2C^2\tau/\delta$。因此，对于每个三维平面$P$，

$$\begin{aligned} & L\alpha^2 \ge 2C + \frac{2C^2}{\delta} \\ \Longrightarrow \quad & \operatorname{tr}^q_P(S + L\xi \otimes \xi) \ge \frac{\delta}{2}. \end{aligned} \tag{C.2}$$

对于具有严格切向迹且 ξ 不为零的紧集上的连续数据，这些常数可以统一选取。

引理 C.2（来自平均凸边界的统一保护）。 设（M、 q）是完备且连通的，设 B 是紧致的，并假设

$$\Gamma \subset \operatorname{int} T, \qquad T \subseteq B,$$

其中 Γ 是紧致的。给定 $\delta > 0$，存在 $a > 0$，其选取与 D 和 S 无关，并具有以下性质。设 D 是满足下列条件的紧正则区域

$$T \subseteq D \subseteq B, \qquad H_q(Y_D) \geq \delta,$$

并设 $S \subseteq D$ 是紧致的，且满足

$$\mathsf{MP}_q(S; M \setminus \Gamma).$$

Then

$$d_q(S, Y_D) \geq 4a.$$

证明。 取 $r_0 > 0$ ，使得

$$d_q(\Gamma, M \setminus \operatorname{int} T) \geq r_0,$$

并选取 $\Lambda \geq 0$ ，使得 $\mathsf{Ric}_q \geq -\Lambda q$ 在 B 上成立。令

$$a = \frac{1}{4} \min\left\{ r_0, \frac{\delta}{\Lambda + 1} \right\} > 0.$$

若 $S = \varnothing$，则结论显然成立。

点 $S \cap Y_D$ 会位于 Γ之外。对 D的一个局部定义函数，再经过充分凸的递增重参数化后，在每个三维平面上都有正海森迹，并且在 S处有一个局部最大值。这由（C.2）和 H_q（Y_D） > 0可得，这与相对最大值原理矛盾。因此 $S \subset \operatorname{int} D$。

实现

$$l = d_q(S, Y_D) > 0$$

在 $x \in S$ 和 $y \in Y_D$处取值。若 $x \in \Gamma$，则 $l \geq r_0$。以下设 $x \notin \Gamma$。

令 $\gamma\colon [0, l] \to M$ 为一条从 y 到 x的最短测地线。它沿内法向方向出发，并始终位于 D中：若之后再次与 Y_D 相交，就会得到一个距 x更近的边界点。我们构造边界距离的一个光滑上支撑函数，而不假设该距离在 x处光滑。

令 $\Pi_s\colon T_yM \to T_{\gamma(s)}M$ 为平行移动。对于较小的 $v \in T_xM$，写作

$$v = \Pi_l(w + b\dot{\gamma}(0)), \qquad w \perp \dot{\gamma}(0),$$

并定义

$$a_0(w) = (\exp_y^q)^{-1}(\exp_y^{Y_D}(w)),$$

其中，$\exp_y^{Y_D}$是 Y_D的内蕴指数映射。令

$$c_v(s) = \exp^q_{\gamma(s)}\left(\Pi_s\left[\left(1 - \frac{s}{l}\right) a_0(w) + \frac{s}{l}(w + b\dot{\gamma}(0))\right]\right).$$

于是 $c_v(0) \in Y_D$ 和 $c_v(l) = \exp_x^q(v)$。当 v 足够小时，这些曲线具有非零速度，因此

$$\ell(\exp_x^q(v)) = \operatorname{Length}_q(c_v)$$

在 x 附近定义了一个光滑函数。它满足

$$d_q(\,\cdot\,, Y_D) \le \ell, \qquad \ell(x) = l, \qquad \nabla_q \ell(x) = \dot\gamma(l).$$

对于满足 $b = 0$ 的变分，沿 γ 的一阶变分场为平行场 $\Pi_s w$。初始端点曲线是 Y_D 的内蕴测地线，而终端点曲线是环境测地线。因此，一阶与二阶变分公式 [26,（引理 5.4.2 和定理 6.1）4]给出

$$\operatorname{tr}^q_{\dot\gamma(l)^\perp} \operatorname{Hess}_q \ell(x) = -H_q(Y_D)(y) - \int_0^l \operatorname{Ric}_q(\dot\gamma, \dot\gamma)\, ds \le -\delta + \Lambda l.$$

边界项为 $-H_q$，因为 $\dot\gamma(0)$ 是内法向量。对于这些正交平行变分场，速度的一阶变分逐点为零，因此能量的二阶变分与长度的二阶变分相等。运动的初始端点贡献其第二基本形式；终端点的加速度为零。这里不假设边界距离具有光滑性。

在 S 靠近 x 的地方，

$$\ell \ge d_q(\,\cdot\,, Y_D) \ge l.$$

因此，$e^{-L\ell}$ 在 x 处的 S 上取得局部最大值。若 $\delta > \Lambda l$，则

$$\operatorname{Hess}_q(e^{-L\ell}) = Le^{-L\ell}(-\operatorname{Hess}_q \ell + L\, d\ell \otimes d\ell)$$

在每个三维平面上的迹对于充分大的 L 都为正。事实上，将 $S = -\operatorname{Hess}_q \ell$、$\xi = d\ell$ 和切向迹下界 $\delta - \Lambda l > 0$代入相对最大值原理于 x处，即得矛盾。

因此，当 $x \notin \Gamma$ 时，有 $\delta \le \Lambda l$。结合 $x \in \Gamma$ 的情形，可得

$$l \ge \min\left\{r_0, \frac{\delta}{\Lambda + 1}\right\} = 4a.$$

□

C.6. **引理 5.10 的证明。**

证明。 假设 $S \neq \varnothing$。令 $\delta = \min_B k > 0$，并在选择任何膨胀或强迫鼓包之前，取引理 C.2 中的保护半径a 。由于$H_q(Y_B) > k \ge \delta$，将该引理应用于 $D = B$ 可得

$$d_q(S, Y_B) \ge 4a.$$

取 $0 \le \beta \le 1$ 光滑函数，使其在 S 附近等于一，且紧支撑于

$$\{x : d_q(x, S) < a/2\}.$$

令 b_T 为 T 的一个光滑全局定义函数，使得

$$T = \{b_T \le 0\}, \qquad Y_T = \{b_T = 0\},$$

以及 $db_T \neq 0$ 在 Y_T 上。取一个正则值

$$t > \max\{0, \max_S b_T\}$$

b_T/β 在 $\{\beta > 0\}$上，并设

$$D = \{b_T - t\beta \le 0\}.$$

萨德定理适用于其开域上的光滑商。在其零水平集上，当 $\beta > 0$ 时，

$$d(b_T - t\beta) = \beta\, d(b_T/\beta) \neq 0.$$

在满足 $\beta = 0$ 的零点处，由非负性可得 $d\beta = 0$，因此

$$d(b_T - t\beta) = db_T \neq 0.$$

因此， D 是正则的。此外， $D \subset T \cup$ 的支集为 β，所以它是紧致的，并且

$$T \subseteq D, \qquad S \subset \operatorname{int} D, \qquad D \subset \operatorname{int} B.$$

在 β 的支集之外， D 和 T 的定义域局部一致。

选取光滑函数 $0 \leq \xi \leq 1$，使其在 β 的支集附近等于 1，且其紧支撑包含于 $\{x : d_q(x, S) < a\}$ 中。取

$$C > \max\{0, \max_{Y_D}(H_q(Y_D) - k)\},$$

并令 $\psi = k + C\xi$。在未改变的边界上， $H_q(Y_D) = k$；在改变的部分上， $\xi = 1$。因此，

$$H_q(Y_D) \leq \psi, \qquad \psi \geq k, \qquad \psi = k \text{ near } Y_B.$$

原有的障碍函数仍然有效:

$$H_q(Y_A) < k \leq \psi, \qquad H_q(Y_B) > k = \psi.$$

定理 5.5应用于此 ψ，给出了一个紧正则区域 E使得

$$D \subseteq E \subset \operatorname{int} B, \qquad H_q(Y_E) = \psi \geq \delta.$$

特别地， $T \subseteq E$ 和 $S \subset$ 内 E。对 E 应用引理 C.2，使用相同的半径 a可得

$$d_q(S, Y_E) \geq 4a.$$

由于 $\operatorname{supp}\xi \subset \{x : d_q(x, S) < a\}$，我们有 $\xi = 0$ 在 Y_E上。因此

$$H_q(Y_E) = k.$$

T的弱外层性质迫使 $E = T$，因而 $S \subset$内 T。

连通分支 K 在紧正则区域 T中既开又闭。若$S \setminus K$ 非空，则 F 在此紧集上的最大值将是 S 上位于 Γ之外的局部最大值，这与严格三凸性矛盾。因此 $S \subset K$。

若 $S \not\subset \Gamma$，则在 S 上使 r 取最大值。在最大点处， $r > c$，并且

$$\operatorname{Hess}_q(e^{Lr}) = Le^{Lr}(\operatorname{Hess}_q r + L\, dr \otimes dr)$$

在每个三维平面上，当充分大时均具有正迹 L，根据（C.2）。这再次与相对最大值原理矛盾。因此 $S \subset \Gamma$。 □

C.7. 弱包与全局定义层。 取一个光滑凸函数 $\chi_a \geq |\cdot|$，使其在 $(-a,a)$ 外等于 $|\cdot|$，并令

$$\max\nolimits_a(s,t) = \frac{s+t+\chi_a(s-t)}{2}.$$

凸性给出 $\chi_a(z) \leq a$ 对 $|z| \leq a$成立，因此

$$\begin{aligned} 0 \leq \max\nolimits_a(s,t) - \max(s,t) &\leq \frac{a}{2}, \\ |s-t| \geq a \quad\Longrightarrow\quad \max\nolimits_a(s,t) &= \max(s,t). \end{aligned} \tag{C.3}$$

对于光滑函数 $v,\ w$,

$$\begin{aligned} &\operatorname{Hess}_q \max\nolimits_a(v,w) \\ &\quad = t \operatorname{Hess}_q v + (1-t)\operatorname{Hess}_q w + \frac{\chi_a''(v-w)}{2}\, d(v-w)\otimes d(v-w), \end{aligned} \tag{C.4}$$

其中 $t = (1+\chi_a'(v-w))/2 \in [0,1]$。因此，光滑最大值保持弱三凸性；当两个输入都严格时，也保持严格三凸性。

引理 C.3（弱包的最大值原理）。 对于每个非空紧致 Γ,

$$\mathsf{MP}_q(\widehat{\Gamma}_3^q; M\setminus\Gamma)$$

成立。若 F 是严格三凸耗尽函数，则该包是紧致的。

证明。 该包是闭集，且包含 Γ。若存在严格三凸耗尽函数F，则该包包含于

$$\{F \leq \max_{\Gamma} F\},$$

因此是紧致的。

为证明最大值原理，设光滑测试函数 ψ在 $\widehat{\Gamma}_3^q$ 上于

$$x \in \widehat{\Gamma}_3^q \setminus \Gamma$$

处取得局部最大值，且在 x处的每个三维平面上都有正Hessian迹。Grassmann流形的紧性以及Hessian矩阵的连续性保证存在一个邻域，使迹具有一致的正下界。减去局部平方距离的一个充分小倍数，再减去一个常数，可得到光滑函数 ψ_0，定义在相对紧邻域 $\Omega \Subset M\setminus\Gamma$ 上，使得

$$\begin{aligned} \psi_0(x) &= 0, \\ \lambda^q_{(3)}(\operatorname{Hess}_q \psi_0) &\geq 0 \quad \text{on } \Omega, \\ \psi_0 &\leq -4d \quad \text{on } \widehat{\Gamma}_3^q \cap \partial\Omega \end{aligned}$$

对于某个 $d>0$。

包外的每个紧集都存在一个光滑弱三凸分离函数 u，使得 $u \le -1$ 在 Γ 上成立，且 $u > 1$ 在该紧集上成立。事实上，选取有限个分离函数 $u_1, \dots, u_N$，使得

$$u_j \le -2 \text{ on } \Gamma$$

且集合 $\{u_j > 2\}$ 覆盖给定的紧集。对 $(N-1)a/2 < 1$ 反复取光滑最大值，由 (C.3) 和 (C.4) 得到所述分离函数。对于空集，取 $u = -1$。

将这一构造应用于紧集

$$E = \{y \in \partial\Omega : \psi_0(y) \ge -2d\},$$

它与包不相交。取足够大的 $A > 0$ s，并令

$$v = \max_{d/4}(-d, Au - 3d).$$

由于 x 属于包，

$$u(x) \le \max_{\Gamma} u \le -1.$$

因此 $v = -d$ 在 Γ 上成立，并且在 x处成立。在 E上，取足够大的 A，使得 $\psi_0 < v - d/4$。在 $\partial\Omega \setminus E$上，该不等式由 $\psi_0 < -2d$ 和 $v \ge -d$推出。因此

$$\psi_0 < v - d/4 \quad \text{on } \partial\Omega.$$

在 Ω 上定义全局函数为 $\max^{d/4}(v, \psi_0)$，在外部则定义为 v。这两个公式在 $\partial\Omega$ 附近一致，因此该函数光滑且弱三凸。它在 Γ 上等于 $-d$，并在 x 处等于 0，这与包的定义矛盾。□

引理 C.4（由紧致捕获得到包络相等性）。在引理 *5.10*中，进一步假设

$$F \le b \text{ on } \Gamma, \qquad F > b \text{ on } \partial B$$

对某个 b 成立。那么 $\widehat{\Gamma}_3^q = \Gamma$。

证明。令 $S = \widehat{\Gamma}_3^q$。引理 C.3 给出其紧致性和相对最大值原理。对于 F 的定义不等式给出 $F \le b$ 在 S上成立，因此 $S \cap \partial B = \varnothing$。于是，

$$S \setminus B = S \cap (M \setminus \operatorname{int} B)$$

是紧致的。若此集合非空，则 F 在其上的最大值将是 S 在 Γ之外的局部最大值，这与相对最大值原理矛盾。因此$S \subset B$。引理 5.10 现在给出 $S \subset \Gamma$。反向包含由定义可得。□

引理 C.5（严格的全局定义水平集）。设 Γ 是一个非空的光滑紧正则区域，且 $H_q(\partial\Gamma) > 0$，并假设

$$\widehat{\Gamma}_3^q = \Gamma.$$

如果 M 具有一个光滑严格三凸穷竭函数 F，那么存在一个满足下式的光滑严格三凸穷竭函数 G_0

$$\Gamma = \{G_0 \le 0\}, \qquad \partial\Gamma = \{G_0 = 0\},$$

在 $\partial\Gamma$ 上取 $dG_0 \ne 0$。

证明。选择一个光滑全局定义函数 r ，使得

$$\Gamma = \{r \le 0\}, \qquad \partial\Gamma = \{r = 0\},$$

在紧集外的 $dr \neq 0$ on $\partial\Gamma$ and $r = 1$ 。正的平均曲率给出

$$\operatorname{tr}^{q}_{(\nabla_q r)^\perp} \operatorname{Hess}_q r = |dr|_q H_q(\partial\Gamma) > 0.$$

在紧边界上一致地应用（C.2）。由连续性可知，存在$L > 0$ 和 $0 < \epsilon < 1$ 使得

$$\lambda^{q}_{(3)}(\operatorname{Hess}_q r + L\, dr \otimes dr) > 0 \quad \text{on } U = \{|r| < \epsilon\}.$$

这里将 ϵ 选取得足够小，使得 U 位于该不等式成立的边界邻域内。

Set

$$h = A(e^{Lr} - 1), \qquad A = \frac{4}{1 - e^{-L\epsilon}}.$$

于是， h 在 U 上是严格三凸的，具有 r 的符号，并且

$$h|_{r=-\epsilon} = -4, \qquad h|_{r=0} = 0, \qquad h|_{r=\epsilon} = 4e^{L\epsilon}.$$

Put

$$C = \{r \le \epsilon/2\}, \qquad H = 4e^{L\epsilon} + 3.$$

我们构造一个严格三凸耗尽函数 v ，使其满足

$$-3 < v \le -2 \text{ on } \Gamma, \qquad v > H \text{ on } M \setminus \operatorname{int} C.$$

对 F 进行正仿射缩放，得到 f ，使其满足

$$f > -3 \text{ on } M, \qquad f \le -2 \text{ on } \Gamma.$$

选取 F的一个足够大的紧次水平集 P，使其包含 C，且满足$f > H + 4$ 在 $M \setminus P$上成立。集合

$$E = P \setminus \operatorname{int} C$$

是紧致的，且与 Γ不相交。

引理中的包络相等性和有限分离构造C.3 给出一个光滑弱三凸函数 w ，使其满足

$$w \le -2 \text{ on } \Gamma, \qquad w > 2 \text{ on } E.$$

加上 F 的一个足够小的正倍数，可得到一个严格三凸函数 u ，使其满足

$$u \le -1 \text{ on } \Gamma, \qquad u > 1 \text{ on } E.$$

这些不等式得以保留，因为 $\Gamma \cup E$ 是紧致的。

选择 $0 < a_0 < 1$ 并令

$$v = \max_{a_0}(f, (H + 10)u - 6).$$

在 Γ上，

$$(H + 10)u - 6 \le -H - 16 < f - 1,$$

所以 $v = f$ 在那里。因此 $-3 < v \le -2$ 在 Γ上。在 E上，第二个输入大于 $H + 4$；在 $M \setminus P$上，第一个输入大于 $H + 4$。因此 $v > H$ 在

$M \setminus \operatorname{int} C$。两个输入都是严格三凸的，并且 $v \geq f$，所以 v是一个严格三凸耗尽函数。

对于 $a = 1/10$，定义

$$G_0 = \begin{cases} \max_a(v, h), & |r| < \epsilon, \\ v, & |r| \geq \epsilon. \end{cases}$$

在 $r = -\epsilon$ 上，有 $v - h > 1$。在 $r = \epsilon$ 上，有 $v - h > 3$。因此，这两个公式在缝附近的邻域上一致。

在 $\partial\Gamma$ 上，$h = 0$ 和 $v \leq -2$，因此在一个更小的领域内有 $G_0 = h$ 。对于 $-\epsilon < r < 0$，如果 $h \leq -1$，则

$$G_0 \leq \max(v, h) + \frac{1}{20} \leq -1 + \frac{1}{20} < 0.$$

如果 $-1 < h < 0$，则 $h - v > 1 > a$，因此 $G_0 = h < 0$。对于 $0 < r < \epsilon$，有 $G_0 \geq h > 0$。在 U 之外，内部区域具有 $v \leq -2$，而外部区域位于 C 之外，其中 $v > H > 0$。这证明了

$$\Gamma = \{G_0 \leq 0\}, \qquad \partial\Gamma = \{G_0 = 0\}.$$

由于 $G_0 = h$ 在边界附近，因此那里有 $dG_0 \neq 0$ 。

方程（C.4）给出严格三凸性，而 $G_0 \geq v$ 给出下有界性和紧次水平集。□

引理 C.6（保留定义层级的 Morse逼近）。 引理 G_0 中的函数 *C.5* 可以替换为一个光滑严格三凸 ***Morse*** 穷竭函数 G ，它具有相同的零子水平集，并且在 $\partial\Gamma$附近具有相同的芽。 G 的每个临界点的指标至多为二。

证明。 取 $0 \leq \beta \leq 1$ 光滑函数，使其在 $\{G_0 = 0\}$附近等于 1，且其紧支撑包含于 $\{dG_0 \neq 0\}$中。在该支集上，

$$|dG_0|_q^2 \geq m_0 > 0.$$

真性给出 $|G_0|$ 在$\{\beta = 1\}$的外部具有正下界。

应用 [16, 第 6 章第 1 节定理 1。2] 取 $s = \infty$。对函数值、微分和 Hessian矩阵所规定的逐点容差定义了一个强 C^∞邻域，因此可得到满足所需精细 C^2 界的光滑 Morse逼近函数。取一个光滑莫尔斯函数 H ，使其对 G_0的函数值、微分和 Hessian矩阵逼近足够精细。令 $E = H - G_0$ 并

$$G = G_0 + (1 - \beta)E.$$

于是 $G = G_0$ 在零水平集附近，并且在 $\operatorname{supp}\beta$之外 $G = H$ 。恒等式

$$dG(\nabla_q G_0) = |dG_0|_q^2 + (1 - \beta)dE(\nabla_q G_0) - E\, d\beta(\nabla_q G_0)$$

当一阶喷流足够接近时，该表达式在 $\operatorname{supp}\beta$ 上保持为正。因此，每个临界点都位于 G 局部与莫尔斯函数 H一致的地方。

选取一个连续函数 $\tau > 0$ ，使得

$$\operatorname{tr}_P^q \operatorname{Hess}_q G_0 \geq \tau(x)$$

对于 x 处的每个三维平面。令 A_1, A_2 界 $|d\beta|_q$ 和 $\|\operatorname{Hess}_q \beta\|_{\mathrm{op},q}$。如果

$$\max\{|E|,\ |dE|_q,\ \|\operatorname{Hess}_q E\|_{\mathrm{op},q}\} \le \eta(x),$$

then

$$\begin{aligned}\operatorname{Hess}_q(G - G_0) &= (1-\beta)\operatorname{Hess}_q E - E\operatorname{Hess}_q \beta \\ &\quad - d\beta \otimes dE - dE \otimes d\beta,\\ |\operatorname{tr}_P^q \operatorname{Hess}_q(G - G_0)| &\le 3\eta(x)(1 + 2A_1 + A_2).\end{aligned}$$

选择精细近似，使得最后这个量小于 $\tau(x)$。这保持了严格三凸性。

足够小的值误差会保持 $\operatorname{int}\{\beta = 1\}$ 外部的两个符号不变，而 $G = G_0$ 在 $\{\beta = 1\}$ 上。再取 $|G - G_0| < 1$，即可保持下有界性和紧次水平集。因此，G 具有相同的零子水平集，并且在 $\partial\Gamma$ 附近具有相同的芽。

最后，三个负的临界点海森矩阵特征值将与正的三维平面迹相矛盾，因此

$$\operatorname{ind}_x G \le 2 \qquad (x \in \operatorname{Crit} G).$$

□

C.8. **定理5.12的证明。**

证明。保留定理 q中的固定势函数、度量 F、穷竭函数和正则核 3.3–4.1。给定一个紧集 $Q \subset M$，取 i 使得

$$Q \subset \operatorname{int} C_i.$$

令 $A = C_i$，并取 $B = C_j$ 以及命题 k 中的强迫函数 5.3。

命题 5.6 给出弱最外域 T，推论 5.7给出其中包含 K 的连通分支 A。其边界连通且具有正标量曲率，并且包含映射在基本群上诱导满射。

引理 5.8 和 C.1给出一个连通的内向领圈切割 Γ，其满足

$$Q \subset \operatorname{int} A \subset \operatorname{int}\Gamma, \qquad \Gamma \subset \operatorname{int} K,$$

正向外平均曲率，以及满足引理 r、c 所要求的领圈数据 5.10。边界与 Y_K 微分同胚，因此具有正标量曲率。推论 5.2 给出连通性以及

$$\pi_1(Y_\Gamma) \twoheadrightarrow \pi_1(\Gamma).$$

由于 $B = C_j$ 是$\{F \le s_j\}$的正则连通分支，B 中满足$F = s_j$ 的每一点都是边界点。因此 $F < s_j$ 在 Γ上。由紧性可得一个数b 使得

$$\max_{\Gamma} F < b < s_j = F|_{\partial B}.$$

引理5.10 和 C.4表明

$$\widehat{\Gamma}_3^q = \Gamma.$$

这也证明了引理 5.11。

最后，引理 C.5和 C.6 给出了一个光滑严格三凸 Morse 穷竭函数 G ，其满足

$$\Gamma = \{G \le 0\}, \qquad Y_\Gamma = \{G = 0\},$$

且 $dG \neq 0$ 在 Y_Γ上。其临界指标至多为二。该构造保持 q 不变，同时让 Q 变化，并确立所有断言的性质。□

附录 D. 第 6 节的证明

除非另有说明，本节中的所有同调群均取整数系数。

D.1. **引理6.2的证明**。

证明。 设 a 实现带$q$$(K, B)$，并设 D 表示 K 或 B。

假设 $x \in Y_D$ 和 $da_x = 0$。由于 $a|_{Y_D}$ 是常数，

$$(\mathrm{Hess}_q\, a)_x(V, W) = 0 \qquad (V, W \in T_x Y_D).$$

在与 $T_x Y_D$相适配的标架中，Hessian矩阵具有如下形式

$$\begin{pmatrix} 0_{3\times 3} & \beta \\ \beta^{\mathsf{T}} & \gamma \end{pmatrix},$$

其秩至多为二。这与定义 6.1 中的非退化性矛盾。因此 $da \neq 0$ 在两个边界上。

令 ν_q 为 D的外单位法向量。在边界点处，

$$\nabla_q a = (\nu_q a)\nu_q.$$

对于切向量 V， $W \in TY_D$，我们还有

$$\mathrm{Hess}_q\, a(V, W) = (\nu_q a)\mathrm{II}_q(V, W).$$

因此

$$0 < \mathrm{tr}^q_{(\nabla_q a)^\perp} \mathrm{Hess}_q\, a = (\nu_q a) H_q(Y_D).$$

由于 $H_q(Y_D) > 0$，我们有 $\nu_q a > 0$。因此， $\nabla_q a$ 同时从 K和 B向外指。□

D.2. **命题6.4的证明**。

引理 D.1 (带及其尾部的相对把手)**.** 假设 $K \subset$ 内部 B是紧正则区域，带$q(K,$ $B)$ 成立，且其边界梯度从 K 和 B向外指。设 F 是一个真、下有界的莫尔斯函数，其临界指标至多为二。假设 B 是 F的某个正则次水平集的连通分支。

那么， Y_K 上的每个有限 *CW* 结构都可扩展为(E_K, Y_K)的相对胞腔模型，且相对胞腔仅位于维数为0、1、2的情形。此外，

$$\begin{aligned} &H_\ell(M, K) = 0 \quad (\ell \ge 3), \\ &H_2(M, K) \ \textit{is torsion-free.} \end{aligned} \tag{D.1}$$

证明。 令 a 实现带 Band$_q(K, B)$，并令

$$W = B \setminus \operatorname{int} K.$$

我们首先将 $a|_W$ 替换为一个值域为 $[0,1]$ 且具有相同临界点和指标的莫尔斯函数。

选择 $0 < \varepsilon < 1/2$ 足够小，使得

$$\frac{1}{4} < \varepsilon a + \frac{1}{2} < \frac{3}{4} \quad \text{on } W.$$

向外边界梯度使 a成为不相交边界领圈中的法坐标。在 Y_K的 W侧，我们在边界附近有 $a > 0$；在 Y_B的 W侧，我们有 $a < 1$。

缩小这些边界领圈，使其 a坐标范围为 $[0, \delta]$和 $[1-\delta, 1]$，其中 $0 < \delta < 1/2$。选择非负的光滑 bump 函数 η_-， η_+，其支集包含于这些区间的内部，且每个函数的积分均为一。定义

$$r_-(s) = \varepsilon s + \frac{1}{2}\int_0^s \eta_-(t)\,dt,$$
$$r_+(s) = \varepsilon s + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)\int_{1-\delta}^s \eta_+(t)\,dt.$$

那么 $r_-(0) = 0$, $r_+(1) = 1$，并且

$$r_-' = \varepsilon + \tfrac{1}{2}\eta_- > 0,$$
$$r_+' = \varepsilon + (\tfrac{1}{2} - \varepsilon)\eta_+ > 0.$$

在任一领域的内部边缘附近，相应的函数与$\varepsilon s + 1/2$一致。在两个领域中分别使用 $r_- \circ a$ 和 $r_+ \circ a$，并在其他地方使用 $\varepsilon a + 1/2$。所得的光滑函数

$$\widehat{a} : W \longrightarrow [0,1]$$

满足

$$\widehat{a}^{-1}(0) = Y_K, \qquad \widehat{a}^{-1}(1) = Y_B.$$

它不会在领域中引入临界点。在其他地方，它是 a 的一个正仿射变换，因此其临界点及指标与 a 的相同。

相对莫尔斯构造通过指标为 W 的把手，从 Y_K 的一个领域构造 0、1、2。每个把手贡献一个维数等于其指标的相对胞腔 [23,定理 3.13–3。14]。

设 s 是定义 B 的正则值，并记

$$\{F \le s\} = B \sqcup B_1 \sqcup \cdots \sqcup B_\ell.$$

由于子水平集是带边界的紧光滑流形，因此它只有有限多个连通分支。每个 B_α 都是由该连通分支中的F-把手从空集构造而成的，其指标同样为 0、1、2。

选择高于 s 且趋于无穷的正则值。每个相邻正则值之间的带状区域都是紧致的，并且包含有限个临界点，因此每个阶段只附加有限个把手。共享同一临界值的临界点可以同时处理 [23, 见定理 3 后的注记14]。连同

紧带和连通分支 B_α，这些把手构造出相对于 Y_K的 E_K。

从 Y_K上给定的有限 CW 结构开始。用核心圆盘替换把手，并对其附着映射应用胞腔逼近[15,定理 4。8]。同伦的附着映射给出相对于前一阶段同伦等价的粘附空间 [15, 命题 0。18]。相对于前一阶段和 Y_K，归纳地选择有限阶段模型和比较映射。它们的并集给出一个 CW 复形 X，其中包含给定的 Y_K 作为子复形，并且存在一个比较映射

$$e : X \longrightarrow E_K$$

其在 Y_K 上的限制映射与其包含映射同伦。

E_K 的每个紧子集都包含于某个有限阶段中，而 X 的每个紧子集都包含于某个有限子复形 [15, 命题 A.1]。因此，球面映射及其同伦都可以在有限阶段中检测。有限阶段的等价性表明， e 在连通分支上是双射，并在所有同伦群上诱导同构。由于光滑流形具有 CW 型，逐个连通分支应用怀特海德定理，可知 e 是一个同伦等价 [15,定理 4.5]。

CW 对 $(X,\ Y_K)$ 的同伦延拓性质允许将 e替换为一个与之同伦的映射，使其满足

$$e|_{Y_K} = (Y_K \hookrightarrow E_K)$$

恰好 [15, 命题 0。16]。这给出了定义6.3中的相对模型，其中包含指定的边界胞腔和实际边界映射。

带领圈的切除给出

$$H_\ell(M, K) \cong H_\ell(E_K, Y_K).$$

事实上，切除 K 的一个略小的核心后，剩下一个领圈对，它变形收缩到 $(E_K,\ Y_K)$。由于 e是一个同伦等价，并且限制在 Y_K上是实际包含映射，对的正合列给出

$$H_\ell(X, Y_K) \cong H_\ell(E_K, Y_K).$$

相对胞腔同调 [15, 定理 2.35和第 2 节2] 利用一个链复形计算这些群，其中

$$C_\ell(X, Y_K) = 0 \quad (\ell \geq 3).$$

因此

$$H_\ell(M, K) = 0 \quad (\ell \geq 3),$$
$$H_2(M, K) \cong \ker(\partial_2 : C_2(X, Y_K) \to C_1(X, Y_K)).$$

后者是自由阿贝尔群的一个子群，因此是无挠的。 □

命题 *6.4* 的证明。 令 $B = D_j$ 和 $W = B \setminus$ 内 K。根据定理 Y_B ，边界是严格平均凸的4.1。结合 $H_q\ (Y_K)\ > 0$，引理 6.2 给出了向外边界梯度。应用引理 D.1

其尾函数为 $F = H$。它给出了相对胞腔模型和同调断言。

为确定外部基本群映射，沿着从 Y_B 朝向 Y_K的紧带读取。指标为 $\lambda \le 2$ 的正向把手变为指标为 $4-\lambda \ge 2$的反向把手。因此， W 由连通 Y_B的一个领域构成，其中不含相对的零把手或一手柄。由此可知， W 是道路连通的，并且

$$\pi_1(Y_B) \twoheadrightarrow \pi_1(W).$$

闭外部满足

$$E_K = E_B \cup W, \qquad E_B \cap W = Y_B.$$

边界领圈给出了一个具有这些同伦类型的开覆盖。此外，$E_B \simeq O_B$ 根据定理 4.1，是道路连通的。范坎彭 [15, 定理 1。20]给出

$$\pi_1(E_K) \cong \pi_1(E_B) *_{\pi_1(Y_B)} \pi_1(W).$$

由于 $\pi_1(Y_B) \to \pi_1(W)$ 是满射，第一个顶点群满射到这个推出上：

$$\pi_1(E_B) \twoheadrightarrow \pi_1(E_K).$$

实际嵌入所构成的交换方块

$$\begin{array}{ccc} O_B & \longrightarrow & O_K \\ \downarrow & & \downarrow \\ E_B & \longrightarrow & E_K \end{array}$$

其垂直映射是同伦等价。在选取相容的基点后，可得

$$\pi_1(O_{D_j}) \twoheadrightarrow \pi_1(O_K)$$

由包含映射诱导。相同的分解表明， E_K 是道路连通的，因此 O_K也是道路连通的。□

D.3. **引理6.6的证明。**

证明。 M 的可缩性意味着 M 和 K的可定向性。由于 K 是紧致的，其同调群是有限生成的。因此，无挠群 $H_1(K)$是自由阿贝尔群。

万有系数定理 [15, 定理 3.2] 给出

$$H^2(K) = H^3(K) = 0.$$

事实上，相关项为

$$\begin{aligned} &\mathrm{Hom}(H_2(K), \mathbb{Z}), \quad \mathrm{Ext}(H_1(K), \mathbb{Z}), \\ &\mathrm{Hom}(H_3(K), \mathbb{Z}), \quad \mathrm{Ext}(H_2(K), \mathbb{Z}), \end{aligned}$$

这些都消失。庞加莱–勒夫谢茨对偶性 [15,定理 3.43]因此给出

$$\begin{aligned} H_2(K, Y_K) &\cong H^2(K) = 0, \\ H_1(K, Y_K) &\cong H^3(K) = 0. \end{aligned}$$

这一对的正合列表明，包含映射诱导出

$$H_1(Y_K) \xrightarrow{\cong} H_1(K).$$

利用边界领圈对 $M = K \cup E_K$ 应用 Mayer–Vietoris。由于 M 是可缩的，包含映射给出同构

$$H_2(Y_K) \xrightarrow{\cong} H_2(K) \oplus H_2(E_K)$$

and

$$H_1(Y_K) \xrightarrow{\cong} H_1(K) \oplus H_1(E_K),$$

差一个通常的符号选择。由于 $H_2(K) = 0$，第一个证明了所断言的同构 $H_2(Y_K) \to H_2(E_K)$。

在第二个同构中，投影到 $H_1(K)$ 已经是同构。因此，满射到元素 $(0, \xi)$ 迫使 $\xi = 0$。于是 $H_1(E_K) = 0$。最后，$H_1(Y_K) \cong H_1(K)$ 是无挠的。□

D.4. **命题6.7的证明。**

证明。 单连通的环境流形是可定向的，因此 K 和 $Y = \partial K$ 继承定向。将 PSC 分类 [6, 命题 2.2], 应用于 Y 的恒等映射，得到

$$Y \cong \left(\overset{v}{\underset{\ell=1}{\#}} P_\ell \right) \# \left(\overset{r}{\underset{i=1}{\#}} (S^1 \times S^2) \right),$$

其中 P_ℓ 是球面三流形。空的连通和视为 S^3。

连通和的同调给出

$$H_1(Y) \cong \left(\bigoplus_{\ell=1}^{v} H_1(P_\ell) \right) \oplus \mathbb{Z}^r.$$

每个 $H_1(P_\ell)$ 都是有限的。由于 $H_1(Y)$ 无挠，这些有限直和项全都消失。因此，每个 P_ℓ 都是整同调球。根据 [6, 推论 2.3], ，它是 S^3 ，或是若干个 P 和 $-P$的连通和。它的基本群是有限群，而两个非平凡群的自由积是无限群。因此，它至多只有一个非平凡直和项。舍去 S^3 直和项后，每个 P_ℓ 都是 P 或 $-P$。令

$$Y_0 = \overset{v}{\underset{\ell=1}{\#}} P_\ell.$$

对于每个穿孔的 P_ℓ，选取一个维数至多为二的有限 PL 骨架。 [30] 的定理 2.5 给出这个带边界紧致三流形的一个特殊骨架，而定理 2.1 则说明该流形与其骨架的一个正则邻域同胚，且其骨架补集与一个边界领同胚。对于每个 $S^1 \times S^2$ 直和项，使用带嵌入二维骨架的乘积 CW 结构

$$(S^1 \times \{p_i\}) \cup (\{t_i\} \times S^2) \cong S^1 \vee S^2.$$

其补集是一个开三胞腔：

$$(S^1 \setminus \{t_i\}) \times (S^2 \setminus \{p_i\}) \cong \mathbb{R}^3.$$

圆贡献一个一胞腔，而球面贡献一个二维胞腔，其附着映射在楔点处为常值。

用弧树连接穿孔 P_ℓ 骨架和标记楔点，并使弧树在每个骨架上恰好交于一个选定点。令 A 为 P_ℓ骨架与这棵弧树的并。选取与这些粘接点相容的骨架和弧树的有限 CW 结构。穿孔同调球面是无环的，而连接树不会增加约化同调。因此

$$\widetilde{H}_*(A) = 0, \qquad \pi_1(A) \cong \underset{\ell=1}{\overset{v}{*}} \pi_1(P_\ell).$$

若 $v = 0$，则令 A 为连接树；若不需要连接弧，则取一个点。每个选定的球面胞腔都粘接在 A的一个点上。

有限群是剩余有限的。Gruenberg 定理指出，剩余有限群的自由积仍是剩余有限的；这一结论在 [3, 第 1 节。1],中回顾，因此 $\pi_1(A)$ 是剩余有限的。

取各个求和项骨架的正则邻域，并沿选定的弧树用边界带将它们连接起来。它们的边界连通和是穿孔连通和 $Y \setminus \operatorname{int} B^3$，连接后的骨架是其骨架。正则邻域的描述表明，其补集是一个边界领。用 B^3 封口后，连接骨架的补集成为一个开三维球。其边界上的正则邻域塌缩给出这个三胞腔的特征映射，因此可将骨架结构扩展为 Y 上的一个 CW 结构，其中有一个三胞腔。A 之外的每个二维胞腔都是一个选定的球面胞腔；每个 $S^1 \times S^2$ 求和项对应一个这样的胞腔，因此 $s = r$。圆形一维胞腔在 π_1(A)之外提供自由生成元。

现在选取互不相交的环路

$$\ell_i = S^1 \times \{p_i\} \qquad (1 \le i \le r)$$

在 $S^1 \times S^2$ 各个直和项中，避开连通和球。沿这些环路，以乘积框架向 K 附加四维二手柄。将角磨圆后，将所得紧致光滑四流形记为 D。

在边界上，每次手术都将 $S^1 \times D^2$ 替换为 $D^2 \times S^1$。从其 $S^1 \times S^2$ 直和项中移去实心环面后的补集是另一个实心环面，而乘积框架的粘合给出

$$(S^1 \times D^2) \cup (D^2 \times S^1) \cong \partial(D^2 \times D^2) \cong S^3.$$

因此，每次手术都将一个 $S^1 \times S^2$ 直和项替换为 S^3，并且

$$\partial D \cong Y_0.$$

这是对 $S^1 \times S^2$的 S^1 因子进行的标准乘积框架手术，其模型是 [27, 中 W_2 的指标为二的手柄协边，见$m = 3$ 和 $i = 1$的], 例 8.26(i)。在该模型中，前面的一个手柄与二手柄根据 [27, 引理 8.24]相消。这里，二手柄是抽象地附加到K上的，因此不需要在原环境流形中使用生成圆盘。

把手附加和角点圆滑化给出了一个连续嵌入$f\colon K, \to D$。将 D 置于其光滑双重体中，可将其实现为一个紧正则

辅助光滑四维流形中的区域。其边界是连通的，并且

$$\pi_1(\partial D) \cong \pi_1(Y_0) \cong \pi_1(A),$$
$$\pi_1(Y) \cong \pi_1(\partial D) * F_r.$$

此外，$H_1(Y) \cong \mathbb{Z}^r$ 具有基

$$b_i = [\ell_i] \qquad (1 \le i \le r).$$

该对（D, K）通过附着恰好 r 个二维把手得到。将把手替换为其核心圆盘后得到

$$H_1(D, K) = 0, \qquad H_2(D, K) \cong \mathbb{Z}^r.$$

设 e_i 为第 i 个把手的定向核心圆盘的相对类。其边界是附着环路 ℓ_i，因此实际的连接同态满足

$$\delta e_i = (Y \hookrightarrow K)_*[\ell_i] = (Y \hookrightarrow K)_* b_i.$$

选择与环路一致的核心圆盘定向。因此，所有胞腔、群和相对同调的识别都来自同一构造。□

D.5. **定理6.8的证明。**

证明。设 $H = \pi_1(A)$。在 Z/A 的一维骨架中选取一棵极大树。其边在 Z 中提升为一个森林，每个连通分支与 A 恰好相交于一个顶点。将每棵提升的树收缩到该顶点。这固定了 A，并保持该对的同伦类型，因此我们可以假设不存在相对零胞腔。

令 $x_1, \dots, x_n$ 对应于剩余的相对一胞腔，并令 $w_1, \dots, w_m$ 为相对二维胞腔的粘附词。相对胞腔表示为

$$\pi_1(Z) \cong \big(H * F(x_1, \dots, x_n)\big) / \langle\langle w_1, \dots, w_m \rangle\rangle.$$

每个 w_j 的系数都在 H 中，而从 H 出发的映射是由原包含映射诱导的映射 [15, 命题 1.26(a)]。

相对胞腔链复形为

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}^m \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathbb{Z}^n \longrightarrow 0.$$

条目 $\mathcal{D}ij$ 是 w_j [15, 中 x_i 的指数和（定理 2.35 和第 2 节2]）。由于 $H_2(Z, A) = 0$，矩阵 $\mathcal{D}$ 在 $\mathbb{Z}$ 上是单射，且在 $\mathbb{Q}$ 上的秩为 m。

如果 $m = 0$，则为新的生成元指定任意酉矩阵。否则，选取对应于$\mathcal{D}$的一个非零 $m \times m$ 子式的 m 个变量，并将单位矩阵赋给所有其他变量。将 ρ 应用于粘附词中的系数。这样就得到 $U(d)$ 中关于 m 个变量的 m 个方程，其指数和行列式非零。

由于 $U(d)$ 是一个紧致连通李群，[12, 定理 1(ii)] 给出了同一个 $U(d)$ 中的一个解。等价地，也可以直接对原来的 n 元系统应用 [25, 引理 2.1(1)]：擦除系数后，其表示复形的胞腔二边界为 $\mathcal{D}$，因此消失

H_2。所得的同态在 $H * F(x_1、\ldots\ldots、x_n)$ 上消去每个粘附词，并限制为 ρ 在 H 上。因此，它下降到

$$\widetilde{\rho} : \pi_1(Z) \longrightarrow U(d), \qquad \widetilde{\rho} \circ i_* = \rho.$$

现在假设 H 是剩余有限的，并令 $1 \neq \gamma \in H$。取一个同态 $b : H \to Q$ 到一个有限群，使得 $b(\gamma) \neq 1$。其正则置换表示是忠实且酉的:

$$\lambda : Q \hookrightarrow U(|Q|).$$

根据前面的论证延拓 $\lambda \circ b$。若 $i_*(\gamma) = 1$，则该延拓会推出 $\lambda(b(\gamma)) = I$，矛盾。因此 i_* 是单射。□

D.6. **推论的证明6.9**。

证明。 设 A 中的一个环路在 Z中零伦。其零伦的像是紧的，因此与有限子复形A一起包含在一个有限子复形 $Z_0 \subset Z$ [15, 命题 A.1]中。取包含 A的连通分支，我们可以假设 Z_0 是连通的。

由于 Z 的维数至多为二，胞腔链给出

$$H_2(Z_0) \hookrightarrow H_2(Z) = 0.$$

正合列

$$H_2(Z_0) \longrightarrow H_2(Z_0, A) \longrightarrow H_1(A)$$

且 $H_1(A) = 0$ 推出 $H_2(Z_0, A) = 0$。定理 6.8 使得 $\pi_1(A) \to \pi_1(Z_0)$为单射。因此，该环路在 A中已经是零伦的，从而证明其到$\pi_1(Z)$中的单射性。有限性断言显然成立。□

D.7. **引理6.10的证明**。

证明。 所选的二维胞腔在 A 中各点处的附着映射均为常值。因此，从 $X^{(2)}$ 中删去这些开胞腔后，仍得到包含$j(A)$的子复形 Z。它保留了连通复形 X的整个一维骨架，因此 Z 是连通的。

设 ∂_i^T 表示 CW 复形 T 的胞腔边界映射。闭连通可定向三维流形 Y 有一个三胞腔，且没有更高维胞腔。由于 $H_3(Y) = \mathbb{Z}$，其胞腔微分满足

$$\partial_3^Y = 0, \qquad H_2(Y^{(2)}) \xrightarrow{\cong} H_2(Y).$$

相对模型没有添加维数至少为三的胞腔。因此

$$C_3(X) = j_* C_3(Y), \qquad \partial_3^X = 0,$$

and

$$H_2(X^{(2)}) \xrightarrow{\cong} H_2(X).$$

Y 中除选定的球面胞腔之外的每个二维胞腔都属于 A。由于 $\dim A \leq 2$ 且 $H_2(A) = 0$，微分 ∂_2^A 是单射。选定胞腔的胞腔边界为零，因此

$$\ker \partial_2^Y = \bigoplus_{\alpha=1}^{s} \mathbb{Z}[e_\alpha^2].$$

A 之外增加的一维胞腔不会影响此计算：二维胞腔的边界位于 $C_1(A)$ 中。

根据定义恒等式

$$e \circ j = (Y \hookrightarrow E_K)$$

以及引理6.6，映射

$$H_2(Y^{(2)}) \xrightarrow{j_*} H_2(X^{(2)})$$

是一个同构。事实上，两个骨架嵌入在二次度上都是同构，e 是一个同伦等价，而实际嵌入 Y，$\to E_K$ 在 H_2 上诱导一个同构。由于胞腔三维边界为零，这就确定了圈群本身：

$$\ker \partial_2^X = \bigoplus_{\alpha=1}^{s} \mathbb{Z}[j(e_\alpha^2)].$$

另一方面，

$$C_2(X) = C_2(Z) \oplus \bigoplus_{\alpha=1}^{s} \mathbb{Z}[j(e_\alpha^2)].$$

每个选定的胞腔边界均为零，因此

$$\ker \partial_2^X = \ker \partial_2^Z \oplus \bigoplus_{\alpha=1}^{s} \mathbb{Z}[j(e_\alpha^2)].$$

比较可得 $\ker \partial_2^Z = 0$。由于 Z 的维数至多为二，$H_2(Z) = 0$。

添加具有常值附着映射的二维胞腔不会改变基本群。添加边界三胞腔也不会改变基本群。因此，

$$\pi_1(Z) \cong \pi_1(X^{(2)}) \cong \pi_1(X) \cong \pi_1(E_K).$$

等价关系 $E_K \simeq O_K$ 将此群与 $\pi_1(O_K)$ 识别。

子复形 $j(A)$ 是有限且连通的，其中 $H_1(j(A)) = 0$ 且基本群是剩余有限群。推论6.9 给出

$$\pi_1(A) \hookrightarrow \pi_1(Z) \cong \pi_1(E_K) \cong \pi_1(O_K).$$

这就是所断言的注入。 □

D.8. **命题6.12的证明。**

证明。 引理 6.10给出了一个注入

$$\pi_1(A) \hookrightarrow \pi_1(O_K).$$

根据命题 6.7,

$$\pi_1(A) \cong \underset{\ell=1}{\overset{v}{*}} I^*, \qquad I^* = \pi_1(P),$$

其中 I^* 是二元二十面体群。

我们首先利用条件 $v \le 1$ 中的群假设证明2。若$v \ge 2$, 从第一因子中选取三个互不相同的元素 $a_0 = 1$, a_1, a_2 , 并从第二因子中选取一个对合 b 。这样的对合是 I^*中阶为二的中心元。自由积正规形式表明

$$t_i = a_i b a_i^{-1} \quad (0 \le i \le 2)$$

生成一个同构于 $(\mathbb{Z}/2) * (\mathbb{Z}/2) * (\mathbb{Z}/2)$ 的子群：在 t_i 中，相邻指标不相等的字会展开成两个原始因子中的一个非空约化字。将全部三个t_i 映到 $1 \in \mathbb{Z}/2$ 的同态，其核是秩为二的自由群。事实上，使用陪集代表元 1、t_0 进行施赖尔改写，可得自由基 t_0t_1、t_0t_2，且没有非平凡关系词。因此 F_2 嵌入 $\pi_1(A)$，进而嵌入 $\pi_1(O_K)$，这与条件 2 矛盾。因此 $v \le 1$。

引理6.6 给出了一个包含诱导的同构

$$i_* : H_1(Y) \xrightarrow{\cong} H_1(K).$$

对于 (6.5) 中的基，我们有 $\delta e_i = i_* b_i$。因此，实际的连接同态是一个同构:

$$\delta : H_2(D, K) \xrightarrow{\cong} H_1(K).$$

正合列

$$\begin{aligned} 0 = H_2(K) \longrightarrow H_2(D) \longrightarrow H_2(D, K) \xrightarrow{\delta} H_1(K) \\ \longrightarrow H_1(D) \longrightarrow H_1(D, K) = 0 \end{aligned}$$

现在给出

$$H_1(D) = H_2(D) = 0.$$

万有系数定理 [15, 定理 3.2] 推出

$$H^1(D; \mathbb{Z}/2) = H^2(D; \mathbb{Z}/2) = 0.$$

因此障碍类

$$w_1(TD) \in H^1(D; \mathbb{Z}/2), \qquad w_2(TD) \in H^2(D; \mathbb{Z}/2)$$

消失。因此， D 是可定向的并且是自旋的。此外， $H_2(D; \mathbb{R}) = 0$, 所以 $\sigma(D) = 0$。

若 $v = 1$, 则 $\partial D \cong P$或 $-P$。此边界上的定向由光滑自旋填充 D诱导。反转定向会改变签名的符号，因此 $\mu(-P) = -\mu(P) = 1$在 $\mathbb{Z}/2$中。定理 6.11 将推出

$$0 = \sigma(D) \equiv 8\mu(\pm P) = 8 \pmod{16},$$

矛盾。因此 $v = 0$ 且 $\partial D \cong S^3$。由此，$\pi_1(A) \cong \pi_1(\partial D) = 1$，并且

$$\pi_1(Y) \cong \pi_1(\partial D) * F_r \cong F_r.$$

□

D.9. **引理6.13的证明。**

证明。令 $N = \ker a$。$H_1(a;\mathbb{Z})$ 的单射性意味着，N中的每个元素在 F_r的阿贝尔化中的像都是平凡的。因此

$$N \subset [F_r, F_r].$$

由 Hopf公式 [4, 第 0] 节可得

$$H_2(G;\mathbb{Z}) \cong \frac{N \cap [F_r, F_r]}{[F_r, N]} = \frac{N}{[F_r, N]}.$$

由于 $H_2(G;\mathbb{Z}) = 0$，因此可得

$$N = [F_r, N].$$

定义下中心列如下

$$\gamma_1(F_r) = F_r, \qquad \gamma_{\ell+1}(F_r) = [F_r, \gamma_\ell(F_r)].$$

归纳地，

$$N \subset \gamma_\ell(F_r) \quad \Longrightarrow \quad N = [F_r, N] \subset \gamma_{\ell+1}(F_r).$$

因此

$$N \subset \bigcap_{\ell \geq 1} \gamma_\ell(F_r) = 1,$$

其中最后一个等式源于自由群的剩余幂零性 [21, 推论 1.4]。因此 a是单射，因而是同构。□

附录 E. 第 7 节的证明

E.1. **命题 7.1 的证明。**

证明。将定理 4.1 应用于 $H = G$，并将所得的正则层和核心分别记为 t_i 和 D_i。它们的内部穷尽 M，因此 Γ 的紧性使我们可以选取 j，使得

$$\Gamma \subset \operatorname{int} D_j, \qquad t_j > 0.$$

取 $B = D_j$、$s = t_j$ 和 $a = G/s$。由于

$$\Gamma = \{G \leq 0\}, \qquad G|_{Y_\Gamma} = 0, \qquad G|_{Y_B} = s,$$

函数 a 具有所需的边界值。此外，$0 \leq G \leq s$ 在$B \setminus \operatorname{int}\Gamma$ 上成立，而 0 和 s 这两个水平集的正则性给出 $da \neq 0$ 在 $Y_\Gamma \cup Y_B$ 上成立。

正比例缩放保持临界点、非退化性和Morse指标不变。在临界点 x 处，

$$\operatorname{Hess}_q a = s^{-1} \operatorname{Hess}_q G, \qquad \operatorname{ind}_x a = \operatorname{ind}_x G \leq 2.$$

在带上的每个正则点处，

$$\operatorname{tr}^{q}_{(\nabla_q a)^\perp} \operatorname{Hess}_q a = s^{-1} \operatorname{tr}^{q}_{(\nabla_q G)^\perp} \operatorname{Hess}_q G \geq s^{-1} \lambda^{q}_{(3)}(\operatorname{Hess}_q G) > 0.$$

因此 a 实现了带$q(\Gamma,\ B)$。

定理 4.1 给出了连通的 Y_B、道路连通的 O_B、正向外平均曲率以及有限 $\pi_1(O_B)$。定理 5.12 提供了 Γ 所需的性质，包括 $H_q(Y_\Gamma) > 0$。应用命题 6.4 和推论 6.5，取

$$H = G, \qquad K = \Gamma, \qquad D_j = B.$$

它们为 Y_Γ上的每个给定有限 CW 结构提供了一个相对胞腔模型，并证明 O_Γ 是道路连通的，其中

$$|\pi_1(O_\Gamma)| < \infty.$$

它们还给出了

$$H_2(\Gamma) = H_3(\Gamma) = 0,$$

并证明 H_1（Γ）是无挠的。特别地，π_1（O_Γ）不包含同构于 F_2 的子群，并且对于命题 6.7中所选取的边界 CW 结构，相对模型是可用的。正标量曲率边界和包含诱导的满射 π_1（Y_Γ）$\twoheadrightarrow \pi_1$（Γ）由定理 5.12 提供，从而满足条件 2的其余条款。□

大韩民国首尔首尔国立大学电子邮件地址： anjunhyun@snu.ac.kr

大韩民国大田韩国科学技术院

大韩民国大田 RTst电子邮件地址：
seunghwanyoon@kaist.ac.kr