arXiv:2611.32121v1 [math.OA] 24 Nov 2026

代数导子与自由群因子的第一L^2上同调

JINGHAO HUANG、KARIMBERGEN KUDAYBERGENOV、FEDOR SUKOCHEV 和 BING YAN

Abstract. 设 M 是一个有限秩非阿贝尔自由群的冯·诺伊曼代数。我们证明，按照 Connes 和 Shlyakhtenko 的定义，其第一 L^2贝蒂数是无穷的。我们证明，将标准半圆形生成元赋予 Aff($M\bar{\otimes}M^{\mathrm{op}}$) 中的任意值，都可以扩张为定义在整个 M 上的代数导子。该扩张源于有限个多项式关系组成的系统的雅可比矩阵所满足的秩恒等式。我们还证明，对于任意具有可分前对偶的 II_1 因子，若存在取这些系数的外导子，则其第一 L^2贝蒂数必为无穷。

1. Introduction

L^2-贝蒂数的研究可追溯至 Atiyah 关于正规覆盖上椭圆算子的工作 [2]。2005 年，Connes 和 Shlyakhtenko 利用 Hochschild同调为带迹的 $*$-代数定义了这些不变量 [4]。对于配备典范迹的离散群的群代数，他们的定义给出了该群的 L^2-贝蒂数 [4, 命题 2.3]。特别地， $\mathbb{C}\mathbb{F}_n$ 的第一 L^2-贝蒂数为 $n-1$。对于它的弱闭包 $L(\mathbb{F}_n)$，Connes 和 Shlyakhtenko 利用自由熵维数得到的估计表明， $n-1$ 应是一个下界 [4, 引言]。我们证明，对于每个整数 $n \geq 2$， $L(\mathbb{F}_n)$ 的第一 L^2-贝蒂数都是无穷大。

我们的方法采用 Thom 对第一 L^2-上同调的导子刻画 [16]。设 (M,τ) 是一个有限冯·诺伊曼代数，并带有忠实正规迹态。令

$$N = M\bar{\otimes}M^{\mathrm{op}}, \qquad \tau_N = \tau\otimes\tau^{\mathrm{op}}, \qquad E = \mathrm{Aff}(N),$$

其中 M对立代数 是对立代数， E是与 N关联的算子代数。对于 $a \in M$，记 $L_a = a\otimes 1$ 和 $R_a = 1\otimes a^{\mathrm{op}}$。 E 上的双模作用由 $a\cdot\xi\cdot b = L_aR_b\xi$给出。记 $\mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(M,E)$ 为复线性映射 $\delta\colon M\to E$ 所构成的右 E-模，满足莱布尼茨恒等式

$$\delta(ab) = L_a\delta(b) + R_b\delta(a), \qquad a,b\in M. \tag{1.1}$$

其子模 $\mathrm{Inn}(M,E)$ 由内导子 $\delta_\xi(a) = (L_a - R_a)\xi$ 构成，其中$\xi\in E$。用此记号，Thom 对偶性 [16, 定理3.4及3.7] 的推论给出

$$H^1_{\mathrm{alg}}(M,E) = \mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(M,E)/\mathrm{Inn}(M,E), \qquad \beta_1^{(2)}(M,\tau) = \dim_N H^1_{\mathrm{alg}}(M,E), \tag{1.2}$$

其中 d im$_N$ 是扩展的冯·诺伊曼维数 ion.

Date: 2026年11月24日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号46L10; 次要分类号46L54、46M18。*Key words and phrases.* 自由群因子、关联算子、代数导子、 L^2-贝蒂数、随机矩阵。

Thom还考察了这样得到的上同调：将导子限制为从 M 上的算子范数到 E [16] 上的测度拓扑连续的导子。Alekseev证明了，自由群因子的连续上同调消失[1], ，而Popa和Vaes对每个II_1 因子 [14,也建立了相同的结论（定理 1]）。特别地，下面构造的每个外导子在这些拓扑下都是不连续的。

设 $S=(s_1,\dots,s_n)$ 为标准自由半圆形族，并设 $M=W^*(S)$。每个 $W^*(s_j)$ 都有一个 Haar 酉生成元，且这些酉元彼此自由，因此 M 同构于 $L(\mathbb{F}_n)$。由于这些 s_j 在代数上自由，在 E 中指定它们的像即可确定多项式代数 $\mathbb{C}\langle s_1,\dots,s_n\rangle$ 上的导子。问题是该导子能否扩张到弱闭包。

定理 1.1。设 $2\le n<\infty$，设 $S=(s_1,\dots,s_n)$ 为标准自由半圆形族，并设 $M=W^*(S)$。对于每个 $\eta_1,\dots,\eta_n\in E$，存在一个导子$\delta\in \mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(M,E)$，使得 $\delta(s_j)=\eta_j$ 对于 $1\le j\le n$。

换言之，在 S 处求值给出一个右 E-线性映射 $\mathrm{ev}_S(\delta)=(\delta(s_1),\dots,\delta(s_n))^{\mathsf{T}}$，将 $\mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(M,E)$ 映到 E^n 上。特别地，取 $\delta(s_1)=0$ 以及 $\delta(s_2)=1_E$。由于 s_1 的谱分布是弥散的，$L_{s_1}-R_{s_1}$ 在 E 中是可逆的。因此，一个在 s_1 处为零的内导子必然恒等为零，所以这一选择给出了一个外导子。为推出贝蒂数的值，我们在定理 5.1 中证明：对于具有可分前对偶的 II_1 因子，第一 L^2-贝蒂数的有限性迫使所有系数取自 E 的代数导子都是内导子。

推论 1.2。令 $M=L(\mathbb{F}_n)$，其中 $2\le n<\infty$。则 $H^1_{\mathrm{alg}}(M,E)\neq 0$，且$\beta_1^{(2)}(M,\tau)=\infty$。

扩张定理的主要步骤涉及包含弱闭包中元素的关系。设 Y 是 M 中的有限自伴元组，且 $P(S,\ Y)=0$ 是有限个自伴多项式关系组成的系统。将其代入后的雅可比矩阵记为 $[\,A\ B\,]$，其中 A 的列对应 S，而 B 的列对应 Y。Connes 和 Shlyakhtenko 在辅助元素 [4, 满足希尔伯特–施密特交换子条件时，得到了一个相对维数公式（定理 4.11]）。对于上述任意元组 Y，我们在命题 3.1 中证明：

$$\mathrm{rank}_N[\,A\ B\,]=\mathrm{rank}_N\,B.$$

因此，每个指定列 $\eta\in E^n$ 都存在一个解 ζ，使其满足微分系统 $A\eta+B\zeta=0$。通过将第2节中针对多项式梯度的填充估计应用于 $(S,\ Y)$ 的随机矩阵近似，即可推出秩恒等式。随后，E 的自内射性保证在 M 上存在一个取值为指定值的导子。

同样的填充估计也适用于承认矩阵微态的有限自伴生成元组 X。在第6节中，我们特别证明了：如果 $W^*(X)$ 是一个 II_1 因子，并且其修正自由熵维数 $\delta_0(X)$ 超过 1，那么它的第一 L^2-贝蒂数是无穷的。附录 A 给出了关于解矩阵 $B^\dagger A$ 的尖锐对数可积性估计，其中 $B^\dagger$ 是 B 的 Moore–Penrose 逆。附录B给出了填充估计的复几何证明，适用于辅助梯度在打包尺度 t 下为 t^2 阶的情形。

2. 多项式梯度的填充估计

对于欧几里得空间的子集 H 和数值 $t>0$，令 $\mathrm{Pack}_t(H)$ 表示有限子集 H 的基数上确界，其中该子集的不同点之间的

距离至少为 t。令 ω_j 表示 $\mathbb{R}^j$ 中欧几里得单位球的体积，其中$\omega_0 = 1$。所有欧几里得空间的有限直和均赋予平方和范数。

引理 2.1。设 $a \geq 1$、$m \geq 0$ 和 $d = a + m$。设 $\Phi\colon\ \mathbb{R}^a \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ 是一个次数至多为 p 的多项式。给定 $R \geq 1$ 和 $0 < t < 1$，令 $\mathcal{P}_t$ 由满足存在向量 $u \in \mathbb{R}^m$ 的序对 $(x、z) \in \mathbb{R}^a \times \mathbb{R}^a$ 组成，且该向量满足

$$z = \nabla_x \Phi(x,u), \qquad |x|, |z|, |u| \leq R, \qquad |\nabla_u \Phi(x,u)| \leq Rt.$$

存在一个常数 $C = C(p、R) \geq 1$，使得

$$\mathrm{Pack}_t(\mathcal{P}_t) \leq C^{\,d} t^{-a}. \tag{2.1}$$

证明。写作 $v = \nabla_u \Phi(x、u)$。在位置和动量坐标空间中，令 H 表示与 $x、z$ 相关联的 $2a$ 坐标，令 K 表示与 $u、v$ 相关联的 $2m$ 坐标。记 Ω_H 和 Ω_K 为两个分块上的标准辛形式。Φ 的海森矩阵的对称性给出

$$\sum_{i=1}^{a} dx_i \wedge dz_i + \sum_{j=1}^{m} du_j \wedge dv_j = 0$$

在梯度图上。通过将$(x、z、u、v)$映射到$(x/t、z/t、u、v/t)$，对该图进行缩放。按位置–动量顺序，缩放后的图 G 的参数化为 $P(q) = (q、g(q))$，其中 $q = (x/t、u)$，且 g 是一个次数至多为 $h = \max(1、p-1)$ 的多项式映射。两个辛形式在 G 上的拉回满足

$$P^*\Omega_H = -t^{-1} P^*\Omega_K. \tag{2.2}$$

取一个含有 b 个点的有限 t-分离子集 $\mathcal{P}_t$。利用其见证元之一 u，将每个点提升到 G。所提升点的 H 坐标之间的距离均至少为 1。因此，以这些提升点为中心、半径为 $r = 1/3$ 的 $2d$ 维球两两不相交。若 v_0 属于其中一个球，则在闭图 G 上存在一个距 v_0 最近的点 $P(q)$。位移 $W = v_0 - P(q)$ 与 G 在 $P(q)$ 处的切空间正交。因此，对于某个 $c \in \mathbb{R}^d$，有 $W = W(q,c) = (-Dg(q)^{\mathsf{T}} c, c)$。令 $F(q,c) = P(q) + W(q,c)$，并置 $D_0 = 3(R+1)$。每个最近点 $P(q)$ 距相应球的中心均不超过 $2r$。由此可知，这些 b 球的并集包含于 $F(U)$ 中，其中

$$U = \{(q,c) : |P_H(q)| \leq D_0/t,\ |P_K(q)| \leq D_0,\ |W(q,c)| \leq r\}.$$

U是紧集，因为 q和 c分别是 $P(q)$与 $W(q,c)$的子向量 y.

根据面积公式 [6]，$F(U)$的体积有上界，即为在 U上对 F的雅可比矩阵绝对值积分。除定向选择外，其雅可比形式为

$$\frac{(F^*\Omega_H)^a}{a!} \wedge \frac{(F^*\Omega_K)^m}{m!}. \tag{2.3}$$

首先考虑 $F = P + W$ 中的一对 H 坐标。除涉及两个 P 微分的项外，面积形式展开中的其他三项各自至多包含一个 P_H 微分。利用 (2.2)，将涉及两个 P_H 微分的项之和替换为 $-t^{-1}P^*\Omega_K$。现在，(2.3) 中的第一个因子是由若干 $m + 3a$ 简单二形式之和构成的除幂。第二个因子是由若干只涉及 P_K 和 W 的 $4m$ 简单二形式之和构成的除幂。简单二形式的平方为零，且二形式彼此可交换。因此，展开后的乘积至多有 $2^{m+3a}2^{4m}$ 项。使用 l 次替换的项带有标量因子 t^{-l}，并涉及 P_H 的 $j \leq a - l$ 个微分。

去掉符号和因子 t^{-l} 后，每个保留下来的项都是映射 $\pi\colon \mathbb{R}^{2d}\to\mathbb{R}^{2d}$ 的雅可比形式；该映射由从 $(P,\ W)$ 中选取 $2d$ 个不同坐标得到。映射 π 是次数至多为 h 的多项式。在正则原像处，复化后的纤维包含一个孤立点，因此仿射 B´ezout 界给出任意值 [7, 的正则原像至多有 h^{2d} 个6]例 8.4。像 $\pi(U)$ 包含在维数分别为 j 和 $2d-j$、半径分别为 D_0/t 和 $2D_0$ 的球的乘积中。由于 $\omega_j\omega_{2d-j}\le 2^d\omega_{2d}$，再次应用面积公式可得

$$t^{-l}\int_U|\det D\pi|\le h^{2d}2^d\omega_{2d}(2D_0)^{2d}t^{-l-j}\le C_1^d\omega_{2d}t^{-a}.$$

这里 C_1 仅取决于 p 和 R。对（2.3）中的各项求和，再除以单个球的体积 $\omega_{2d}r^{2d}$，即可证明（2.1）。□

例 2.2。引理 2.1 中关于 $\nabla_u\Phi$ 的界所采用的尺度 t 是最优的。对于 $\Phi(x、\ u)=xu$ 和 $R=1$，当 $|\nabla_u\Phi|\le\varepsilon\le 1$ 时，其投影集为 $[-\varepsilon,\varepsilon]\times[-1,1]$。只要 $\varepsilon/t\to\infty$ 和 $t\downarrow 0$，其 t-打包数除以 t^{-1} 就趋于无穷大。

3. The rank of a finite system of relations

设 $S=(s_1、\ldots\ldots、\ s_n)$ 和 $M=W^*(S)$ 如定理 1.1 中所述。固定一个元组 $Y=(y_1、\ldots\ldots、\ y_q)\in M_{\mathrm{sa}}^q$ 以及一列 $P=(P_1、\ldots\ldots、\ P_\ell)^{\intercal}$，其中各项都是关于 $n+q$ 个形式自伴字母的自伴非交换多项式。对于由字母 $Z_1、\ldots\ldots、\ Z_{n+q}$构成的一个词 w，定义其关于第 j个字母的导数为

$$\partial_j w=\sum_{w=uZ_jv}u\otimes v^{\mathrm{op}},$$

其中求和遍及 w 中 Z_j 的各次出现。将导数 ∂_j 扩张为复线性映射。代入后的雅可比矩阵 J 及其分块 $A,\ B$ 为

$$J=\big((\partial_jP_i)(S,Y)\big)_{i,j}=[\,A\ B\,],\qquad A\in M_{\ell,n}(N),\quad B\in M_{\ell,q}(N).\tag{3.1}$$

对于 $j\ge 1$，令 $\tau_j=\mathrm{Tr}_j\otimes\tau_N$ 表示 $M_j(N)$ 上的迹，其中 Tr_j 是未归一化的矩阵迹。对于 $T\in M_{\ell,\ h}(N)$，用 $p_T=\mathbf{1}_{(0,\infty)}(TT^*)$ 表示值域投影，用 $\mathrm{rank}_N T=\tau_\ell(p_T)$ 表示秩。令 μ_T 表示 $(TT^*)^{1/2}$ 关于 τ_ℓ 的谱分布。因此，μ_T 的质量为 ℓ，且 $\mu_T((0,\ \infty))=\mathrm{rank}_N T$。

命题 3.1。若 $P(S,Y)=0$，则 (3.1) 中的矩阵 J 和 B 满足秩$_N J=$秩$_N B$。

我们先介绍证明中使用的矩阵近似。对于 $k\ge 1$，令$H_k=M_k(\mathbb{C})_{\mathrm{sa}}$，其具有实内积 $\langle x,\ y\rangle_k=\mathrm{tr}_k(xy)$，其中 $\mathrm{tr}_k=k^{-1}\,\mathrm{Tr}_k$。记 $D=k^2=\dim_{\mathbb{R}}H_k$，并用 $\|\cdot\|_2$ 表示每个直和 H_k^j 上的诱导范数。对于 $x\in H_k^n,\ y\in H_k^q$，$P(x,\ y)$ 的普通实导数是一个映射$J_k=[\,A_k\ B_k\,]\colon H_k^{n+q}\to H_k^\ell$。它在 $M_k(\mathbb{C})^{n+q}$ 上的复化就是雅可比矩阵 (3.1) 在 $(x,\ y)$ 处的形式，并通过左乘和右乘作用。该复化具有完全相同的奇异值及其重数。特别地，

$$D^{-1}\,\mathrm{Tr}_{\mathrm{End}(M_k(\mathbb{C}))}(h\mapsto ahb)=\mathrm{tr}_k(a)\,\mathrm{tr}_k(b),\qquad a,b\in M_k(\mathbb{C}).\tag{3.2}$$

事实上，在矩阵单位基中对角系数求和即可得到 (3.2)。因此，对每个整数 $v\ge 0$，归一化迹 $D^{-1}\,\mathrm{Tr}((J_kJ_k^*)^v)$ 都是 $(x,\ y)$ 中归一化词迹乘积的有限和。同样的计算也适用于 B_k，以及相容维数的矩阵块与其伴随算子的混合乘积。

设 $X^{(k)} \in H_k^n$ 由 n 个相互独立的高斯酉系综（GUE）矩阵组成，并按 $\mathbb{E}\,\mathrm{tr}_k((X_i^{(k)})^2) = 1$ 归一化。对于 (S, Y) 的任意有限词迹列表、任意误差 $\varepsilon > 0$，以及所有充分大的 k，都存在一个概率至少为 $1/2$ 的事件，在该事件上，$x = X^{(k)}$ 存在 $y \in H_k^q$，可将指定的迹逼近到误差 ε 以内。x, y 的所有元素的算子范数都可以取为至多某个常数 K，该常数仅取决于 S, Y 中元素的范数。为此，在 $M = W^*(S)$ 中使用 Kaplansky 稠密性，并利用多项式在 $C^*(S)$ 中的范数稠密性，选取自伴多项式元组 $h_j(S)$，使其在一个共同的算子范数球上于 $L^2(M)^q$ 中收敛到 Y。对每个词逐项作望远镜展开并应用柯西–施瓦茨不等式，可知词迹在这一逼近下收敛。固定有限列表和精度后，再固定 j。Voiculescu 的 GUE矩定理 [17], 的几乎必然形式 [8, (1.2)], ，以及每个固定多项式的范数收敛 [8, 定理 A] 表明，随着概率趋于 1，$y = h_j(X^{(k)})$ 具有所需的联合迹和范数界。因此，可以在选择矩精度之前固定 K。在这个球上，矩阵块 A_k, B_k 的范数一致有界，因为 $\|ahb\|_2 \le \|a\|\,\|b\|\,\|h\|_2$。因此，一致多项式逼近和 (3.2) 可将任意给定的有限列表连续谱检验传递到 $J_k J_k^*$ 或 $B_k B_k^*$ 上。

命题 *3.1* 的证明。假设 $r = \text{秩}_N B$ 且 $b = \text{秩}_N J - r > 0$。选取 $\gamma > 0$ 使得 $\mu_J([2\gamma, \infty)) > r + 7b/8$。对于每个 $0 < \alpha < \gamma/2$，前述逼近在一组基点 $x = X^{(k)}$ 上给出一个概率至少为 $1/2$的元组 y，满足

$$\begin{aligned} \|P(x,y)\|_2 &\le \alpha, \\ D^{-1}\dim \mathbf{1}_{[\gamma,\infty)}((J_kJ_k^*)^{1/2}) &\ge r + 3b/4, \\ D^{-1}\dim \mathbf{1}_{(\alpha,\infty)}((B_kB_k^*)^{1/2}) &\le r + b/8. \end{aligned} \tag{3.3}$$

这里及下文中，$\dim e$ 表示实正交投影 e的值域的实维数。对于 (3.3) 中的下界，使用一个取值介于 0 和 1 之间、在 $[0, \gamma]$ 上为 0 且在 $[2\gamma, \infty$上等于 1 的连续函数。对于上界，使用一个取值介于 0 和 1 之间、在 $[0, \alpha/2]$ 上为 0 且在 $[\alpha, \infty$上等于 1 的连续函数。其关于 μ_B 的积分至多为 r。残差界由$P(S, Y) = 0$得到。

令 $V_{x,\ y}$ 为 (3.3) 中关于 $J_kJ_k^*$ 的高谱子空间与 (3.3) 中关于 $B_kB_k^*$ 的高谱子空间的正交补的交集。子空间交集的维数估计给出 $\dim V_{x,\ y} \ge (b/2)D$。每个 $w \in V_{x,\ y}$ 都满足

$$\|B_k^* w\|_2 \le \alpha \|w\|_2, \qquad \|A_k^* w\|_2^2 = \|J_k^* w\|_2^2 - \|B_k^* w\|_2^2 \ge (\gamma^2 - \alpha^2)\|w\|_2^2.$$

令 $c = \min(1,\ \gamma/2)$。A_k^* 将 V_x 的单位球映射后的像，$_y$ 包含子空间 $A_k^* V_{x,\ y}$中半径为 c 的球。因此，对于 $0 < t < c$，根据用 t-球进行覆盖的体积界，该像至少包含 $(c/t)^{bD/2}$ 个彼此间距为 t 的点。

在 H_k^n 的正交实坐标中，高斯向量 $X^{(k)}$ 的协方差为 $D^{-1} I_{nD}$。因此，半径为 t 的球的概率至多为 $(C_n t)^{nD}$，其中 $C_n = \max(1,\ \sqrt{e/n})$。事实上，密度至多为 $(D/2\pi)^{nD/2}$，且 $\omega_j \le (2\pi e/j)^{j/2}$。良好基点的一个最大 t-分离集 x 至少包含 $_1\,_2(C_n t)^{-nD}$ 个点。在每个基点上方选取刚构造的分离点 $z = \bar{A_k^*} w$。所得的点对 $(x,\ z)$ 在 $H_k^n \oplus H_k^n$ 中是 t-分离的。

为得到这些点对数量的上界，将引理 2.1 应用于实多项式

$$\Phi_k(x,y,w)=\sum_{i=1}^{\ell}\mathrm{tr}_k(w_iP_i(x,y)),\qquad (x,y,w)\in H_k^n\oplus H_k^q\oplus H_k^\ell. \tag{3.4}$$

式 (3.4) 中的迹为实数，因为 w_i 和 P_i（x，y）是自伴的。其在 x 以及在（y，w）中的梯度分别为 A_k^*w 和（B_k^*w，P（x，y））。令 $\alpha=t/2$。在所选取的配对上，辅助梯度的范数至多为 t。x，（y，w）z 的范数仅由 P，K，n，q，ℓ 控制。Φ_k 的次数至多为 $1+\max_i\deg P_i$。引理 2.1 与两个下界给出

$$\tfrac{1}{2}(C_nt)^{-nD}(c/t)^{bD/2}\ \le\ C^{(n+q+\ell)D}t^{-nD}. \tag{3.5}$$

首先选择 $t>0$ 足够小，使得 C_n^{-n}（c/t）$^{b/2}>2C^{n+q+\ell}$。对于这个固定的 t，选择足够大的 k，使 (3.3) 成立。于是，(3.5) 的两边不相容。这证明了 $\mathrm{rank}_N J=\mathrm{rank}_N B$。□

4. Extension to the von Neumann algebra

定理 *1.1* 的证明。 对于每个精确方程组 $P(S,\ Y)=0$，两个矩阵 B和 $J=[\,A\ B\,]$的值域投影满足 $p_B\le p_J$。由命题 3.1 和 τ_ℓ 的忠实性可得 $p_B=p_J$。令 $B^\dagger\in M_{q,\ \ell}(E)$ 表示 B的 Moore–Penrose 逆。由于 $BB^\dagger=p_B$，等式 $p_BA=A$ 给出

$$A\eta+B\zeta=0,\qquad \zeta=-B^\dagger A\eta,\quad \eta\in E^n. \tag{4.1}$$

特别地，每个有限的微分关系方程组都存在一个满足给定取值 η 的解，该解定义在 S上。现在我们从 (4.1) 转向整个代数 M上的导子。

令 $\mathfrak{A}=\mathbb{C}\langle Z_h:\ h\in M_{\mathrm{sa}}\rangle$ 为由每个 $h\in M_{\mathrm{sa}}$对应的一个不同的形式自伴字母 Z_h 生成的自由代数。赋值映射 $\pi:\ \mathfrak{A}\to M$, $\pi(Z_h)=h$是满射，因为对于 $a\in M$，$a=\Re a+i\Im a$。令 $I=\ker\pi$，令 $G=\bigoplus_{h\in M_{\mathrm{sa}}}Ee_h$为由符号 e_h生成的自由左E-模，并令

$$K=G\Big/\sum_{P=P^*\in I}E\,r_P,\qquad r_P=\sum_{h\in M_{\mathrm{sa}}}(\partial_hP)(\pi)e_h.$$

每个关系行 r_P 都具有有限支撑。将 e_h 在 K中的类记为 dh。一个左 E-线性映射 $\varphi:\ K\to E$ 通过将 $\varphi(dh)$赋给 Z_h并应用从 (1.1) 到 π的公式，在 $\mathfrak{A}$ 上给出一个导子。对于自伴多项式 $P\in I$，其导数为 $\sum_h(\partial_hP)(\pi)\varphi(dh)=0$，因为行 r_P 在 K中的类为零。由于 I 是一个

$*$-理想，I 中每个元素的实部和虚部也属于 I。因此，该导子下降到 $\mathfrak{A}/I=M$。反过来，每个 $\delta\in\mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(M,E)$的取值定义了一个左 E-线性映射 $\varphi:\ K\to E$。

我们断言，ds_1、……、ds_n在 K中左 E-线性无关。设$\sum_i b_i\,ds_i=0$。在自由模 G 中，行 $\sum_i b_ie_{s_i}$是关系行 r_{P_1}、……、r_{P_ℓ}的有限个左 E-线性组合。将这些行中除 s_1、……、s_n之外出现的所有字母列为 Y。固定 $\eta\in E^n$。公式 (4.1) 为该列表提供了一个列 $\zeta\in E^q$。在 S上于 η处、在 Y上于 ζ处取 G的基，并在 $S\cup Y$之外取零。所得泛函湮灭所指定的每个 ℓ 行。因此 $\sum_i b_i\eta_i=0$。令 η依次取每个标准基向量，即可证明 $b_1=\cdots=b_n=0$。

因此，子模 $\sum_i E\,ds_i\subset K$ 是自由的，而 $ds_i\mapsto\eta_i$ 在该子模上定义了一个左 E-线性映射。环 $E=\mathrm{Aff}(N)$ 作为左模是自内射的

其自身 [16, 定理 3.1]。将该映射扩展为左 E-线性映射 $\varphi\colon K \to E$。相应的导子 $\delta\colon M \to E$ 满足 $\delta(s_i) = \eta_i$，对每个 i均成立。□

推论 *1.2* 的证明。令 $D_a = L_a - R_a$ for $a \in M$。应用定理 1.1，其中$\delta(s_1) = 0$和 $\delta(s_2) = 1_E$。在 $W^*(s_1)\bar{\otimes}W^*(s_1)^{\mathrm{op}}$的乘积谱表示中，算子 D_{s_1} 是乘以 $\lambda-\mu$的算子。半圆分布没有原子，因此相对于乘积测度，$\lambda - \mu \neq 0$ 几乎处处成立。于是 D_{s_1} 在E 中是可逆的。如果 $\delta = \delta_\xi$ 是内的，则 $D_{s_1}\xi = 0$ 会给出 $\xi = 0$，这与 $\delta(s_2) = 1_E$矛盾。这证明了 $H^1_{\mathrm{alg}}(M,\ E) \neq 0$。群因子 $M = L(\mathbb{F}_n)$具有可分前对偶，因此下面的定理 5.1 给出 $\beta_1^{(2)}(M,\ \tau) = \infty$。□

ev_S 的满射性也直接给出了界 $\beta_1^{(2)}(L(\mathbb{F}_n)) \geq n-1$。事实上，$\mathrm{Inn}(M,E)$ 在 ev_S 下的像是 $\xi \mapsto (D_{s_i}\xi)_{i=1}^n$ 的像；由于 D_{s_1} 可逆，该像是 E 的一个副本。因此，$H^1_{\mathrm{alg}}(M,E)$ 映射到一个维数为 $n-1$ 的模上。根据 [14, 定理 1]，上面构造的外导子从 M 上的算子范数到 E上的测度拓扑是不连续的。

前面的下界给出了推论 1.2 的另一种证明。Shlyakhtenko 关于半圆形 C^*-代数的同构定理 [15, 推论 5.3] 对每个整数 $m \geq 2$ 都给出了一个保持迹的同构 $L(\mathbb{F}_m) \cong L(\mathbb{F}_2)$。因此

$$\beta_1^{(2)}(L(\mathbb{F}_2)) = \beta_1^{(2)}(L(\mathbb{F}_m)) \geq m-1 \qquad (m \geq 2).$$

令 $m \to \infty$ 表明公共贝蒂数是无穷的。第一代数上同调群不消失这一事实由 (1.2) 得出。

4.1. **具有有界系数的循环**。在 (1.2) 的同调一侧有一个显式代表元。令 $n = 2$。在环 E 中定义

$$T = D_{s_2}D_{s_1}^{-1}, \qquad h = (1 + TT^*)^{-1}.$$

算子 $h \in N$ 具有全支撑，并且 $hT \in N$，因为 $\sup_{t\geq 0} t/(1+t^2) = 1/2$。在 M 的巴复形中，取系数于 N [4, , 第2节。3],考虑链

$$z = h \otimes s_2 - hT \otimes s_1 \in N \otimes_{\mathbb{C}} M. \tag{4.2}$$

第一个边界 $b_1(c \otimes a) = cD_a$ 给出 $b_1(z) = 0$。对于证明推论 1.2 中的导子 δ，将链 $c \otimes a$ 与 δ 配对，定义为 $c\,\delta(a)$。第二个边界为

$$b_2(c \otimes a \otimes b) = cL_a \otimes b - c \otimes ab + cR_b \otimes a.$$

根据莱布尼茨恒等式 (1.1)，该配对在 $\mathrm{im}\, b_2$ 上为零；而配对在 z 上的值为 $h \neq 0$。事实上，$c \mapsto [cz]$ 将左模 N 嵌入第一同调群，因为类 $[cz]$ 的消失将推出 $ch = 0$，并且 h 具有全支撑。

4.2. **一个谱投影**。一个基本关系说明了为什么扩张中会出现相伴系数。规定 $\delta(s_1) = 1_E$，并令 $e = \mathbf{1}_{[0,\infty)}(s_1)$。对 $s_1 e = e s_1$ 求导得到 $D_{s_1}\delta(e) = D_e$，因此每个扩张都有

$$\delta(e)(\lambda,\mu) = \frac{\mathbf{1}_{[0,\infty)}(\lambda) - \mathbf{1}_{[0,\infty)}(\mu)}{\lambda - \mu}$$

在同一个乘积谱表示中。由于半圆分布密度在零附近有下界，$\delta(e)$ 的平方积分大于等于正数乘以 $\int_0^\epsilon \int_0^\epsilon (u+v)^{-2}\,du\,dv = \infty$。因此，被迫取值 $\delta(e)$ 属于 E，且位于 $L^2(N)$ 之外。

5. The dimension of the first cohomology group

定理 5.1。 设 (M,τ) 是具有可分前对偶的 II_1 因子，设 $N = M\bar{\otimes}M^{\mathrm{op}}$，并设 $E = \mathrm{Aff}(N)$。若 $\beta_1^{(2)}(M) < \infty$，则每个代数导子 $\delta\colon M \to E$都是内的。因此，存在外导子 $\delta\colon M \to E$ 意味着$\beta_1^{(2)}(M) = \infty$。

证明。 设 $\tau_N = \tau\otimes\tau^{\mathrm{op}}$和 $\mathcal{D} = \mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(M, E)$，其右 E-作用为 $(\delta b)(x) = \delta(x)b$。由 Thom 对偶性 [16, 推论 3.4 和 3.7], $\dim_N(\mathcal{D}/\mathrm{Inn}(M, E)) = \beta_1^{(2)}(M)$。从 E 到 $\mathrm{Inn}(M, E)$、将实现元映射为其内导子的映射是右 E- 线性的。因此，由扩展 von Neumann 维数 [12,在第 6]章中的可加性，$\dim_N \mathcal{D} \le 1 + \beta_1^{(2)}(M) < \infty$。

对有限子集 $F \subset M$，令 V_F为赋值映射 $\mathcal{D} \to E^F$的像。设 $r = \sup_F \dim_N V_F$，并选取递增的有限集 $F_j \subset M$，使得 $\dim_N V_{F_j} \to r$。数 r 是有限的，因为 $\dim_N V_F \le \dim_N \mathcal{D}$。设 $S = \bigcup_j F_j$。对于 $x \in M\setminus S$，取值模 $\{\delta(x) : \delta \in \mathcal{D},\ \ \delta|_S = 0\}$ 嵌入到对每个 j 的限制映射$V_{F_j\cup\{x\}} \to V_{F_j}$ 的核中。该限制映射是满射，因此其核的维数至多为 $r - \dim_N V_{F_j}$。因此，在 x 上的取值模维数为零。E 的每个非零右 E-子模都具有正维数。事实上，若该子模包含 $b \neq 0$，则它也包含 $(bb^\dagger)N$，其中 $b^\dagger$ 是 E中的 Moore–Penrose 逆。由此可知，在 S 上为零的导子在 M上也为零。

我们证明，在可数集合 S 上的取值给出了每个导子的可测描述。令 K 为由 dx （ $x \in M$ ）生成的左 E- 模。对于 x， $y \in M$ 和 $\lambda \in \mathbb{C}$，定义关系为

$$d(\lambda x + y) = \lambda\, dx + dy, \qquad d(xy) = L_x\, dy + R_y\, dx.$$

赋值 $dx \mapsto \delta(x)$ 将 $\mathcal{D}$ 与 $\mathrm{Hom}_E(K, E)$ 等同。记 $U = \sum_{s\in S} E\, ds$。对于 $x \in M$，定义左理想 $I_x = \{b \in E\colon\ b\, dx \in U\}$。其右湮没子为零。事实上，若 $I_x w = 0$，则公式 $u + b\, dx \mapsto bw$ 定义了一个左 E-线性映射$U + E\, dx \to E$。根据定理 3.1] ， E [16, 的左自内射性将该映射延拓至 K。相应的导子在 S 上为零，并在 x 处取值 w，因此 $w = 0$。

由此可知， I_x 中包含迹任意接近 1 的投影。为说明这一点，注意对于 $b \in I_x$，有 $b^\dagger b \in I_x$。 $\bigvee_{b\in I_x} b^\dagger b$ 的补属于 I_x 的右湮没子，因此为零。 I_x 中投影的有限并属于 I_x： p_1、……、 p_m 的并为 $h^\dagger h$ （$h = \sum_i p_i$） 。 τ_N 的正规性给出所述结论。

固定 $\delta \in \mathcal{D}$。对于 $x \in M$和 $y \in E$，等式 $y = \delta(x)$ 成立，当且仅当对于每个整数 $k \ge 1$，都存在一个投影 $e \in N$、一个有限列表 s_1、……、 $s_m \in S$，以及系数 a_1、……、 $a_m \in E$，使得

$$\tau_N(e) > 1 - 2^{-k}, \qquad e\, dx = \sum_{i=1}^m a_i\, ds_i \text{ in } K, \qquad ey = \sum_{i=1}^m a_i\delta(s_i). \tag{5.1}$$

对于 $y = \delta(x)$，取 $e \in I_x$ 并在 δ 处计算中间的恒等式。反过来，最后两个恒等式给出 $e(y - \delta(x)) = 0$。因此，$y - \delta(x)$ 的值域闭包上的投影的迹至多为 2^{-k}，对每个 k 都成立，所以 $y = \delta(x)$。

为 M 配备其闭算子范数球上的 L^2 度量所诱导的标准博雷尔结构，并为 E 配备其波兰测度拓扑的博雷尔结构。由于 M 具有可分前对偶， M 的有界球在 L^2 度量下是波兰空间。加法、乘法以及 M 到N 的两个嵌入在这些结构下都是博雷尔的。(5.1) 中 K 的每个等式都可以通过以下方式证明：

将差表示为K的定义关系的左倍数的有限和，按相同标签 dz对各项分组，并比较E中的系数。对于每个列表长度， M 中标签相等以及 E 中系数相等都是博雷尔检验。 $\delta(s)$ 对于 $s \in S$ 构成一个固定的可数表。因此， δ 的图是解析集，因为它是如下博雷尔集的投影：有序对(x, y)，以及一列用于证明 (5.1) 的见证，每个 k对应一个见证。对于任意博雷尔集$B \subset E$， $\delta^{-1}(B)$ 和 $M \setminus \delta^{-1}(B)$ 都是解析集的投影，分别通过将此图限制在 $M \times B$ 和 $M \times(E \setminus B)$上得到。Souslin定理[11, 定理 14.11]蕴含 $\delta^{-1}(B)$是博雷尔集。

M 上所指示的博雷尔结构中的每个集合都是范数博雷尔集。事实上，在每个闭范数球上，范数拓扑都比 L^2 拓扑更强，而可数多个这样的球覆盖 M。因此， δ 是从加法群（M， $\|\cdot\|$）到测度拓扑下的加法群 E 的 Baire可测同态。由于算子范数完备，定义域是一个 Baire群；值域则是可分的。Pettis自动连续性定理 [11, 定理 9.10] 给出了 δ从范数拓扑到测度拓扑的连续性。Popa和Vaes的消失定理 [14, 定理 1]现可推出 δ 是内的。□

6. An estimate in terms of free entropy dimension

设 $X = (x_1, \ldots\ldots, x_n)$是带迹 von Neumann 代数中的有界自伴元组，现令 $M = W^*(X)$。假设 X 存在矩阵微态。记 $\delta_0(X)$为修正微态自由熵维数， ev_X $(\mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(M, E))$为在 X处的取值列所构成的右 E-模。

命题 6.1。 取值列模的维数满足

$$\delta_0(X) \le \dim_N \mathrm{ev}_X(\mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(M, E)).$$

若 M是一个 II_1 因子，且 $\delta_0(X) > 1$，则 $\beta_1^{(2)}(M, \tau) = \infty$。

证明。 固定一个有限元组 $Y \in M_{\mathrm{sa}}^q$ 以及一个由实际关系构成的有限系统 $P(X, Y) = 0$。记 $J = [\,A\ B\,]$ 为在 (X, Y) 处代入后的雅可比矩阵，并记 $b = \text{秩}_N J - \text{秩}_N B$。我们先证明 $\delta_0(X) \le n - b$。由环境维数界，对 $b = 0$ 这成立。若 $b > 0$，固定 $0 < b' < b$。对给定的矩阵规模 k，取 (X, Y) 的一个联合微态，其算子范数截断大于 (X, Y) 中各项的范数。这样的微态可以在预先指定的误差范围内逼近有限列表中的词迹。对每个固定的 $t > 0$ ，选择词列表和误差范围，以满足命题 3.1 的证明中的残差检验和谱检验。两个谱截断造成的总损失可以选得小于 $b - b'$。高谱截断 $\gamma > 0$ 仅取决于 b'和 J。因此，如同该证明中所示，每个在 X坐标上的投影微态都包含一个半径为 $c > 0$ 、维数至少为 $b'k^2$的 $A_k^* w$值球。

令 Γ_X 为所得联合微状态集在 X坐标上的投影。在Γ_X的一个极大 t-分离子集的每个点上方，取一个 t-分离子集。将引理 2.1 应用于式（3.4）中的多项式 Φ_k ，得到

$$\mathrm{Pack}_t(\Gamma_X)(c/t)^{b'k^2} \le C^{(n+q+\ell)k^2} t^{-nk^2},$$

当 C, c 与 t, k 无关时，且 t 充分小时。取 k^{-2} 倍的对数，再对 k 取上极限，然后对矩条件取下确界。除以 $|\log t|$，并在 $t \downarrow 0$ 时取上极限。荣格装箱公式（包括 $Y \subset W^*(X)$ 的存在）表明，所得的左侧装箱指数等于 $\delta_0(X)$

[10, 注 2.3 和推论 2.4]。将打包尺度乘以一个固定常数不会影响此指数。我们得到 $\delta_0(X) \le n - b'$，因此 $\delta_0(X) \le n - b$。

对于给定的有限系统，令 $p_P \in M_n(N)$ 为 $(1-p_B)A$ 的核投影。$A\eta + B\zeta = 0$ 在 E 上的可解性等价于 $\eta \in p_P E^n$，因为 $BB^\dagger = p_B$。算子 $(1-p_B)A$ 的闭值域为 $\operatorname{span}(p_J - p_B)L^2(N)^\ell$，因此 $\tau_n(p_P) = n - b$。将任意两个有限系统合并，并取它们辅助字母的并集，可得到一个投影同时小于原来两个投影的系统。对于 $p = \bigwedge_P p_P$，迹的正规性因此给出 $\tau_n(p) \ge \delta_0(X)$。

模 $\mathrm{ev}_X(\mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(M,\ E))$ 恰好是 pE^n。事实上，任何导子的取值都满足每个有限系统。反过来，任何 $\eta \in pE^n$ 都会消去第 4 节模 K 中 dx_1、……、dx_n 之间的每个左 E-线性关系。每个这样的关系只涉及有限个多项式行，而取值 η 根据 p 的定义可延拓到这些行上。E 的左自内射性将相应的泛函延拓到 K。这就证明了所需的维数估计。重复出现的 X 也可以保留为独立的形式字母，并在它们的副本之间加入相等关系。

如果 $\delta_0(X) > 1$，则取值模的维数大于一，而内导子的取值维数至多为一。因此，M 具有一个外导子。代数 $M = W^*(X)$ 具有可分前对偶，定理 5.1 给出了最后一个断言。□

Appendix A. Logarithmic integrability for a finite system

设 $S = (s_1, \dots, s_n)$ 是一个标准自由半圆系统，设 $M = W^*(S)$，并记 $N = M \bar{\otimes} M_{\mathrm{op}}$ 和 $E = \mathsf{Aff}(N)$。对于 M 中的自伴元组 $Y = (y_1, \dots, y_q)$ 以及由自伴非交换多项式组成的元组 $P = (P_1, \dots, P_\ell)$，记 $J = [A\ B]$ 为 P 在 (S, Y) 处取值的雅可比矩阵 (3.1)。A 的列对应于 S，而 B 的列对应于 Y。置 $\tau_m = \mathrm{Tr}_m \otimes \tau_N$，其中 Tr_m 是非归一化迹。我们使用分量 L^2-范数平方和来定义 $\|P(S,Y)\|_2^2$。

定理 A.1. 固定多项式元组 P、整数 n、q、ℓ以及 $K > 0$。存在 $C < \infty$，使得只要 $\max_j \|y_j\| \le K$、$0 < t < 1$ 和 $\|P(S,Y)\|_2 \le t/2$，就有

$$\tau_n\big(\log\big(1_n + A^*(BB^* + t^2 1_\ell)^{-1}A\big)\big) \le C. \tag{A.1}$$

若 $P(S,Y) = 0$，则 $C_* = B^\dagger A \in M_{q,n}(E)$ 满足

$$BC_* = A, \qquad \tau_n(\log(1_n + C_*^* C_*)) \le C. \tag{A.2}$$

这里 $B^\dagger$ 表示 B的 *Moore–Penrose* 逆。

证明. 将 (A.1) 左侧记为 L_t。在 $H_k = M_k(\mathbb{C})_{\mathrm{sa}}$ 上赋予实内积 $\langle x, y\rangle = k^{-1}\,\mathrm{Tr}_k(xy)$，并令 $D = k^2$。取 x 为相互独立的高斯酉系综 n-元组，其在正交归一坐标下的协方差归一化为 $D^{-1}I$。对于如上固定的$t, \varepsilon > 0$，当 k充分大时，这类元组中至少有概率为$1/2$的集合可取到具有共同算子范数界的元组 $y \in H_k^q$，$\|P(x,y)\|_2 \le t$，且

$$\frac{1}{D}\,\mathrm{Tr}\log(1_{nD} + t^{-2}F_k F_k^*) \ge L_t - \varepsilon, \qquad F_k = A_k^*(1_{\ell D} + t^{-2}B_k B_k^*)^{-1/2}. \tag{A.3}$$

矩阵 A_k，B_k是 P在 $(x,\ y)$ 处的实导数块。为证明 (A.3)，利用 Kaplansky 稠密性，在固定范数球中用自伴多项式元组 $h(S)$ 逼近 Y 中的 L^2。在固定的 t 下，在

$B_kB_k^*$ 的谱区间上先一致逼近 (y) n，然后在所得的紧正区间上逼近对数。$H \mapsto aHb$ 在 $M_k(\mathbb{C})$ 上的归一化端同态迹为 $\mathrm{tr}_k(a)\,\mathrm{tr}_k(b)$。因此，每个多项式测试都是词迹乘积之和。先选取逼近 h ，并令 $y = h(x)$。GUE 矩和范数收敛 [8]给出两个不等式，且其成立的概率趋于 1。(x， y) 的范数界仅取决于 n， q， K。

对于每个这样的 x，令 $w = (1_{\ell D} + t^{-2}B_kB_k^*)^{-1/2}v$，其中 $|v| \le 1$。于是 $|w| \le 1$、$|B_k^*w| \le t$ 以及 $z = A_k^*w$遍历椭球 $F_k\{v\colon\ |v| \le 1\}$。令 σ_1、.....、σ_{nD}为轴长（包括零值）。投影到长度为 $> t$ 的轴上，并将体积与半径为 t 的球进行比较，可得到一个大小至少为以下数值的 t-打包

$$\prod_i \max(1, \sigma_i/t) \;\ge\; 2^{-nD/2}\det(1_{nD} + t^{-2}F_kF_k^*)^{1/2}.$$

根据最大高斯密度乘以球体积，任意半径为 t 的基球的概率至多为 $(C_nt)^{nD}$。因此，至少有$1\ 2(C_nt)^{-nD}$ 个彼此 t-分离的基元组 x 可用。将每个基元组处的打包与 (A.3) 结合起来。

由引理 2.1 对实多项式 $\Phi(x、\ y、\ w) = \sum_i \mathrm{tr}_k(w_iP_i(x、\ y))$ 的应用，可得到所得二元组 (x、 z) 打包的一个上界。其主梯度等于 $z = A_k^*w$。其辅助梯度 (B_k^*w、$P(x、\ y)$) 的范数至多为 $\sqrt{2}\,t$。三个范数 $|x|$、 $|(y、\ w)|$、 $|z|$ 均有固定界，且 $\deg\,\Phi \le 1 + \max_i \deg\,P_i$。比较上下界可得

$$\tfrac{1}{2}(C_nt)^{-nD}e^{D(L_t - \varepsilon - n\log 2)/2} \;\le\; C_0^{(n+q+\ell)D}t^{-nD}.$$

依次取 $k \to \infty$ 和 $\varepsilon \downarrow 0$ ，即可证明 (A.1)，其中常数与 Y， t 无关。

假设 $P(S,\ Y) = 0$，并令 $p = 1_{\{0\}}(BB^*)$。正算子 $K_t = A^*(BB^* + t^2 1_\ell)^{-1}A$ 支配 $t^{-2}A^*pA$。若 $A^*pA \ne 0$ 是 A^*pA 在某个区间 $[c, \infty)$ 上的谱投影，则 $c > 0$ 的迹为正。于是，利用对数函数的算子单调性，当 $t \downarrow 0$ 时便与 (A.1) 矛盾。因此 $pA = 0$ 且 $BC_* = BB^\dagger A = A$。令 $C_t = B^*(BB^* + t^2 1_\ell)^{-1}A$。有 $C_t^*C_t \le K_t$ 且 $C_t = f_t(B^*B)C_*$，其中 $f_t(s) = s/(s + t^2)$。乘子 $f_t(B^*B)$ 依测度收敛到 B^*B 的支撑，这确定了 C_*。因此 $C_t \to C_*$ 依测度收敛。广义奇异值的法图引理 [5] 与 (A.1) 可推出 (A.2)。□

A.1. 对数指数的最优性。 在定理 A.1 中，有限系统P 的选择很重要。下一个例子为所有指数$1 + \varepsilon > 1$固定一个系统。

命题 A.2。 设 $M = W^*(s_0, s_1)$ 是标准自由半圆元对(s_0, s_1)。存在一个有限元组 $Y \in M_{\mathrm{sa}}^q$、一个自伴多项式系统$P(s_0, s_1, Y) = 0$以及一个指标 $m \le q$，使其具有如下性质。 $A(0,1)^{\mathsf{T}} + B\eta = 0$ 中的每个解$\eta \in E^q$ 都满足

$$\tau_N\big((\log(1 + |\eta_m|))^{1+\varepsilon}\big) = \infty \qquad (\varepsilon > 0).$$

证明。 记作 $L_x = x \otimes 1,\ R_x = 1 \otimes x^{\mathrm{op}}$ 和 $D_x = L_x - R_x$。点表示线性化方程的一个解所赋予变量的取值。每个复变量代表两个自伴变量。每个复恒等式代表其自伴实部和虚部。特别地，(z^*) 表示按照此约定赋予 z^* 的导数。

有限系统中的可数划分。对于 $j \geq 1$ 令

$$d = j+1, \qquad R = 2^d, \qquad h = R^d - 1, \qquad n_j = 2^{d^2+10d+10}, \qquad a_j = \frac{c}{d^2 n_j},$$

其中， c的选取使得 $\sum_j n_j a_j = 1$。在此构造中，参数 d, R, h 指的是当前块 j。将 $A_0 = W^*$(s0)中的1分割为投影$e_{j,l}$，其迹为a_j, $0 \leq l < n_j$。令$e_j = e_{j,0}$, $p = \sum_j e_j$, 且 $\Pi = \sum_j L_{e_j} R_{e_j}$。我们首先指定$(\dot{s}_0, \dot{s}_1) = (0, \Pi)$。对于下文用到的有限多个系数 $b \in A_0$ 中的任意一个，添加关系 $[s_0, b] = 0$。其导数 $D_{s_0} b = 0$ 迫使 $b = 0$，因为 s_0 具有弥散分布。我们称这样的系数 b 为固定的。

将投影 $e_{j,\,l}$ 枚举为 e_i、 $i \geq 1$。令 $(f_i)_i$ 为 $(e_i)_i$的一个置换。将 $\lambda_i = i^{-1}$ 和 $b_i = 2^{-i}$ 分别作为对角系数 h_L、 b_L 在 e_i 上以及h_R、 b_R 在 f_i上的特征值。将这两个恒等式相加

$$h_L Z = Z h_R, \qquad b_L s_1 b_R = Z + h_L T - T h_R. \tag{A.4}$$

实际的有界值为

$$Z = \sum_i b_i^2 e_i s_1 f_i, \qquad T = \sum_{i \neq k} \frac{b_i b_k}{\lambda_i - \lambda_k} e_i s_1 f_k.$$

T的级数在范数下收敛，因为 $|\lambda_i - \lambda_k|^{-1} \leq ik$。 $L_{h_L} - R_{h_R}$ 的核投影等于 $k_0 = \sum_i L_{e_i} R_{f_i}$。将 k_0 应用于 (A.4) 的线性化得到 $Z = k_0 L_{b_L} R_{b_R} \Pi$。

首先，令 f_i 在其所在块 j的循环排序中先于 e_i。于是 $Z = (Z^*) = 0$。 Z 的极分解酉元 U 将每个投影 f_i 映到 e_i。事实上，令 $r = e_i + f_i$且令 $s' = r s_1 r / \sqrt{\tau}\,(r)$。在 rMr中，元素 s'对于归一化迹而言是标准半圆形的，并且根据自由压缩 [13, §§1.11–1.14]，它与 $rA_0 r$ 自由。中心对称元 $b = e_i - f_i$ 具有如下性质： s' 和 $bs'b$ 自由；这是通过展开交错中心化词得到的。因此， $s' - bs'b = 2\,(e_i s' f_i + f_i s' e_i)$ 具有弥散的半圆分布。由此可知， $e_i s_1 f_i$ 具有全源支撑与值域支撑f_i、 e_i。施加 $H^2 = Z^* Z$、 $Z = UH$、 $U^* U = U U^* = 1$，其中 $H = |Z|$。 H 的正性和全支撑使得 $L_H + R_H$ 和 R_H 在 E中均可逆。这些恒等式迫使 $H = U = (U^*) = 0$。

其次，使用带有 $f_i = e_i$ 和新变量 Z、 T 的 (A.4)。定义 $y = \sum_{i=(j,\,l)} e_i s_1 e_i / \sqrt{a_j}$, 并对固定的 $b = \sum_{i=(j,\,l)} b_i^2 \sqrt{a_j}\, e_i$ 施加 $Z = by$。自由压缩在每个角中给出半圆分布，因此对于 y 也是如此。现在 $\dot{y} = \sum_j a_j^{-1/2} L_{e_j} R_{e_j}$。取 $h_1 = \exp(2\pi i F_{\mathrm{sc}}(y))$，其中 F_{sc} 是半圆分布函数。关系式 $[y, h_1] = 0$ 给出 $\dot{h}_1 = D_y^{-1} D_{h_1} \dot{y}$。选取一个固定的酉元 $h_0 \in A_0$，使其在每个投影 e_i 上服从 Haar分布。在角 $e_j M e_j$ 中，酉元 $u = e_j h_0 e_j$ 和 $v = e_j h_1 e_j$ 是自由 Haar酉元。记 $y_j = e_j y e_j$，其系数

$$\zeta_j = R_{v^*} D_{y_j}^{-1} D_v$$

在 $e_j M e_j$ 的粗平方上可逆。此公式中的腿长为单位e_j。对于其归一化迹，奇异值满足 $\mu_s(\zeta_j^{-1}) \leq C_1/s$, $0 < s < 1$。事实上， $\|D_{y_j}\| \leq 4$，而两个相互独立的 Haar点之间距离小于 α 的概率为 $O(\alpha)$。

零导数的矩阵系数。 在区块 j 中放入 $v_a = U^a e_j$, $0 \leq a < n_j$，并使用 $v_a v_b^*$ 作为矩阵单位。定义 $V = (1-p)U$ 以及 $H_0 = \sum_{j,a} v_a (e_j h_0 e_j) v_a^*$。施加 $H_0 = p h_0 + V H_0 V^*$。其线性化为每个

m。收缩 V 在区块 j中充当长度为 n_j 的截断移位。因此$V^m \to 0$ 在测度意义下成立，而在 E 中的乘法给出 $H_0 = 0$。 H_0 的分布是 Haar。由矩阵单位 $v_a v_b^*$ 中的标量矩阵构成的任意有界区块和 K 都与 H_0交换。施加单一关系 $[H_0, K] = 0$，因而迫使 $K = 0$成立。该观察给出了下文构造中有限多个固定的矩阵系数。

编码逐项乘法。在分块 j 中，将带有 $e_j M e_j$ 中元素的矩形数组 $X =(x_{ik})$ 作为单个变量存储

$$[X] = \sum_{j,i,k} \sigma_j v_i x_{ik} v_k^*, \qquad \sigma_j = e^{-\sqrt{h}}.$$

在 $[X]$的公式中，记号 v_i, x_{ik}, v_k 表示偏等距算子，以及属于由 j 索引的直和项的导数项。令 Σ 为固定标量矩阵，在分块 j 上取值 σ_j 。施加行支撑和列支撑方程$[X] = p_I[X]p_J$，并要求其与固定的分块对角矩阵交换，该矩阵在分块 j 上取值$1/(j+1)$。导数项为 $\dot{x}_{ik} = \sigma_j^{-1} L_{v_i^*} R_{v_k}[\dot{X}]$。在每个矩阵乘积中插入各位置投影后可知，由 $[A][B] = \Sigma[C]$ 施加的原始乘积 $C = AB$ 在这些导数项上遵循通常的矩阵乘积法则。它们的左支撑受 $L_{e_j} R_{e_j}$ 支配。

我们描述固定数量的多项式恒等式，它们在 h×$(h+1)$ 数组上施加逐项乘法 $Z = X \odot Y$，并在导数项上施加其乘法法则。首先，对角副本 $W =\mathrm{diag}_{r=1}^{D}[X]$ 定义如下

$$H_I W = W H_J, \qquad W = U_I W U_J^*, \qquad I_1^* W J_1 = [X].$$

固定矩阵 H_I， H_J 用 r/D 标记连续的副本； U_I， U_J 循环置换这些副本，而 I_1，J_1 则包含第一个副本。第一个方程消去非对角块，第二个方程使对角块相同，第三个方程则指定它们的条目。这些方程对导数项也有相同的作用。

对于整数坐标为 x， $y \in [0, 2R]^d$ 的位置，令 M_b 恰好保留满足 $k(x,\ y)$ $= \|x-y\|^2 - b = 0$ 的条目。整数 $b \in [0, 4dR^2]$ 可以在不同副本之间变化。向量

$$a_x = (\|x\|^2 - b, 1, -2x_1, \ldots, -2x_d), \quad b_y = (1, \|y\|^2, y_1, \ldots, y_d)$$

其标量积为 $k(x,\ y)$，范数至多为 $c_j = 10dR^2$。在 $d+2$ 个对角副本上，分别从左侧和右侧乘以条目为 $\delta_{xx'}(a_x)_r/c_j$ 和 $\delta_{yy'}(b_y)_r/c_j$ 的固定矩阵。所得线性映射 $\mathcal{K}$ 将条目 $(x,\ y)$ 乘以 $\kappa_j k(x,\ y)$，其中 $\kappa_j = c_j^{-2}$。因此， $X = M_b(F)$ 由以下两个方程施加

$$\mathcal{K}[X] = 0, \qquad \kappa([F] - [X]) = \mathcal{K}[T],$$

其中 κ 是取值为 κ_j的块标量。在零点集上取零，在零点集之外取 $t_{xy} = f_{xy}/k(x,\ y)$。同样的两个方程在零点集上选取 f_{xy} 。

使用列指标 $J = \{0, \ldots, R-1\}^d$、去掉一个顶点后的行指标 $I = J$，以及中间指标 $m \in \{0, \ldots, 2R-2\}^d$。三类位置的欧几里得坐标分别为 $2i$、 m、 $2k$。对整数$0 \le l \le d(R-1)^2$取对角副本。在副本 l 中使用固定矩阵

$$(B_R)_{km} = 1_{\{\|2k-m\|^2 = l\}}, \qquad (B_L)_{mi} = 1_{\{\|m-2i\|^2 = l\}}.$$

在乘积方程 $[A][B] = \Sigma[C]$中使用有界存储矩阵 $[B_R]$ 和 $[B_L]$。在每个副本中构造数组

$$W = M_{4l}(X), \qquad T = M_{4l}(Y),$$
$$U' = M_l(WB_R), \qquad V' = M_l(B_L T), \qquad H_l = M_{4l}(U'V').$$

对于每个非零加项，端点之间的距离平方为 $4l$，中间点到两个端点的距离平方均为 l。三角不等式取等迫使 $m = i + k$。特别地， U' 和 V' 中保留的条目分别仅具有所需的输入索引 $k = m - i$ 和 $i = m - k$。因此，当 $l = \|i - k\|^2$时，$(H_l)_{ik} = x_{ik}y_{ik}$；否则为零。对角副本的求和使用固定的行求和矩阵和列求和矩阵，其系数为 $D_l^{-1/2}$，其中$D_l = 1 + d(R-1)^2,$，输出端为固定块标量 D_l^{-1}。由此得到$Z = X \odot Y$和 $\dot{z}_{ik} = L_{x_{ik}}\dot{y}_{ik} + R_{y_{ik}}\dot{x}_{ik}$。

这些操作在每个块中至多需要 $3(2R)^d[1 + (1 + dR^2)(d + 3)] < n_j$ 个位置。操作次数与 j 无关。变量副本计数只出现在固定矩阵中。对于范数至多为 1 的输入条目，所有原始中间条目都由 n_j 的某个固定多项式所界定，因为每个普通乘积至多求和 n_j 项，而除以非零整数 $k(x,\ y)$ 的代价至多为 1。数组的范数至多为其最大条目范数的 n_j 倍。由于 $\log n_j = O(\log h)$，所有存储的变量和所有缩放标量矩阵都定义了 M 中的有界元素。

最后一个单元格中的词。从 0 开始循环地排列 h 行和 $h+1$ 列。令 $\mathcal{S}$ 将两个索引都加 1，并令 Q 选取单元格 (0，0)，使用固定置换和投影。(0，0) 的轨道长度为 $H_j = h(h+1)$。在根坐标中，令 U_c，U_c^- 在每个单元格的对应条目分别为 u，u^*。它们存储的变量与 H_0 交换，因此施加交换性条件会迫使它们的导数为零。令 V_c 在 (0，0) 处取值为 v，其他位置均为零。存储的种子 $[V_c]$ 等于 $\Sigma K_1 h_1 K_2$，其中固定偏等距算子 K_1，K_2 将根索引移至指定的行和列。施加

$$G(X) = X \odot U_c \odot X \odot X \odot U_c^-, \qquad [X] = [V_c] + (1 - Q)\mathcal{S}[G(X)].$$

步骤 r 的实际项是酉元 w_r，其中 $w_0 = v$ 和 $w_{r+1} = w_r u w_r^2 u^*$。删去返回初始单元的步骤后，导数项也可在 $0 \le r < H_j$ 上进行普通的有限归纳。在粗根角中写作 $\pi(w) = L_w R_{w^*}$，并设

$$B_0 = 1, \qquad B_{r+1} = \big(1 + \pi(w_r u) + \pi(w_r u w_r)\big)B_r.$$

恒等式 $R_{(xy)^*}\dot{(xy)} = R_{x^*}\dot{x} + \pi(x)R_{y^*}\dot{y}$ 和 $R_{v^*}\dot{v} = a_j^{-1/2}\zeta_j$ 表明，将 $[X]$的末端导数项传输至根后，得到

$$\sigma_j a_j^{-1/2} R_{w_{H_j-1}} B_{H_j-1}\zeta_j. \tag{A.5}$$

该传输由等迹角之间的偏等距算子构成，并且在环境迹下保持非零奇异值。

v 在 w_r 中的指数和为 3^r，因此 w_r 不与 u交换。元素u，w_r构成其二生成自由子群的自由基。对 $w_r u$，$w_r u w_r$也构成一个基，因为 $w_r = (w_r u)^{-1}(w_r u w_r)$。表示 π 保持该子群上的自由群迹，因为 $\pi(g)$的归一化粗角迹等于 g的归一化角迹的模平方。对于自由对 g，g'，算子 $T = 1 + g + g'$是单射的。事实上，对角线元素为零的矩阵

且非对角线元素为 T，T^* 是三正则树的邻接算子（三正则树是具有两个顶点和三条边的图的万有覆盖）。其根预解式为$G(z) = (z - 3m(z))^{-1}$，其中分支预解式 m 满足 $m(z) = (z - 2m(z))^{-1}$，且 $m(z) \sim z^{-1}$。这些恒等式可通过在根处取舒尔补得到。由于 $m(i\alpha) \to -i/\sqrt{2}$ 如 $\alpha \downarrow 0$，谱测度在零点的质量为 $\lim_{\alpha\downarrow 0} i\alpha G(i\alpha) = 0$。因此，核补空间上的行列式与通常的 Fuglede–Kadison行列式一致。Ben Aribi 的行列式公式 [3, 定理 0.2]以及 Fuglede–Kadison行列式的乘法性 Δ 给出

$$\Delta(B_r) = (2/\sqrt{3})^r, \qquad \|B_r\| \le 3^r.$$

固定 $1 < \lambda < 2/\sqrt{3}$。在截断值 λ^r 两侧对 $\log|B_r|$ 积分。对应于 $[\lambda^r, \infty)$ 的谱投影的归一化迹至少为

$$q_0 = \frac{\log(2/(\sqrt{3}\lambda))}{\log(3/\lambda)} > 0 \qquad (r \ge 1).$$

在 $s = q_0/4$，广义奇异值 [5] 的乘积不等式给出

$$\lambda^r \le \mu_{2s}(B_r) \le \mu_s(B_r\zeta_j)\,\mu_s(\zeta_j^{-1}) \le (C_1/s)\mu_s(B_r\zeta_j).$$

粗根角的环境迹为 a_j^2。由 (A.5)，末端导数在归一化指标 s 处的奇异值至少为 $t_j = (s/C_1)a_j^{-1/2}e^{-\sqrt{h}}\lambda^{H_j-1}$。当 j 足够大时，对于某个固定的 $c_1 > 0$，$\log(1+t_j) \ge c_1 H_j$。压缩会减小广义奇异值。因此，若 $D = [X]$，则对每个 $\varepsilon > 0$，

$$\tau_N\big((\log(1+|D|))^{1+\varepsilon}\big) \;\ge\; s a_j^2 (c_1 H_j)^{1+\varepsilon} \;\ge\; c_\varepsilon d^{-4} 2^{\,2\varepsilon d^2 - 20d}.$$

令 $j \to \infty$，即可证明在 (0，Π) 处发散。将每个导数右乘 Π，会把 (0，1) 处的一个解映射为 (0，Π) 处的一个解，并且 $\mu_t(D'\Pi) \le \mu_t(D')$。最后，对于 $[X]$，行投影和列投影 p_I，p_J 互不相交。对 $[X]$ 和 $[X]^*$ 的支撑恒等式求导，得到 $L_{p_I}R_{p_J}(\mathrm{Re}[X]) = D/2$。因此，单个自伴变量 $\mathrm{Re}[X]$ 具有所断言的性质。□

Appendix B. A complex proof of the packing estimate at quadratictolerance

引理 B.1. 设 $\Phi\colon \mathbb{R}^a \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ 是次数至多为 p 的多项式，其中$a \ge 1$、$m \ge 0$和 $d = a + m$。记作 $z = \nabla_x\Phi(x,u)$ 和 $v = \nabla_u\Phi(x,u)$。对于 $R \ge 1$和 $0 < t < 1$，令

$$Q_t = \{(x,z) :\ \textit{for some } u,\quad |x|,|z|,|u| \le R,\quad |v| \le Rt^2\}.$$

存在常数 $C = C(R,p)$，使得 $\mathrm{Pack}_t(Q_t) \le C^d t^{-a}$。

证明。在 $\mathbb{C}^{2d}$ 上的坐标 (x,z,u,v) 中，使用复辛形式 $\Omega = \sum_i dx_i \wedge dz_i + \sum_j du_j \wedge dv_j$。设 $L \subset \mathbb{C}^{2d}$ 是一个复拉格朗日平面，并令 A 为其列构成 L 的正交归一基的矩阵。对于由 d 个坐标指标组成的集合 I，令 A_I 为相应的行子式，并令 $j(I)$ 计数块 (x,z) 中的指标个数。我们断言

$$\sum_{|I|=d,\ j(I)\le a} |\det A_I|^2 \ge \tfrac{1}{2}. \tag{B.1}$$

在每个辛对上，令 $K(q,h) = (-h,q)$，并令$^-\sigma$交换每一对中的指标。由于 $\Omega|_L = 0$，反酉映射 K 将 L 映到 $L^\perp$上。该

矩阵 $(A,\ KA)$ 因此是酉元。其互补子式给出 $|\det\ A_I| = |\det(KA)_{I^c}| = |\det A_{\sigma(I^c)}|$。对合 $I \mapsto \sigma(I^c)$ 将 $j(I)$ 变为 $2a - j(I)$。柯西–比内公式 $\sum_{|I|=d} |\det\ A_I|^2 = 1$ 现在证明了 (B.1)。

将 Φ 复化，并将线性映射 $(x,\ z,\ u,\ v) \mapsto (x,\ z,\ tu,\ v/t)$ 作用于其复梯度图上。所得图 G_t 是一个闭的光滑复子流形，其复维数为 d。由于 Φ 的海森矩阵的对称性以及 Ω 在线性映射下的不变性，其切平面是拉格朗日的。将一个 t-分离子集中的任意 s 个点提升为 G_t的实点。以这些提升点为中心、半径为$t/3$ 的环境球两两不相交。令 V表示 G_t 在这些球并集中的部分，并令 ω_k 表示实单位 k 球的体积，其中 $\omega_0 = 1$。复流形 G_t 由欧氏 K¨ahler 形式的第 d个除幂标定。将极小子流形的单调性公式 [6], 应用于每个密度为一的光滑中心，得到

$$\mathrm{vol}_{2d}(V) \geq s\,\omega_{2d}(t/3)^{2d}. \tag{B.2}$$

对于坐标投影 $\pi_I\colon G_t \to \mathbb{C}^d$，在以 A 为标架的切平面上，其实雅可比矩阵为 $|\det\ A_I|^2$。在原始位置变量 (x,u) 中，映射 π_I 是次数至多为 $h = \max(1, p-1)$ 的多项式。根据孤立零点的仿射 B´ezout 上界，每个正则纤维至多包含 h^d 个点 [7, 例 8.4.6]。临界值集合的勒贝格测度为零。因此，对 (B.1) 积分并应用面积公式 [6]可得

$$\mathrm{vol}_{2d}(V) \leq 2h^d \sum_{|I|=d,\ j(I)\leq a} \mathrm{vol}_{2d}(\pi_I(V)).$$

令 $B = 3(R+1)$。在球的中心处，块 (x,z) 为实数，块 $(tu, v/t)$ 的范数至多为 $\sqrt{2}Rt$。因此，对于 $j = j(I)$，像 $\overline{\pi_I}(V)$ 落在三个实球的乘积中，其维数分别为 $j,\ j, 2(d-j)$，半径分别为 $B, t/3, Bt$。相应单位球的乘积包含于 $\mathbb{R}^{2d}$ 中半径为 $\sqrt{3}$ 的球内。由此可知，只要 $j \leq a$,

$$\mathrm{vol}_{2d}(\pi_I(V)) \leq 3^d \omega_{2d} B^{2d} t^{2d-j} \leq 3^d \omega_{2d} B^{2d} t^{2d-a}.$$

至多有 4^d 个指标集 I。将此界与 (B.2) 比较可得 $s \leq (216hB^2)^d t^{-a}$。□

对于非消失性论证，在确定矩阵大小之前，两个辅助梯度块各自都可由 $\alpha_- = t^2/2$ 控制。它们的联合范数至多为$\sqrt{2}\alpha \leq t^2$，因此引理 B.1 给出了所需的上打包界。正则化行列式估计使用引理 2.1 的线性容差 Rt 。

References

[1] V. Alekseev, *On the first continuous L^2-cohomology of free group factors*, 《泛函分析杂志》**267** （2014），第11期，4264–4279。[2] M. F. Atiyah, *Elliptic operators, discrete groups and von Neumann algebras*, 《Ast´erisque》**32–33** （1976），43–72。[3] F. Ben Aribi, *Fuglede–Kadison determinants over free groups and Lehmer's constants*, 《Confluentes Math.》**14** （2022），第1期，3–22。[4] A. Connes 和 D. Shlyakhtenko, *L^2-homology for von Neumann algebras*, 《纯粹与应用数学杂志》**586** （2005），125–168。[5] T. Fack 和 H. Kosaki, *Generalized s-numbers of τ-measurable operators*, 《太平洋数学杂志》**123** （1986），第2期，269–300。[6] H. Federer, *Geometric measure theory*, 《数学科学基础丛书》，第153卷，施普林格出版社，纽约，1969年。

[7] W. Fulton, *Intersection theory*, 第二版, 《数学研究成果丛书》（第3辑）, 第2卷, 施普林格出版社, 柏林, 1998年。[8] U. Haagerup 和 S. Thorbjørnsen, *A new application of random matrices: $C^*_{\mathrm{red}}\ F_2$ is* Ext(( )), 《数 *not a group* 2 **162** 2005 2, 711 775 学年刊》（ ）（ ）, 第–期, –。[9] R. Harvey 和 H. B. Lawson, Jr., *Calibrated geometries*, 《数学学报》 **148**（1982）, 47–157。[10] K. Jung, *A free entropy dimension lemma*, 《太平洋数学杂志》**211**（2003）, 第2期, 265–271。[11] A. S. Kechris, *Classical descriptive set theory*, 《数学研究生教材》, 第156卷, 施普林格出版社, 纽约, 1995年。[12] W. L¨uck, *L^2-invariants: theory and applications to geometry and K-theory*, 《数学研究成果丛书》（第3辑）, 第44卷, 施普林格出版社, 柏林, 2002年。[13] A. Nica 和 R. Speicher, *On the multiplication of free N-tuples of noncommutative random variables* **118** 1996 4, 799 837 , 《美国数学杂志》（ ）, 第–期, –。[14] S. Popa 和 S. Vaes, *Vanishing of the first continuous L^2-cohomology for* II $_1$ *factors*, 《国际数学研究通知》（2015）, 第12期, 3899–3907。[15] D. Shlyakhtenko, *On the isomorphism of semicircular algebras*, 预印本, 2026年10月, arXiv:2610.19590。[16] A. Thom, *L^2-cohomology for von Neumann algebras* **18** 2008 1, , 《几何与泛函分析》（ ）, 第–期, –。[17] D. Voiculescu, *Limit laws for random matrices and free products*, 《数学发明》 **104**（1991）, 第1期, 201–220。

Institute for Advanced Study in Mathematics,
Harbin Institute of Technology,Harbin, 150001, China*Email address*:
jinghao.huang@hit.edu.cnInstitute for Advanced Study in Mathematics,
Harbin Institute of Technology,Harbin, 150001,
China and Suzhou Research Institute of Harbin Institute of Technology,Suzhou,
215104, China*Email address*: kudaybergenovkk@gmail.com
School of Mathematics and Statistics, University of New South Wales, Kensington,
2052, Australia*Email address*: f.sukochev@unsw.edu.au
Institute for Advanced Study in Mathematics, Harbin Institute of Technologies,
Harbin, 150001, China*Email address*: bingyan202510@163.com