arXiv:2611.32132v1 [math-ph] 24 Nov 2026

随机镶嵌算子的精确输运指数

FUMIHIKO NAKANO 和 XU XIA*

摘要。我们确定了周期二随机镶嵌算子的指数时间平均输运指数，其中偶数位点上的势为零，奇数位点上的势为独立同分布势。对于任意有界、严格正且非恒定的单点分布，在一个概率为 1 的事件上，

$$\beta_f^-(q) = \beta_f^+(q) = \max\{0, 2/3 - \nu_H(f)/(3q)\}$$

对所有非零有限支撑态 f 以及所有 $q > 0$均成立。正奇整数 $\nu_H(f)$由被 H 整除以及与有界零能解相消的条件确定。特别地，对于所有此类态，大矩指数为 $2/3$；而两个子晶格上的点源，其二阶矩增长幂分别为 1 和 $1/3$。我们通过在零能量处的奇异归一化过程中保留两个多项式源通道的消失阶，得到相匹配的预解式界。我们还证明了对每个有界正构型成立的确定性下界。对该分布不作密度假设。

1. 引言与主要结果

Anderson的工作 [1] 指出，无序是抑制晶格中输运的一种机制。在标准Anderson模型中，每个格点上的势都是随机的。严格的局域化理论在多项研究的推动下逐步发展，其中包括 Kunz–Souillard 对一维情形的分析 [13] 以及 Fröhlich–Spencer 在强无序或低能量情形下提出的多尺度方法 [8] 。Carmona–Klein–Martinelli [3]证明了奇异单点分布（包括Bernoulli分布）下的一维局域化。这些结果为理解随机性的分布方式如何影响量子运动提供了基本参照。

随机性局限于一个周期子晶格会带来不同的问题。其间的确定性位置可能产生特殊能量，而这些能量附近的行为可能决定长时间输运。我们考虑这种几何结构中最简单的情形，即随机势与零势沿晶格交替排列。我们要研究的问题是确定输运指数，包括它们对初始态的依赖。

2020 数学学科分类。主要分类号：82B44、47B80；次要分类号：60F05、37H15、81Q10。关键词与短语。随机薛定谔算子、量子输运、抛物型谱边、阈值通道、预解式估计。*通讯作者：Xu Xia。

1.1. 随机镶嵌模型。 令 $H = H_v$ 为作用于 $\ell^2(\mathbb{Z})$上的有界自伴算子，其定义为

$$\begin{aligned}(H_v u)(n) &= u(n+1) + u(n-1) + V(n)u(n),\\ V(2m) &= 0, \qquad V(2m+1) = v_m.\end{aligned} \tag{1.1}$$

在随机情形下，我们记作 H_ω，并将活性位点势的共同分布记为 μ。输运结论仅使用有界正性，

$$v_m \text{ are iid}, \qquad 0 < a \le v_m \le b < \infty \quad \text{almost surely.} \tag{1.2}$$

这里 $\bar{v} = \mathbb{E}v_0 > 0$ 和 $\sigma_v^2 = \mathrm{Var}(v_0)$；无需密度或全支撑假设。下界同样允许常值分布。对于 $H = H_v$，只要满足，我们仍保留一个单独的确定性结论

$$0 < a \le v_m \le b < \infty \qquad (m \in \mathbb{Z}). \tag{1.3}$$

后一个下界不要求独立性。

1.2. **早期工作与输运问题。** Anderson模型的周期性稀释早于“mosaic”这一术语。Hilke [10] 研究了在周期性分布的位点上具有随机势的链的局域化性质，确定了共振能量的特殊作用。De Moura及其合作者 [6] 随后研究了稀释Anderson链中的本征态和波包扩散。近来，Wang及其合作者 [18] 建立了 准周期 mosaic晶格的精确迁移率边缘。该情形具有活性位点的周期性排列这一共同特征，但不具备（1.2）中的独立随机性。

对于无序镶嵌晶格，Nguyen–Kim [17] 对透射、参与率和波包动力学进行了数值研究。他们的动力学计算采用中心化均匀无序和高斯初始波包；这些设定不同于本文所考虑的正值分布和有限支撑态。Longhi [15] 研究了具有周期性背景的广义镶嵌晶格中的共振和能隙保护局域化。本文所考虑的输运问题关注物理量子演化的时间平均矩指数，而非判定共振能量或迁移率边缘的标准。

随机聚合物模型中也已知严格的反常输运结果。对于其椭圆型临界能量，Jitomirskaya–Schulz-Baldes–Stolz [12]获得了输运下界。在满足 [11, 定理 3], 的非共振性和非退化性假设时，相应的上界给出无序平均点源定律 $\beta(q) = \max\{0, 1 - 1/(2q)\}$。在我们的模型中，零能量处的临界胞矩阵则是相同的三角剪切。随机Kronig–Penney模型为在此类抛物型临界能量处获得输运下界提供了先例 [7]。

在这里，我们在概率为一的公共事件上，为每个有限支撑初始态获得了匹配的界。所有这些状态具有相同的传播尺度，但它们与阈值的耦合并不相同：即使是位于相邻位置的点源，也具有不同的矩指数。下面的多项式

表示记录了这种依赖关系，同时不对单点分布施加正则性要求。

1.3. **输运指数与主要结果**。对于 $q > 0$， $T > 0$，以及有限支撑的 $f \neq 0$，定义

$$\mathcal{M}_q(T; f) = \frac{2}{T} \int_0^\infty e^{-2t/T} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^q |\langle \delta_n, e^{-itH} f \rangle|^2 \, dt. \tag{1.4}$$

Set

$$\beta_f^-(q) = \liminf_{T \to \infty} \frac{\log \mathcal{M}_q(T; f)}{q \log T}, \qquad \beta_f^+(q) = \limsup_{T \to \infty} \frac{\log \mathcal{M}_q(T; f)}{q \log T}, \tag{1.5}$$

以及 $\alpha_u^\pm(f) = \lim_{q \to \infty} \beta_f^\pm(q)$。霍尔德不等式表明 $\beta_f^\pm$ 单调不减；弹道界保证这些大矩极限有限。存在唯一的多项式 A_f， $B_f \in \mathbb{C}[E]$ 使得

$$f = A_f(H)\delta_0 + B_f(H)\delta_1; \tag{1.6}$$

见引理 2.1。对于非零多项式 P，令 $\operatorname{ord}_0 P$为 E在 $P(E)$中系数非零的最低次幂；定义 $\operatorname{ord}_0 0 = +\infty$。定义

$$r_f = \operatorname{ord}_0 A_f, \qquad s_f = \operatorname{ord}_0 B_f, \qquad \nu_H(f) = \min\{4r_f + 1,\, 4s_f + 3\}. \tag{1.7}$$

这个有限的正奇整数就是 阈值指标 ，对应于 f。命题 2.2无需选择多项式锚点即可刻画它。对于固定的坐标向量 f，式（1.6）中的多项式，以及 $\nu_{H_\omega}(f)$，可能依赖于样本。所有涉及该指标的断言均逐路径成立；下文的点源指标是确定性的。

定理 1.1. 假设 (1.2) 且 $\sigma_v^2 > 0$。在某个概率为 *1* 的事件上，对于每个非零的有限支撑 f 以及每个 $q > 0$，

$$\beta_f^-(q) = \beta_f^+(q) = \max\left\{0, \frac{2}{3} - \frac{\nu_H(f)}{3q}\right\}. \tag{1.8}$$

特别地， $\alpha_u^-(f) = \alpha_u^+(f) = 2/3$。

对于点源，该指数在偶子格上为 1 ，在3 奇子格上为；参见推论 3.5。因此，在同一事件上，对于每个 $j \in \mathbb{Z}$，

$$\lim_{T \to \infty} \frac{\log \mathcal{M}_2(T; \delta_{2j})}{\log T} = 1, \qquad \lim_{T \to \infty} \frac{\log \mathcal{M}_2(T; \delta_{2j+1})}{\log T} = \frac{1}{3}. \tag{1.9}$$

这些是二阶矩的增长幂：在归一化（1.5）下，相应的指数为 $1/2$ 和 $1/6$。状态 δ_j 的输运指数不依赖于所述类别内的单点分布；当方差趋于零时，常数未必一致有界。

更一般地，该指标具有内在的解释。将 f 除以能使商仍为有限支撑态的最大次幂 H ，然后将剩余状态与有界零能解配对。整除阶数以及该配对是否为零决定了 $\nu_H(f)$；参见

命题 2.2。例如， $H^k\delta_0$ 和 $H^k\delta_1$中会出现高阶消去，它们的指标分别为 $4k+1$ 和 $4k+3$。

该定理确定的是矩指数，而非渐近主导常数或逐时扩散定律。特别是，指数为零并不意味着矩有界。正方差至关重要：评注 6.7给出了周期性反例。以下定量下界不要求这种非退化性。

1.4. **定量下界与两个子晶格**。 下一个定理给出定理 1.1的下界部分，其中包含显式的几乎处处损失，以及对无序平均的一个单独估计。与精确公式不同，该定理也允许单点分布为常数。

定理 1.2。 假设 (1.2)。

(i) 存在一个概率为 *1* 的事件 Ω_* ，使得对于每个 $\omega\in\Omega_*$、每个非零有限支撑的 f 以及每个 $q>0$，都存在 $c>0$ 和 $T_0>e^e$ ，使得

$$\mathcal{M}_q(T;f)\geq cT^{(2q-\nu_H(f))/3}(\log\log T)^{-(q+\nu_H(f))/3}\qquad (T\geq T_0). \tag{1.10}$$

这些常数可能取决于样本、 f、 q以及其分布。

(ii) 对于每个固定的 $j\in\mathbb{Z}$ 和 $q>0$，确定性的常数 $c>0$ 和$T_0<\infty$ 满足

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\mathcal{M}_q(T;\delta_{2j})&\geq cT^{(2q-1)/3},\\ \mathbb{E}\mathcal{M}_q(T;\delta_{2j+1})&\geq cT^{(2q-3)/3}\end{aligned}\qquad (T\geq T_0). \tag{1.11}$$

阈值指标为 $\nu_H(\delta_0)=1$ 和 $\nu_H(\delta_1)=3$；其代数验证包含在推论 3.5的证明中。特别地，在 Ω_*上，对于每个固定的 j，

$$\mathcal{M}_2(T;\delta_{2j})\geq\frac{cT}{\log\log T},\qquad \mathcal{M}_2(T;\delta_{2j+1})\geq\frac{cT^{1/3}}{(\log\log T)^{5/3}} \tag{1.12}$$

对于所有充分大的 T。在正方差条件下，这些下界具有（1.9）中的增长幂；但不声称双对数因子是最优的。

定理 1.3。 假设 (1.3)。对于每个非零有限支撑的 f 以及每个 $q>0$，存在 $c>0$ 和 $T_0<\infty$ 使得

$$\mathcal{M}_q(T;f)\geq cT^{(q-\nu_H(f))/2}\qquad (T\geq T_0). \tag{1.13}$$

这些常数可能取决于 a、 b、 f、 q以及 A_f、 B_f 的系数。因此，由 ((1.5)，有 $\beta_f^-(q)\geq\frac{1}{2}-\frac{\nu_H(f)}{2q}$。 – ——

确定性上界较弱，但对每个正有界构型都成立。在独立同分布随机性下，幂次的增益为 $(q+\nu_H(f))/6$，并伴有几乎处处双对数损失。增长矩的确定性充分条件是 $q>\nu_H(f)$。在非退化独立同分布

随机性下，当且仅当 $2q > \nu_H(f)$时会出现正的幂律增长；根据定理1.1，低于该阈值的次幂增长尚未得到分类。

1.5. 传播尺度与源通道。该幂次 $2/3$来自零能量附近传播所受的两项限制。记 $E = -\kappa^2$，并令 N 统计双位点胞元。经过奇异重标度后，单个传输矩阵的中心化随机部分的大小为 $O(\kappa)$；其累积二次变差的大小为 $O(N\kappa^2)$。转到预解能量 $E + i/T$后，每个胞元还会引入大小为 $O((T\kappa)^{-1})$的额外误差。在归一化传输矩阵及其逆算子均有界的前缀上，复能量稳定性因此要求$N/(T\kappa)$足够小。平衡这些限制得到

$$N \asymp T\kappa, \qquad N\kappa^2 \asymp 1 \quad \Longrightarrow \quad \kappa \asymp T^{-1/3}, \qquad N \asymp T^{2/3}. \tag{1.14}$$

矩指数还取决于该距离处的物理预解质量。奇异归一化对两个源通道赋予不同的权重。我们保留（2.3）中的两个多项式因子，包括它们在阈值处的零点。双侧观测估计（4.10）将完整的源跳跃转换为远端壳层上的质量。它不要求随机边界值与传输矩阵乘积之间具有独立性。

对于上界，相位校正子给出关于起始角度一致为正的均值径向漂移。我们将由此得到的乘积增长与 Damanik–Tcheremchantsev 的全线判据结合起来 [4]；引理6.3规定了从物理位置到单元的转换。加权 Schur 估计覆盖了增长不足的收缩能量窗口。最后，我们在泊松平滑之前提取多项式因子，并使用依赖于能量的空间截断。这一操作顺序保留了上界中的阈值指标。

Schur 补具有散度形式。Li–Wang–Zhang [14, 定理 1.1–1.2]给出了关于固定散度型随机 Jacobi 算子的相关量子动力学界：他们的期望上界和下界并不匹配，并且还证明了一个几乎处处下界。这里，Schur 系数依赖于谱参数。因此，该约化并非量子演化之间的固定酉等价，我们估计物理镶嵌预解式。

第2节建立多项式表示、内禀阈值指标，以及用于两个界的 Schur 恒等式。第3 节证明确定性的下界。第4 节利用随机消去得到定理1.2。传递矩阵增长估计在第5节证明；第6 节利用这些估计得到上界，并完成定理1.1的证明。

与姊妹论文的关系。姊妹稿件 [16] 讨论有限体积特征值统计：泊松极限、带高斯修正的固定边半时钟、移动时钟以及临界扩散极限，均基于该文所述的假设。这两篇论文源自同一份初稿，共享同一模型、初等传递归一化和局部相位计算。

本文的输运证明是自足的，不使用任何统计极限定理。多项式通道记账也与未发表的稿件*Pure Point Spectrum and Anomalous Transport in MosaicStark Operators*有关；该稿件中的结果均未作为证明依据。

2. 预备知识与阈值通道

在本节中，$H = H_v$ 满足（1.3），除非明确要求考虑随机性。除非特别指定为 Frobenius 范数，否则向量范数均指欧几里得范数，矩阵范数均指诱导算子范数。内积关于第一个变量共轭线性。传输长度以双位点胞为单位；位置矩使用原始晶格点。估计中的常数可能有所变化，必要时会注明其依赖关系和一致性。

2.1. **传输约定**。对于 $Hu = Eu$，记作

$$T(E,x) = \begin{pmatrix} E-x & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad M(E,x) = T(E,0)T(E,x). \tag{2.1}$$

我们的约定是

$$\begin{pmatrix} u(n+1) \\ u(n) \end{pmatrix} = T(E,V(n)) \begin{pmatrix} u(n) \\ u(n-1) \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

因此，$M(E,\ v_m)$将$(u(2m+1)\ u(2m))^t$传输到$(u(2m+3)\ u(2m+2))^t$。在零能量下，$-M(0,\ x) = I + xE_{21}$，其中 E_{ij}是矩阵单位。该矩阵将$(s,\ t)^t$映射到$(s,\ t+xs)^t$，并固定 $\mathbb{R}(0,\ 1)^t$。对于 $x>0$，它不可对角化，且所有临界矩阵都具有相同的不变直线。我们还记作 $J = E_{21} - E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$。

2.2. **多项式通道与时间平均**。

引理 2.1。每个有限支撑的 f 都有唯一表示 (1.6)。对于 $z \notin \operatorname{spec} H$，记作

$$R(z) = (H-z)^{-1}, \qquad G(n,j;z) = \langle \delta_n, R(z)\delta_j \rangle.$$

存在一个与 z 无关的有限集 $F_f \subset \mathbb{Z}$，使得

$$(R(z)f)(n) = A_f(z)G(n,0;z) + B_f(z)G(n,1;z) \quad (n \notin F_f). \tag{2.3}$$

证明。递推关系 $\delta_{n+1} = (H - V(n))\delta_n - \delta_{n-1}$ 在两个方向上使用，可以从 δ_0, δ_1 在 $\mathbb{C}[H]$ 上生成每个 δ_n。为证明唯一性，首项系数非零的次数为 d 的多项式 A 在两个边界格点 $-d$，d 处给出 $A(H)\delta_0$ 非零值；类似地，次数为 e 的 $B(H)\delta_1$ 的边界格点为 $1-e$，$1+e$。如果二者均非零且 $d \geq e+1$，则格点 $-d$ 不可能相消。如果 $e \geq d$，则格点 $1+e$ 不可能相消。如果只有一个多项式非零，那么其任一边界系数已经证明其像非零。

对于任意多项式 P，通过多项式除法可得 $P(H) - P(z) = (H-z)Q_z(H)$，其中 $\deg Q_z \leq \deg P - 1$。因此 $R(z)P(H)\delta_j = P(z)R(z)\delta_j + Q_z(H)\delta_j$。第二项支撑于一个固定的有限区间内，从而证明了 (2.3)。□

命题 2.2。令 $c_{00}(\mathbb{Z})$ 表示有限支撑序列，并令$f \in c_{00}(\mathbb{Z}) \setminus \{0\}$。存在最大的整数 $k \geq 0$ 使得 $f \in H^k c_{00}(\mathbb{Z})$。满足 $f = H^k g$ 的有限序列 g 是唯一的，并且

$$\nu_H(f) = \begin{cases} 4k+1, & \displaystyle\sum_{m\in\mathbb{Z}} (-1)^m g(2m) \neq 0, \\ 4k+3, & \displaystyle\sum_{m\in\mathbb{Z}} (-1)^m g(2m) = 0. \end{cases} \tag{2.4}$$

对于任意 $\ell \in \mathbb{Z}$，改写为 $f = A_f^{(\ell)}(H)\delta_{2\ell} + B_f^{(\ell)}(H)\delta_{2\ell+1}$。于是

$$\min\{4\,\mathrm{ord}_0\, A_f^{(\ell)} + 1, 4\,\mathrm{ord}_0\, B_f^{(\ell)} + 3\} = \nu_H(f).$$

证明。由引理 2.1， $f \in H^j c_{00}(\mathbb{Z})$ 当且仅当 E^j 同时整除 A_f 和B_f。因此 $k = \min(r_f, s_f) < \infty$。定义

$$\widehat{A}(E) = E^{-k} A_f(E), \quad \widehat{B}(E) = E^{-k} B_f(E), \qquad g = \widehat{A}(H)\delta_0 + \widehat{B}(H)\delta_1.$$

这些都是多项式，且 $H^k g = f$。同一唯一性结论表明， $H^{k\widehat{}}$ $\widehat{}$在 $c_{00}(\mathbb{Z})$ 上是单射，因此 g 是唯一的。它的多项式为 $A_g = A$、 $B_g = B$，且它们不可能同时在零点处消失。

实数序列 $u_0(2m) = (-1)^m$, $u_0(2m+1) = 0$ 满足 $Hu_0 = 0$。将其与有限序列配对只涉及有限和，而递推关系的对称性给出：对于每个 $p \in c_{00}(\mathbb{Z})$，均有 $\sum_n u_0(n)(Hp)(n) = 0$。因此$\sum_n u_0(n)g(n) = A_g(0)$。若此数非零，则 $\mathrm{ord}_0\, A_g = 0$ 且 $\nu_H(g) = 1$。若此数为零，则 $B_g(0) \neq 0$ 且 $\nu_H(g) = 3$。乘以 H^k会使两个多项式的阶数都增加 k，并使阈值指标增加 $4k$，从而证明该公式。整数 k 和状态 g 与两个生成点的选取无关。在 2ℓ 处对零能量解进行归一化，得到$u_0^{(\ell)} = (-1)^\ell u_0$，于是

$$A_g^{(\ell)}(0) = \sum_m (-1)^{m-\ell} g(2m) = (-1)^\ell A_g^{(0)}(0).$$

因此，这个数是否为零与 ℓ 无关。 □

引理 2.3。对于 $\varepsilon = T^{-1}$,

$$\mathcal{M}_q(T; f) = \frac{1}{\pi T} \int_{\mathbb{R}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|^q |(R(E+i\varepsilon)f)(n)|^2 \, dE. \tag{2.5}$$

式 (1.4) 中的所有矩在 T 有限时均有限。

证明。以 e^{iEt} 为核的 $\mathbf{1}_{t\geq 0} e^{-t/T}\langle \delta_n, e^{-itH} f\rangle$ 的傅里叶变换为$-i\langle \delta_n, R(E+i/T) f\rangle$。标量帕塞瓦尔恒等式给出因子 $1/(\pi T)$，见式 (2.5)。求和由单调收敛定理得到。

记 $H = V + K$，其中 K 是跃迁算子，并令 $U_I(t) = e^{itV} e^{-itH}$且 $K_I(t) = e^{itV} K e^{-itV}$。方程 $U_I' = -iK_I(t)U_I$, $U_I(0) = I$具有范数收敛的迭代积分展开，因为 $\|K_I(t)\| = 2$。含有 k 次跃迁的项至多有 2^k 条路径，积分体积为 $|t|^k/k!$。每个

跃迁项的模为 1，而到达 n 需要从 j 经过 $k \geq |n-j|$。因此，对于每个 $\alpha > 0$,

$$|\langle \delta_n, e^{-itH}\delta_j\rangle| \leq \sum_{k\geq|n-j|} \frac{(2|t|)^k}{k!} \leq \exp\bigl(2e^{\alpha}|t| - \alpha|n-j|\bigr).$$

有限支撑给出了关于 f 的相应界。将位置求和在 $|n| = C_f + C_\alpha|t|$ 处拆分，其中 $C_\alpha > 2e^{\alpha}/\alpha$。幺正性将内部部分界定为$C(1+|t|)^q$，而显示的估计将外部部分界定为相同的量。因此，指数时间平均是有限的。□

2.3. **间隙侧的一个确定性预解式恒等式。** 为便于后续研究量子动力学，取满足（1.3）的任意构型，并写成 $H = H_v$。以下分块恒等式无需随机性即可成立，并给出下文所用的间隙侧预解输入。定义酉映射$\mathcal{T}$: $\ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z}) \oplus \ell^2(\mathbb{Z})$ 为

$$u(2m) = (-1)^m \psi_m, \qquad u(2m+1) = (-1)^m \chi_m.$$

令 $D\psi(m) = \psi_m - \psi_{m+1}$ 和 $D^*\chi(m) = \chi_m - \chi_{m-1}$。在这些坐标下，

$$\widetilde{H} = \mathcal{T}H\mathcal{T}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & D^* \\ D & V \end{pmatrix}, \qquad V = \operatorname{diag}(v_m). \tag{2.6}$$

记 $L_0 = D^*D = DD^*$ 为正离散拉普拉斯算子。对于 $0 < E < a$，定义

$$c_m(E) = (v_m - E)^{-1}, \quad Q_E = E + D^* c(E) D, \quad A_E = L_0 + E(V-E). \tag{2.7}$$

这里 $Q_E \geq EI$ 且 $A_E \geq E(a-E)I$。为求解 $(H-E)(\psi,\chi) = (F,G)$，首先代入 $\chi = (V-E)^{-1}(G - D\psi)$，得到 $-Q_E\psi = F - D^*(V-E)^{-1}G$。或者，代入 $\psi = (D^*\chi - F)/E$ 可得 $A_E\chi = EG + DF$。解出这些方程并代回后得到

$$\begin{aligned} ((\widetilde{H}-E)^{-1})_{\psi\psi} &= -Q_E^{-1}, \\ ((\widetilde{H}-E)^{-1})_{\chi\chi} &= EA_E^{-1}, \\ ((\widetilde{H}-E)^{-1})_{\psi\chi} &= D^*A_E^{-1}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

特别地，$(0,a) \cap \operatorname{spec} H = \varnothing$。

命题 2.4。 设 $A = \operatorname{supp}\mu \subset (0,\infty)$ 为紧集。在 (1.2)条件下，几乎必然地

$$\operatorname{spec} H_\omega = \bigcup_{c\in A} \bigl([E_-(c), 0] \cup [c, E_+(c)]\bigr), \qquad E_\pm(c) = \frac{c \pm \sqrt{c^2+16}}{2}. \tag{2.9}$$

如果 $A = [a,b]$，则这变为 $[E_-(a)\ 0] \cup [a, E_+(b)]$。对于不连通的 A，正侧的并集不一定是一个区间。

对于有限 A，这是 [5, 定理 3.3.1和注记 3.3.2]的一个特例。我们给出紧致 A 情形下的论证，以免施加区间支撑假设。

证明。对于 $E \neq 0$，消去偶数位点分量后， $H - E$ 的可逆性等价于 K_E –($E^2 - 2$)的可逆性，其中$(K_E\phi)_m = \phi_{m+1} + \phi_{m-1} + Ev_m\phi_m$。常数-$c$ 算子的判别式为 $E(E - c) - 2$ ，其谱为 $\Sigma_c = [E_-(c)\ 0] \cup [c, E_+(c)]$。若 E 位于(2.9)右侧集合之外，则$\inf_{c\in A} |E^2 - 2 - Ec| > 2$。 K_E –$(E^2 - 2)$的对角部分的逆算子范数小于 $1/2$，而跳跃项的范数为二。由Neumann级数可知，对于取值于 A的任意构型，该算子均可逆。

反过来，固定一个可数稠密子集 $A_0 \subset A$。对每个 $c \in A_0$、长度 $l \in \mathbb{N}$ 和精度 $1/k$，几乎必然地，独立同分布构型中会包含无穷多个互不相交的 l 单元块，且满足 $|v_m - c| < 1/k$：每个这样的块出现的概率都相同且为正，而互不相交块对应的事件相互独立。对这些可数多个选择取交集。对 $E \in \Sigma_c$，将常数-c 算子的有界布洛赫解截断到这些块之一。其范数与 $\sqrt{l}$ 可比；两个边界误差有界，归一化后的势误差至多为 $1/k$。令 l, $k \to \infty$，即可得到一个韦尔序列。同样的论证也适用于有界带边解，包括 $E = 0$。因此，对每个 $c \in A_0$，都有 $\Sigma_c \subset \operatorname{spec} H_\omega$ 。区间端点关于 c 的连续性以及谱的闭性，推出该包含关系对所有 $c \in A$ 都成立。□

3. 确定性输运下界

我们证明定理 1.3 和推论 3.5 适用于每个满足（1.3）的确定性构型。对于实数 $0 < E < a$，两列 $(H - E)^{-1}\delta_0$和 $(H - E)^{-1}\delta_1$ 在零点附近的大小不同。我们证明这些列的实能量界，并将其推广到一个狭窄的复能量锥中。多项式恒等式（2.3）进而给出任意有限状态的界。

以下格林函数估计中的常数仅依赖于 a， b，除非另有说明。所有小能量结论均在同一个区间 $0 < E < E_0(a,\ b)$ 上成立。

3.1. **零位点通道**。

引理 3.1. 设 $c_- \le c_m \le c_+$ 且满足 $c_- > 0$，并令 $Q = E + D^*cD$, $0 < E \le 1$。存在常数 $c, C > 0$，仅依赖于 c_-, c_+，使得

$$cE^{-1/2}e^{-C\sqrt{E}|m-j|} \le (Q^{-1})_{mj} \le CE^{-1/2} \qquad (m, j \in \mathbb{Z}). \tag{3.1}$$

证明。逆算子 Q^{-1} 保持逐坐标非负性。取 $\Lambda > \|Q\|$。由于 $Q \ge EI$ 且其非对角元素均非正， $I - Q/\Lambda$ 的元素均非负，且范数不超过 $1 - E/\Lambda < 1$。因此

$$Q^{-1} = \Lambda^{-1} \sum_{k\ge 0} (I - Q/\Lambda)^k$$

在算子范数下收敛，并且其元素非负。

求逆会反转二次型序：如果 $A \geq B \geq cI > 0$，那么 $C = B^{-1/2}AB^{-1/2} \geq I$，并且 $A^{-1} = B^{-1/2}C^{-1}B^{-1/2} \leq B^{-1}$。将此应用于$Q \geq E + c_-L_0$，并在 δ_j 上进行检验，可得到

$$(Q^{-1})_{jj} \leq ((E + c_-L_0)^{-1})_{00} = \frac{1}{\sqrt{E(E + 4c_-)}} \leq CE^{-1/2}.$$

该等式通过对 $(E + 2c_- - 2c_- \cos\theta)^{-1}$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上积分得到。正算子 Q^{-1} 的柯西–施瓦茨不等式给出非对角线界的上界。

要证明下界，只需取 $j = 0$。定义电阻距离 $s_0 = 0$，并且

$$s_m = \sum_{k=0}^{m-1} c_k^{-1} \ (m > 0), \qquad s_m = \sum_{k=m}^{-1} c_k^{-1} \ (m < 0).$$

设 $\rho = \sqrt{2c_+E}$ 和 $w_m = e^{-\rho s_m}$。在位置 $m \neq 0$，朝向零和远离零方向的电导分别为

	$m > 0$	$m < 0$
$c_{\mathrm{in}}(m)$	c_{m-1}	c_m
$c_{\mathrm{out}}(m)$	c_m	c_{m-1}.

事实上，c_m 是边 $(m, m+1)$ 的系数。于是

$$\begin{aligned} \frac{(Qw)_m}{w_m} &= E + c_{\mathrm{out}}(1 - e^{-\rho/c_{\mathrm{out}}}) + c_{\mathrm{in}}(1 - e^{\rho/c_{\mathrm{in}}}) \\ &\leq E - \frac{\rho^2}{2c_{\mathrm{in}}} \leq E - \frac{\rho^2}{2c_+} = 0. \end{aligned}$$

这里，对于 $x \geq 0$，有 $1 - e^{-x} \leq x$ 和 $1 - e^x \leq -x - x^2/2$。在源处，$(Qw)_0 \leq E + 2\rho$。由于 $w \in \ell^2(\mathbb{Z})$，将正性 Q^{-1} 应用于逐坐标不等式 $Q(w/(E + 2\rho)) \leq \delta_0$，可得

$$(Q^{-1})_{m0} \geq \frac{e^{-\rho s_m}}{E + 2\rho} \geq cE^{-1/2}e^{-C\sqrt{E}|m|}.$$

此处 $s_m \leq |m|/c_-$ 和 $E + 2\rho \leq (1 + 2\sqrt{2c_+})\sqrt{E}$ 对于 $E \leq 1$成立。平移证明了一般情形。□

对于 $E < a/2$，式（2.7）中的系数满足 $1/b \leq c_m(E) \leq 2/a$。因此，对于任意固定的 $d > 0$，

$$\begin{aligned} &|G(2m, 0; E)| \leq CE^{-1/2} \quad (m \in \mathbb{Z}), \\ &|G(2m, 0; E)| \geq c_d E^{-1/2} \quad (|m| \leq dE^{-1/2}). \end{aligned} \tag{3.2}$$

事实上 $G(2m, 0; E) = -(-1)^m(Q_E^{-1})_{m0}$。取绝对值会消去符号，并且 $e^{-C\sqrt{E}|m|} \geq e^{-\overline{C}d}$ 在所指区间上。

3.2. **活跃位点通道。**

引理 3.2。 存在 E_0、c、$C>0$，它们仅依赖于 a、b，使得对于每个满足 (1.3) 的构型以及每个 $0<E<E_0$，存在一个集合 $S_E\subset\mathbb{Z}$ 使得

$$|S_E|\ge cE^{-1/2},\qquad cE^{-1/2}\le|m|\le CE^{-1/2}\quad(m\in S_E),\tag{3.3}$$

and

$$|G(2m,1;E)|\ge c\quad(m\in S_E),\qquad |G(2m,1;E)|\le 1\quad(m\in\mathbb{Z}).\tag{3.4}$$

集合 S_E 由零号单元一侧的单元索引组成。零号单元包含输入位点 1，位于 $G(2m,\,1;\,E)$ 中；这一侧可能取决于 E 和构型。

证明。令 $h_m=(A_E^{-1})_{m0}$ 以及 $\mu_m=E(v_m-E)$。正性由引理 3.1 中的论证可得。为证明严格正性，注意到

$$((I-A_E/\Lambda)u)_m=\left(1-\frac{2+\mu_m}{\Lambda}\right)u_m+\frac{u_{m-1}+u_{m+1}}{\Lambda},\qquad \Lambda>\|A_E\|.$$

系数均为非负。对于 $d=|i-j|$，d 次幂中的直路径给出 $[(I-A_E/\Lambda)^d]_{ij}\ge\Lambda^{-d}$，因此由 Neumann级数可得 $(A_E^{-1})_{ij}\ge\Lambda^{-(d+1)}>0$。对于 $E<a/2$，

$$\tfrac{a}{2}E\le\mu_m\le bE,\qquad h_0\le((L_0+\tfrac{a}{2}E)^{-1})_{00}\le CE^{-1/2}.$$

由于 $h\in\ell^2$，$h_m\to0$ 位于两端。在远离零号单元的任一半直线上，其方程为 $h_{m+1}-2h_m+h_{m-1}=\mu_m h_m>0$。对于 $m\ge1$，差值$d_m=h_m-h_{m-1}$ 因而满足 $d_{m+1}-d_m=\mu_m h_m>0$。如果 $d_m\ge0$，则下一步之后的所有后续差值都会有一个严格正的下界，这与 $h_m\to0$ 矛盾。因此 $h_0>h_1>h_2>\cdots>0$；同样的论证也适用于 h_{-m}。特别地，$h_m\le h_0$。定义出射边梯度

$$j_k^+=h_k-h_{k+1},\qquad j_k^-=h_{-k}-h_{-k-1}\qquad(k\ge0).$$

它们均为正，随 k 增大而减小，并趋于零。零点处的方程给出

$$j_0^++j_0^-+\mu_0h_0=1.\tag{3.5}$$

特别地，每个 $j_k^\pm\le1$。由于 $\mu_0h_0\le C\sqrt{E}$，当 E 足够小时，至少有一个 j_0^+，j_0^-不小于 $1/4$。在该半直线上，

$$0\le j_0^\pm-j_k^\pm=\sum_{\ell=1}^{k}\mu_{\pm\ell}h_{\pm\ell}\le Ck\sqrt{E}.$$

选取足够小的 $d>0$，使得 $Cd\le1/8$。令 $\mathcal{I}_E$ 为满足$d/(4\sqrt{E})\le k\le d/(2\sqrt{E})$的整数 k。所选梯度在此处至少为 $1/8$。设 $S_E=\{k+1:\,k\in\mathcal{I}_E\}$ 右侧　　$S_E=\{-k:\,k\in\mathcal{I}_E\}$ 左侧。

对于充分小的 E，$|\mathcal{I}_E| \geq d/(4\sqrt{E}) - 1 \geq \overline{d}/(8\sqrt{E})$。同一区间给出了（3.3）中的距离界。最后，（2.8）给出 $|G(2m,\ 1;\ E)| = |h_m - h_{m-1}|$，从而证明了两个结论。□

3.3. **列范数与复能量稳定性**。

引理 3.3. 存在 $C,\ E_0 > 0$，仅依赖于 $a,\ b$，使得对于每个满足 (1.3) 的构型，每个 $j \in \mathbb{Z}$ 以及每个 $0 < E < E_0$，

$$\|R(E)\delta_{2j}\|^2 \leq CE^{-3/2}, \qquad \|R(E)\delta_{2j+1}\|^2 \leq CE^{-1/2}. \tag{3.6}$$

证明。在实间隙上，$R'(E) = R(E)^2$；其在源处的对角元等于该预解算子列的范数平方。在零位点块中，

$$\frac{d}{dE}(-Q_E^{-1}) = Q_E^{-1}Q_E'Q_E^{-1}, \qquad Q_E' = I + D^*c(E)^2D.$$

由于 $c_m(E)^2 \leq (2/a)c_m(E)$ 对于 $E < a/2$，二次型满足 $Q_E' \leq CE^{-1}Q_E$ 当 $E \leq 1$ 时。引理 3.1 因此将相关对角元界定为

$$CE^{-1}(Q_E^{-1})_{jj} \leq CE^{-3/2}.$$

在活跃块中，$A_E' = V - 2E$。对于 $E < a/4$，这是正的，并且

$$\frac{d}{dE}(EA_E^{-1}) = A_E^{-1} - EA_E^{-1}(V - 2E)A_E^{-1} \leq A_E^{-1}.$$

其对角元非负，因为它是 $R(E)^2$ 的一个对角元。与 $L_0 + (a/2)E$ 比较，可知它不超过 $CE^{-1/2}$。所有论证对每个源指标都成立。□

列界控制间隙能量获得一个小虚部时产生的误差。不同的幂次是保持活跃位点通道所必需的，因为其实振幅仅为一阶量。

命题 3.4。存在 $K \geq 1$、$E_0 > 0$ 和 c、$C > 0$，它们仅依赖于 a、b，并具有如下性质。若

$$0 < E < E_0, \qquad 0 < \varepsilon \leq E/K, \qquad z = E + i\varepsilon, \tag{3.7}$$

则对所有 $m \in \mathbb{Z}$，

$$|G(2m, 0; z)| \leq CE^{-1/2}, \qquad |G(2m, 1; z)| \leq C. \tag{3.8}$$

存在集合 $S_E^{(0)}$、$S_E^{(1)}$，它们分别满足壳层界 (3.3)，且在这些集合上分别有

$$|G(2m, 0; z)| \geq cE^{-1/2} \quad (m \in S_E^{(0)}), \qquad |G(2m, 1; z)| \geq c \quad (m \in S_E^{(1)}). \tag{3.9}$$

这些集合的选取可以不依赖于 ε（见 (3.7)）。

证明。谱定理给出 $\|R(E+i\varepsilon)\delta_j\| \leq \|R(E)\delta_j\|$。因此，预解式恒等式和柯西–施瓦茨不等式推出

$$|G(n, j; E + i\varepsilon) - G(n, j; E)| \leq \varepsilon\|R(E)\delta_n\|\|R(E)\delta_j\|. \tag{3.10}$$

对于 $n = 2m$，引理 3.3 明确给出

$$|G(2m, 0; E + i\varepsilon) - G(2m, 0; E)| \le C\varepsilon E^{-3/2},$$
$$|G(2m, 1; E + i\varepsilon) - G(2m, 1; E)| \le C\varepsilon E^{-1}.$$

对于 $\varepsilon \le E/K$，它们分别至多为 $(C/K)E^{-1/2}$ 和 C/K。

例如，取 $S_E^{(0)}$，取整数 $E^{-1/2} \le m \le 2E^{-1/2}$，并将 (3.2) 与 $d = 2$ 一起使用。取 $S_E^{(1)}$，如引理 3.2 中所述。取足够大的 K 可使每个实下界至少保留一半。实全局上界和相同的误差估计给出 (3.8)。□

定理 *1.3* **的证明。**令 $r = r_f$， $s = s_f$。在锥 (3.7 上，一个消失阶为 k 的非零多项式在零点处的绝对值，与 E^k相当，对所有充分小的 E均成立。常数可以依赖于该多项式。对于较小的 E，命题 3.4 中的壳层满足 $\{2m : m \in S_E^{(i)}\} \cap F_f = \varnothing$对于 $i = 0$， 1，因为 $|2m| \ge cE^{-1/2}$ 而 F_f 是固定的。因此，(2.3) 适用于这些物理位置。

若 $r \le s$，则 $r < \infty$和 $\nu_H(f) = 4r + 1$。在 $S_E^{(0)}$ 上，

$$\begin{aligned}|(R(z)f)(2m)| &\ge |A_f(z)|\,|G(2m, 0; z)| - |B_f(z)|\,|G(2m, 1; z)| \\ &\ge cE^{r-1/2} - CE^s \ge c'E^{r-1/2}\end{aligned}$$

当 E 较小时；若 $B_f = 0$，则省略第二项。若 $s < r$，则 $s < \infty$, $A_f = 0$ 时除外，且 $\nu_H(f) = 4s + 3$。在 $S_E^{(1)}$ 上，反三角不等式给出

$$|(R(z)f)(2m)| \ge cE^s - CE^{r-1/2} \ge c'E^s,$$

若 $A_f = 0$，则省略第二项。因此，两个通道振幅在首阶上不可能相互抵消：它们可能的幂次相差一个半整数，而 r, s 是整数。

每个壳层至少有 $cE^{-1/2}$ 个点，且所有点都具有 $|2m| \ge cE^{-1/2}$。在这两种情况下，均可推出

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|^q |(R(E + i\varepsilon)f)(n)|^2 \ge cE^{(\nu_H(f)-q)/2-2}. \tag{3.11}$$

取 $\varepsilon = T^{-1}$并对 $E \in [K/T, 2K/T]$积分。这里 $\varepsilon \le E/K$，且$T > 2K/E_0$ 保证（3.7）。进一步增大 T，具体取决于 f，以满足多项式界，并确保壳层与 F_f不相交。由（2.5），

$$\mathcal{M}_q(T; f) \ge \frac{c}{T} \int_{K/T}^{2K/T} E^{(\nu_H(f)-q)/2-2}\, dE \ge c'T^{(q-\nu_H(f))/2}.$$

定理的最后一个断言可通过取对数并取下极限得到。 □

推论 3.5。 在 (1.3)下，对于每个固定的 $j \in \mathbb{Z}$ 和 $q > 0$,

$$\mathcal{M}_q(T; \delta_{2j}) \ge cT^{(q-1)/2}, \qquad \mathcal{M}_q(T; \delta_{2j+1}) \ge cT^{(q-3)/2} \tag{3.12}$$

对于所有充分大的 T。对于固定的 a, b, q, j, 常数可在满足 (1.3) 的构型上统一选取。特别地,

$$\mathcal{M}_2(T;\delta_{2j}) \geq cT^{1/2}, \qquad \mathcal{M}_4(T;\delta_{2j+1}) \geq cT^{1/2}.$$

由此推论无法推出 δ_{2j+1} 的二阶矩下界会增长。

推论的证明 *3.5*。 对于 δ_0和 δ_1，通道对为 $(1,0)$ 和 $(0,1)$，因此它们的损失指标分别为 1和 3。平移偶数个格点可保持 (1.1)–(1.3)；上述 Green函数估计对所有此类平移配置均一致。在远离固定源 $2j$的壳层上，权重$|n|^q$ 与 $|n-2j|^q$可比。这就证明了 (3.12)，包括其一致性。

等价地，写作 $\delta_n = A_n(H)\delta_0 + B_n(H)\delta_1$。在零点处计算递推关系可得

$$A_{2j}(0) = (-1)^j, \qquad A_{2j+1}(0) = 0, \qquad B_{2j+1}(0) = (-1)^j.$$

因此，(1.7)给出每个位置处相同的损失指标。 □

3.4. 示例与两种通道尺度。 通道多项式使高阶阈值消去显式呈现。例如，对于整数$k \geq 0$,

$$\begin{aligned} \nu_H(H^k\delta_0) &= 4k+1, \qquad \nu_H(H^k\delta_1) = 4k+3, \\ \nu_H(\delta_{-1}+\delta_1) &= 5, \qquad \nu_H(\delta_{-1}-\delta_1) = 3. \end{aligned} \tag{3.13}$$

最后两个恒等式由 $H\delta_0 = \delta_{-1}+\delta_1$推出。这些恒等式对每个有界正构型都成立。在非退化独立同分布随机性下，定理1.1将它们转化为精确输运指数；没有随机性时，它们只能给出定理1.3的下界。

简单的尺度核算很有用。当 $E \asymp \underline{T}^{-1}$ 位于间隙中时，产生贡献的距离为 $E^{-1/2} \asymp \sqrt{T}$。零位点的 Green函数振幅为$E^{-1/2}$，而偶数输出子晶格上的活跃位点振幅为一阶量。振幅平方、位点数、能窗宽度以及 Parseval 等式中的前因子共同造成了 1 和 3 这两种损失。主导多项式通道中 k 阶零点会贡献 E^{2k}，并使损失指标增加 $4k$。

4. 随机消去与物理预解质量

我们证明定理 1.2 在条件（1.2）下成立。记 $v_m = v_\omega(m)$ 以及 $R(z) = (H_\omega - z)^{-1}$。不同于间隙侧论证，我们在负实能量下进行研究。主要估计是引理 4.2：在一个良好的传输事件上，它在保留两个源振幅的同时，界定两个远端壳层上的物理质量。引理 4.4随后控制良好能量的测度。引理 2.1 和 2.3 中的多项式尾部恒等式和 Parseval公式将这些估计转化为矩下界。

4.1. **缩放后的源跳跃。** 在第 2.3 节的交错坐标中，对于实数 $\kappa>0$ 和 $z=-\kappa^2+i\varepsilon$，定义

$$w_m=\begin{pmatrix}\psi_m\\ \sqrt{\bar v}\,\chi_{m-1}/\kappa\end{pmatrix}.$$

远离源时，$(H-z)u=0$ 给出

$$w_{m+1}=C_{v_m}(z;\kappa)w_m,\qquad C_v(z;\kappa)=\begin{pmatrix}1+z(v-z) & \kappa(v-z)/\sqrt{\bar v}\\ \sqrt{\bar v}\,z/\kappa & 1\end{pmatrix}. \tag{4.1}$$

其行列式恰好为一。当改变 z 的虚部时，我们保持实数缩放 κ 不变。

令 $u=R(z)(\alpha\delta_0+\beta\delta_1)$，其中任意 $\alpha,\ \beta\in\mathbb{C}$。零号单元处的非齐次方程为

$$\chi_0-\chi_{-1}-z\psi_0=\alpha,\qquad \psi_0-\psi_1+(v_0-z)\chi_0=\beta.$$

Thus

$$w_1=C_{v_0}(z;\kappa)w_0+b,\qquad b=\begin{pmatrix}(v_0-z)\alpha-\beta\\ \sqrt{\bar v}\,\alpha/\kappa\end{pmatrix}. \tag{4.2}$$

对于充分小的 κ 和 $0\le\varepsilon\le\kappa^2$，关于 $v_0\in[a,b]$ 一致地，

$$\|w_0\|^2+\|w_1\|^2\ge c\|b\|^2\ge c\big(|\alpha|^2/\kappa^2+|\beta|^2\big). \tag{4.3}$$

事实上，$\|C_{v_0}(z;\kappa)\|\le C$、$\alpha=\kappa b_2/\sqrt{\bar v}$，且 $\beta=(v_0-z)\kappa b_2/\sqrt{\bar v}-b_1$。这同时处理了两条半直线，无需选择有利的韦伊函数，也无需假设边界值的独立性。

4.2. **最大乘积。** 在实能量下，令 $C_v(\kappa)=C_v(-\kappa^2;\kappa)$ 且 $C_\kappa=\mathbb{E}C_{v_0}(\kappa)$。它们具有精确的仿射分解

$$C_v(\kappa)=C_\kappa+(v-\bar v)D_\kappa,\qquad D_\kappa=\begin{pmatrix}-\kappa^2 & \kappa/\sqrt{\bar v}\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \tag{4.4}$$

其中

$$C_\kappa=\begin{pmatrix}1-\bar v\kappa^2-\kappa^4 & \kappa\sqrt{\bar v}+\kappa^3/\sqrt{\bar v}\\ -\kappa\sqrt{\bar v} & 1\end{pmatrix}. \tag{4.5}$$

特别地，$\det C_\kappa=1$，尽管取平均通常不会保持行列式不变。

令 $J=\left(\begin{smallmatrix}0&-1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$ 和 $R_t=e^{tJ}$。对于较小的 κ，定义 $\theta_\kappa\in(0,\ \pi)$ 如下

$$\cos\theta_\kappa=1-\tfrac12(\bar v\kappa^2+\kappa^4).$$

于是 $\theta_\kappa=\sqrt{\bar v}\kappa\mp O(\kappa^3)$。Cayley–Hamilton 定理给出 $K_\kappa^2=-I$ 对于 $K_\kappa=(C_\kappa-\cos\theta_\kappa I)/\sin\theta_\kappa$。因此 $C_\kappa=\cos\theta_\kappa I+\sin\theta_\kappa K_\kappa$，并且通过乘法，即使对于负幂，也可得到

$$C_\kappa^n=\cos(n\theta_\kappa)I+\sin(n\theta_\kappa)\frac{C_\kappa-\cos\theta_\kappa I}{\sin\theta_\kappa},\qquad n\in\mathbb{Z}. \tag{4.6}$$

商为 $-J+O(\kappa)$。由于 $|\sin(n\theta_\kappa)|\le 1$，误差不会随着 n累积。因此，对于每个整数 n，均一致地有

$$\|C_\kappa^n - R_{-n\theta_\kappa}\| \le C\kappa, \qquad \|C_\kappa^n\| + \|C_\kappa^{-n}\| \le C. \tag{4.7}$$

对于从源的正右侧和正左侧立即开始的乘积，记作

$$F_n^+(\kappa) = C_{v_n}(\kappa)\cdots C_{v_1}(\kappa),$$
$$F_n^-(\kappa) = C_{v_{-n}}(\kappa)^{-1}\cdots C_{v_{-1}}(\kappa)^{-1}, \qquad F_0^\pm = I.$$

引理 4.1。对于任意固定的 $\delta>0$、所有充分小的 κ 以及所有 $N\ge 1$,

$$\mathbb{P}\left(\max_{\substack{0\le n\le N\\ \sigma\in\{+,-\}}} \|F_n^\sigma(\kappa) - C_\kappa^{\sigma n}\| > \delta\right) \le C_\delta \exp\left(-\frac{c_\delta}{N\kappa^2}\right). \tag{4.8}$$

这里，$C_\kappa^{+n}=C_\kappa^n$ 和 C_κ^{-n}具有通常的含义。

证明。考虑正号乘积，并令 $Y_n = C_\kappa^{-n}F_n^+$。令 $\xi_{n+1} =_v v_{n+1}-v$,

$$Y_{n+1} = (I+\xi_{n+1}K_n)Y_n, \qquad K_n = C_\kappa^{-n-1}D_\kappa C_\kappa^n, \qquad \|K_n\|\le C\kappa.$$

因此 Y_n 是一个取实矩阵值的鞅，并且满足 $Y_0=I$。固定 $r>0$后，在 $\tau = \inf\{n:\ \|Y_n-I\|_F > r\}$处将其停止，其中 $\|\cdot\|_F$ 表示 Frobenius 范数。在退出之前，$\|Y_n\|_F \le \sqrt{2}+r$，因此 $Y_{n\wedge\tau}-I$ 的每个元素的中心化增量都被 $C_r\kappa$ 所界定。如果 $\tau\le N$，则在不超过 N的某个时刻，其四个元素中有一个的绝对值大于 $r/2$ 。标量最大指数估计 [2, 引理 2], 再对四个元素应用并集界，即得

$$\mathbb{P}\left(\max_{n\le N}\|Y_n-I\|_F > r\right) \le 32\exp\left(-\frac{c_r}{N\kappa^2}\right).$$

只有停止后的增量是有界的；并未假设未受限乘积有界。由于 $F_n^+ - C_\kappa^n = C_\kappa^n(Y_n-I)$ 以及均值幂是一致有界的，取 r 与 δ 成正比即可得到正向估计。

由于对于 2×2 矩阵，伴随矩阵是线性的，且每个 $C_v(\kappa)$ 的行列式均为 1,

$$\mathbb{E}C_{v_0}(\kappa)^{-1} = C_\kappa^{-1}, \qquad C_v(\kappa)^{-1} = C_\kappa^{-1} + (v-\bar v)\begin{pmatrix}0 & -\kappa/\sqrt{\bar v}\\ 0 & -\kappa^2\end{pmatrix}.$$

变量 v_{-1}、v_{-2}.....是独立同分布的。应用相同的停止论证即可得到负向估计。利用并集界可证明（4.8）；两个良事件之间无需具有独立性。□

4.3. **复稳定性与物理分量的观测**。取一个较小的数值 $\delta_0>0$，稍后确定。称一个实能量 $E=-\kappa^2$在长度 N 下是良的，若 (4.8) 中的最大值不超过 δ_0。良事件在 (ω,E)上可测，因为它由有限个连续矩阵乘积定义。

引理 4.2。存在常数 $\rho_0>0$、$K_0<\infty$ 和 $\kappa_0>0$，它们仅依赖于 a、b、$\bar v$，使得以下结论成立。假设 $0<\kappa<\kappa_0$、$E=-\kappa^2$ 在长度 N、$0<\varepsilon\le\kappa^2$ 下是良的，并且

$$N\varepsilon/\kappa\le\rho_0,\qquad N\kappa\ge K_0. \tag{4.9}$$

对于 $z=E+i\varepsilon$ 和任意的 α、$\beta\in\mathbb{C}$，

$$\sum_{N/2\le|m|\le N}\big|\big(R(z)(\alpha\delta_0+\beta\delta_1)\big)(2m)\big|^2\ge cN\big(|\alpha|^2/\kappa^2+|\beta|^2\big). \tag{4.10}$$

证明。首先固定实归一化 κ。直接由（4.1），对 $v\in[a,b]$ 和 $\varepsilon\le\kappa^2$ 一致地有，

$$\|C_v(E+i\varepsilon;\kappa)-C_v(E;\kappa)\|\le C\varepsilon/\kappa. \tag{4.11}$$

逆矩阵由其显式伴随矩阵可得同样的估计。在良事件上，由（4.7）及行列式为一可知，所有实部分乘积的范数及其逆范数均一致有界。对每个 $j\ge1$，取 $A_j=C_{v_j}(E;\kappa)$；或者对每个 $j\ge1$，取 $A_j=C_{v_{-j}}(E;\kappa)^{-1}$。令 $\widetilde A_j$ 为它们对应的复矩阵，并设 $P_n=A_n\cdots A_1$、$P_n=A_n\cdots A_1$。因此，P_n 分别为 $F_n^+(\kappa)$ 或 $F_n^-(\kappa)$。常数变易法给出如下精确恒等式

$$\widetilde P_n-P_n=\sum_{j=1}^{n}P_nP_j^{-1}(\widetilde A_j-A_j)\widetilde P_{j-1}.$$

为完整起见，令 $d=\varepsilon/\kappa$。选择 $B\ge1$，使得 $\|P_n\|$，$\|P_n^{-1}\|\le B$对于 $0\le n\le N$成立，并选择 L 使得 $\|\widetilde A_j-A_j\|\le Ld$成立。由 $c_*=B^2L$ 和 $a_n=\|\widetilde P_n\|$，该恒等式推出 $a_n\le B+c_*d\sum_{j=0}^{n-1}a_j$。归纳法得到$a_n\le B(1+c_*d)^n$，代入同一恒等式可得

$$\|\widetilde P_n-P_n\|\le B\big((1+c_*d)^n-1\big)\le B(e^{c_*nd}-1)\le Bc_*nd\,e^{c_*nd}.$$

特别地，差值随 Nd 趋于零，并且

$$\max_{n\le N}\|\widetilde P_n-P_n\|\le C(N\varepsilon/\kappa)\exp(CN\varepsilon/\kappa). \tag{4.12}$$

这在两条半直线上都成立。选择 δ_0，然后选择 ρ_0，再选择 κ_0 足够小，使得（4.7）和（4.12）确保复数的正、负乘积分别在$d_0=1/16$ 的 $R_{-n\theta_\kappa}$ 和 $R_{n\theta_\kappa}$以内，并且对 $n\le N$ 一致成立。

记作 $e_1=(1,\,0)^t$。对于由 M 个连续整数构成的区间 I，令 $S=\sum_{n\in I}e^{2in\theta}$。直接相乘得

$$\sum_{n\in I}R_{n\theta}^te_1e_1^tR_{n\theta}=\frac{M}{2}I+\frac12\begin{pmatrix}\Re S & -\Im S\\ -\Im S & -\Re S\end{pmatrix}.$$

其特征值为（$M\pm|S|$）/2，且几何级数满足 $|S|\le1/|\sin\theta|$。因此，对于任意 $x\in\mathbb{C}^2$ 以及 $\theta=\theta_\kappa$的任一符号，

$$\sum_{n\in I}|e_1^tR_{n\theta}x|^2\ge\left(\frac{M}{2}-\frac{1}{2|\sin\theta|}\right)\|x\|^2. \tag{4.13}$$

这是针对 $\sum R_{n\theta}^t e_1 e_1^t R_{n\theta}$ 的最小特征值界，并且对复向量仍然有效。如果矩阵 P_n 与这些旋转的距离在 d_0 以内，则 $|a+b|^2 \geq |a|^2/2 - |b|^2$ 意味着

$$\sum_{n\in I} |e_1^t P_n x|^2 \geq \left(\frac{M}{4} - \frac{1}{4|\sin\theta|} - M d_0^2 \right) \|x\|^2.$$

对于长度与 N相当的区间，右侧至少为 $cN\|x\|^2$当 K_0 在 (4.9) 中足够大时。

对于实际的预解式解，右侧 $w_m = F_{m-1}^+(z;\kappa)w_1$ 对于 $m \geq 1$；左侧 $w_{-k} = F_k^-(z;\kappa)w_0$ 对于 $k \geq 1$。将前述观察界应用于每个壳层 $\lceil N/2 \rceil \leq m, k \leq N$。由于 $u(2m) = (-1)^m e_1^t w_m$，它们的和有下界 $cN(\|w_0\|^2 + \|w_1\|^2)$。最后，(4.3) 证明了 (4.10)。□

注 4.3。将物理向量 $(\psi,\ \chi)$ 与$(\psi,\ \sqrt{\bar{v}}\chi/\kappa)$ 逐点比较，范数平方中可能会损失一个因子 κ^2 。方程 (4.13) 避免了这种损失：经过多次旋转后，未缩放的物理分量 ψ 能够捕捉到整个缩放范数的固定比例。随后，源跳跃为零位点通道提供 κ^{-2}，为活跃位点通道提供 1 。在同时发生的良事件上，该估计是确定性的。对于确定性的 α，β取期望可得下界 $cN(|\alpha|^2/\kappa^2 + |\beta|^2)$，再乘以良事件发生的概率。此操作不会从期望中提取依赖于样本的通道多项式；下文第 (i) 部分中，这类多项式是逐路径使用的。

4.4. 能量积分。选取一个足够小的固定 $c_0 > 0$ ，使得$c_0 < \rho_0$。对于趋于零的尺度 $h = h(T)$ ，令

$$I_T = [-2h^2, -h^2], \qquad N_T = \lfloor c_0 h T \rfloor, \qquad \varepsilon = T^{-1}. \tag{4.14}$$

对于 $E \in I_T$，令 $\kappa(E) = \sqrt{-E} \in [h, \sqrt{2}h]$。只要 $Th^2 \to \infty$，我们就有$\varepsilon \leq \kappa(E)^2$、 $N_T\kappa(E) \to \infty$以及 $N_T\varepsilon/\kappa(E) \leq c_0$，且这些关系在整个窗口上均一致成立。因此，确定性桥接结论适用于其中所有良能量。

引理 4.4。设 $B_T(\omega)$ 为 I_T 中长度为 N_T时不良能量的勒贝格测度。若 $N_T h^2 \leq 1$，则

$$\mathbb{E}B_T \leq Ch^2 \exp\left(-\frac{c}{N_T h^2}\right), \qquad \mathbb{P}(B_T > h^2/2) \leq C\exp\left(-\frac{c}{N_T h^2}\right). \tag{4.15}$$

证明。对每个固定的 $E \in I_T$，引理4.1 将其失败概率界定为 $C\exp(-c/(N_T h^2))$，且在整个窗口上一致成立。托内利定理以及$|I_T| = h^2$ 给出第一个界。马尔可夫不等式给出第二个界。这不要求不同能量之间相互独立，也不要求每个能量处都存在统一的良事件。□

定理1.2(i)的证明。选取一个充分小的确定性 $d > 0$ 并取

$$h(T) = dT^{-1/3}(\log\log T)^{-1/3}, \qquad T > e^e. \tag{4.16}$$

于是 $Th^2 \to \infty$ 且 $N_T h^2 \le c_0 d^3/(\log\log T)$。选取 d 足够小，使得（4.15）有界于 $C(\log T)^{-3}$。在二进制时刻 $T_j = 2^j$，这些概率之和有限。由 Borel–Cantelli 引理，在一个概率为 1 的事件上，对每个充分大的 j，良子集 $G_{T_j} \subset I_{T_j}$ 的测度至少为 $h(T_j)^2/2$。该事件不依赖于 q 或 f。

固定这样一个样本以及一个非零的有限支撑 f。其通道多项式现已固定。若一个非零多项式在零点的阶数为 r，则对于每个满足 $E \in I_T$的 $z = E + i/T$，当 T充分大时，其大小都被一个正数常数乘以 h^{2r} 所下界。这是因为可以因式分解出 z^r，因为 $|z| \asymp h^2$。因此，记 $\nu = \nu_H(f)$为，

$$\frac{|A_f(z)|^2}{\kappa(E)^2} + |B_f(z)|^2 \ge c_f h^{\nu-3}. \tag{4.17}$$

零多项式只贡献零；至少有一个多项式非零。指数为$\min(4r_f - 2, 4s_f) = \nu - 3$。当 T充分大时，引理4.2中的壳层位于引理 F_f 中的有限集2.1之外。由于在这些壳层上 $|2m| \ge N_T$，（2.3）、（4.10）和（4.17）对每个良好能量给出，

$$\sum_n |n|^q |(R(E+i/T)f)(n)|^2 \ge c_f N_T^{q+1} h^{\nu-3}.$$

在较大的二进制时刻，对 G_T 积分并使用 Parseval 等式：

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_q(T;f) &\ge \frac{c_f}{T} N_T^{q+1} h^{\nu-3} h^2 \ge c_f T^q h^{q+\nu} \\ &= c_f T^{(2q-\nu)/3} (\log\log T)^{-(q+\nu)/3}.\end{aligned} \tag{4.18}$$

要推广到所有较大的时刻，对于 $T_j \le T \le 2T_j$，由式（1.4）中被积函数的正性可得

$$\mathcal{M}_q(T;f) \ge (T_j/T)\mathcal{M}_q(T_j;f) \ge \tfrac{1}{2}\mathcal{M}_q(T_j;f). \tag{4.19}$$

和 T 的幂次及双重对数，对任意固定的 q，ν都具有可比性，包括幂次为负的情形。这就证明了式（1.10）。此事件上的所有估计均适用于每个有限状态以及每个 $q > 0$，其中常数可依赖于状态；无需取不可数交集。取对数可得$\beta_f^-(q) \ge 2/3 - \nu_H(f)/(3q)$。 □

定理 *1.2*(ii) 的证明。 在 4.14 中取 $h = dT^{-1/3}$，其中固定的 $d > 0$ 足够小。于是 $N_T h^2 \le c_0 d^3$，因此引理 4.1 表明，良能量出现的概率至少为 $1/2$，并且对每个 $E \in I_T$ 及每个较大的T 均一致成立。对于 δ_0，式（4.10）在良事件上给出加权下界 $cN_T^{q+1}h^{-2}$；对于 δ_1，则给出 cN_T^{q+1}。这些常数都是确定性的，与实际预解式的随机边界值无关。对这些逐点下界取期望，并使用 Tonelli 定理和 Parseval 等式，得到

$$\mathbb{E}\mathcal{M}_q(T;\delta_0) \ge cT^{-1}N_T^{q+1}, \qquad \mathbb{E}\mathcal{M}_q(T;\delta_1) \ge cT^{-1}N_T^{q+1}h^2.$$

由于 $N_T \asymp hT$，这正是（1.11）中的两个幂。按 $2j$平移可保持分布律和两个子晶格。在平移后的远壳层上，$|n|$

并且，对于每个固定的 j 以及所有充分大的 T， $|n-2j|$ 与其可比。这证明了该结论对每个指定位置都成立。□

这种尺度平衡与谱隙侧证明中的情形不同。在那里，距离为 $T^{1/2}$ 量级，且无法进行平均。这里，复能量误差在距离 $N \asymp hT$ 上很小，而中心化随机乘积误差的大小由 Nh^2 控制。对于无序平均， Th^3 取一个较小的固定值即可。几乎必然地，对 h 作双对数缩减后，坏能量指数界在二进制时刻上可求和。这种损失并非必要条件。

5. 随机传递矩阵乘积的增长

现在证明上界中所用的传递矩阵增长估计。假设（1.2）。以下的归一化和局部展开对常值分布也成立；推导增长时则要求满足非退化性。我们先研究零能量附近的情形，然后处理与零能量不相交的紧能量集。

5.1. **抛物正则形。** 对于独立同分布律（1.2），令 $\bar{v} = \mathbb{E}v_0$。对于$E = -\kappa^2$，令

$$S_\kappa = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \kappa/\sqrt{\bar{v}} \end{pmatrix}, \qquad B(\kappa, x) = S_\kappa\{-M(-\kappa^2, x)\}S_\kappa^{-1}. \tag{5.1}$$

下面的精确恒等式给出了乘积估计中使用的展开式。

引理 5.1. 对于 $0 < \kappa \le 1$ 和 $x \in [a, b]$,

$$B(\kappa, x) = \begin{pmatrix} 1 - x\kappa^2 - \kappa^4 & -\kappa\sqrt{\bar{v}} \\ \kappa x/\sqrt{\bar{v}} + \kappa^3/\sqrt{\bar{v}} & 1 \end{pmatrix}. \tag{5.2}$$

因此，对 $x \in [a, b]$一致成立，

$$B(\kappa, x) = I + \kappa\sqrt{\bar{v}}J + \kappa\frac{x - \bar{v}}{\sqrt{\bar{v}}}E_{21} + \kappa^2 R(\kappa, x), \tag{5.3}$$

其中， R 关于 $0 \le \kappa \le 1$一致有界。更确切地说， R 是关于x 的仿射函数，并且满足

$$\sup_{0\le\kappa\le1}\sup_{x\in[a,b]}\|R(\kappa, x)\| + \sup_{0\le\kappa\le1}\sup_{x\ne y}\frac{\|R(\kappa, x) - R(\kappa, y)\|}{|x - y|} < \infty. \tag{5.4}$$

证明。 直接进行共轭变换可得（5.2）。从（5.3）中减去两个一阶项后，得到

$$R(\kappa, x) = \begin{pmatrix} -x - \kappa^2 & 0 \\ \kappa/\sqrt{\bar{v}} & 0 \end{pmatrix}.$$

它是关于 x 的仿射函数，并满足（5.4）。 □

5.2. **相位和径向展开**。记 $u_\theta = (\cos\theta, \sin\theta)^{t}$ 以及

$$C_1(x) = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{\bar{v}} \\ x/\sqrt{\bar{v}} & 0 \end{pmatrix}.$$

那么 $B(\kappa, x) = I + \kappa C_1(x) + \kappa^2 R(\kappa, x)$。以下局部计算是相位校正子的输入；它只使用（1.2），不涉及区间支撑或正方差。

引理 5.2。定义角增量为

$$B(\kappa, x)u_\theta / \|B(\kappa, x)u_\theta\| = u_{\theta+\delta\theta},$$

在 $\kappa = 0$ 处从 $\delta\theta = 0$ 连续选取实角度。于是

$$\delta\theta(\theta, x) = \kappa\left(\sqrt{\bar{v}} + \frac{x - \bar{v}}{\sqrt{\bar{v}}}\cos^2\theta\right) + O(\kappa^2). \tag{5.5}$$

此外，

$$\log\|B(\kappa, x)u_\theta\| = \kappa\langle u_\theta, C_1(x)u_\theta\rangle + \kappa^2 q(\theta, x) + O(\kappa^3), \tag{5.6}$$

其中

$$q(\theta, x) = \tfrac{1}{2}\|C_1(x)u_\theta\|^2 + \langle u_\theta, R(0, x)u_\theta\rangle - \langle u_\theta, C_1(x)u_\theta\rangle^2.$$

所有余项关于 $x \in [a, b]$ 和 $\theta \in \mathbb{R}$ 都是一致的。对于每个 θ，一阶径向项的期望为零，并且

$$Q(\theta) := \mathbb{E}q(\theta, v_0) = \frac{\sigma_v^2}{8\bar{v}} + \left(-\frac{\bar{v}}{2} + \frac{\sigma_v^2}{4\bar{v}}\right)\cos 2\theta + \frac{\sigma_v^2}{8\bar{v}}\cos 4\theta. \tag{5.7}$$

证明。对于实单位向量 u，精确的有向角恒等式为

$$\sin\delta\theta = \frac{\det(u, B(\kappa, x)u)}{\|B(\kappa, x)u\|} = \kappa\det(u, C_1(x)u) + O(\kappa^2).$$

由于 $\delta\theta = O(\kappa)$，因此将其正弦替换为 $\delta\theta$ 也成立，从而证明了 (5.5)。展开平方范数的对数，并利用 $R(\kappa, x) = R(0, x) + O(\kappa)$ 可得 (5.6)。令 $c = \text{余弦}\,\theta$，$s = \text{正弦}\,\theta$，

$$\begin{aligned} \langle u_\theta, C_1(x)u_\theta\rangle &= sc\,\frac{x - \bar{v}}{\sqrt{\bar{v}}}, \\ \|C_1(x)u_\theta\|^2 &= \bar{v}s^2 + \frac{x^2}{\bar{v}}c^2, \\ \langle u_\theta, R(0, x)u_\theta\rangle &= -xc^2. \end{aligned}$$

取期望可得

$$Q(\theta) = -\tfrac{1}{2}\bar{v}\cos 2\theta + \frac{\sigma_v^2}{\bar{v}}c^2\left(\tfrac{1}{2} - s^2\right),$$

其双角展开为（5.7）。的有界性以及角变量的紧致性给出了所述的一致性。□

5.3. 远离零点的非紧致性。我们使用每个双位点胞的李雅普诺夫指数：对于每个固定的 E，以下极限几乎处处存在，并且是确定性的，

$$\Lambda(E) = \lim_{L\to\infty} \frac{1}{L} \log \|M(E, v_{L-1}) \cdots M(E, v_0)\|. \tag{5.8}$$

其存在性和非随机性由次可加遍历定理得到。对于 $E \neq 0$，胞矩阵共轭于

$$\mathcal{A}(E, x) = \begin{pmatrix} E^2 - 2 - Ex & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.9}$$

事实上，对于 $\mathcal{C}_E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & E \end{pmatrix}$，$\mathcal{C}_E M(E, x)\mathcal{C}_E^{-1} = \mathcal{A}(E, x)$。矩阵 $\mathcal{C}_E$ 和 $\mathcal{C}_E^{-1}$ 在与零不相交的紧能量集上一致有界。

引理 5.3。假设 μ 不是点质量，并令 $E \neq 0$。由 $\{\mathcal{A}(E, x) : x \in \operatorname{supp}\mu\}$ 生成的闭群在 $\mathbb{R}^2$ 上是非紧且强不可约的。因此

$$\Lambda(E) > 0. \tag{5.10}$$

证明。取 $x_1 \neq x_2 \in \operatorname{supp}\mu$。生成群 G 包含

$$U := \mathcal{A}(E, x_1)\mathcal{A}(E, x_2)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G, \qquad t := E(x_2 - x_1) \neq 0. \tag{5.11}$$

U 的幂是无界的。若非空有限的 G-不变集 F 的基数为 k，则 U 置换其 k 条直线。每个循环长度都整除 $k!$，因此 $U^{k!}$ 固定 F 中的每一条直线。这个非平凡幺幂矩阵的唯一不变直线是 $[e_1]$。于是 $F = \{[e_1]\}$，这与 $\mathcal{A}(E, x)e_1 = (E^2 - 2 - Ex, 1)^t \notin [e_1]$ 矛盾。Furstenberg 定理 [9]现在给出 (5.10)。□

5.4. **有限长度增长**。此处及第 6节中，假设 $\sigma_v^2 > 0$。常数可能取决于分布，且当方差趋于零时不必保持一致。记

$$\mathcal{P}_N(E) = M(E, v_{N-1}) \cdots M(E, v_0).$$

引理 5.4。存在 κ_0、c、$C > 0$，使得

$$\mathbb{E}\|\mathcal{P}_N(-\kappa^2)\|^{-2} \le C\kappa^{-2} e^{-cN\kappa^2}, \qquad 0 < \kappa < \kappa_0, \quad N \ge 1. \tag{5.12}$$

对每个紧致的 $K_0 \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$，存在 c、$C > 0$，使得

$$\sup_{E\in K_0} \mathbb{E}\|\mathcal{P}_N(E)\|^{-2} \le Ce^{-cN}. \tag{5.13}$$

对于反向的逆胞矩阵乘积，同样的界也成立。

证明。令 $r=\sqrt{\bar v}$，$\bar d=\sigma_v^2/(8\bar v)>0$，以及 $A=-\bar v/2+\sigma_v^2/(4\bar v)$。一致展开（5.5）和（5.6）仅使用该分布的有界性、均值和方差，因此在当前假设下仍然适用。令

$$Q(\theta)=d+A\cos 2\theta+d\cos 4\theta,\qquad h(\theta)=-\frac{A}{2r}\sin 2\theta-\frac{d}{4r}\sin 4\theta,$$

有 $rh'=d-Q$。令 θ' 为 $B(\kappa,\ v)u_\theta$ 的相位，并令 $\ell=\log\|B(\kappa,\ v)u_\theta\|$。相位提升满足 $|\theta'-\theta|\le C\kappa$，且 $\mathbb{E}(\theta'-\theta\mid\theta)=\kappa r+O(\kappa^2)$。因此，对二阶导数有界的 h 应用泰勒公式，可一致地对 θ 得到，

$$\mathbb{E}\ell=\kappa^2Q(\theta)+O(\kappa^3),\qquad \mathbb{E}\{h(\theta')-h(\theta)\}=\kappa rh'(\theta)+O(\kappa^2).$$

因此，修正增量

$$Z=\ell+\kappa\{h(\theta')-h(\theta)\}\tag{5.14}$$

满足 $\mathbb{E}(Z\mid\theta)\ge d\kappa^2/2$，并且当 κ 足够小时有 $|Z|\le C\kappa$。从任意固定的实单位向量 u 出发，考察连续乘积的相位。其修正对数范数的中心化增量是由 $C\kappa$ 有界的鞅差分。条件指数估计 [2, 备注 1] 以及 Chernoff不等式给出

$$\mathbb{P}\left(\log\|B_N\cdots B_1u\|<\frac{d}{4}N\kappa^2-2\kappa\|h\|_\infty\right)\le e^{-cN\kappa^2}.$$

由于行列式为一的矩阵的算子范数至少为一，将其分解为该例外事件及其补集即可证明 $\mathbb{E}\|B_N\cdots B_1\|^{-2}\le Ce^{-cN\kappa^2}$。在共轭 $B=S_\kappa(-M)S_\kappa^{-1}$ 中，S_κ 的条件数意味着 $\|S_\kappa\|\|S_\kappa^{-1}\|$，而这至多为 C/κ。因此

$$\|\mathcal{P}_N\|^{-2}\le C\kappa^{-2}\|B_N\cdots B_1\|^{-2},$$

证明 (5.12)。

对于 (5.13)，记 $P_E\varphi([u])=\mathbb{E}\varphi([M(E,v_0)u])$ 为射影马尔可夫算子，并记 $F(E,[u])=\mathbb{E}\log(\|M(E,v_0)u\|/\|u\|)$。转移和$F$在紧致的能量—射影空间上都是联合连续的。引理 5.3 中的幺幂矩阵论证只用到了两个不同的支撑点。生成群是非紧的，且没有射影方向的有限不变集；有界支撑保证了对数矩条件。根据[9, 定理 8.5–8.6]，，在 $E\neq 0$ 处的每个平稳测度 ν 都有相同的严格正 F平均值。满足 $E\in K_0$和 $P_E^*\nu=\nu$的配对 (E,ν) 构成紧集。因此，这些平稳平均值具有共同的正下界 $\lambda_*>0$。这里的平稳性是相对于平均算子P_E而言，而不是相对于每个单独的矩阵。

期望的有限长度对数增长也一致为正。否则，就会存在 $N_i\to\infty$、$E_i\to E_*\in K_0$ 和初始方向 u_i，使其归一化期望增长小于该下界的一半。一个

.....的弱极限

$$\nu_i = \frac{1}{N_i} \sum_{j=0}^{N_i-1} (P_{E_i}^*)^j \delta_{[u_i]}$$

在 E_* 处平稳：对于连续测试函数，不变性误差至多为其上确界范数的两倍除以 N_i。此外，对于单位 u_i,

$$N_i^{-1} \mathbb{E} \log \|\mathcal{P}_{N_i}(E_i) u_i\| = \int F(E_i, [u])\, d\nu_i([u]).$$

联合连续性与 F 平均值的下界矛盾。因此，存在固定整数 m 和 $a_0 > 0$，使得

$$\inf_{E \in K_0,\, \|u\|=1} \mathbb{E} \log \|\mathcal{P}_m(E) u\| \geq a_0.$$

对于固定的初始单位向量 u，令 G_j 为按传递顺序排列的、编号为jm、.....、$(j+1)m-1$的胞矩阵之积，并设 $U_j = \mathcal{P}_{jm}(E)u / \|\mathcal{P}_{jm}(E)u\|$以及 $X_j = \log \|G_j U_j\|$。滤子 $\mathcal{F}_{jm}$ 包含前 jm 个变量。将连续的范数比相乘，得到 $\sum_{j=0}^{k-1} X_j = \log \|\mathcal{P}_{km}(E)u\|$。由于独立性，下一块满足 $\mathbb{E}(X_j \mid \mathcal{F}_{jm}) \geq a_0$，对每个 U_j 均成立。存在一个一致的 $b_0 < \infty$，使得 $|X_j| \leq b_0$，因为单元矩阵及其逆算子在 $K_0 \times [a,b]$ 上有界。对于 k 个完整块，中心化和

$$S_k = \sum_{j=0}^{k-1} \{X_j - \mathbb{E}(X_j \mid \mathcal{F}_{jm})\}$$

增量有界于 $2b_0$。条件指数界 [2, Re- 标记 1]给出 $\mathbb{E}(e^{-t(S_{j+1}-S_j)} \mid \mathcal{F}_{jm}) \leq e^{2b_0^2 t^2}$。迭代并取 $t = a_0/(8b_0^2)$ 可得

$$\mathbb{P}(S_k \leq -a_0 k/2) \leq \exp\{-a_0^2 k/(32 b_0^2)\}.$$

记 $N = km + r$, $0 \leq r < m$，最后 r 个因子至多会使对数范数减少 $m \log C_0$，其中 C_0 的选取满足

$$\sup_{E \in K_0,\, x \in [a,b]} \max\{\|M(E,x)\|, \|M(E,x)^{-1}\|\} \leq C_0.$$

因此，在概率为 Ce^{-cN} 的事件之外，$\log \|\mathcal{P}_N(E)u\| \geq cN - C$。在例外事件上使用 $\|\mathcal{P}_N(E)\|^{-2} \leq 1$；在其补集上使用这一先前的下界。增大 C 使得 $N < m$ 证明（5.13），且对 $E \in K_0$一致成立。

最后，有限独立同分布序列反向排列后，其分布不变；并且 $\|A^{-1}\| = \|A\|$ 对于一个行列式为一的 2×2 矩阵。由此得到逆算子乘积估计。范数估计使用一个固定的起始向量；其例外事件可能依赖于该向量。这并不能保证所有方向上同时具有正的逐样本增长：对于 $A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$, $\inf_{\|u\|=1} \log \|Au\| = -\log \|A\| \leq 0$。□

6. 上界与精确输运指数

本节假设 (1.2) 以及 $\sigma_v^2 > 0$。所有常数都可以依赖于该分布；当其方差趋于零时，这些常数并非一致有界。引理 5.4 给出实能量增长。我们将其推广到复能量，并得到命题 6.5中的能量相关空间半径；加权 Schur 估计处理临界窗口。在泊松平滑之前提取多项式因子，可在命题6.6中保留完整的阈值指标。定理 1.2 的下界进而给出定理 1.1，其中通过双时刻论证涵盖零指数区域。

6.1. 复能量估计。

引理 6.1. 设 $\Phi_I(z)$ 是实系数、跃迁系数为一的离散薛定谔算子在任一方向上的有限区间传输矩阵。对于实数 E 和 $\varepsilon > 0$,

$$\|\Phi_I(E+i\varepsilon)\| \geq 2^{-1/2}\|\Phi_I(E)\|. \tag{6.1}$$

证明。 写作 $p_{a,b}(z) = \det(z - H^D_{[a,b]})$，其中 $p_{a,a-1} = 1$ 且 $p_{a,a-2} = 0$。在正向情况下，穿过 $[a,b]$ 的传输为

$$\Phi_{[a,b]}(z) = \begin{pmatrix} p_{a,b}(z) & -p_{a+1,b}(z) \\ p_{a,b-1}(z) & -p_{a+1,b-1}(z) \end{pmatrix}.$$

对于单点区间，这就是 $\begin{pmatrix} z-V_a & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$。这些元素构成的任意非恒定多项式，其零点全为实数，因为对应的有限 Jacobi 矩阵是自伴的。对这些零点进行因式分解可得 $|p(E+i\varepsilon)| \geq |p(E)|$。先对 Frobenius 范数成立，再由此得到算子范数下的比较。反转方向会得到一个伴随矩阵，并且只会置换带符号的元素。此论证针对的是物理传输矩阵，而非其依赖能量的奇异共轭矩阵。□

引理 6.2。 假设确定性界 （1.3）成立。存在 ϵ_0、c、$C > 0$，它们仅依赖于 a、b，使得对于 $|E| \leq \epsilon_0$、$0 < \varepsilon \leq \epsilon_0$，每个 $j \in \mathbb{Z}$ 和$R \geq 1$,

$$\sum_{|n-j|>R} |G(n,j;E+i\varepsilon)|^2 \leq C\varepsilon^{-2} \exp\left(-\frac{c\varepsilon R}{\sqrt{|E|+\varepsilon}}\right). \tag{6.2}$$

对于 $0 < E \leq \epsilon_0$ ， 同样有

$$\sum_{|n-j|>R} |G(n,j;E+i\varepsilon)|^2 \leq CE^{-2}e^{-c\sqrt{E}R}. \tag{6.3}$$

证明。 将第 2.3 节中的 Schur 补延拓至 $z = E + i\varepsilon$:

$$c_z = (V - z)^{-1}, \qquad Q_z = z + D^* c_z D.$$

对于足够小的 ϵ_0，对构型一致地，有 $\operatorname{Re} c_z \geq c_* > 0$ 以及 $0 \leq \operatorname{Im} c_z \leq C\varepsilon$。取定义在胞元上的有界实函数 ϕ ， 满足 $|\phi(m+1) - \phi(m)| \leq 1$,

令 $W = e^{t\phi}$和 $Q_t = WQ_zW^{-1}$。对于 $d_m = t(\phi(m+1) - \phi(m))$，该形式 $\langle u,\ Q_t u\rangle$ 为 $z\|u\|^2$ 加上对 m 求和，其中 $c_z(m)$ 乘以

$$|u_m - u_{m+1}|^2 - 2(\cosh d_m - 1)\,\mathrm{Re}(\overline{u_m}u_{m+1}) + 2i\sinh d_m\,\mathrm{Im}(\overline{u_m}u_{m+1}).$$

由于系数和 d_m 有界且 $\sum_m |u_m u_{m+1}| \le \|u\|^2$，该和对于 $u \in \ell^2$绝对收敛。对于 $0 \le t \le t_0$，由柯西不等式以及 $\mathrm{Im}(u_m u_{m+1}) = \mathrm{Im}(u_m(u_{m+1} - u_m))$ 可得

$$\mathrm{Re}\langle u, Q_t u\rangle \ge c_1\|Du\|^2 - (|E| + Ct^2)\|u\|^2, \tag{6.4}$$

$$\mathrm{Im}\langle u, Q_t u\rangle \ge \varepsilon(1 - Ct^2)\|u\|^2 - Ct\|u\|\,\|Du\|. \tag{6.5}$$

对于 $Q_t u = g$，第一个不等式给出

$$\|Du\| \le C\sqrt{\|u\|\,\|g\|} + C\sqrt{|E| + t^2}\,\|u\|.$$

取 $t = c_0\varepsilon/\sqrt{|E| + \varepsilon}$，其中 $0 < c_0 \le 1$ 仅依赖于 a，b。于是$t^2 \le c_0^2\varepsilon$ 且 $t\sqrt{|E| + t^2} \le c_0\varepsilon$。对于 $u \ne 0$，将 (6.5) 除以 $\|u\|$ 并使用$|\langle u,\ g\rangle| \le \|u\|\|g\|$ 可得

$$\varepsilon(1 - Ct^2)\|u\| \le \|g\| + Ct\sqrt{\|u\|\|g\|} + Ct\sqrt{|E| + t^2}\|u\|.$$

由杨氏不等式，中间项有界于 $\varepsilon\|u\|/4 + Ct^2\|g\|/\varepsilon$。首先选择 c_0，使得最后一项至多为 $\varepsilon\|u\|/4$，然后选择 ϵ_0，使得$Ct^2 \le 1/4$ 且 $t \le t_0$。由于 $t^2/\varepsilon \le c_0^2$，吸收后得到 $\|u\| \le C\varepsilon^{-1}\|g\|$，其中 C与 E，ε，ϕ及构型无关。Schur 补 Q_z 可逆。由于两个乘法算子 W 和 W^{-1} 均有界，$Q_t = WQ_zW^{-1}$ 也可逆；因此，前述界是一个预解算子范数估计。

因此，在交错分解下应用Schur求逆可得，

$$(\widetilde{H} - z)^{-1} = \begin{pmatrix} -Q_z^{-1} & Q_z^{-1}D^*c_z \\ c_z D Q_z^{-1} & c_z - c_z D Q_z^{-1} D^* c_z \end{pmatrix}.$$

用 W 对两个胞元分量进行共轭变换，会将 Q_z^{-1}替换为 Q_t^{-1}，将 D 替换为 $D_t = WDW^{-1}$，并将 D^* 替换为 $D_t^\sharp = WD^*W^{-1}$（而不是 D_t^*）。两个差分算子的范数均不超过 $1+e^t$，且 c_z 与 W 可交换，并且一致有界。因此，上面列出的四个块的范数均不超过 C/ε。整个二乘二分块算子范数不超过最大块范数的两倍，因此整个加权预解算子也满足相同的界。

此处，单元 m 是二元组（$2m$，$2m+1$）。记 $j = 2m_j + \iota_j$ 和 $n = 2m + \iota$，其中 ι，$\iota_j \in \{0, 1\}$；于是 $|n - j| \le 2|m - m_j| + 1$。使用有界权重$\phi(m) = \min\{|m - m_j|, R\}$。对于 $R \ge 4$，满足 $|n-j| > R$ belong$\widetilde{\ }$的物理位置属于满足 $\phi(m) \ge (R-2)/2 \ge R/4$的单元。源权重为 1。用 δ_j表示交错坐标中的同一个单位源，加权列估计给出

$$\sum_{|n-j|>R} |G(n, j; z)|^2 \le e^{-tR/2}\|\operatorname{diag}(W, W)(\widetilde{H} - z)^{-1}\widetilde{\delta}_j\|^2 \le C\varepsilon^{-2}e^{-tR/2}.$$

交错处理只改变符号和坐标的排列顺序。对于$1 \le R < 4$ <style id='4}在增大 C之后，无权预解式界已足够 C。这证明了（6.2），无需取无界权重极限。

对于 $E > 0$，在实型估计中保留能量的符号：

$$\mathrm{Re}\langle u, Q_t u\rangle \ge c_1 \|Du\|^2 + (E - Ct^2)\|u\|^2.$$

取 c_0 使得 $Cc_0^2 \le 1/2$ 并取 $t = c_0\sqrt{E}$。则由实型估计可得 $\|Q_t^{-1}\| \le 2/E$，而 Schur 求逆给出共轭预解式范数至多为 C/E。相同的截断权重可证明（6.3）。□

6.2. 固定能量下的外部概率。 对于有限支撑态f，令

$$P_f(R,T) = \frac{2}{T}\int_0^\infty e^{-2t/T} \sum_{|n|>R} |(e^{-itH_\omega} f)(n)|^2 \, dt.$$

选取 $K \ge 4$，使得对于所考虑的每个构型，spec $H_\omega \subset [-K+1, K-1]$。以下形式的全线估计明确保留了物理位置和胞元约定。

引理 6.3。 对于 $|E| \le K$，$0 < \varepsilon \le 1$，$j \in \mathbb{Z}$ 以及 $L \ge 2$，

$$\sum_{|n-j|>4L+2} |G(n,j;E+i\varepsilon)|^2 \le C_K \varepsilon^{-4} \sum_{\sigma\in\{+,-\}} \|\Phi_{j-1}(\sigma 2L, E+i\varepsilon)\|^{-2}. \tag{6.6}$$

这里 $\Phi_k(n,z)$ 将 $(u(k+1)\ u(k))^t$ 映射到 $(u(k+n+1)\ u(k+n))^t$。该常数对源和构型是一致的。

证明。 对于源 1, [4, , 引理 3] 给出的右 Green函数尾部界表明，超出 $N \ge 3$的部分不超过 $C_K\varepsilon^{-4}(\max_{3\le n\le N}\|\Phi_0(n,z)\|^2)^{-1}$。取 $N = 4L+2$，并在最大值中保留 $n = 2L$；平移 $j-1$ 即可得到以 base$j-1$为基准的右尾界。将尾部限制为稍小的 $n - j > 4L+2$，估计仍然成立。

对于左尾部，关于源进行反射，因此反射坐标为$m = j+1-n$。若 $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，长度为 $2L$的反射正向传输为 $P\Phi_j(-2L,z)P$。其基准位置与式（6.6）中的位置相差一个格点：

$$\Phi_j(-2L,z) = T(z, V(j-2L))\Phi_{j-1}(-2L,z)T(z,V(j))^{-1}.$$

这些末端因子及其逆算子对于 $|E| \le K$、$\varepsilon \le 1$一致有界。因此，反射给出了具有相同类型常数的左侧界，正如 [4, 定理 7] 中的双侧应用一样。将两个界相加即可证明该引理。

为便于后续使用，令 $T_0 = T(z,\ 0)$ 和 $\mathcal{P}_{r,\ L}(z) = M(z,\ v_{r+L-1}) \cdots M(z,\ v_r)$。奇偶转换恰好为

$$\Phi_{2r}(2L,z) = \mathcal{P}_{r,L}(z), \qquad \Phi_{2r-1}(2L,z) = T_0^{-1}\mathcal{P}_{r,L}(z)T_0.$$

反向传递是相应移位正向乘积的逆算子。因此，两种奇偶性都归结为 L具有一致有界性的胞腔因子

端点共轭。源和格林函数仍是全直线对象；这里不使用半直线谱测度。□

引理 6.4。 假设 (1.3)，并令 $\mu_j(I) = \langle \delta_j,\ \mathbf{1}_I(H)\delta_j\rangle$。令 $a_j = 1/2$在 j 为偶数时取 $a_j = 3/2$ ，在 j为奇数时取 。关于构型和源一致地，当 $\delta > 0$足够小时，

$$\mu_j([-\delta,\delta]) \le C\delta^{a_j}. \tag{6.7}$$

若 $0 < \varepsilon \le \delta$，则

$$\frac{\varepsilon}{\pi}\int_{-2\delta}^{2\delta} \|R(E+i\varepsilon)\delta_j\|^2\,dE \le C\delta^{a_j}. \tag{6.8}$$

证明。 确定性谱隙 $(0, a)$ 和谱定理给出

$$\mu_j([-\delta,\delta]) \le 4\delta^2\|R(\delta)\delta_j\|^2.$$

引理3.3证明了 (6.7)。增大 C后，质量估计对每个半径均成立。对于 (6.8)，将泊松核与μ_j进行积分。谱能量$|\lambda| \le 4\delta$ 至多贡献 $C\delta^{a_j}$。对于 $|\lambda| > 4\delta$ ，积分核有界于 $C\varepsilon\delta/\lambda^2$。分成二进制环域后得到

$$\varepsilon\delta\int_{|\lambda|>4\delta} \lambda^{-2}\,d\mu_j(\lambda) \le C\varepsilon\delta^{a_j-1}\sum_{k\ge 0} 2^{k(a_j-2)} \le C\delta^{a_j}.$$

此处的 $a_j < 2$和 $\varepsilon \le \delta$ 至关重要。该论证保留了谱质量，正如[11, 第 6]节中椭圆聚合物模型所使用的能量分解一样；这里的两个指数源自镶嵌谱隙列界。□

对于 $0 < \rho < 1/3$，定义依赖于能量的半径

$$r_T(E) = \begin{cases} T^{\rho}/(|E| + T^{-2/3}), & |E| \le \epsilon_0, \\ T^{\rho}, & |E| > \epsilon_0. \end{cases}$$

其最小值至少为 cT^{ρ}，最大值为 $T^{2/3+\rho}$。

命题 6.5. 对于充分大的固定 C_0 以及每个固定的 j，令

$$\mathcal{W}_j(T,\rho) = \frac{1}{\pi T}\int_{\mathbb{R}} \sum_{|n-j|>C_0 r_T(E)} |G(n,j;E+i/T)|^2\,dE.$$

存在 c、$C > 0$ ，使得

$$\mathbb{E}\mathcal{W}_j(T,\rho) \le CT^5 e^{-cT^{\rho}}. \tag{6.9}$$

在一个概率为一的事件上，对于每个 $j \in \mathbb{Z}$、每个有理数 $\rho \in (0,\ 1/3)$ 以及每个 $A > 0$,

$$\mathcal{W}_j(2^k,\rho) = O(2^{-kA}). \tag{6.10}$$

证明。令 $\varepsilon = T^{-1}$ 和 $\Delta = T^{-2/3}$。若 $|E| \le \Delta$，则 $r_T(E) \ge T^{2/3+\rho}/2$，因此 (6.2) 将 Green函数尾部界定为 $CT^2 e^{-cT^\rho}$。若 $\Delta < E \le \epsilon_0$，则 $\sqrt{E}\, r_T(E) \ge cT^\rho$，而(6.3) 给出界 $CT^{4/3}e^{-cT^\rho}$。若 $-\epsilon_0 \le E < -\Delta$，则将 (6.6) 与 $L = \lfloor r_T(E) \rfloor$ 一起使用。对于足够大的 T，一致地对 E，有 $r_T(E) \ge 4$，因此 $L \ge r_T(E)/2$ 且 $4L + 2 \le 5 r_T(E)$。由于 $r_T(E)|E| \ge T^\rho/2$，引理 5.4 和 6.1 给出

$$\mathbb{E}\|\Phi_{j-1}(\sigma 2L, E + i/T)\|^{-2} \le C|E|^{-1} e^{-c r_T(E)|E|} \le CT^{2/3} e^{-cT^\rho}.$$

取 C_0 足够大，即可吸收整数取整误差以及全线估计中的固定扩张。对于 $\epsilon_0 \le |E| \le K$，在距离约为 T^ρ 处使用 (5.13)。为明确处理无界能量范围，令 $B_0 = 2 + b$，并扩大 K，使得 $K \ge B_0 + 1$。对于 $|E| > K$，令 $d_E = |E| - B_0 \ge 1$。取物理位置权重 $W_R(n) = \exp(\alpha \min\{|n-j|, R\})$，并选择 $\alpha > 0$，使得 $2(e^\alpha - 1) \le 1/2$。于是 $\|W_R H W_R^{-1} - H\| \le 1/2 \le d_E/2$，由预解式恒等式可得 $\|W_R R(E + i/T) W_R^{-1}\| \le 2/d_E$。因此，超过 $C_0 T^\rho$ 的尾部至多为 $4 d_E^{-2} e^{-2\alpha C_0 T^\rho}$。其乘以因子 $1/(\pi T)$ 后的积分有界于

$$\frac{8}{\pi T (K - B_0)} e^{-2\alpha C_0 T^\rho}.$$

带有因子 $1/(\pi T)$ 的积分证明了（6.9）；其中的多项式前因子并非旨在达到尖锐界。

对于正整数 B，马尔可夫不等式给出 $\mathbb{P}(\mathcal{W}_j(2^k,\ \rho) > 2^{-kB}) \le C 2^{k(B+5)} e^{-c 2^{k\rho}}$，其关于 k 可求和。Borel–Cantelli 引理给出一个依赖于样本的有限起始指标，j，ρ，B。对整数 j、有理数 $\rho \in (0,\ 1/3)$ 以及正整数幂次取交集。增大幂次即可对所有 $A > 0$ 得到（6.10）。这里只需要二进制时刻；下文将在能量积分之后把矩估计扩展到所有时刻。 □

6.3. **矩指数。** 我们在泊松平滑之前应用多项式尾部恒等式。引理 6.4 对两个基本点源测度进行平滑，它们的阈值幂次均小于二。先提出 $A_f(z)$ 和 $B_f(z)$ 可保留它们的消失阶，即使 $\nu_H(f)/2 > 2$。下一个命题执行这一步，并完成定理1.1上半部分的证明。

命题 6.6。 *在某个概率为 1 的事件上，对于每个非零有限支撑的 f、每个 $q > 0$ 和每个 $\rho > 0$，都存在依赖样本的常数，使得*

$$\mathcal{M}_q(T; f) \le C_{f,q,\rho} T^{\rho q} (1 + \log T)\big(1 + T^{(2q - \nu_H(f))/3}\big) \qquad (T \ge T_0). \quad (6.11)$$

证明。 在命题 6.5 的事件上进行处理，先取 $T = 2^k$ 和有理数 $0 < \rho < 1/3$。令 $S_f = \operatorname{supp} f$。当 T 足够大时，S_f 中固定的空间偏移可通过将 C_0 加倍来吸收，因为 $r_T(E) \ge cT^\rho$ 在 E 上一致成立。柯西

不等式给出非加权估计

$$U_f(T) := \frac{1}{\pi T}\int_{\mathbb{R}} \sum_{|n|>2C_0 r_T(E)} |(R(E+i/T)f)(n)|^2\,dE$$
$$\le \|f\|^2 \sum_{j\in S_f} \mathcal{W}_j(T,\rho) = O_{f,B}(T^{-B}) \qquad (B>0).$$

该事件保持不变；阈值时间可以依赖于有限集 S_f。此估计控制了下文加权尾部的中间部分。

引理 2.3中的跃迁界结合幺正性，给出确定性估计

$$P_f(R,T) \le C_f e^{-cR/T} \qquad (T\ge 1,\ R\ge R_f), \tag{6.12}$$

事实上，固定 $\alpha>0$。对 $|n|>R$之外的跃迁界平方求和，并吸收 f 的有限支撑，即得

$$\sum_{|n|>R} |(e^{-itH}f)(n)|^2 \le C_f \exp(4e^{\alpha}t - 2\alpha R).$$

取 $0<\eta\le \alpha/(4e^{\alpha})$ 并在 $t=\eta R$处对时间积分进行拆分。较早的部分至多为 $C_f e^{-\alpha R}$，因为平均测度的总质量为一。幺正性给出较晚部分的上界 $\|f\|^2 e^{-2\eta R/T}$。对于 $T\ge 1$，两者之和推出（6.12）。为从质量转向矩，令

$$a_T(n) = \frac{2}{T}\int_0^{\infty} e^{-2t/T}|(e^{-itH}f)(n)|^2\,dt.$$

托内利定理以及 $x^q = R^q + q\int_R^x s^{q-1}\,ds$ 对于 $x>R$ 给出精确恒等式

$$\sum_{|n|>R} |n|^q a_T(n) = R^q P_f(R,T) + q\int_R^{\infty} s^{q-1}P_f(s,T)\,ds$$
$$\le C_{f,q}(R^q+T^q)e^{-cR/(2T)}.$$

在 $R=T^2$处，该值至多为 $C_{f,\,q}T^{2q}e^{-cT/2}$。根据 Parseval 等式，它也为 $|n|>T^2$ 的预解式贡献提供了上界，此处已对所有实数 E积分。在剩余部分 $2C_0 r_T(E) < |n| \le T^2$上，权重至多为 T^{2q}，而积分质量至多为 $U_f(T)$。选择上述 $B>A+2q$即可证明

$$\frac{1}{\pi T}\int_{\mathbb{R}} \sum_{|n|>2C_0 r_T(E)} |n|^q |(R(E+i/T)f)(n)|^2\,dE = O_{f,q,A}(T^{-A}) \qquad (A>0).$$

接下来需要估计内部贡献。固定例外集 F_f（2.3）对整个时间平均矩的贡献至多为 最大值$_{n\in F_f}|n|^q\|f\|^2$。在该集合之外，令 $r=r_f$，$s=s_f$，且 $\nu=\nu_H(f)$。在$|E|\le 2\delta$上，令 $T^{-1}\le\delta\le\epsilon_0$,

$$|A_f(E+i/T)| \le C_f\delta^r, \qquad |B_f(E+i/T)| \le C_f\delta^s,$$

省略零多项式。由尾部恒等式和引理 6.4 可得

$$\frac{1}{\pi T}\int_{-2\delta}^{2\delta}\sum_{n\notin F_f}|(R(E+i/T)f)(n)|^2\,dE \le C_f\big(\delta^{2r+1/2}+\delta^{2s+3/2}\big)\le C_f\delta^{\nu/2}. \tag{6.13}$$

即使 $\nu/2>2$，使用双点源测度仍然有效。

由 $|E|\le\epsilon_0$ 中心窗口 $|E|\le 2\Delta$、$\Delta=T^{-2/3}$和二进制环域 $\delta\le|E|\le 2\delta$覆盖，其中 $\delta=2^\ell\Delta\ge\Delta$。中心半径至多为$CT^\rho/\Delta$；在每个环域上，内半径至多为 CT^ρ/δ。根据（6.13），它们的总贡献有界于

$$C_fT^{\rho q}\sum_{\substack{\delta=2^\ell\Delta\\ \Delta\le\delta\le\epsilon_0}}\delta^{\nu/2-q}\le C_{f,q}T^{\rho q}(1+\log T)\big(1+T^{(2q-\nu)/3}\big).$$

首个或最后一个窗口中的有界重叠只会改变常数。更准确地说，对于 $s=\nu/2-q$，几何级数 $\sum_{\ell=0}^{\lfloor\log_2(\epsilon_0/\Delta\rfloor)}(2^\ell\Delta)^s$ 为O：当 $s>0$时为 $\mathbf{1}$，当 $O(1+\log T)$时为 $s=0$，当 $O(\Delta^s)=O(T^{(2q-\nu)/3})$时为 $s<0$。因此，只有 $2q=\nu$ 需要对数项；所显示的命题对这三种情形均采用同一个界。对于 $|E|>\epsilon_0$，内半径为 CT^ρ；无权 Parseval 等式将该贡献估计为 $CT^{\rho q}\|f\|^2$。这就证明了二进制时刻上的估计。

对于 $2^k\le T\le 2^{k+1}$，正性给出 $\mathcal{M}_q(T;\ f)\le(2^{k+1}/T)\mathcal{M}_q(2^{k+1};\ f)$。前因子至多为二，因此对于所有充分大的 T，相同的幂次关系均成立。给定任意实数 $\rho>0$，取一个更小的正有理数。该事件与 f 和 q 无关；只有常数和起始时间依赖于它们。□

定理 *1.1* 的证明。 命题 6.6给出 $\rho\downarrow 0$，从而得到

$$\beta_f^+(q)\le\max\left\{0,\frac{2}{3}-\frac{\nu_H(f)}{3q}\right\}.$$

将其事件与定理 1.2 的事件相交，从而得到下界 $2/3-\nu_H(f)/(3q)$。

为完整起见，下指数也为非负数，包括在$2q=\nu_H(f)$处。选择 $s>0$使得 $c_s=|\langle\delta_0,\ e^{-isH}\delta_0\rangle|<1$；由于 $H\delta_0$ 不是 δ_0的倍数，这样的选择是存在的。事实上，泰勒展开给出$|\langle\delta_0,\ e^{-isH}\delta_0\rangle|^2=1-2s^2+O(s^3)$，因为 $H\delta_0=\delta_{-1}+\delta_1$。对于两个单位向量 x，y，映射 $L:\ \mathbb{C}^2\to\ell^2$, $L(a,\ b)=ax+by$的格拉姆矩阵的特征值为 $1\pm|\langle x,\ y\rangle|$。因此 $|\langle x,\ g\rangle|^2+|\langle y,\ g\rangle|^2\le(1+|\langle x,\ y\rangle|)\|g\|^2$。将此应用于 $x=\delta_0$、$y=e^{isH}\delta_0$和 $g=e^{-itH}f$，得到

$$|\langle\delta_0,e^{-itH}f\rangle|^2+|\langle\delta_0,e^{-i(t+s)H}f\rangle|^2\le(1+c_s)\|f\|^2.$$

令 $b_f(t) = \sum_{n\neq 0} |\langle \delta_n,\ e^{-itH} f\rangle|^2$。则 $0 \le b_f(t) \le \|f\|^2$，由前面的不等式得到 $b_f(t) + b_f(t+s) \ge (1-c_s)\|f\|^2$。定义

$$B_T = \frac{2}{T}\int_0^\infty e^{-2t/T} b_f(t)\, dt.$$

精确平移恒等式给出

$$\begin{aligned}\frac{2}{T}\int_0^\infty e^{-2t/T} b_f(t+s)\, dt &= e^{2s/T}\left(B_T - \frac{2}{T}\int_0^s e^{-2u/T} b_f(u)\, du\right)\\ &= B_T + O_{s,f}(T^{-1}).\end{aligned}$$

这里， b_f的有界性而非对增长矩的估计，足以控制误差。对双时刻不等式取平均，并利用 $\mathcal{M}_q(T;\ f) \ge B_T$，现在得到

$$\mathcal{M}_q(T; f) \ge \frac{1-c_s}{2}\|f\|^2 - O_{s,f}(T^{-1}),$$

因为当 $n \neq 0$ 时 $|n|^q \ge 1$ 。因此 $\beta_f^-(q) \ge 0$。对每个 $q > 0$，上界与下界一致。同一个事件适用于所有有限支撑态，并令 $q \to \infty$，得到 $\alpha_u^{\pm}(f) = 2/3$。□

注6.7. 若分布是集中于 $v > 0$ 的点质量，则双带布洛赫矩阵为

$$H(\theta) = \begin{pmatrix} 0 & 1+e^{-i\theta} \\ 1+e^{i\theta} & v \end{pmatrix}, \qquad E_\pm(\theta) = \frac{v}{2} \pm \sqrt{\frac{v^2}{4} + 4\cos^2(\theta/2)}.$$

这些能带彼此分离。对于非零有限支撑态，其布洛赫变换是一个非零三角多项式向量。纤维演化为 $\sum_\sigma e^{-itE_\sigma} P_\sigma \widehat{f}$。应用 $i\partial_\theta$ 得到首项 $t\sum_\sigma e^{-itE_\sigma} E'_\sigma P_\sigma \widehat{f}$，余项在 L^2 中关于 t 一致有界。两个投影的正交性表明，首项的平方范数系数为

$$\int_0^{2\pi} \sum_{\sigma\in\{+,-\}} |E'_\sigma(\theta)|^2 \|P_\sigma(\theta)\widehat{f}(\theta)\|^2 \,\frac{d\theta}{2\pi} > 0.$$

正性源于导数仅在有限多个角度处为零。由于物理位置等于晶胞位置的两倍加上一个有界的子晶格项，物理二阶矩是该系数的四倍乘以 t^2，误差为 O（$t+1$）。最后（$2/T$）$\int_0^\infty e^{-2t/T} t^2\, dt = T^2/2$，因此 $\mathcal{M}_2$（T；f）$= c_f T^2 + O$（T）其中 $c_f > 0$。因此，定理1.1中的非退化假设不能省略。这与下界并不矛盾，因为下界包含常值分布。

6.4. **进一步的问题**。 定理 1.1 将传播尺度与初始态同阈值的耦合区分开来。前者给出大矩指数 $2/3$；后者决定每个有限矩阶数下的修正项。这些假设包括严格正的非退化 Bernoulli分布，而确定性的下界不需要随机性。这些陈述均未对谱类型进行分类。

剩余问题涉及无法由这些指数确定的信息：首阶矩常数、当 $2q \le \nu_H(f)$ 时的次幂增长，以及逐时行为。在这一论证中，几乎处处下界中的双重对数能否去除也尚未解决。对于更大的镶嵌周期，输运公式必须考虑初始态与多个临界能量的耦合；当前的双通道分类并未声称存在这样的公式。

致谢

作者之一（F. N.）谨向 Jake Fillman 和 Hermann Schulz-Baldes 致谢，感谢他们进行了有益的讨论并提出了宝贵意见。

声明

资助。 Fumihiko Nakano 感谢 JSPS KAKENHI 资助编号 JP26K00608 的支持。Xu Xia 获得了中国国家自然科学基金（资助编号 12301218）的部分资助。

数据可用性。 本文为理论研究，本研究期间未生成或分析任何数据集。修订期间进行的辅助性有限检验并非任何证明的输入，如有合理请求，可向通讯作者索取。

利益冲突。 作者声明不存在利益冲突。

参考文献

[1] Anderson，P. W.：某些随机晶格中的无扩散现象。Phys. Rev. 109，1492 1505 1958 10 1103 109 1492 –（）。https://doi.org/。/PhysRev。。[2] Azuma，K.：某些相关随机变量的加权和。Tohoku Math. J. (2) 19，357–367（1967）。https://doi.org/10.2748/tmj/1178243286。[3] Carmona，R.、Klein，A.、Martinelli，F.：Bernoulli势及其他奇异势的安德森局域化。Comm. Math. Phys. 108，41–66（1987）。https://doi.org/10.1007/BF01210702。[4] Damanik，D.、Tchere mchantsev，S.：量子动力学的上界。J. Amer. Math. Soc. 20，799–827（2007）。https://doi.org/10.1090/S0894-0347-06-00554-6；arXiv:math-ph/0502044。[5] Damanik，D.、Fillman，J.、Gohlke，P.：由乘积系统生成的薛定谔算子的谱特征。J. Spectr. Theory 12，1659–1718（2022）。https://doi.org/10.4171/JST/445。[6] de Moura，F. A. B. F.、Santos，M. N. B.、Fulco，U. L.、Lyra，M. L.、Lazo，E.、Onell，M. E.：一维稀释安德森模型中的离域化与波包动力学。Eur. Phys. J. B 36，81–86（2003）。https://doi.org/10.1140/epjb/e2003-00319-8。[7] Drabkin，M.、Kirsch，W.、Schulz-Baldes，H.：随机Kronig–Penney模型中的输运。J. Math. Phys. 53，122109（2012）。https://doi.org/10.1063/1.4769219；arXiv:1207.0295v1。[8] Fröhlich，J.、Spencer，T.：强无序或低能量下安德森紧束缚模型中的无扩散现象。Comm. Math. Phys. 88，151–184（1983）。https://doi.org/10.1007/BF01209475。

[9] Furstenberg，H.：非交换随机乘积。Trans. Amer. Math. Soc. 108，377 428 1963 10 1090 0002 9947 1963 0163345 0 –（）。https://doi.org/。/S - - - -。[10] Hilke，M.：周期随机Anderson模型的局域化性质。J. Phys. A: Math. Gen. 30，L367–L371（1997）。https://doi.org/10.1088/0305-4470/30/11/004；arXiv:cond-mat/9709002。[11] Jitomirskaya，S.、Schulz-Baldes，H.：随机 Jacobi 矩阵的波包扩散上界。Comm. Math. Phys. 273，601–618（2007）。https://doi.org/10.1007/s00220-007-0252-0。[12] Jitomirskaya，S.、Schulz-Baldes，H.、Stolz，G.：随机聚合物模型中的离域化。Comm. Math. Phys. 233，27–48（2003）。https://doi.org/10.1007/s00220-002-0757-5。[13] Kunz，H.、Souillard，B.：论随机有限差分算子的谱。Comm. Math. Phys. 78，201–246（1980）。https://doi.org/10.1007/BF01942371。[14] Li，L.、Wang，W.、Zhang，S.：一维散度型随机Jacobi算子的量子动力学上界与下界。预印本（2026年），arXiv:2601.08796v2。https://arxiv.org/abs/2601.08796v2。[15] Longhi，S.：广义无序镶嵌晶格中的共振、迁移率边缘与带隙保护的Anderson局域化。Phys. Rev. B 110，184201（2024）。https://doi.org/10.1103/PhysRevB.110.184201；arXiv:2410.19521。[16] Nakano，F.、Xia，X.：随机镶嵌算子的泊松统计、边缘时钟与临界扩散。未发表手稿（2026年）。[17] Nguyen，B. P.、Kim，K.：具有对角无序镶嵌调制的一维晶格中激发的输运与局域化性质。J. Phys. A: Math. Theor. 56，475701（2023）。https://doi.org/10.1088/1751-8121/ad03cd。[18] Wang，Y.、Xia，X.、Zhang，L.、Yao，H.、Chen，S.、You，J.、Zhou，Q.、Liu，X.-J.：具有精确迁移率边缘的一维准周期镶嵌晶格。Phys. Rev. Lett. 125，196604（2020）。https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.125.196604。

（FumihikoNakano）东北大学数学研究所，日本仙台市青叶区荒卷字青叶 6-3，邮编 980-8578电子邮箱：fumihiko.nakano.e4@tohoku.ac.jp

（Xu Xia）中国科学院数学与系统科学研究院数学科学国家重点实验室，中华人民共和国北京 100190电子邮箱：xiaxu14@mails.ucas.ac.cn