arXiv:2611.32146v1 [physics.app-ph] 24 Nov 2026

反向偏置4H-SiC肖特基势垒中的发射机制与特征能量尺度：统一场发射公式和能量依赖隧穿有效质量

Tetsuo Hatakeyama

富山县立大学工学部电气与电子工程系，日本富山县射水市黑川5180，邮编939-0398

电子邮箱：t.hatakeyama@pu-toyama.ac.jp

摘要。 采用包含费米–狄拉克供给函数和WKB透射的电流积分，对4H-SiC肖特基势垒二极管中的反向漏电进行了分析。界面电场与临界电场之比 F_{c} 决定了热电子场发射（TFE）鞍点的深度。艾里能量区分了热电子发射–隧穿交叉、TFE公式的适用性以及TFE/场发射（FE）边界；对于任意势垒形状，该边界可推广为 $c_1 k_{\mathrm{B}} T \approx 1$ 。针对三角形势垒和二次势垒，给出了闭式FE和TFE表达式；对于后者，Padovani–Stratton公式给出的电流分别是WKB电流的1.4–7.9倍（FE， $10^{19}\mathrm{cm}^{-3}$）和2.5–3.6倍（TFE，低掺杂层，300–433 K），而本文表达式与WKB电流的偏差分别在15%和2%以内。应用于Ti/4H-SiC数据（30–160 °C，50–950 V）时，基于复能带结构的能量依赖隧穿质量使残差由0.17 dex降至0.11–0.12 dex；通过Franz双能带色散关系，可将其应用于器件仿真。

关键词：4H-SiC、肖特基势垒二极管、反向漏电流、热场发射、艾里函数、隧穿有效质量、复能带结构

提交至：《日本应用物理学杂志》

1. 引言

4H-SiC的击穿场约为硅的十倍，这使得4H-SiC肖特基势垒二极管（SBDs）相比硅SBDs具有更高的阻断电压和更低的损耗。[1, 2)]为了利用这一高击穿场，SiC肖特基势垒二极管的设计使其在反向偏置下肖特基界面处的电场约为硅肖特基势垒二极管的十倍。[3)] 这正是其高性能的来源，但提高阻断电压和降低损耗不可避免地会增强界面电场。然而，与击穿场不同，肖特基界面的反向特性并非由半导体材料决定，而是由势垒高度 Φ_B 和界面电场决定。因此，高界面电场会增大反向漏电流，而实测的SiC肖特基势垒二极管漏电流远高于经典肖特基理论的预测值。Crofton和Sriram[4)]通过数值积分Wentzel–Kramers–Brillouin（WKB）透射概率，计算了6H-SiC中的这一漏电流，并将其归因于高界面电场诱发的隧穿；Treu等人[5)] 则表明，在通常的器件工作温度范围内，采用钛、钨和钽电极的4H-SiC肖特基势垒二极管的反向特性可由以有效质量为拟合参数的Padovani–Stratton热场发射公式描述。通过抑制界面电场来降低漏电流，需要优化结势垒肖特基（JBS）二极管等器件结构；[6)] 该结构最初被提出为钳位整流器，[7)] 其肖特基接触下方的p–n结网格可在反向偏置下屏蔽界面；同时还需要优化势垒高度和界面电场，[3)] 而这类设计需要肖特基势垒漏电流模型。

文献8和9概述了肖特基接触中电流机制的一般处理方法。在反向偏置的4H-SiC肖特基势垒二极管中，隧穿输运对反向漏电流有显著贡献。[3, 10)] 要理解漏电流对电压和温度的依赖性，就必须清楚认识热发射（TE）、热场发射（TFE）和场发射（FE）之间的关系，以及描述各机制的近似公式的适用范围。

在电子发射理论中，继Fowler和Nordheim的场发射理论之后，[11)] Murphy和Good[12)] 利用电子供给函数与势垒透射概率的积分，研究了金属中的热电子发射、场发射及其中间机制。对于金属/半导体肖特基势垒，Padovani和Stratton（以下简称PS）[13)] 基于Stratton的半导体场发射理论，[14)] 推导出了正向和反向偏置下的解析场发射（FE）和热场发射（TFE）公式，并给出了它们的适用条件。Crowell和Rideout[15)] 对均匀掺杂层中势垒的电流特性进行了归一化，并研究了发射电子的能量分布以及发射机制转变的条件。这些研究将载流电子能量随温度和偏压的变化，与各解析公式成立的条件联系起来。

对于 4H-SiC肖特基势垒二极管，作者及其同事采用三角势垒场致发射和热场发射公式，根据界面电场和势垒高度对主导反向漏电机制进行分类

，[10] 并使用隧穿有效质量为常数的热场发射公式分析了 Ti/4H-SiC 肖特基势垒二极管的反向特性。[3] 近期，Li 等人[16] 提出了一种解析模型，该模型纳入了像力以及低场侧积分下限的影响，涵盖了从热发射到热场发射的转变。Hara 等人[17] 通过发射电子的能量分布研究了重掺杂 SiC 中的热场发射–场发射转变，并指出，要描述这一转变，必须考虑势垒内部的电场分布。

这些研究表明，反向输运的分析需要联系三个量：描述势垒曲率的特征能量、隧穿区域中的电场，以及载流电子的能量。在高反向偏压下的低掺杂层中，主导电流的电子其隧穿路径局限于界面附近；如果电场沿该路径变化不大，则可将势垒近似为三角形。明确说明这一近似与二次势垒传统分析之间的关系，以及哪些尺度决定了 TE、TFE 和 FE 发射机制，为选择解析公式并阐明其适用性提供了清晰依据。
Murakami 等人[18] 基于4H-SiC的复能带结构分析了反向隧穿电流。当隧穿能量深处于带隙中时，还必须检验用恒定质量近似带隙内色散关系的有效性。

本文基于费米–狄拉克供给和WKB透射的电流积分，从理论上研究4H-SiC肖特基势垒中的反向输运。我们首先利用临界电场 F_c 以及艾里能量和艾里长度，将代表性隧穿能量与发射机制联系起来；随后通过艾里方程精确解表明，这些尺度决定了电子波函数在势垒中的衰减，并据此区分电流分量发生交叉转变的条件与近似公式适用的条件。我们还将TFE/FE边界扩展到一般势垒形状，并将其与Hara 等人[17] 提出的转变条件联系起来。然后，我们给出三角形势垒和二次势垒的反向场发射和热场发射电流的闭式表达式，并重新审视PS 反向场发射和热场发射公式。接下来，我们引入像力和能量依赖隧穿有效质量，考察它们对电流的电场和温度依赖性的影响。作为应用，我们重新分析参考文献3中Ti/4H-SiC肖特基势垒二极管的测量数据，其中包括此前未报道的温度，并比较各模型的可重复性及其对样品参数的敏感性。最后，我们展示如何在器件仿真器中实现能量依赖质量。主要推导和数值方法见附录，各电流公式的详细推导见补充数据。

2. 理论框架

2.1. 能量参考与能带图

图1和图2分别显示了热平衡状态和反向偏置下金属/n型4H-SiC肖特基结的能带图。金属的电子供给由抛物线能带描述，其能带底部$E_{\mathrm{C,M}}$被用作共同的能量原点。设金属费米能级为 E_{F} 、肖特基势垒高度为 Φ_{B} （能量），则势垒顶为 $E_0 = E_{\mathrm{F}} + \Phi_{\mathrm{B}}$。半导体体区中导带边缘与费米能级之差为 $eV_{\mathrm{n}} = k_{\mathrm{B}}T\ln(N_{\mathrm{C}}/N_{\mathrm{D}})$。[8] 在反向偏置 $V_{\mathrm{R}} \geq 0$下，半导体的费米能级降至$E_{\mathrm{F,S}} = E_{\mathrm{F}} - eV_{\mathrm{R}}$，而能带弯曲增大为

$$B = \Phi_{\mathrm{B}} - eV_{\mathrm{n}} + eV_{\mathrm{R}}. \tag{1}$$

由于势垒高度 Φ_{B} 不随偏压变化（像力除外），界面电场 F_{s} 会增强，势垒也会变薄。从金属注入半导体的电子，要么越过势垒顶（TE），要么经热激发到达中间能量后发生隧穿（TFE），要么从费米能级附近发生隧穿（FE）（图 2）。反向漏电流就是电子从金属流向半导体所形成的电流。下文中， z 表示垂直于界面的方向，金属所处区域为 $z < 0$。

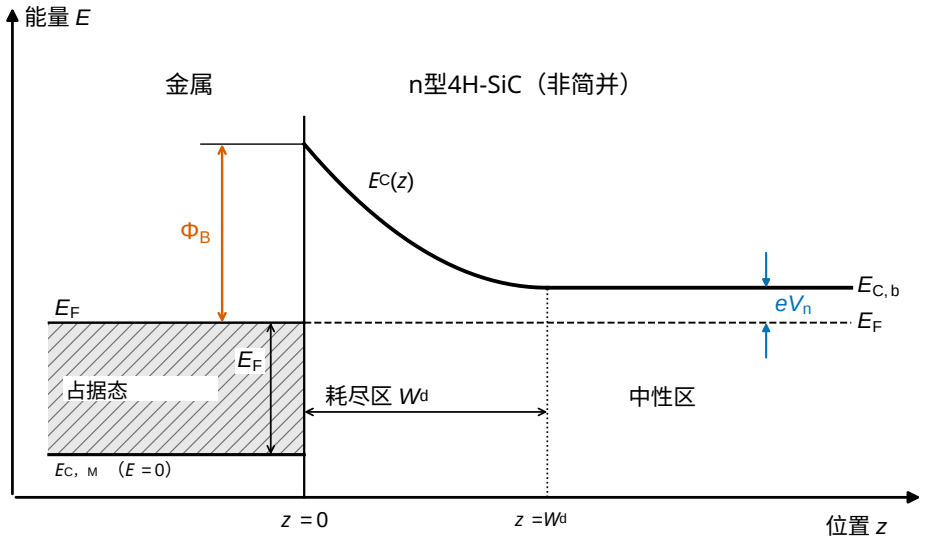

图 1. 热平衡状态下金属/n型4H-SiC肖特基结的能带图与能量参考。金属供给带的底部 $E_{\mathrm{C,\ M}}$，位于费米能级 E_{F} 以下，是能量原点。势垒顶为 $E_0 = E_{\mathrm{F}} + \Phi_{\mathrm{B}}$，耗尽层中的导带边缘呈二次变化。阴影区域表示金属的占据态。

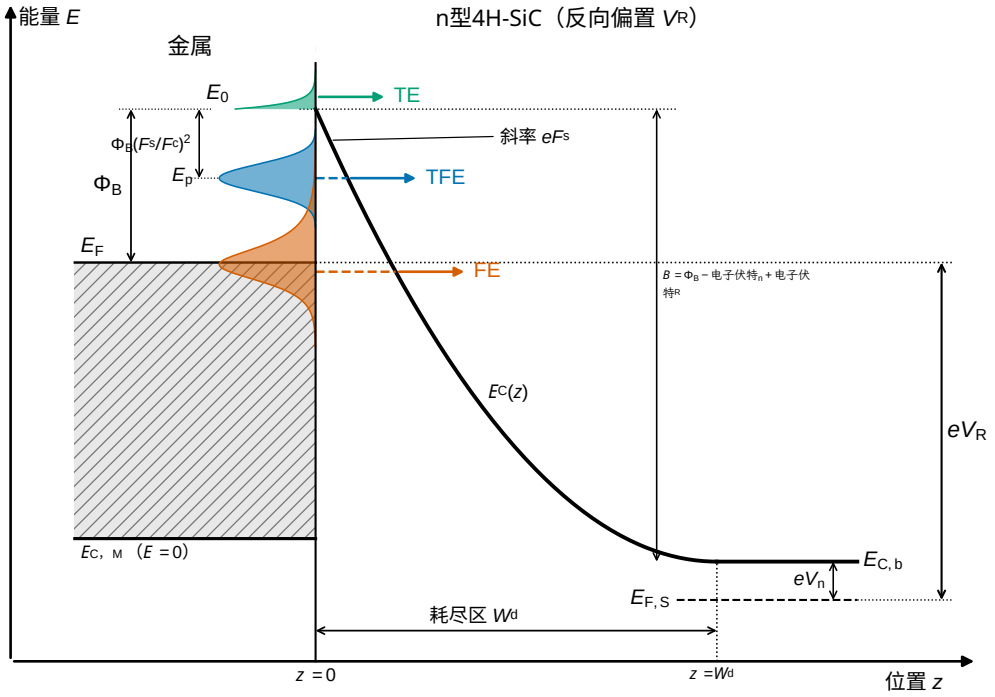

图 2. 反向偏置下的示意性能带图 V_{R}。金属费米能级 E_{F} 与半导体的体内费米能级$E_{\mathrm{F,S}}$ 相差 eV_{R}，能带弯曲为 $B = \Phi_{\mathrm{B}} - eV_{\mathrm{n}} + eV_{\mathrm{R}}$。为便于说明，图中将 eV_{R} 画成数电子伏特；在实验中，V_{R}达到约 1000 伏特，且 $B \gg \Phi_{\mathrm{B}}$。填充区域示意性地表示从金属注入的电子的能量分布，$\mathcal{T}(E)\ln[1+e^{-(E-E_{\mathrm{F}})/k_{\mathrm{B}}T}]$，对应三种路径：TE（绿色，势垒顶上方的热尾）、TFE（蓝色，近似高斯分布，中心位于势垒内的鞍点 E_{p}）以及 FE（橙色，分布集中在费米能级附近）。这三种分布对应不同的电场范围，并绘于同一示意图中；它们不会在同一电场下同时出现。在费米能级上方，FE 分布以宽度 $k_{\mathrm{B}}T/(1-p)$ $(p = F_{\mathrm{c}}/F_{\mathrm{s}})$ 衰减；在其下方，供给函数趋近于 $(E_{\mathrm{F}} - E)/k_{\mathrm{B}}T$，而 $k_{\mathrm{B}}T/p$ 是指数因子的衰减能量（补充数据，第 S3 节）。FE 分布绘制时采用了 $F_{\mathrm{s}}/F_{\mathrm{c}} = 1.5$。对于 $F_{\mathrm{s}} < F_{\mathrm{c}}$，热场发射鞍点存在，位于势垒顶下方 $\Phi_{\mathrm{B}}(F_{\mathrm{s}}/F_{\mathrm{c}})^2$ 处（第 3 节）。虚线表示隧穿所经过的经典禁阻区。

2.2. 电子供给与反向电流积分

对平行于界面的动量积分后，金属流向半导体的单向电流密度为

$$J = \frac{A_{\mathrm{R}}T}{k_{\mathrm{B}}}\int_0^{\infty}\mathcal{T}(E)\,\ln\left[1+\exp\left(-\frac{E-E_{\mathrm{F}}}{k_{\mathrm{B}}T}\right)\right]dE, \qquad A_{\mathrm{R}} = \frac{4\pi e g_{\mathrm{v}} m_{\mathrm{dos}} k_{\mathrm{B}}^2}{h^3} \tag{2}$$

（补充数据，S1 和 S2 节），[19] 其中 E 是垂直于界面的动能，$\mathcal{T}$（E）是透射概率。对于 4H-SiC，谷简并度$g_{\mathrm{v}} = 3$ 和沿界面的态密度有效质量 $m_{\mathrm{dos}} = \sqrt{0.57 \times 0.28}\,m_0$[20] 给出 $A_{\mathrm{R}} = 144\,\mathrm{A\,cm^{-2}K^{-2}}$。在势垒顶以上，我们设 $\mathcal{T} = 1$；这部分给出热发射

电流 $J_{\mathrm{TE}} = A_{\mathrm{R}} T^2 \exp(-\Phi_{\mathrm{B}}/k_{\mathrm{B}}T)$。积分下限在通用能量尺度上为 0，或者在以费米能级为基准测量能量时为 $-E_{\mathrm{F}}$。

我们明确指出，A_{R}由半导体的有效质量决定，也用于描述电子从金属流向半导体。在热平衡时，根据详细平衡原理，电子从金属流向半导体的流量与从半导体流向金属的流量相等。后者是半导体中导带电子的通量，其表达式为 $A_{\mathrm{R}} T^2 \exp(-\Phi_{\mathrm{B}}/k_{\mathrm{B}}T)$，由半导体的态密度有效质量决定。因此，前者也必须用相同的 A_{R}表示。这里，$m_{\mathrm{dos}} = \sqrt{m_x m_y}$ 是单个能谷的面内态密度有效质量，m_x 和 m_y 是平行于界面的有效质量。Crowell[21, 22]指出，当平行于界面的波矢守恒时，只有从金属入射、且位于由半导体能量—波矢关系所决定的“接收锥”内的电子才能进入半导体；因此，理查森常数由半导体的面内态密度有效质量 m_{dos}决定，而非由金属决定，并且正向偏置和反向偏置时的理查森常数相同。他还指出，热场发射电流前因子中的质量与热发射中的相同，不同于沿电流方向的隧穿有效质量。[22] 因此，我们将供给质量 m_{dos} 与隧穿质量 m_{tun}区分开来。在隧穿积分中，我们同样假设平行波矢守恒，且透射率仅取决于垂直于界面的运动能量 E，因此每个横向模都具有相同的 $\mathcal{T}(E)$，并适用相同的 A_{R}。本文不考虑量子力学反射和声子散射[23] 对 A_{R} 造成的修正。相比之下，Nicholls等人[24] 对4H-SiC肖特基势垒二极管进行了分析，认为电流由金属质量决定，因此对此问题存在不同观点。对于反向偏置下的 $eV_{\mathrm{R}} \gg k_{\mathrm{B}}T$，从半导体流向金属的电流可以忽略不计。

2.3. WKB透射概率与参考势垒模型

WKB透射概率为 $\mathcal{T}(E) = \exp[-G(E)]$，其中

$$G(E) = \frac{2}{\hbar} \int_{z_1}^{z_2} \sqrt{2 m_{\mathrm{tun}} \left[U(z) - E \right]}\, dz, \tag{3}$$

其中，z_1 和 z_2 是经典禁阻区的端点（即界面和半导体一侧不考虑像力时的转向点，以及考虑像力时的两个转向点）。我们考虑以下势垒。

三角势垒。对于 $U(z) = E_0 - eF_{\mathrm{s}} z$，在恒定界面电场 F_{s} 下，

$$G_{\mathrm{tri}}(E) = \frac{4\sqrt{2 m_{\mathrm{tun}}}}{3 e \hbar F_{\mathrm{s}}} (E_0 - E)^{3/2}. \tag{4}$$

二次势垒。对于 $U(z) = E_{\mathrm{C,\ b}} + B(1 - z/W_{\mathrm{d}})^2$ 在耗尽近似下，其中 $u = (E - E_{\mathrm{C,\ b}})/B$ $(0 < u < 1$，即 $E_{\mathrm{C,\ b}} < E < E_0)$，

$$G_{\mathrm{quad}}(E) = \frac{B}{E_{00}}\left[\sqrt{1-u} - u\,\mathrm{arcosh}\frac{1}{\sqrt{u}}\right], \qquad E_{00} = \frac{e\hbar}{2}\sqrt{\frac{N_{\mathrm{D}}}{m_{\mathrm{tun}}\varepsilon_{\mathrm{s}}}} \tag{5}$$

（补充数据，第 S4 节）。E_{00} 是唯一能够由势垒曲率 $k = d^2U/dz^2 = e^2N_{\mathrm{D}}/\varepsilon_{\mathrm{s}}$、质量和 $\hbar$ 构成的能量，即 $\frac{\hbar}{2}\sqrt{k/m_{\mathrm{tun}}}$，它是使二次势能的薛定谔方程无量纲化的单位（第 3.2 节）。在体材料导带边缘（$E < E_{\mathrm{C,\ b}}$）以下，半导体中不存在任何态，因此在二次势垒的数值积分中，我们设定 $\mathcal{T} = 0$。三角势垒是界面处二次势垒的切线。

2.4. 界面电场和穿通

在耗尽近似下，界面电场为

$$F_{\mathrm{s}} = \begin{cases} \sqrt{2eN_{\mathrm{D}}(V_{\mathrm{R}} + V_{\mathrm{bi}})/\varepsilon_{\mathrm{s}}}, & W_{\mathrm{d}} \le d, \\ (V_{\mathrm{R}} + V_{\mathrm{bi}})/d + eN_{\mathrm{D}}d/(2\varepsilon_{\mathrm{s}}), & W_{\mathrm{d}} > d, \end{cases} \qquad eV_{\mathrm{bi}} = \Phi_{\mathrm{B}} - eV_{\mathrm{n}}, \tag{6}$$

其中，d 是漂移层厚度，$\varepsilon_{\mathrm{s}} = 10.03\varepsilon_0$ 是沿 c 轴方向的介电常数。[25] 这里，$W_{\mathrm{d}} = \sqrt{2\varepsilon_{\mathrm{s}}(V_{\mathrm{R}} + V_{\mathrm{bi}})/(eN_{\mathrm{D}})}$ 是半无限均匀掺杂层的耗尽层宽度，$W_{\mathrm{d}} > d$ 用于作为穿通判据。第二行对应于完全耗尽的漂移层（附录 C）。

3. 发射机制和特征能量尺度

本节将发射机制之间的边界表示为三种能量的比较：由势垒壁斜率决定的量子能量、热能 $k_{\mathrm{B}}T$ 和势垒高度 Φ_{B}。第 3.1 节展示发射电子的分布和临界电场 F_{c}，第 3.2 节介绍特征能量尺度 E_{A} 和 E_{00}。第 3.3 节利用这些能量尺度表示边界，第 3.4 节给出反向场发射和热场发射电流的闭式表达式。第 3.5 节考察解析公式和近似的有效性，第 3.6 节重新审视此前报道的闭式表达式和跃迁条件。

3.1. 发射电子的分布和临界电场

式 (2) 的被积函数 $\mathcal{T}(E)\ln[1+e^{-(E-E_{\mathrm{F}})/k_{\mathrm{B}}T}]$ 是注入电子的能量分布。在玻尔兹曼近似下，使三角势垒指数 (4) 与 $(E - E_{\mathrm{F}})/k_{\mathrm{B}}T$（鞍点）的和最小的能量为

$$E_{\mathrm{p}} - E_{\mathrm{F}} = \Phi_{\mathrm{B}}\left[1 - \left(\frac{F_{\mathrm{s}}}{F_{\mathrm{c}}}\right)^2\right], \qquad F_{\mathrm{c}} = \frac{2k_{\mathrm{B}}T\sqrt{2m_{\mathrm{tun}}\Phi_{\mathrm{B}}}}{e\hbar} \tag{7}$$

（附录 A）。因此，鞍点位于势垒顶 $E_0 = E_F + \Phi_B$ 以下深度为 $\Delta \equiv E_0 - E_p = \Phi_B(F_s/F_c)^2$ 处；我们称 Δ 为鞍点深度。对于 300 K，$\Phi_B = 1.00$ 电子伏特，且 $m_{tun} = 0.31m_0$，$F_c = 1.475$ 兆伏特/厘米。图 3 显示了三角势垒下发射电子的能量分布。对于 $F_s \ll F_c$，分布集中在势垒顶（TE）；对于 $F_s < F_c$，电子在势垒内的 E_p 处发生隧穿（TFE）；而对于 $F_s > F_c$，鞍点移至费米能级以下（FE）。F_c 也是 TFE 的鞍点近似与 FE 的线性化近似之间的形式边界（附录 A）。

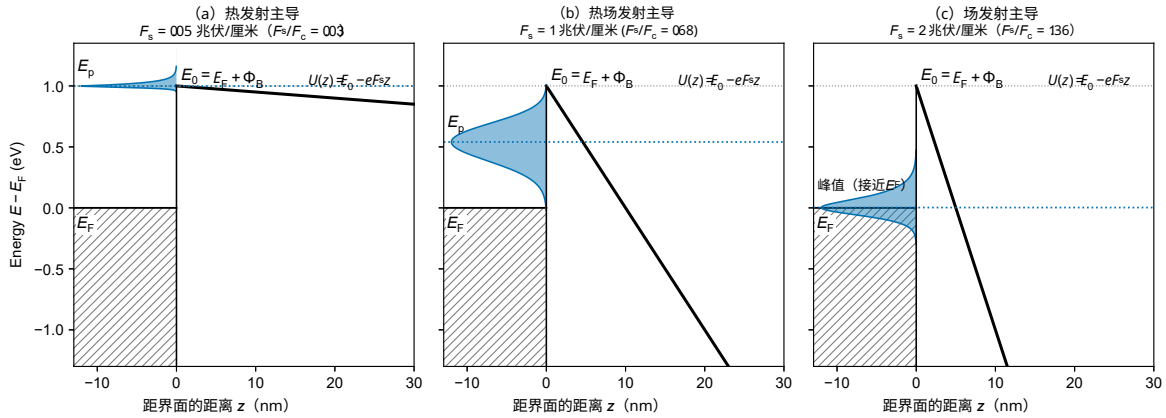

图3。 电子通过三角势垒从金属注入后的能量分布，$\mathcal{T}(E)\ln[1 + e^{-(E-E_F)/k_BT}]$（蓝色填充，在每个面板中归一化为峰值处为1；蓝色点线标记峰值）。（a）$F_s = 0.05$兆伏/厘米（热发射主导），（b）1.0兆伏/厘米（热场发射主导；峰值位于方程（7）的 E_p 处），（c）2.0 兆伏/厘米（场发射主导）。$T = 300$开，$\Phi_B = 1.00$ 电子伏特，$m_{tun} = 0.31m_0$，F_c =1.475 兆伏/厘米。

3.2. 特征能量尺度 E_A 和 E_{00}

表征三角势垒 $U = E_0 - eF_s z$ 的唯一量是势垒斜率 eF_s；由它、质量和 $\hbar$ 所能构成的唯一能量和长度分别是

$$E_A = \left(\frac{(e\hbar F_s)^2}{2m_{tun}}\right)^{1/3}, \qquad l_A = \frac{E_A}{eF_s} = \left(\frac{\hbar^2}{2m_{tun}eF_s}\right)^{1/3}. \tag{8}$$

以 l_A 为长度单位、以 E_A为能量单位时，薛定谔方程变为无参数的艾里方程 $d^2\psi/d\xi^2 = \xi\psi$，其中 $\xi = (E_0 - E - eF_s z)/E_A$。我们将 E_A 称为艾里能量，将 l_A 称为艾里长度。对于位于势垒顶下方深度$E_0 - E$ 处的电子，指数 $G_{tri} = \frac{4}{3}[(E_0 - E)/E_A]^{3/2}$、隧穿距离 $l_A(E_0 - E)/E_A$以及界面处的衰减长度 $l_A\sqrt{E_A/(E_0 - E)}$都仅由比值$(E_0 - E)/E_A$ 决定。E_A 是一个能量尺度，并非电子的能量。MOS反型层三角势阱中的电子[27, 28]遵循相同的艾里方程；区别仅在于边界条件不同（补充数据，第 S6.3 节）。

类似地，由二次势垒的曲率 $k\,U = E_{\mathrm{C,\ b}} + \frac{1}{2}k(W_{\mathrm{d}} - z)^2$ ($k = e^2 N_{\mathrm{D}}/\varepsilon_{\mathrm{s}}$)、质量和 $\hbar$ 所能构成的唯一能量和长度分别为

$$E_{00} = \frac{\hbar}{2}\sqrt{\frac{k}{m_{\mathrm{tun}}}} = \frac{e\hbar}{2}\sqrt{\frac{N_{\mathrm{D}}}{m_{\mathrm{tun}}\varepsilon_{\mathrm{s}}}}, \qquad l_{00} = \left(\frac{\hbar^2}{m_{\mathrm{tun}}k}\right)^{1/4}, \tag{9}$$

其中， E_{00} 与公式（5）中的相同。在 $\eta = （W_{\mathrm{d}} - z）/l_{00}$ 和$\varepsilon = E - E_{\mathrm{C,\ b}}$的条件下，薛定谔方程变为

$$\frac{d^2\psi}{d\eta^2} = \left(\eta^2 - \frac{\varepsilon}{E_{00}}\right)\psi \tag{10}$$

（Weber方程[29]）。这是一个谐振子的方程；在要求两侧衰减的边界条件下， E_{00} 对应于零点能。在肖特基势垒中，势能在界面处被截断，电子并未受到束缚，因此 E_{00} 和 l_{00} 仅作为该方程的单位出现（补充数据，第S6.1节）。

二次势垒的斜率随高度变化；在高于势阱底部 ε的高度处，局部艾里能量为 $E_{\mathrm{A}}（\varepsilon）= （4\varepsilon E_{00}^2）^{1/3}$。其在势垒顶（$\varepsilon = B$）处的值即为界面艾里能量，

$$E_{\mathrm{A}} = \left(4BE_{00}^2\right)^{1/3} \tag{11}$$

（补充数据，第 S6.2 节）。根据式（8）以及式（7）中 F_{c} 的定义，$F_{\mathrm{s}}/F_{\mathrm{c}} = E_{\mathrm{A}}^{3/2}/(2k_{\mathrm{B}}T\sqrt{\Phi_{\mathrm{B}}})$；代入式（11）得到

$$\boxed{\frac{F_{\mathrm{s}}}{F_{\mathrm{c}}} = \frac{E_{00}}{k_{\mathrm{B}}T}\sqrt{\frac{B}{\Phi_{\mathrm{B}}}}}. \tag{12}$$

式（12）导出以下四点。

（i）**在零偏压下，它简化为 PS分类**。对于 $eV_{\mathrm{n}} \ll \Phi_{\mathrm{B}}$、 $B \simeq \Phi_{\mathrm{B}}$ 和 $F_{\mathrm{s}}/F_{\mathrm{c}} \simeq E_{00}/k_{\mathrm{B}}T$，因此 PS 的 TFE/FE边界 $E_{00} \approx k_{\mathrm{B}}T$ 对应于零偏压下的$F_{\mathrm{s}} = F_{\mathrm{c}}$。

（ii）**在反向偏置下，变化由 $\sqrt{B/\Phi_{\mathrm{B}}}$ 承担**。 $E_{00}/k_{\mathrm{B}}T$ 仅由曲率决定，与偏压无关。然而，隧穿电子位于界面附近（$\varepsilon \approx B$），在此处，随着反向偏置下势阱加深，势垒斜率 $eF_{\mathrm{s}} = \sqrt{2kB}$ 增大。这一效应由因子 $\sqrt{B/\Phi_{\mathrm{B}}}$体现，式（12）将 PS 指数扩展到了高偏压。

(iii) 即使在低掺杂层中，高反向偏压下隧穿也会变得重要。对于 $N_{\mathrm{D}} = 5 \times 10^{15}$ cm^{-3}， $E_{00} = 0.74\,\mathrm{meV}$（约为 $k_{\mathrm{B}}T/35$），若仅按 $E_{00}/k_{\mathrm{B}}T$ 分类，无论偏压如何都属于 TE 机制。在$B = 300\mathrm{eV}$（反向电压约为 300 V， $F_{\mathrm{s}} \approx 0.74\,\mathrm{MV/cm}$）时，然而，$E_{\mathrm{A}} \approx 0.09\,\mathrm{eV}$（约为 $3k_{\mathrm{B}}T$）且 $l_{\mathrm{A}} \approx 1\,\mathrm{nm}$，此时属于 TFE 机制。

(iv) **在低掺杂层中，三角势垒的鞍点与二次势垒的鞍点重合**。二次势垒的热场发射鞍点

位于势垒顶下方 B 双曲正切$^2(E_{00}/k_{\mathrm{B}}T)$ 处（附录 B）。对于 $E_{00} \ll k_{\mathrm{B}}T$，这成为 $B(E_{00}/k_{\mathrm{B}}T)^2 = \Phi_{\mathrm{B}}(F_{\mathrm{s}}/F_{\mathrm{c}})^2$, 式 (7) 中三角势垒的鞍点深度。

方程（12）采用耗尽近似 $F_{\mathrm{s}}^2 = 2N_{\mathrm{D}}B/\varepsilon_{\mathrm{s}}$ （B 以 J 为单位）和恒定质量 F_{c}。穿通后， F_{s} 直接由方程（6）获得， $F_{\mathrm{s}}/F_{\mathrm{c}}$和 E_{A} 则由其计算得到。

3.3. 发射机制之间的边界

对于玻尔兹曼近似下的三角势垒，鞍点是指数关于深度的斜率 $2\Delta^{1/2}/E^{3/2}{}_{\mathrm{A}}$ 等于供给函数斜率 $1/k_{\mathrm{B}}T$的位置。用 E_{A}表示时，鞍点深度 Δ （第 3.1 节）为

$$\Delta = \Phi_{\mathrm{B}} \left(\frac{F_{\mathrm{s}}}{F_{\mathrm{c}}} \right)^2 = \frac{E_{\mathrm{A}}^3}{4(k_{\mathrm{B}}T)^2}. \tag{13}$$

载流电子的深度仅由 E_{A} 和 $k_{\mathrm{B}}T$决定，而 $F_{\mathrm{s}} = F_{\mathrm{c}}$ 是该深度达到 Φ_{B}时的位置。

热发射与隧穿之间的竞争。 对于具有恒定质量且不存在像力的三角势垒，只要玻尔兹曼供给适用，热发射分量与隧穿分量之间的竞争就仅由 $x \equiv E_{\mathrm{A}}/k_{\mathrm{B}}T$ 决定。Hatakeyama 等人[10] 通过鞍点法获得了三角势垒的热场发射电流（Hatakeyama 公式；推导见附录 A）。用 x 表示时，可写为

$$J_{\mathrm{TFE}} = J_{\mathrm{TE}} \cdot \sqrt{\pi}\, x^{3/2} \exp\left(\frac{x^3}{12} \right), \tag{14}$$

因此，热场发射电流与热发射电流之比既不包含势垒高度，也不包含施主浓度。指数 $x^3/12$ 等于 $\Delta/(3k_{\mathrm{B}}T)$。即使对于未采用鞍点近似的 WKB 积分，在 $\Phi_{\mathrm{B}} \gg E_{\mathrm{A}}$ 时，

$$\frac{J_{\mathrm{tun}}}{J_{\mathrm{TE}}} = f(x) = \int_0^\infty \exp\left[s - \frac{4}{3} \left(\frac{s}{x} \right)^{3/2} \right] ds \tag{15}$$

（$s =$ （$E_0 - E$）$/k_{\mathrm{B}}T$）再次仅是 x 的普适函数。 f（x）随 x 单调增加，并在 $x \approx 0.80$处等于 1。因此，TE 与隧穿电流相等的热发射/热场发射边界为 $E_{\mathrm{A}} \approx 0.80\, k_{\mathrm{B}}T$；对于 $m_{\mathrm{tun}} = 0.31 m_0$，在 300 K 时对应于$F_{\mathrm{s}} \approx 0.085$MV/cm。电场进一步增强时，隧穿电流将超过热发射电流。公式（14）是 f（x）的鞍点近似；随着鞍点位于势垒顶下方更深处，该近似将变得更加准确。我们以$\Delta = 3k_{\mathrm{B}}T$ （$x = 12^{1/3} \approx 2.3$）作为 TFE鞍点近似的参考；对于$x \geq 2$ ，其与 f（x）的差异在 13% 以内（补充数据，S6.5 节）。

TFE 与 *FE* 之间的边界。对于一般的势垒形状，TFE/FE边界由费米能级处指数的斜率表示，

$$c_1 \equiv -\left.\frac{\partial G}{\partial E}\right|_{E=E_{\mathrm{F}}}. \tag{16}$$

c_1 是 PS场发射公式的系数。[13] 在费米能级附近将指数展开到一阶，$G(E) \simeq b_1 - c_1 (E - E_{\mathrm{F}})$，透射概率随 $e^{-b_1} e^{c_1 (E-E_{\mathrm{F}})}$ 增大，而供给函数则随 $e^{-(E-E_{\mathrm{F}})/k_{\mathrm{B}}T}$ 减小（适用于 $E - E_{\mathrm{F}} \gg k_{\mathrm{B}}T$，即玻尔兹曼近似）。在此近似下，两者的乘积——方程 (2) 的被积函数——为

$$\mathcal{T}(E) \ln\left[1 + e^{-(E-E_{\mathrm{F}})/k_{\mathrm{B}}T}\right] \simeq e^{-b_1} \exp\left[(c_1 k_{\mathrm{B}}T - 1)\,\frac{E - E_{\mathrm{F}}}{k_{\mathrm{B}}T}\right], \tag{17}$$

其斜率的正负仅取决于 $c_1 k_{\mathrm{B}}T$ 是大于还是小于 1。对于 $c_1 k_{\mathrm{B}}T > 1$，被积函数在费米能级以上仍持续增大，主要贡献移至鞍点，此处指数曲率开始起主导作用（热场发射）。对于 $c_1 k_{\mathrm{B}}T < 1$，玻尔兹曼尾部随能量增大而减小，电流主要来自费米能级附近（场发射）。因此，$c_1 k_{\mathrm{B}}T = 1$ 是玻尔兹曼鞍点达到金属费米能级的位置；它也是线性化指数下场发射积分的收敛极限（第 3.4 节），我们将其称为形式上的热场发射/场发射边界。采用费米–狄拉克供给时，交叉转变是渐进的，其位置取决于所采用的判定标准：在线性展开下，当 $c_1 k_{\mathrm{B}}T = 1/$ 时，被积函数的峰值位于 E_{F}（$2\ln 2$）$= 0.72$；而当 $c_1 k_{\mathrm{B}}T = 0.86$ 时，峰值位于 $E_{\mathrm{F}} + k_{\mathrm{B}}T$（补充数据，S6.6 节）。Crofton 和 Sriram[4] 也通过比较 $1/c_1$ 与 $k_{\mathrm{B}}T$ 来定义场发射/热场发射边界。

对于三角势垒，

$$c_1 = \frac{2\sqrt{\Phi_{\mathrm{B}}}}{E_{\mathrm{A}}^{3/2}}, \qquad c_1 k_{\mathrm{B}}T = \frac{2k_{\mathrm{B}}T\sqrt{\Phi_{\mathrm{B}}}}{E_{\mathrm{A}}^{3/2}} = \frac{F_{\mathrm{c}}}{F_{\mathrm{s}}}, \tag{18}$$

因此 $F_{\mathrm{s}} = F_{\mathrm{c}}$ 与 $c_1 k_{\mathrm{B}}T = 1$是相同的条件。能量 $1/c_1 = (E_{\mathrm{A}}/2)\sqrt{E_{\mathrm{A}}/\Phi_{\mathrm{B}}}$是费米能级处的透射概率变化 e倍的区间；TFE/FE边界将由 E_{A} 和 Φ_{B}决定的这一量子能量与 $k_{\mathrm{B}}T$ 进行比较。

对于二次势垒（补充数据，第 S4.4 节），

$$c_1 = \frac{1}{E_{00}} \operatorname{artanh}\rho = \frac{2\sqrt{\Phi_{\mathrm{B}}}}{E_{\mathrm{A}}^{3/2}}\,\frac{\operatorname{artanh}\rho}{\rho}, \qquad c_1 k_{\mathrm{B}}T = \frac{F_{\mathrm{c}}}{F_{\mathrm{s}}}\,\frac{\operatorname{artanh}\rho}{\rho}, \qquad \rho = \sqrt{\frac{\Phi_{\mathrm{B}}}{B}}, \tag{19}$$

其中 E_{A} 和 F_{s} 为界面值。当金属费米能级高于体材料导带边缘时，此表达式适用于 $X = eV_{\mathrm{R}} - eV_{\mathrm{n}} > 0$，即 $\rho < 1$。因子 $\operatorname{artanh}\rho/\rho = 1 + \rho^2/3 + \cdots \geq 1$ 用于修正势垒沿隧穿路径的曲率；随着能带弯曲 B 增大，该因子趋近于 1。对于

在反向偏置[3]下，具有低掺杂漂移层的高压肖特基势垒二极管（第 5 节中的样品，$B \gtrsim 50$电子伏特）中，该因子小于 1.007，实际上可视为 1。相比之下，对于形成于重掺杂外延层上的肖特基势垒，[17] 较小，在 $N_{\mathrm{D}} = 1.2\times10^{19}$ 厘米$^{-3}$（$B \approx 2$电子伏特）对应的转变处，该因子约为 1.5。因此，在重掺杂层中，TFE/FE边界无法用单一电场 $F_{\mathrm{s}} = F_{\mathrm{c}}$表示。相较之下，条件 $c_1 k_{\mathrm{B}} T = 1$给出的 TFE/FE边界与势垒形状无关，并且在三角形极限下化简为 $F_{\mathrm{s}} = F_{\mathrm{c}}$。

这些边界汇总于表I。条件 $J_{\mathrm{tun}} = J_{\mathrm{TE}}$ 以及 TFE鞍点近似达到准确的条件（$\Delta = 3k_{\mathrm{B}}T$）仅取决于 x；用电场表示时，$F_{\mathrm{s}} \propto \sqrt{m_{\mathrm{tun}}}(k_{\mathrm{B}}T)^{3/2}/(e\hbar)$，与势垒高度和施主浓度无关。相比之下，TFE/FE边界取决于鞍点是否达到费米能级，因此得到 $F_{\mathrm{c}} \propto T\sqrt{\Phi_{\mathrm{B}}}$。

表I。以艾里能量 E_{A} 表示的发射机制边界。数值对应 300 K、$\Phi_{\mathrm{B}} = 1.00$ 电子伏特和 $m_{\mathrm{tun}} = 0.31 m_0$（无像力）。

边界	条件	E_{A}（电子伏特）	F_{s} (兆伏/厘米)
$J_{\mathrm{tun}} = J_{\mathrm{TE}}$	$f(x) = 1 \;\Rightarrow\; E_{\mathrm{A}} \approx 0.80\,k_{\mathrm{B}}T$	0.021	0.085
热场发射鞍点	$\Delta = 3k_{\mathrm{B}}T \;\Rightarrow\; E_{\mathrm{A}} = 12^{1/3}k_{\mathrm{B}}T \approx 2.3\,k_{\mathrm{B}}T$	0.059	0.41
热场发射/场发射	$\Delta = \Phi_{\mathrm{B}} \Leftrightarrow c_1 k_{\mathrm{B}}T = 1 \Rightarrow E_{\mathrm{A}} = [4\Phi_{\mathrm{B}}(k_{\mathrm{B}}T)^2]^{1/3}$	0.139	1.475 (= F_{c})

施主浓度与界面电场平面内的发射机制。图 4 显示了 N_{D}–F_{s} 平面内的发射机制。$V_{\mathrm{R}} = 0$ 线是零偏压界面电场$F_{\mathrm{s}}(0) = \sqrt{2eN_{\mathrm{D}}B/\varepsilon_{\mathrm{s}}}$，由 $B \simeq \Phi_{\mathrm{B}}$ 绘出，即每个 N_{D} 下可达到的最低电场。在此近似下，式 (12) 简化为 $F_{\mathrm{s}}/F_{\mathrm{c}} = E_{00}/k_{\mathrm{B}}T$，因此 $V_{\mathrm{R}} = 0$ 线与 F_{c} 线在 $E_{00}/k_{\mathrm{B}}T = 1$ 等值线（$N_{\mathrm{D}} \approx 6\times10^{18}$cm^{-3}，空心圆）处相交。在欧姆接触等重掺杂区域中，零偏压时就已处于 $F_{\mathrm{s}} > F_{\mathrm{c}}$；而 SiC 漂移层虽然 $E_{00}/k_{\mathrm{B}}T < 0.1$，但在高反向电压下会进入 TFE 机制并趋近于 F_{c}。参考文献 3 中的 Ti/4H-SiC肖特基势垒二极管（$N_{\mathrm{D}} = 5\times10^{15}$cm^{-3}，50–950 V；下文简称“样品”）的实测特性将在第 5 节分析。该样品覆盖 $F_{\mathrm{s}} = 0.30$–1。40 MV/cm，且 $F_{\mathrm{s}}/F_{\mathrm{c}}$ 在 950 V 时达到 0.96 和 $30\,^{\circ}$C。

3.4. 反向场发射和热场发射电流的闭式表达式

WKB 积分 (2) 可以通过在承载大部分电流的能量附近展开被积函数，以闭式形式（即不含积分）求得。对于 FN 和 FE 公式，在费米能级处将指数 $G(E)$ 展开至一阶（式 (17) 的 b_1 和 c_1），然后对剩余积分进行解析计算。对于 TFE 公式，将供给函数近似为玻尔兹曼形式，在鞍点附近将被积函数的指数展开至二阶，并计算高斯积分。本小节给出了三角势垒和二次势垒对应的结果表达式及其推导概要。所有结果均针对

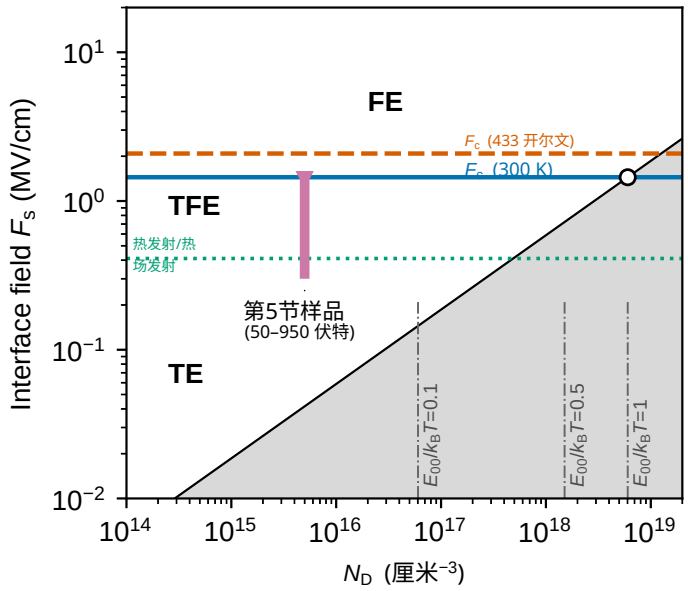

图 4. 施主浓度 N_D 与界面电场 F_s构成的平面内的发射机制$\Phi_B = 0.96$电子伏特，$m_{tun} = 0.31 m_0$。实线（蓝色）和虚线（橙色）： F_c，对应 300 K 和 433 K；点线（绿色）：TFE鞍点近似的参考线， $\Delta = 3k_BT$，即 $F_s/F_c = \sqrt{3k_BT/\Phi_B}$ （300 K）；点划线： E_{00}/k_BT （300 K）的等值线；灰色区域：低于零偏压值、无法达到的电场。空心圆标出 $V_R = 0$ 线、 F_c （300 K）与 $E_{00}/k_BT = 1$的交点。粗紫色线段：样品的测量范围，其测量特性将在第 5 节中分析。

从金属到半导体的单向电流，采用恒定的隧穿质量且不考虑像力。详细推导见补充数据第 S3 节（三角势垒）和第 S4 节（二次势垒）。

三角势垒。 费米能级处指数（4）的值和斜率为

$$b_1 = \frac{4\sqrt{2m_{tun}}\,\Phi_B^{3/2}}{3e\hbar F_s}, \qquad c_1 = \frac{2\sqrt{2m_{tun}\Phi_B}}{e\hbar F_s}, \tag{20}$$

其中， c_1 与公式（18）中的相同。

• ***FN***公式。 在零温极限下，费米能级以下的供给函数为（$E_F - E$）$/k_BT$，而费米能级以上为零。使用线性化指数在费米能级以下进行积分，并忽略下限的贡献（其量级为 $e^{-c_1 E_F}$），可得

$$J_{FN} = \frac{A_R}{k_B^2 c_1^2}\, e^{-b_1} = \frac{A_R (e\hbar F_s)^2}{8 m_{tun}\Phi_B k_B^2} \exp\left[-\frac{4\sqrt{2m_{tun}}\,\Phi_B^{3/2}}{3e\hbar F_s}\right] \tag{21}$$

（补充数据，S3.3节）。其形式为Fowler–Nordheim公式，不包含热贡献。

•场发射公式。 对供给函数进行积分时不作近似。代入$q = e^{(E-E_F)/k_BT}$ 并将范围扩展至 $0 < q < \infty$ ，可将积分化为欧拉贝塔积分、 $\int_0^\infty q^{p-1}\ln(1+q^{-1})\,dq = \pi/(p\sin\pi p)$ ，从而得到

$$J_{FE} = A_R T^2 e^{-b_1}\frac{\pi}{p\sin\pi p} = J_{FN}\frac{\pi p}{\sin\pi p}, \qquad p \equiv c_1 k_B T = \frac{F_c}{F_s} \tag{22}$$

（补充数据，第 S3.4 节）。这是 Hatakeyama 等人的公式 (2)。[10] 因子 $\pi p/\sin\pi p$ 是由费米–狄拉克分布尾部引起的温度修正，并且当 $T \to 0$时趋于 1。收敛条件 $p < 1$ 对应于 $F_s > F_c$。

• 热场发射公式。 远高于费米能级时，供给函数可用玻尔兹曼形式 $e^{-(E-E_F)/k_BT}$ 替代。被积函数的指数 $G_{tri}(E) + (E - E_F)/k_BT$在公式 (7) 的鞍点 E_p 处取得最小值。在该点附近将其展开至二阶，并进行双侧高斯积分，得到

$$J_{TFE} = \frac{A_R T}{k_B}\frac{e\hbar F_s\sqrt{\pi}}{\sqrt{2m_{tun}k_BT}}\exp\left[-\frac{\Phi_B}{k_BT} + \frac{(e\hbar F_s)^2}{24m_{tun}(k_BT)^3}\right] \tag{23}$$

（附录 A；补充数据，第 S3.5 节）。这是 Hatakeyama 等人的公式 (3)[10] （Hatakeyama 公式）；用 $x = E_A/k_BT$ 表示时，它变为公式 (14)。该公式要求鞍点位于费米能级以上（$F_s < F_c$），且满足$E_p - E_F \gg k_BT$，并且鞍点与势垒顶之间的距离大于约一个高斯分布的标准差 $\sigma_E = 1/\sqrt{g''} = \sqrt{2k_BT\Delta}$，低于势垒顶（$\Delta \gtrsim \sigma_E$对应于 $\Delta \gtrsim 2k_BT$；我们使用 $\Delta \geq 3k_BT$ 作为参考）。

二次势垒。对于二次势垒 (5)，我们采用 $X \equiv eV_R - eV_n$ （因此 $B = \Phi_B + X$）和 $t \equiv E_{00}/k_BT$。能量以费米能级 ($E_F = 0$) 为基准测量。

• 场发射公式。对于 $X > 0$，在费米能级处将指数 (5) 展开至一阶，可得

$$b_1 = \frac{1}{E_{00}}\left[\sqrt{\Phi_B B} - X\ln\frac{\sqrt{B}+\sqrt{\Phi_B}}{\sqrt{X}}\right], \qquad c_1 = \frac{1}{E_{00}}\operatorname{arsinh}\sqrt{\frac{\Phi_B}{X}} \tag{24}$$

（c_1 与式 (19) 中相同），对于 $p = c_1 k_B T < 1$，与三角势垒相同的积分给出

$$J_{FE}^{quad} = A_R T^2\frac{\pi}{p\sin\pi p}e^{-b_1} \tag{25}$$

（补充数据，第 S4.4 节）。对于 $X \gg \Phi_B$、 b_1 和 c_1 ，其结果与三角势垒的结果（式 (20)）一致，修正因子分别为 $1 + \Phi_B/(5X)$ 和 $1 + \Phi_B/(3X)$ 量级。式 (25) 在 $N_D = 10^{18}$–$10^{19}\,\mathrm{cm}^{-3}$ 和 $V_R = 1$–50 V 范围内，对二次势垒的 WKB 积分的复现误差在 15% 以内（补充数据表 S2）。

- 热场发射公式。对于玻尔兹曼供给，被积函数的指数 $G(E) + E/k_{\mathrm{B}}T$ 在势垒顶下方 $B\tanh^2 t$ 处的鞍点达到最小值。在该处直接由指数式 (5) 精确求得曲率 G''，并进行双侧高斯积分，得到

$$J_{\mathrm{TFE}}^{\mathrm{quad}} = \frac{A_{\mathrm{R}}T}{k_{\mathrm{B}}} \cdot 2\sqrt{\pi E_{00} B}\,\operatorname{sech} t\sqrt{\tanh t}\,\exp\!\left(\frac{X}{k_{\mathrm{B}}T} - \frac{B}{E_{00}}\tanh t\right) \tag{26}$$

（附录 B；补充数据第 S4.5 和 S4.6 节）。对于表 B1 的条件，该公式与包含热电子发射在内的总 WKB电流一致，偏差约为 2%。当鞍点与势垒顶之间的距离接近高斯分布的标准差$1/\sqrt{G''}$时，误差增大，并在其有效范围边界处达到约 15%（补充数据中的图 S2）。对于 $t \ll 1$，当 $F_{\mathrm{s}}^2 = 2N_{\mathrm{D}}B/\varepsilon_{\mathrm{s}}$时，该公式退化为三角势垒热场发射公式（23）（附录 B）。

这些表达式与第 3.6 节中的 PS 表达式进行了比较。

3.5. 解析公式和近似的有效性

解析公式。 图 5 将三角势垒的 WKB数值积分、公式（2）和（4）与闭式热发射、热场发射（公式（23））、场发射（公式（22））以及 Fowler–Nordheim（公式（21））表达式进行了比较。热场发射公式和场发射公式分别在 $F_{\mathrm{s}} < F_{\mathrm{c}}$ 侧和 $F_{\mathrm{s}} > F_{\mathrm{c}}$ 侧与 WKB 积分吻合良好，但二者在 F_{c} 附近的准确性都会降低（对于热场发射，鞍点接近费米能级；对于场发射，修正因子 $\pi p/\sin(\pi p)$在 $p \to 1$时发散）。由于 FN公式不包含热贡献，因此在 $F_{\mathrm{s}} \lesssim 2$MV/cm时会严重低估电流。因此，包含 $F_{\mathrm{s}}/F_{\mathrm{c}} \sim 1$ 的测量结果必须采用 WKB 积分进行分析，而不能使用近似公式。这与 Crofton 和 Sriram[4] 的评论一致，即场发射公式和热场发射公式并不会相互退化，且二者均不能准确描述中间机制中的传导。

三角势垒近似。 根据韦伯方程（10）的渐近形式，二次势垒中的隧穿可以视为三角势垒中的隧穿。对于 $\mu^2 \equiv \varepsilon/E_{00} \gg 1$，其解可用艾里函数 Ai($w$) 和 Bi($w$) 表示为一致渐近展开式，该展开式在包括转向点在内的整个范围内都成立（Olver 的方程（8.11）和（11.22）；[30] 另见 DLMF 第 12.10(vii) 节[29]）。在满足 $w \gg 1$的禁阻区内，艾里函数呈指数变化，Ai(w) $\simeq e^{-\frac{2}{3}w^{3/2}}/(2\sqrt{\pi}\,w^{1/4})$，Bi($w$) $\simeq e^{\frac{2}{3}w^{3/2}}/(\sqrt{\pi}\,w^{1/4})$。在该展开式中，此指数 $\frac{2}{3}w^{3/2}$ 等于从转向点 z_2 到位置 z的 WKB 作用量，$\hbar^{-1}\int_z^{z_2}\sqrt{2m_{\mathrm{tun}}[U(z') - E]}\,dz'$；将其积分至界面 $z = 0$并乘以二，便得到方程（3）的指数 $G(E)$（对于二次势垒，则为方程（5））。在转向点附近，变量 w 变为 $(z_2 - z)/l_{\mathrm{A}}(\varepsilon)$，即以局部艾里长度为单位表示的、相对于转向点的距离 $l_{\mathrm{A}}(\varepsilon) = l_{00}(E_{00}/4\varepsilon)^{1/6}$（补充数据，第 S6.2 节）。

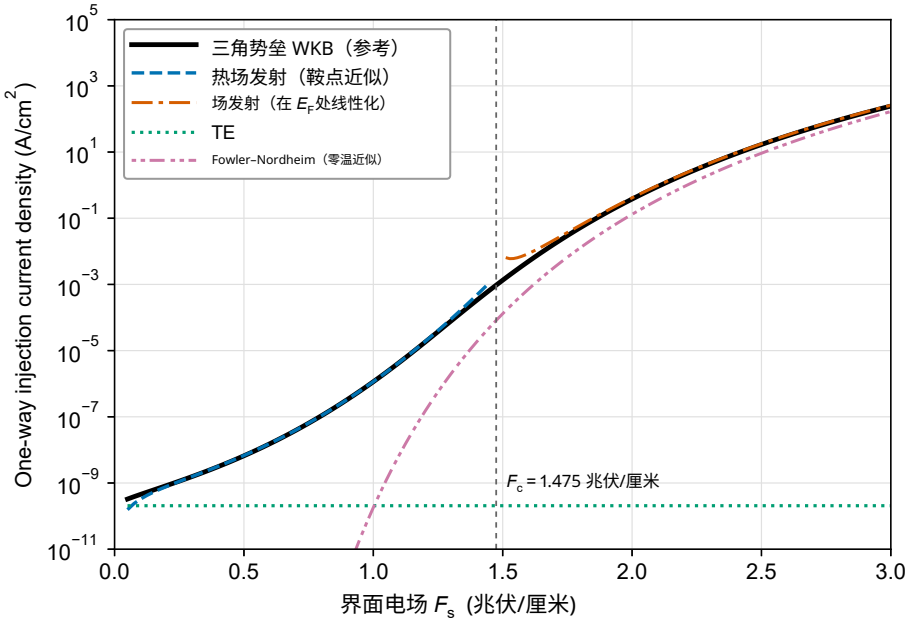

图 5. 三角势垒的 WKB数值积分（参考值，黑色粗线）与近似公式的比较：TFE（鞍点近似，蓝色虚线）、FE（在费米能级处线性化，橙色点划线）、TE（绿色点线）和 FN（零温近似，紫色双点划线）。竖直点线标示 $F_c = 1.475\mathrm{MV/cm}$。 $T = 300$ K， $\Phi_B = 1.00$电子伏特，$m_{tun} = 0.31 m_0$。从金属流向半导体的单向电流。

这相当于用具有局部斜率的三角势垒替代转向点附近的势垒。对于该样品（参考文献 3 中的 Ti/4H-SiC 肖特基势垒二极管， $N_D = 5 \times 10^{15}\mathrm{cm}^{-3}$ ），展开参数 $\mu^{-2} = E_{00}/\varepsilon$ 低于 1.5×10^{-5} 。这种展开误差不同于在界面处用二次势垒的切线进行替代所产生的近似误差。后者成立的条件是，势垒势 $U(z)$ 在从界面到转向点的隧穿路径上可视为线性函数（电场恒定）。对于二次势垒，沿该路径电场的相对变化为 $z_2/W_d \simeq (E_0 - E)/(2B)$，因此条件是在承载电流的能量范围内满足 $(E_0 - E)/B \ll 1$ ，也就是说，隧穿距离必须远小于耗尽层宽度。考虑到热长度 $\lambda_T = \hbar/\sqrt{m_{tun} k_B T}$（在 300 K 时约为 3 nm），承载热场发射电流的电子的隧穿距离为

$$z_p = \frac{\Delta}{eF_s} = \frac{eF_s \lambda_T^2}{8 k_B T}, \tag{27}$$

其与电场成正比增加，并在 $F_s = F_c$ 处达到最大值 $\Phi_B/(eF_c)$。对于该样品（30 °C），$z_p \approx 1.3$–6 nm（50–950 V），远短于耗尽层宽度（3–10 μm），因此这一条件得到了充分满足。相反，在重掺杂层中，隧穿距离变得与耗尽层宽度相当，因此需要采用公式（19）的曲率修正。

WKB 近似。 对于具有均匀电场的三角势垒，薛定谔方程的解可用艾里函数表示，并且透射概率可以精确求得[31)] （补充数据，第 S6.3 节）。在精确解中，指数因子 e^{-G} 会乘以一个因子，该因子源于金属–半导体界面处波函数的匹配（下文称为界面匹配因子）。精确透射概率与包含相同界面匹配因子的 WKB 近似透射概率之比，本质上仅是 $\xi_0 = (E_0 - E)/E_{\mathrm{A}}$ 的函数；当 E_{A} 在 0.05–0.2 eV 范围内变化时，该比值的变化小于 0.06。对于 $\xi_0 \geq 2$，该比值偏离 1 不超过 10%。在该样品的电场和温度条件下（0.3–1.4 MV/cm，30–160 °C；补充数据表 S5），当 WKB 计算在势垒顶以下包含界面匹配因子、在势垒顶以上采用阶跃透射时，艾里函数电流与 WKB电流的差异最大为 0.05 dex（dex 表示 $\log_{10}$的单位；1 dex 对应于 10 倍）。因此，在这一范围内，WKB 近似的指数因子 e^{-G} 是准确的。相比之下，第 5 节中的电流拟合在势垒顶以下采用 e^{-G}，在其以上采用单位透射，且不包含界面匹配因子，这与 TE 和 TFE 理论中的通常做法一致（正如第 2 节提到的理查森常数修正一样，该因素未被处理）。下文将计算值与测量值之间的差异表示为残差 $r = \log_{10}(J_{\mathrm{calc}}/J_{\mathrm{meas}})$，并用均方根误差 RMSE $= \sqrt{\langle r^2 \rangle}$表示其大小。

3.6. 重新审视先前报道的闭式表达式和跃迁条件

三角势垒的公式。Hatakeyama 等人[10)] 的场发射和热场发射公式是第 3.4 节中的三角势垒表达式 (22) 和 (23)。场发射公式在代数上与 PS 的公式 (37)–(39) 完全相同；当反向电压远大于势垒高度时，这些公式近似于其反向场发射公式（补充数据，第 S4.4 节）。热场发射公式与公式 (26) 的 $E_{00} \ll k_{\mathrm{B}}T$ 极限一致；公式 (26) 是通过鞍点法正确求得的二次势垒热场发射电流。在低掺杂层条件下，两者的差异小于 0.3%（附录 B）。

二次势垒的公式。PS[13)] 给出了二次势垒的反向场发射和热场发射公式。表II将其公式与本工作重新审视的公式进行了比较（推导见附录 B 和补充数据第 S4 节）。其通用场发射公式（PS 的公式（3）及其公式（34）和（35））与我们的公式（25）在 $eV_{\mathrm{n}} = 0$时一致。然而，PS 的公式（37）–（39）被用于分析其实验，但这些公式实际上是反向电压远大于势垒高度（$\Phi_{\mathrm{B}}/X \ll 1$）时的首项，与三角势垒场致发射公式完全相同。由于费米能级附近的电子在低于势垒顶 Φ_{B} 的深度处隧穿， $\Phi_{\mathrm{B}}/X \ll 1$对应于三角势垒近似的条件 $E_0 - E \ll B$

见第3.5节。在高掺杂层中，若 E_{00}较大，则场发射占主导；此时几伏特的反向电压即可产生较高的界面电场； Φ_{B}/X 因而不再很小，不能忽略势垒的曲率。在这种条件下，PS 实际上采用了三角势垒近似；例如，对于 $N_{\mathrm{D}}=10^{19}$ cm^{-3}和 $V_{\mathrm{R}}=1$–10 伏特（$\Phi_{\mathrm{B}}/X=1.0$–0.1），PS 的公式（39）将二次势垒的 WKB电流高估了 1.4–7.9 倍。在其热场发射公式中，指数项（PS 的公式（45）和（47）–（49））是一致的；但是，对于表 B1 中 300–433 K 下的低掺杂情况，PS 的公式（50）给出的总 WKB电流是实际值的 2.5–3.6 倍，因为鞍点处的曲率是用一种仅适用于鞍点远低于势垒顶的近似来计算的，而且高斯积分只取了其中一侧。

发射机制与转变电场。 Hatakeyama 等人[10] 在界面电场与势垒高度构成的平面上用数值方法确定的TFE/FE边界（300 K，$m_{\mathrm{tun}}=0.45m_0$；势垒高度为0.5 eV时约为 1.25 兆伏/厘米，势垒高度为1.5 eV时约为2.2 兆伏/厘米）与 F_{c} 在相同质量下的结果（1.26和2.18 兆伏/厘米）一致。他们的热发射/热场发射边界约为0.3 兆伏/厘米，且与势垒高度无关；这一点也可由式（14）解释。Li 等人[32] 发现，对于 β-Ga_2O_3 （$m_{\mathrm{tun}}=0.31m_0$），热发射电流与隧穿电流相等时的电场几乎不受势垒高度和掺杂影响，并将其称为通用转变电场。这对应于表I中的 $J_{\mathrm{tun}}=J_{\mathrm{TE}}$ （$f\left(x\right)=1$）。他们给出的数值（根据其拟合表达式，300 K时为0.27 兆伏/厘米）约为我们在不考虑像力时所得0.085 兆伏/厘米的3倍；在100至800 K之间，该比值约为2.8–3.4（100、300和800 K时分别为3.36、3.14和2.81）。Li 等人在势垒中考虑了像力，并在降低后的势垒顶处分离热发射电流与隧穿电流。因此，像力不仅会增大热发射电流，还会改变隧穿势垒的形状以及隧穿积分的范围。使用包含像力的指数（28）重新计算电流相等时的电场（$m_{\mathrm{tun}}=0.31m_0$、 $\varepsilon_{\mathrm{r}}=10.03$、玻尔兹曼供给、在降低后的势垒顶处分离），我们得到100、300和800 K时的数值分别为0.049、0.220和0.85 兆伏/厘米，约为他们所报数值的0.82–0.89倍。因此，像力解释了大部分差异。

重掺杂层中的 *TFE/FE* 转变。 Hara 等人[17] 通过对包含像力的二次势垒进行 WKB 计算，分析了镍/重掺杂 4H-SiC 肖特基势垒二极管的反向特性，并将 TFE/FE 转变定义为电流分布峰值 E_{peak}降至金属费米能级 E_{Fm}上方 26 meV 时的点。他们报告称，转变时的界面电场 F_{max}取决于N_{D} （ 1.2×10^{19}cm^{-3} 时为 2.9 兆伏/厘米， 2.6×10^{18} cm^{-3}时为 2.1 兆伏/厘米），而 E_{peak}处的局部电场 F_{peak}约为 1.6 兆伏/厘米，几乎不随 N_{D}变化。表III展示了我们在其条件下对转变点的重新计算。计算结果再现了报告值，但当 N_{D} 扩展至 2×10^{17}–5×10^{19}cm^{-3}时， F_{max} 从 2.1 变化到 5.1 兆伏/厘米，而 F_{peak} 从 2.0 变化到 1.2 兆伏/厘米。相比之下，转变时的 $c_1k_{\mathrm{B}}T$ 几乎恒定在 0.87–0.88（ $N_{\mathrm{D}}\le1.2\times10^{19}$cm^{-3} 时）；无论是否考虑像力，以及势垒高度不同时，其数值均保持在 0.86–0.93 范围内。这

表II。二次势垒的反向场发射和热场发射公式：PS[13]和本工作的公式。$X = eV_{\mathrm{R}} - eV_{\mathrm{n}}$、$B = \Phi_{\mathrm{B}} + X$、$t = E_{00}/k_{\mathrm{B}}T$。热场发射前因子未包含公因子 $A_{\mathrm{R}}T/k_{\mathrm{B}}$。误差均是相对于 $\Phi_{\mathrm{B}} = 1.0$电子伏特、$m_{\mathrm{tun}} = 0.31m_0$和 $\varepsilon_{\mathrm{r}} = 10.03$ 条件下的WKB数值积分（公式（2））而言的（表 B1；补充数据，表 S2）。

	PS	本工作	差值；误差相对于 WKB
场发射：b_1	$\dfrac{2\Phi_{\mathrm{B}}^{3/2}}{3E_{00}\sqrt{\Phi_{\mathrm{B}} + eV_{\mathrm{R}}}}$（PS 方程（37））	$\dfrac{1}{E_{00}}\left[\sqrt{\Phi_{\mathrm{B}}B} - X\ln\dfrac{\sqrt{B}+\sqrt{\Phi_{\mathrm{B}}}}{\sqrt{X}}\right]$（方程（24））	PS：主导项，用于 $\Phi_{\mathrm{B}}/X \ll 1$；$eV_{\mathrm{n}}$ 省略
场发射：c_1	$\dfrac{1}{E_{00}}\sqrt{\dfrac{\Phi_{\mathrm{B}}}{\Phi_{\mathrm{B}} + eV_{\mathrm{R}}}}$（PS 方程（38））	$\dfrac{1}{E_{00}}\sqrt{\dfrac{\Phi_{\mathrm{B}}}{X}}$ 反双曲正弦（方程（24））	同上
FE: 电流	PS 方程（39）	公式（25）	$N_{\mathrm{D}} = 10^{18}$–$10^{19}\mathrm{cm}^{-3}$：PS $\times 1.14$–7.9；这 work $\times 1.05$–1.14
TFE: 指数	$\dfrac{X}{k_{\mathrm{B}}T} - \dfrac{B}{E_{00}}$ 双曲正切 t（PS 公式（45）–（49））	Same	同意
TFE: 前因子	$\sqrt{\pi E_{00}(eV_{\mathrm{R}} + \Phi_{\mathrm{B}}\mathrm{sech}^2 t)}$（PS 式（50））	$2\sqrt{\pi E_{00}B}$ 双曲正割 $t\sqrt{\text{双曲正切 } t}$（式（26））	曲率近似以及单侧高斯积分；PS -14% 至 $+261\%$，本工作 $+0.5$至 $+2.0\%$（条件表 B1，总电流）

一数值与 $c_1 k_{\mathrm{B}}T = 0.86$一致；$c_1 k_{\mathrm{B}}T = 0.86$由供给函数与透射率的乘积导出，作为峰值位于 $E_{\mathrm{F}} + k_{\mathrm{B}}T$ 处的条件（补充数据，S6.6 节）。在 $5 \times 10^{19}\mathrm{cm}^{-3}$时，转变发生在偏压近乎为零的条件下，且半导体的回流不可忽略；此时 $c_1 k_{\mathrm{B}}T$ 为 0.80（所有条件下为 0.69–0.81；补充数据，表S6）。因此，Hara 等人的转变条件可通过 $c_1 k_{\mathrm{B}}T \approx 1$统一描述，它是 $F_{\mathrm{s}} = F_{\mathrm{c}}$ 向一般势垒形状的扩展。几乎恒定的 F_{peak} 的解释见补充数据 S6.6 节，其恒定质量 $0.30m_0$ 的解释见 6.1 节。

表III。 重新计算 Hara 等人的热场发射/场发射转变条件[17]（$E_{\mathrm{peak}} = E_{\mathrm{Fm}} + 26$ meV）。考虑像力的二次势垒，WKB， $T = 300$K、$\Phi_{\mathrm{B}} = 1.45$eV， $m_{\mathrm{tun}} = 0.30 m_0$、$\varepsilon_{\mathrm{s}} = 10.32\varepsilon_0$。 F_{max}：界面电场； F_{peak}： E_{peak}处外转折点的电场； $c_1 k_{\mathrm{B}} T$：在 E_{Fm}处进行数值计算的式（16）。Hara 等人报告的数值列于括号内。[a]根据费米–狄拉克统计得到的体内 $E_{\mathrm{C}} - E_{\mathrm{F}}$ （$N_{\mathrm{D}} > N_{\mathrm{C}}$）；其他行采用非简并表达式，其结果与费米–狄拉克数值的差异至多为0.006 eV（在 $1.2\times10^{19}\,\mathrm{cm}^{-3}$处）。该转变发生在约距零偏置1 mV以内，其符号（正向或反向）无法在本计算的分辨率下确定；在恰好零偏置时，两个单向电流相互抵消，因此净电流分布的峰值未定义。采用非简并表达式时，该行将给出 $V_{\mathrm{R}} = 0.01$ V、5.11、1.13和0.85。

N_{D} (厘米$^{-3}$)	V_{R} (伏特)	F_{max} (兆伏/厘米)	F_{peak}(兆伏/厘米)	$c_1 k_{\mathrm{B}} T$
2.0×10^{17}	59	2.06	2.03	0.88
1.0×10^{18}	11	2.09	1.97	0.87
2.6×10^{18}	4.1	2.24 (2.1)	1.93	0.87
1.2×10^{19}	0.59	2.93 (2.9)	1.61 (1.6)	0.88
5.0×10^{19} [a]	≈ 0	5.14	1.24	0.80

4. 势垒形状和隧穿有效质量的影响

4.1. 像力引起的势垒形状变化

考虑像力（下文简称 BL，即势垒降低）后，[8] $U_{\mathrm{BL}}(z) = E_0 - eF_{\mathrm{s}}z - e^2/(16\pi\varepsilon_{\mathrm{s}}z)$，势垒顶降低了 $\Delta U = \sqrt{e^3 F_{\mathrm{s}}/(4\pi\varepsilon_{\mathrm{s}})}$。作用量积分可写为

$$G_{\mathrm{BL}}(E) = v(y)\, G_{\mathrm{tri}}(E), \qquad v(y) = \sqrt{1+y}\,\left[\mathsf{E}(\nu) - y\mathsf{K}(\nu)\right], \tag{28}$$

其中， $y = \Delta U/(E_0 - E)$ 和 $\nu = (1-y)/(1+y)$[12, 33]（补充数据，S5 节）；K 和 E 是参数为 ν的完全椭圆积分。在这种情况下，热发射分量也以 $\Phi_{\mathrm{B}} - \Delta U$ 作为势垒进行计算。

图 6 比较了三角势垒与包含像力的势垒。像力不仅使势垒顶降低了 ΔU，还在界面一侧产生了一个转向点，从而缩小了禁阻区。关键不在于势垒的几何面积，而在于作用量积分 (3) 的减少量，该减少量表示为$v(y) < 1$。仅将 TE 的势垒高度降低 ΔU （下文简称简单势垒降低）并未考虑这种形状变化。

图 7 和表 IV 展示了像力导致的电流增加。在低电场下，高于降低后的势垒顶的电流被计为 TE 分量，因此仅比较隧穿分量的比值并不能反映实际的增幅。比较包含 TE 的总电流可知，在 300 K 时，增幅在约 0.5 兆伏/厘米处最大（达到 4.6 倍），而在更高电场下，随着电场升高而减小（在 1.4 兆伏/厘米时为 2.7 倍，在 3 兆伏/厘米时为 2.3 倍）。高电场下增幅减小，是因为三角势垒本身变薄，因此像力造成的作用量积分相对减小

幅度变小。增幅还取决于温度：在 433 K 时，其最大值移至约 0.7–1 兆伏/厘米处，并且在 0.3–1.4 兆伏/厘米的电场范围内变化很小（3.0–3.8）。在样品的电场范围（0.3–1.4 兆伏/厘米）内，BL 在较低温度下对电压依赖性的削弱作用更强，并且还通过增幅随温度的变化改变温度依赖性。这些效应解释了为什么在恒定质量模型中加入 BL 后，计算结果反而进一步偏离第 5 节中的测量结果。

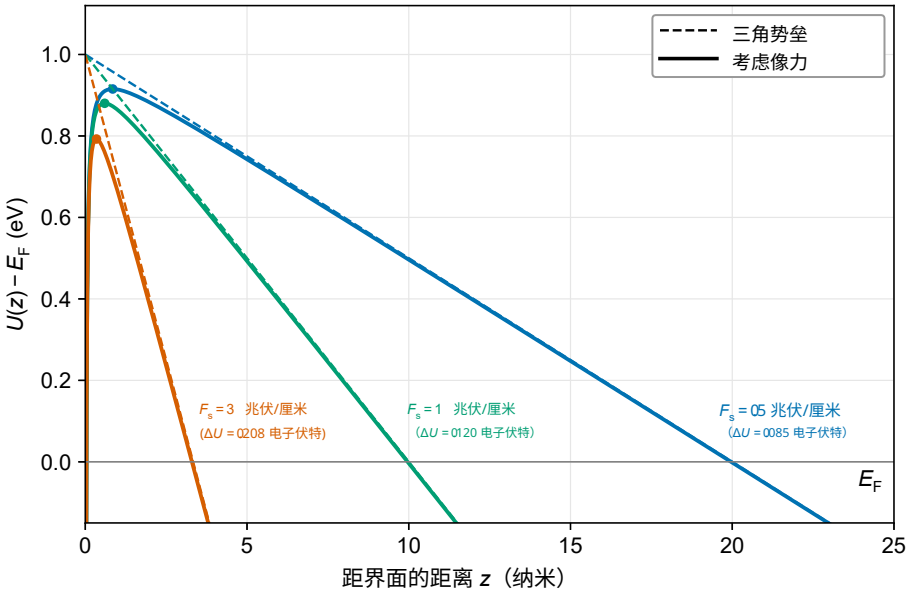

图 6. 界面电场为 0.5（蓝色）、1（绿色）和 3 兆伏/厘米（橙色）时的三角势垒（虚线）和包含像力的势垒（实线）。圆圈标示像力势垒的顶部。 $\Phi_{\mathrm{B}} = 1.00$电子伏特，$\varepsilon_{\mathrm{r}} = 10.03$。像势在 $z \to 0$ 处的发散表明了连续介质近似的适用极限。

表 IV。像力导致的电流增强，$J_{\mathrm{BL}}/J_{\mathrm{tri}}$，分别针对仅隧穿分量以及包含热发射（TE）的总电流。 $\Phi_{\mathrm{B}} = 1.00$电子伏特， $\varepsilon_{\mathrm{r}} = 10.03$，$m_{\mathrm{tun}} = 0.31 m_0$。

		仅隧穿	总电流	
F_{s} (兆伏/厘米)	ΔU (电子伏特)	300 K	300 K	433 K
0.2	0.054	2.30	3.70	2.60
0.3	0.066	3.02	4.29	3.01
0.5	0.085	3.90	4.60	3.55
0.7	0.100	3.94	4.17	3.77
1.0	0.120	3.30	3.32	3.66
1.4	0.142	2.70	2.70	3.17
2.0	0.169	2.46	2.46	2.62
3.0	0.208	2.32	2.32	2.36

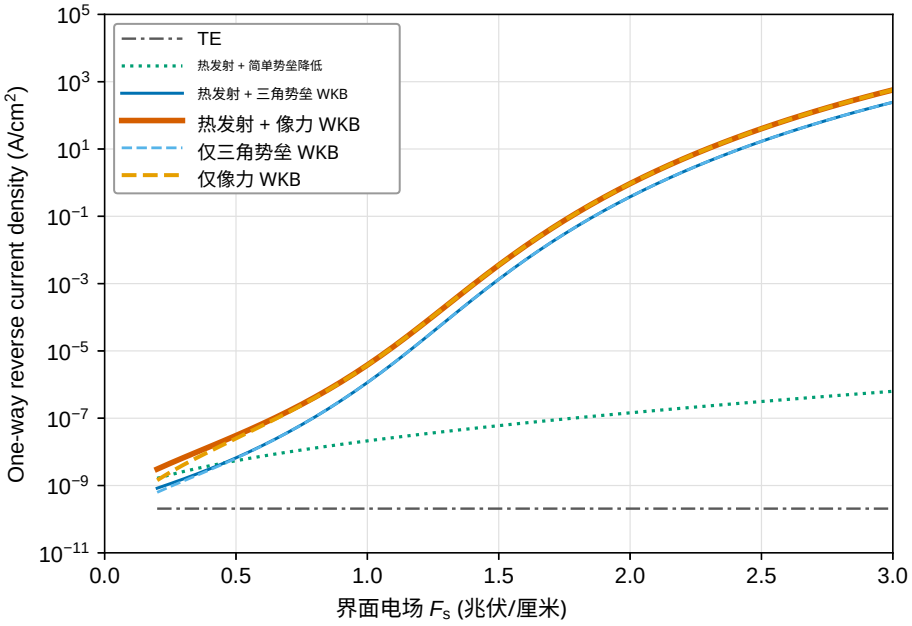

图 7. 采用 TE、简单势垒降低、三角势垒 WKB 以及包含像力的 WKB 计算得到的单向反向电流密度对界面电场的依赖关系（见图例；虚线曲线仅表示隧穿分量）。$T = 300\,\mathrm{K}$，$\Phi_{\mathrm{B}} = 1.00$电子伏特，$\varepsilon_{\mathrm{r}} = 10.03$，$m_{\mathrm{tun}} = 0.31 m_0$。

4.2. 能量依赖隧穿有效质量

电子在带隙中的波数为虚数（通常为复数），其色散关系由复能带结构给出。[34, 35] 虚波数偏离抛物线能带的外推结果。利用能带结构的虚支计算 WKB 衰减，并通过将多能带 $\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}$ 模型延拓到复数 k来获得该分支，这种方法可追溯至 Kane。[36] 基于 4H-SiC 的复能带结构，Murakami[18] 给出了能量 $\mathcal{E} = E - U(z)$ 相对于局部导带边缘的值（单位为电子伏特，$-2 \le \mathcal{E} \le 0$），

$$\frac{m_{\mathrm{tun}}(\mathcal{E})}{m_0} = 0.0171\mathcal{E}^3 + 0.0798\mathcal{E}^2 + 0.1772\mathcal{E} + 0.3241. \tag{29}$$

m_{tun} 随深度增加而减小：导带边缘处为 $0.32 m_0$，其下方 0.5 eV 处为 $0.25 m_0$，其下方 1 eV 处为 $0.21 m_0$。采用该质量时，使用 $m_{\mathrm{tun}} \to m_{\mathrm{tun}}(\mathcal{E})$对式 (3) 的被积函数进行数值计算；对于 $\mathcal{E} < -2$ eV（超出式 (29) 的范围），则使用 -2 eV 处的值。在命名模型时，我们将这种能量依赖质量称为 $m_{\mathrm{tun}}(E)$。

4.3. 对电场依赖性和温度依赖性的影响

在不考虑像力的恒定质量参考模型（公式 (7)）中，载流电子在势垒顶以下 $\Delta = \Phi_{\mathrm{B}}(F_{\mathrm{s}}/F_{\mathrm{c}})^2$ 处发生隧穿。以

第 5 节中分析其测量特性的样品为例（$N_{\mathrm{D}} = 5\times10^{15}\,\mathrm{cm}^{-3}$、50–950 V、30–160 °C；图 4 中的粗条），图 8 和表 V 显示了该深度处的 $F_{\mathrm{s}}/F_{\mathrm{c}}$、 Δ 和 $m_{\mathrm{tun}}(E)$。随着电压升高，隧穿能量向带隙更深处移动，有效质量从 $0.32m_0$ 降至 $0.22m_0$。由于质量越小，透射概率越大，因此 $m_{\mathrm{tun}}(E)$ 在较高电压下使电流增加得更多，并增强电压依赖性。这种随深度变化的质量在恒定质量模型中并未体现。此外，由于较低温度下的深度更大（$F_{\mathrm{c}} \propto T$）， $m_{\mathrm{tun}}(E)$ 的影响在较低温度下更强。

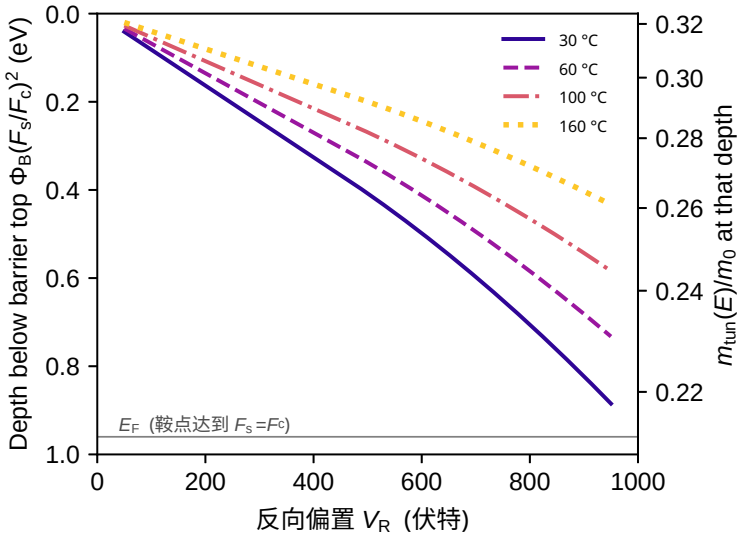

图 8。 载流电子能量低于势垒顶的深度，$\Phi_{\mathrm{B}}(F_{\mathrm{s}}/F_{\mathrm{c}})^2$ （左轴；不考虑像力的恒定质量参考模型），以及该深度处的$m_{\mathrm{tun}}(E)$（右轴；方程（29））， 对应于在第 5 节中分析其测量特性的样品。采用了包含穿通效应的界面电场（方程（6））。线条颜色遵循图9的温度刻度。

表 V。 $F_{\mathrm{s}}/F_{\mathrm{c}}$、隧穿深度 $\Delta = \Phi_{\mathrm{B}}(F_{\mathrm{s}}/F_{\mathrm{c}})^2$, 以及该深度处的 $m_{\mathrm{tun}}(E)$，对应于第 5 节中的样品（$\Phi_{\mathrm{B}} = 0.96$电子伏特）。该深度是根据质量为 $0.31m_0$ 且不考虑像力的恒定质量参考模型估算的；它并非整个路径上的等效质量。

T (°摄氏度)	V_{R} (伏特)	F_{s} (兆伏/厘米)	$F_{\mathrm{s}}/F_{\mathrm{c}}$	Δ (电子伏特)	$m_{\mathrm{tun}}(E)/m_0$
30–160	50	0.30	0.14–0.21	0.02–0.04	0.32
160	950	1.40	0.67	0.43	0.26
100	950	1.40	0.78	0.58	0.24
60	950	1.40	0.87	0.73	0.23
30	950	1.40	0.96	0.88	0.22

这里采用的鞍点深度并非针对包含式（29）的模型通过自洽计算获得；它是用于理解该效应的参考量。包含

能量依赖质量和像力的电流是通过数值积分（2）计算得到的，而不是代入近似鞍点公式。对于恒定质量，如表 IV 所示，像力带来的增强取决于电场和温度；而在涉及深能级能量的高电场、低温区域，能量依赖质量变得十分重要。下面我们将比较这些不同效应如何体现在测量电压和温度依赖性中。

5. 实测反向特性分析

5.1. 样品与测量

我们采用了参考文献3中Ti/4H-SiC肖特基势垒二极管的反向电流-电压特性。该肖特基势垒二极管制备于由Cree Research提供的n型4H-SiC外延片上。漂移层的施主浓度约为 $5\times10^{15}\,\mathrm{cm}^{-3}$，厚度为 $10\ \mu\mathrm{m}$；肖特基电极直径为 $300\ \mu\mathrm{m}$，边缘终端为通过铝离子注入形成的结终端延伸（JTE），击穿电压约为1200 V，比导通电阻约为2.5 mΩ cm^2。在室温下，不同器件的反向特性吻合良好（少数器件因意外晶体缺陷而出现电流骤增的情况除外），表明漏电源于肖特基界面固有的机制。[3] 由正向特性得到的势垒高度为1.0 eV；此前的反向分析采用恒定有效质量热场发射公式，同时拟合 m_{tun}、Φ_{B}和 A^{*}，得到 $m_{\mathrm{tun}}=0.25m_0$、$\Phi_{\mathrm{B}}=0.96$ eV和 $A^{*}=150\,\mathrm{A\,cm^{-2}\,K^{-2}}$。[3] 反向电流-电压特性使用直流源/监测仪（Agilent 4142B）测量，测量系统与参考文献37相同。测量温度为30、40、60、80、100、120、140和 $160\,^{\circ}\mathrm{C}$，电压范围为0–1200 V。此前仅报告了部分温度下的测量结果；本文重新分析了包括未发表温度数据在内的完整数据集。电压超过1100 V后，由于仪器的电流上限，电流饱和在约1.6 A/cm^2 。

5.2. 分析方法

将公式（6）中的界面电场代入公式（2），并使用以下四种模型计算电流:

（a）WKB：三角势垒（4），$m_{\mathrm{tun}}=0.31m_0$；（b）WKB+BL：包含像力的势垒（28），$m_{\mathrm{tun}}=0.31m_0$；（c）WKB+$m_{\mathrm{tun}}(E)$：三角势垒，公式（29）；（d）WKB+BL+$m_{\mathrm{tun}}(E)$：包含像力的势垒，公式（29）。

所有模型都包含 TE 分量。采用三角势垒，是因为在样品的漂移层中（$B\gtrsim50$ 电子伏特），$(E_0-E)/B\ll1$ 在承载电流的能量范围内成立，因此与二次势垒的差异可以忽略（第 3 节）。唯一的拟合参数是势垒高度 Φ_{B}，且所有温度共用同一数值。

评估采用 50–950 伏特的范围，间隔为 25 伏特（每个温度 37 个点，共 296 个点），并取每个点 ± 12.5伏特范围内的对数中位数，以抑制噪声。品质因数为第3.5节定义的残差 r 对 $\log_{10} J$ 的均方根误差，单位为 dex。0.1 dex 的均方根误差对应的典型电流比为 $10^{0.1} = 1.26$。由于下文讨论的过量电流和电流上限，排除了 950 伏特以上的区域。界面电场的计算和优化流程见附录 C，样品参数的敏感性分析见第5.4节。

5.3. 电流特性与残差

表 VI 列出了四种模型的拟合结果，图9对比了测量电流与计算电流，图10展示了残差。考虑到施主浓度存在不确定性，还列出了 N_{D} 变化 ± 10%的结果。

表 VI. 四种模型的拟合结果：势垒高度 Φ_{B} (电子伏特) / 均方根误差 (dex)。

模型	$N_{\mathrm{D}} = 4.5 \times 10^{15}$	5.0×10^{15}	5.5×10^{15}厘米$^{-3}$
(a) WKB	0.939 / 0.218	0.949 / 0.166	0.959 / 0.118
(b) WKB+BL	0.978 / 0.289	0.987 / 0.241	0.997 / 0.193
(c) WKB+$m_{\mathrm{tun}}(E)$	0.952 / **0.101**	0.964 / **0.109**	0.976 / 0.159
(d) WKB+BL+$m_{\mathrm{tun}}(E)$	0.988 / 0.162	0.999 / 0.120	1.011 / **0.114**

表VII. 每种温度和电压变化下残差 Δr_V（dex；线性拟合缩放至 900 伏特）的均方根误差（dex）。 $N_{\mathrm{D}} = 5 \times 10^{15}\mathrm{cm}^{-3}$。

	RMSE				Δr_V	
T (°摄氏度)	(a)	(b)	(c)	(d)	(c)	(d)
160	0.097	0.181	0.050	0.080	+0.04	−0.09
140	0.126	0.202	0.054	0.106	+0.08	−0.08
120	0.143	0.204	0.055	0.102	+0.06	−0.15
100	0.161	0.211	0.073	0.102	+0.08	−0.16
80	0.154	0.202	0.070	0.069	+0.14	−0.14
60	0.174	0.236	0.090	0.079	+0.21	−0.10
40	0.193	0.288	0.149	0.136	+0.45	+0.13
30	0.241	0.355	0.213	0.218	+0.62	+0.31

表VII中残差的电压变化 r （第3.5节） Δr_V，是通过对50–950 V范围内的残差进行最小二乘线性拟合 $r \simeq a V_{\mathrm{R}} + b$，并取 $\Delta r_V = a \times 900\,\mathrm{V}$ 得到的。它表示整个评估范围内的系统性电压依赖性，而不是端点处残差之间的差值。下文中的“残差变化”均指该量。

结果可总结如下。

(i) **采用标称参数时，** $m_{\mathrm{tun}}(E)$ **无需质量调整参数即可提高可重复性**。对于标称 $N_{\mathrm{D}} = 5.0 \times 10^{15}\mathrm{cm}^{-3}$ 和

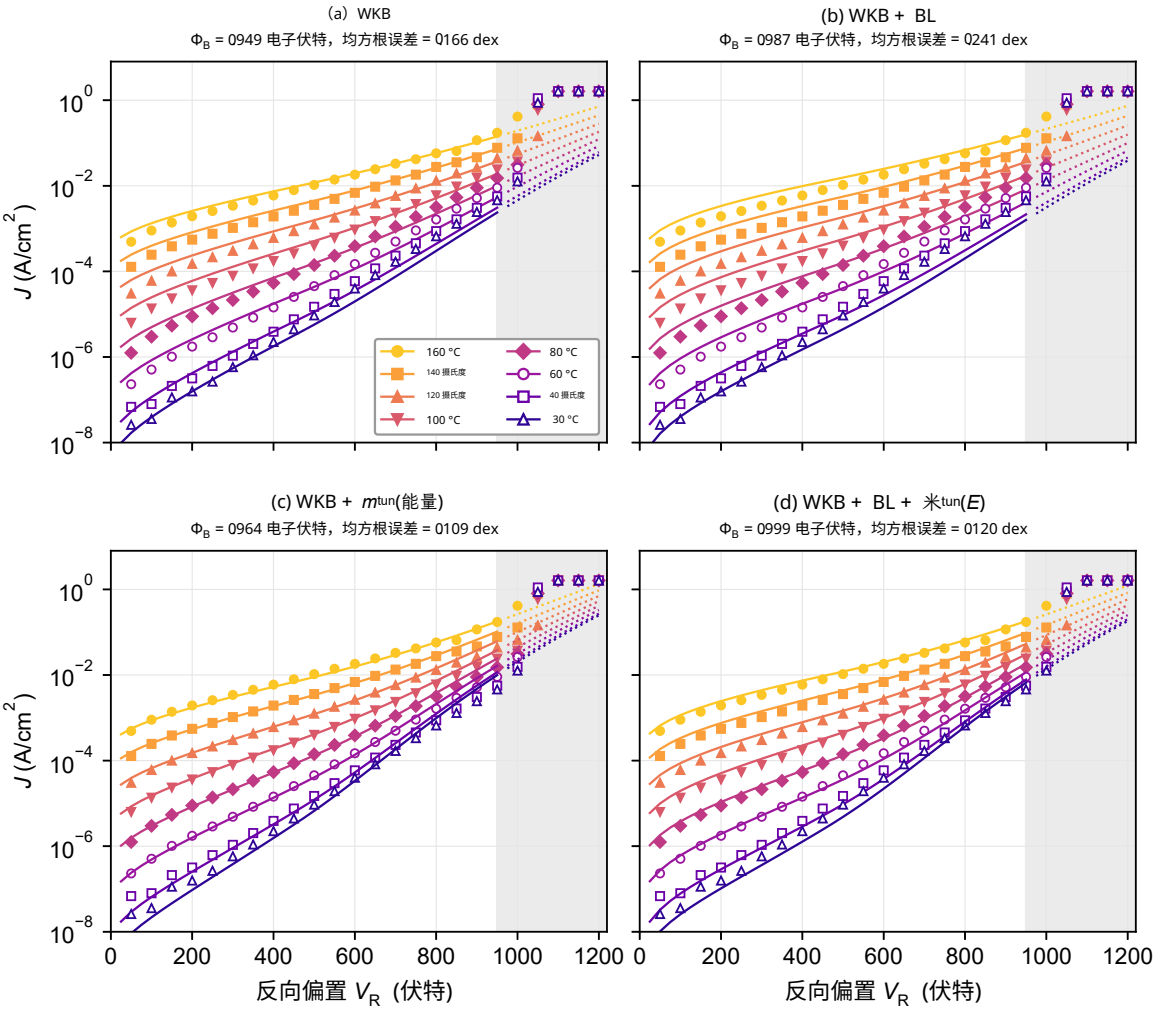

图9。 Ti/4H-SiC肖特基势垒二极管的实测反向电流（符号，30–160 °°C）以及采用四种模型的计算结果（实线）。符号和线条的颜色表示温度，从紫色（低温）到黄色（高温），所有面板均采用相同的颜色标度。N_{D} $=5\times10^{15}\mathrm{cm}^{-3}$。灰色符号位于拟合范围之外（高于950 V），点线表示计算结果的外推结果。1100 V以上的饱和是由电流上限导致的。

对于 $4.5\times10^{15}\mathrm{cm}^{-3}$，(c) 和 (d) 的均方根误差小于 (a) 和 (b)。在 (a) 和 (b) 的恒定质量下，50 至 950 V 之间的残差变化在 60–100 °C 时为 -0.4 至 -0.8 dex，即计算结果低估了电压依赖性（图 10(a) 和 10(b)）。 $m_{\mathrm{tun}}(E)$减小了这种系统性残差变化。当 N_{D} 增加 10% 时，(a) 的均方根误差也降至 0.118 dex，与 (d) 的 0.114 dex 相当。增加 N_{D} 会提高界面电场，而引入 $m_{\mathrm{tun}}(E)$会提高深能级能量处的隧穿概率；由于二者都会增强电流的电压依赖性，因此在拟合中彼此相关。然而，即使将 N_{D} 改变 $\pm10\%$ ，(a) 和 (b) 的残差线性拟合斜率在所有温度下仍为负值，因此在这种比较中

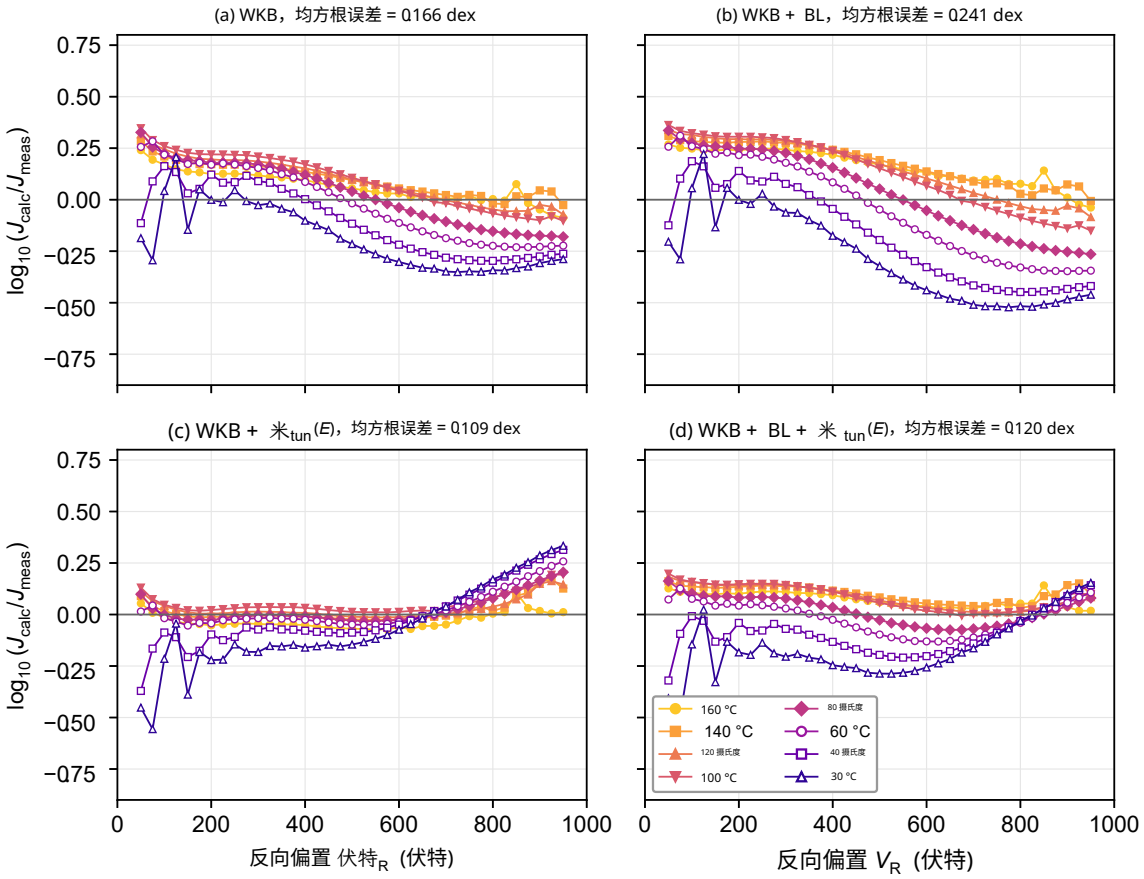

图10。 四种模型（$N_{\mathrm{D}} = 5 \times 10^{15}\mathrm{cm}^{-3}$）的残差 $\log_{10}(J_{\mathrm{calc}}/J_{\mathrm{meas}})$ 的电压依赖性。颜色和符号与图9相同。在30和 40 ℃下，低电压侧的散布是由接近测量下限处的噪声造成的。

质量固定为 $0.31m_0$ 时，电压依赖性仍不够充分。

(ii) 在质量固定为 $0.31m_0$ 时，加入 BL 会使吻合度变差。模型 (b) 在每个 N_{D} 下的均方根误差均最大。其残差在所有温度下都比模型 (a) 随电压变化得更负（例如，在 30 ℃ 时为 -0.63 dex，而模型 (a) 为 -0.40 dex），且温度间平均偏差的离散范围从模型 (a) 的 0.29 dex 扩大到 0.46 dex。这是因为，如表 IV 所示，在样品的电场范围内，BL 带来的增强随电压升高而减弱，且在较低温度下减弱得更明显；这种增强在不同温度下也有所差异。

(iii)纳入 $m_{\mathrm{tun}}(E)$ 后，无法判断是否存在 BL。 对于标称 N_{D}，(c) 在各温度下的均方根误差和平均偏差均较小（-0.06 至 $+0.05$ dex）。另一方面，(d) 对电压依赖性的再现效果更好，而 (c) 的残差变化在低温下达到 $+0.6$ dex（表VII）。仅将 N_{D} 改变 $\pm 10\%$，就会颠倒二者的排名。加入 BL 的影响实际上可由 Φ_{B} 增加约 0.035 电子伏特来抵消。

(iv) **所得势垒高度是合理的**。 (c) 的 Φ_{B} 为 0.964 电子伏特，(d) 的为 0.999 电子伏特，均处于先前反向分析所得数值（0.96 电子伏特）与正向特性所得数值（1.0 电子伏特）之间。[3](v) **剩余差异出现在低温下**。 在 30 和 $40\,^{\circ}$C时，所有模型 (a)–(d) 的均方根误差均超过 0.13 dex。

在界面电场中不存在穿通的情况下（公式（6）的第二行），(a)、(b)和(d)的均方根误差增加了约1.4–1.6倍，而(c)的均方根误差则从0.109 dex略微降至0.093 dex（表 VIII）。由于对于该样品结构，电压高于约450 V时必然发生穿通（附录 C），因此，这一下降是由于(c)过强的电压依赖性（表VII）被高电压下对电场的低估所补偿而产生的。

5.4. 对样品参数的敏感性

N_{D} 变化 ±10%的结果列于表 VI中。(c)和(d)的排名取决于 N_{D}；对于 $N_{\mathrm{D}} = 5.5\times10^{15}\mathrm{cm}^{-3}$，(a)的均方根误差也与(d)的相当。正文中我们主要采用基于设计和参考文献3所得标称值的结果。表 VIII展示了其他条件下的结果。模型(c)是

表 VIII. 修改条件下的拟合结果： Φ_{B} (电子伏特) / 均方根误差 (dex)。参考值：$N_{\mathrm{D}} = 5\times10^{15}\,\mathrm{cm}^{-3}$, $d = 10\,\mu$m，存在穿通。

条件	(a)	(b)	(c)	(d)
参考值	0.949 / 0.166	0.987 / 0.241	0.964 / 0.109	0.999 / 0.120
无穿通	0.943 / 0.263	0.982 / 0.331	0.957 / 0.093	0.993 / 0.177
$d = 9\,\mu$米	0.954 / 0.113	0.993 / 0.183	0.971 / 0.203	1.006 / 0.161
$d = 11\,\mu$米	0.945 / 0.213	0.984 / 0.286	0.960 / 0.072	0.996 / 0.137
$N_{\mathrm{D}} = 7\times10^{15}$厘米$^{-3}$	0.989 / 0.125	1.027 / 0.109	1.013 / 0.383	1.046 / 0.291

对这些条件最为敏感。在高电压下界面电场减弱的条件下（无穿通， $d = 11\,\mu$m），(c) 的均方根误差为 0.07–0.09 dex，是四种模型中最小的；而在电场增强的条件下（$d = 9\,\mu$m，$N_{\mathrm{D}} = 7\times10^{15}\,\mathrm{cm}^{-3}$），其均方根误差最大，为 0.20–0.38 dex。恒定质量模型 (a) 和 (b) 呈现相反的趋势，而 (d) 介于两者之间（因为像力部分抵消了由 $m_{\mathrm{tun}}(E)$ 引起的场依赖性增强）。 $m_{\mathrm{tun}}(E)$ 会降低更深隧穿对应的质量，并增强电流的场依赖性（第4.3节）。因此，仅凭当前电流特性，很难唯一地区分界面电场估算误差与质量的能量依赖性。上述与测量结果的比较采用基于设计和参考文献3的 $N_{\mathrm{D}} = 5\times10^{15}\,\mathrm{cm}^{-3}$ 和 $d = 10\,\mu$m 作为参考值。除非独立评估样品参数，否则在比较质量模型的相对优劣时，必须考虑其对这些条件的依赖性。

请注意，当前模型未包含金属–半导体界面处的量子力学反射（界面匹配因子，即有效理查德森常数及其场依赖性）。由于这会改变计算所得电流的场依赖性，质量模型的相对优劣也取决于对此效应的处理方式。

作为参考，将恒定质量与势垒高度一同优化（三角势垒，不考虑像力）可得到 $m_{\mathrm{tun}} = 0.265 m_0$、 $\Phi_{\mathrm{B}} = 0.969$电子伏特，均方根误差为 0.078 dex。该拟合与模型 (a)–(d) 的拟合属于不同类型。当需要预测未知肖特基势垒二极管的漏电流时，势垒高度可在一定程度上预先估计（例如根据正向特性或内光发射），而隧穿质量原则上无法先验设定。因此，同时拟合质量的模型不具备预测依据，其较小的均方根误差仅具有参考价值。本文中的物理模型仅拟合 Φ_{B}。拟合得到的恒定质量是一个唯象参数；在样品条件下，其数值处于根据 $m_{\mathrm{tun}}(E)$ 获得的等效质量范围内（0.25–$0.32 m_0$；图 11），这与如下解释一致：恒定质量是由载流电子的深度决定的等效质量（6.1 节）。

6. 讨论

6.1. 使用恒定质量得到的有效质量的解释

我们将恒定质量热场发射公式（$0.25 m_0$ 对于 Ti电极[3, 38] 以及 $0.30 m_0$ 通过拟合镍电极重掺杂样品的正向和反向特性得到[17]）所得到的数值视为等效质量 $m_{\mathrm{tun}}(E)$。图 11(a) 显示了恒定质量 m_{eff}，该质量使三角势垒中的隧穿电流与式 (29) 的 $m_{\mathrm{tun}}(E)$（不包括与质量无关的 TE 分量）相同。在低电场下， m_{eff} 接近带边值 $0.32 m_0$；随着电场增强而减小，并在 $F_{\mathrm{s}} \gtrsim F_{\mathrm{c}}$时趋于恒定，此时载流电子移动到费米能级附近。对于该样品的条件（0.3–1.4 兆伏/厘米，30–160 ℃）， $m_{\mathrm{eff}} = 0.25$–$0.32 m_0$，而此前报道的 Ti电极的 $0.25 m_0$ 对应于这一范围内高电场、低温的端点。

在图 11(b)所示的温度和势垒高度范围内， m_{eff} 随发射分布峰值深度$E_0 - E_{\mathrm{peak}}$的变化几乎遵循同一条曲线。 m_{eff} 大于该深度处的局部质量 $m_{\mathrm{tun}}(E)$；它是一个包含隧穿路径和发射能量分布贡献的有效量，而不是局部质量的简单算术平均值。因此，恒定质量可以解释为与承载电流的电子的深度相对应的等效质量。不过，本文通过数值方法得到的峰值深度必须与由恒定质量鞍点公式（第 3 节）给出的 Δ区分开来。已报道的有效质量之所以存在差异，部分可能反映了所分析的电场范围和温度（即 $F_{\mathrm{s}}/F_{\mathrm{c}}$）的不同，以及电极金属[38]之间的差异

也可能包括势垒高度导致的 F_{c} 差异。Treu等人[5] 同样从 W、钛和Ta电极的反向特性（$\Phi_{\mathrm{B}} = 0.95$–1.27电子伏特）中获得了 0.19–$0.30 m_0$ 。

Hara 等人[17] 的 $0.30 m_0$ 是通过将 Ni/4H-SiC（$N_{\mathrm{D}} = 4.2\times10^{15}$–$1.2\times10^{19}$ cm^{-3}）的正向和反向电流-电压特性拟合得到的，其中势垒高度和恒定质量作为参数。表 I X 展示了在其势垒模型中，与 m_{tun}（E）式（29）的电流相同的恒定质量（采用二次势垒、像力，以及与表III相同的条件）。在反向热场发射/场发射转变点处，$m_{\mathrm{eff}} = 0.23 m_0$，与图 11(a)中 $F_{\mathrm{s}} \gtrsim F_{\mathrm{c}}$ 的数值相当。相比之下，在正向偏置下，隧穿深度随 N_{D} 和正向电压变化，并且 $m_{\mathrm{eff}} = 0.25$–$0.32 m_0$。由于正向数据涵盖所有样品，同时拟合正向和反向特性的单一恒定质量很可能落在此范围内，而报告的 $0.30 m_0$ 确实如此。因此，报告的数值与 m_{tun}（E）一致。反过来， m_{tun}（E）预测，如果将恒定质量拟合限制在反向转变点附近，则所得数值约为 $0.23 m_0$。由于无法根据原论文定量确定其拟合中正向和反向数据的权重，因此这里只进行定性比较。

表 IX。 等效恒定质量 m_{eff} （单位为 m_0），在 Hara 等人[17] 的条件下，与 $m_{\mathrm{tun}}(E)$（式 (29)）产生相同电流：具有像力的二次势垒、WKB、费米–狄拉克供给函数，$T = 300\mathrm{K}$， $\varepsilon_{\mathrm{s}} = 10.32\varepsilon_0$。反向偏置：表 III 的转变点（$V_{\mathrm{R}}$ 由 $\Phi_{\mathrm{B}} = 1.43$–1。48eV 和$m_{\mathrm{tun}} = 0.30 m_0$确定）；正向偏置： $\Phi_{\mathrm{B}} = 1.45\mathrm{eV}$。

条件	N_{D} （cm^{-3}） 2.0×10^{17}	2.6×10^{18}	1.2×10^{19}
反向，TFE/FE 转变	0.225–0.227	0.227–0.229	0.231–0.233
正向， $V_{\mathrm{F}} = 0.2\mathrm{V}$	0.318	0.287	0.254
正向， $V_{\mathrm{F}} = 0.5\mathrm{V}$	0.319	0.296	0.270
正向， $V_{\mathrm{F}} = 0.8\mathrm{V}$	0.320	0.305	0.288

另一方面，镍电极的 $0.15 m_0$ 和钼电极的 $0.20 m_0$ [38] 低于当前模型中 m_{eff} 的下限（图中范围内为$0.22 m_0$ ）。这些差异可能还受到质量以外因素的影响，例如分析方法（势垒高度和 TFE–FE 转变的确定）、界面态以及势垒高度不均匀性的差异。

6.2. 像力的可辨识性

在比较的四种模型中，模型 (d) 同时考虑了像力和能量依赖质量。然而，在本研究的数据中，BL 的影响与 Φ_{B} 约 0.035 电子伏特的变化几乎无法区分。对于表 IV 中的恒定质量模型，在 0.3–1.4 兆伏/厘米范围内，总电流的增强在 300 K 时约为 2.7–4.6 倍，在 433 K 时约为 3.0–3.8 倍。这一结果有助于理解

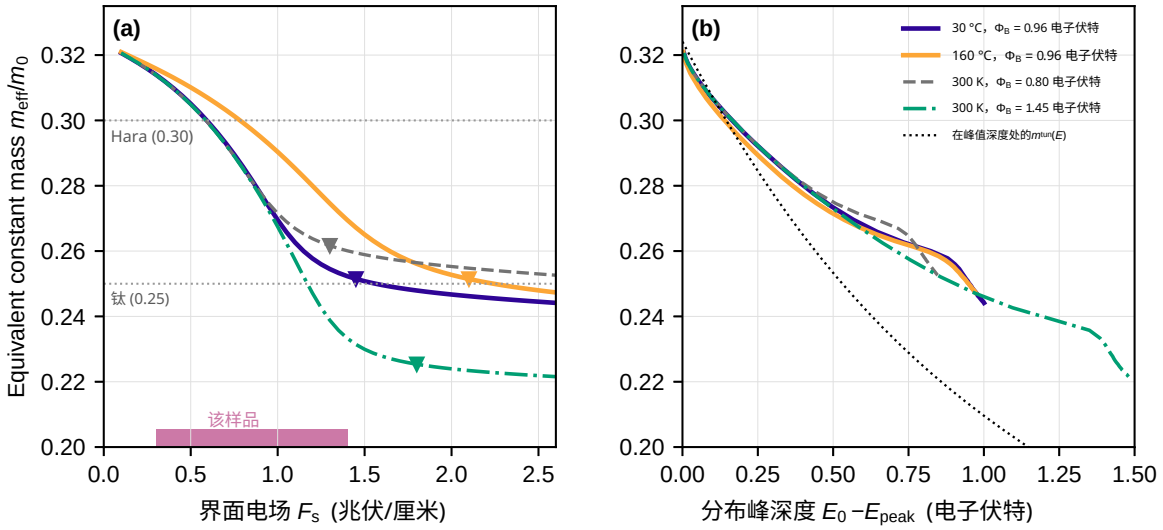

图 11. 等效恒定质量 m_{eff}，使三角势垒中的隧穿电流与 $m_{\mathrm{tun}}(E)$ 相同（式（29））。(a) 等效恒定质量对界面电场的依赖关系：温度为 30 和 $160\,^{\circ}$摄氏度（$\Phi_{\mathrm{B}} = 0.96$电子伏特；颜色对应图9的温度刻度），以及 300 K、$\Phi_{\mathrm{B}} = 0.80$电子伏特（灰色虚线）和 1.45 电子伏特（绿色点划线；Hara 等人[17]的势垒高度）。三角形标出各条件下的 F_{c}（$m_{\mathrm{tun}} = 0.31 m_0$），点线表示先前报道的恒定质量，底部色带表示样品的界面电场范围。Hara 等人条件下的等效质量列于表 IX。(b) 将相同结果绘制为发射分布峰值深度 $E_0 - E_{\mathrm{peak}}$ 的函数。黑色点线表示该深度处的 $m_{\mathrm{tun}}(E)$。不包括 TE 分量，且未计入像力。

像力的作用，并不直接代表模型 (c) 和模型 (d) 拟合结果之间的差异。在拟合中，像力导致的电流增量大部分被 Φ_{B} 的增加所抵消，因此仅凭本研究数据的可重复性，无法分离出像力的贡献。要确定 BL，需要在低场侧进行高精度测量，因为该侧的增强变化显著；或者结合能够独立确定 Φ_{B} 的测量结果（例如内光发射）。仅通过恒定质量降低 TE 势垒高度，不足以评估隧穿电流；这一点与 Li 等人的观察结果一致。[16]

6.3. 低温下的差异

在 30 和 $40\,^{\circ}$C 时，第 5 节比较的所有模型 (a)–(d) 的差异都很大。在 $30\,^{\circ}$C 时，$F_{\mathrm{s}}/F_{\mathrm{c}} = 0.96$ 在 950 伏特处，接近 TFE/FE边界，此处参考模型的鞍点接近费米能级（图 4）。在这一区域，式 (29) 中深处于带隙的 $m_{\mathrm{tun}}(E)$ 的使用、对位置相关质量的 WKB 近似处理，以及电子供给模型的准确性都变得至关重要。在低电压一侧，电流约为 $10^{-8}\mathrm{A/cm}^2$，，接近测量下限，噪声也会产生影响。势垒高度的横向非均匀性

势垒高度[39, 40] 在较低温度下也可能对电流产生更大影响。此外，还可能存在肖特基势垒电流以外的其他电流分量：耗尽区（体内）的产生-复合电流、终端氧化物界面处的表面产生-复合电流，以及体内深能级的电子发射。这些电流的温度依赖性和场依赖性与肖特基势垒电流不同；在电流较小的低温下，它们可能不可忽略。对这些因素的区分有待未来研究。

6.4. 高电压下的过剩电流

超过950 V后，测得的电流高于计算值；从约1050 V起，电流急剧增加，并在超过1100 V时达到电流上限（图9）。利用4H-SiC的碰撞电离系数估算有源区内的一维倍增，可得 $M_{\mathrm{n}}-1\approx 6\times10^{-7}$(950 V)、 8×10^{-6}(1100 V)和 1×10^{-4}(1300 V)，因此有源区内的雪崩无法解释这一过剩电流。边缘终端（JTE）处的击穿是一个可能原因，因为该处电场集中，但仅凭现有数据无法确定其贡献。此外，在950 V和 $160\,^{\circ}\mathrm{C}$下，电流密度约为0.17 A/cm^2, ，对应的功率密度超过100 W/cm^2；在直流测量中，自热可能使结温升至设定温度以上，从而增大漏电流。可通过包含JTE和碰撞电离的TCAD仿真预测终端的贡献。然而，考虑到计算成本，无法对整个器件进行仿真；只能仿真部分终端，再按周长缩放结果，因此未必能定量评估过剩电流。包含能量依赖质量的当前模型可以纳入TCAD（第6.5节）。在新的测量中，应通过脉冲测量抑制自热。此外，还应根据测试元件组（TEG）中不同终端结构器件之间漏电流的差异，评估终端的贡献。若进一步纳入电极直径不同的器件，还可以将漏电流分解为与面积和周长成正比的分量，从而分离出器件周边的贡献。

6.5. 器件仿真中的实现

当前模型可用于商业器件仿真器。在 Sentaurus Device 中，[41]非局域势垒隧穿模型根据肖特基接触计算 WKB 透射，其电流积分与公式（2）相同，但隧穿质量为常数，无法通过物理模型接口替换。然而，采用 TwoBand选项后，带隙中的虚波数遵循 Franz双带色散，[42]$\kappa^{-2}=\kappa^{-2}{}_{\mathrm{C}}+\kappa^{-2}{}_{\mathrm{V}}$，这等价于能量依赖质量

$$m_{\mathrm{F}}(\mathcal{E})=\frac{m_{\mathrm{C}}m_{\mathrm{V}}(E_{\mathrm{g}}+\mathcal{E})}{m_{\mathrm{V}}(E_{\mathrm{g}}+\mathcal{E})-m_{\mathrm{C}}\mathcal{E}},\tag{30}$$

其中 $\mathcal{E}$ 为公式（29）的$-\mathcal{E}$（即低于导带边缘的深度）。Sentaurus Device 还为带间隧穿提供 Kane双能带色散关系[36]，其中 m_{C}和 m_{V} 与约化质量相关；而在本文采用的 Franz 形式中，二者彼此独立。使用公式（29）的 m_{tun}（E）拟合 0.3–1.4 兆伏/厘米和 30–160 °C 范围内的 WKB电流，得到 $m_{\mathrm{C}} = 0.3171m_0$ 和 $m_{\mathrm{V}} = 0.2393m_0$（$m_{\mathrm{V}}$ 是拟合参数，而非空穴质量），均方根差为 0.005 dex。图 12比较了所得的 m_{F} 与m_{tun}（E）。低于导带边缘 0.8 电子伏特时，差异在 2.2% 以内；在 1 电子伏特处为 4.6%。在 0–1 电子伏特范围内直接将 m_{F} 拟合到 m_{tun}（E）得到 $m_{\mathrm{C}} = 0.3241m_0$ 和$m_{\mathrm{V}} = 0.232m_0$，质量最大差异为 4.4%，但此时电流差异达到 0.057 dex；因此采用根据电流拟合得到的数值。

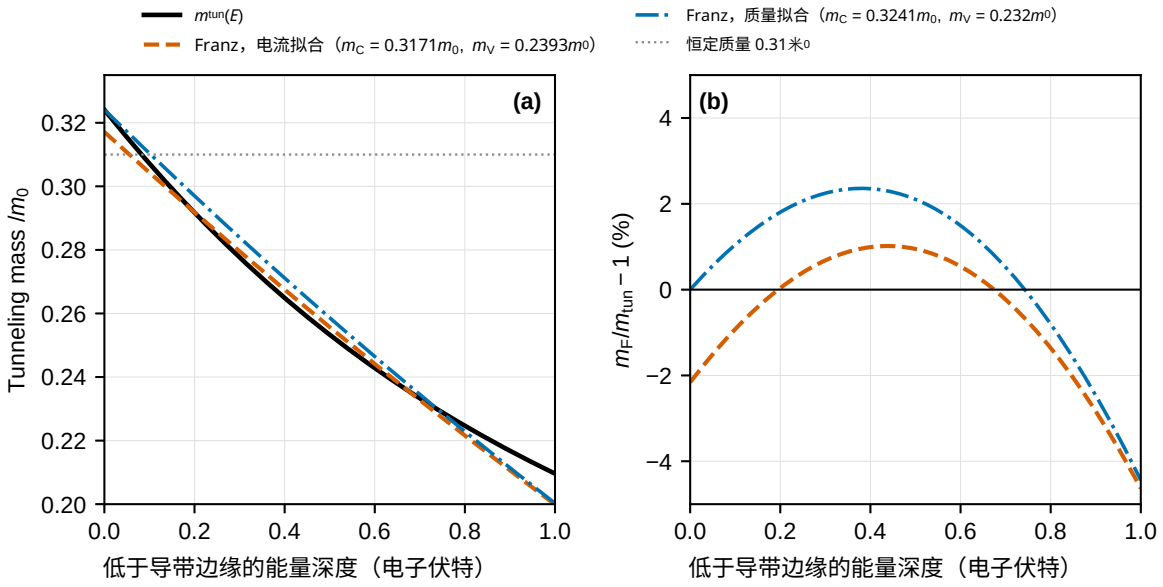

图 12. (a) 式（29）的能量相关隧穿质量 $m_{\mathrm{tun}}(E)$（实线）和式（30）的Franz双能带质量 m_{F} 随导带边缘以下深度 $-\mathcal{E}$的变化。虚线： $m_{\mathrm{C}} = 0.3171m_0$, $m_{\mathrm{V}} = 0.2393m_0$ 拟合WKB电流（用于模拟）；点划线： $m_{\mathrm{C}} = 0.3241m_0$, $m_{\mathrm{V}} = 0.232m_0$ 对$m_{\mathrm{tun}}(E)$本身在 0–1 电子伏特范围内进行拟合。点线表示恒定质量 $0.31m_0$。 $E_{\mathrm{g}} = 3.26$电子伏特。(b) 相对差值 $m_{\mathrm{F}}/m_{\mathrm{tun}} - 1$。

采用这些质量、模型（c）的势垒高度以及相同的 A_{R}、 N_{C}和 ε_{s} （补充数据，第 S7 节），对第 5 节样品进行一维模拟，在所有温度下均能将 950 V 时的 WKB电流复现到 0.013 dex 以内。加入像力（`BarrierLowering`，模型（d））后，在提高像力降低上限（默认值为 0.3 电子伏特）的前提下，950 V 时的吻合度在 0.035 dex 以内。在低电压下，模拟电流较小：在 50 V 和 160 °C 时，最多相差 0.10 dex（加入像力时为 0.13 dex）。这种差异源于漂移-扩散模型的肖特基边界条件：在没有隧穿的情况下，模拟的热发射电流为 $A_{\mathrm{R}}T^2e^{-\Phi_{\mathrm{B}}/k_{\mathrm{B}}T}$的 0.77 倍，与电压无关；这对应于热电子-扩散因子 $1/(1 + v_{\mathrm{R}}/v_{\mathrm{D}})$ [23] 在 $v_{\mathrm{R}}/v_{\mathrm{D}} \approx 0.3$时，即：

势垒高度低于 10 meV。采用Franz双带色散后，能量相关的隧穿质量因而可以直接纳入商业器件仿真器。在 JBS结构中，p^+ 区域之间肖特基界面处的电场会随元胞几何结构和反向电压发生二维变化，漏电流强烈依赖于该界面电场。通过 TCAD，本文总结的发射机制和能量尺度、基于复能带结构得到的隧穿质量，以及与测量数据的验证结果，可用于预测此类结构的漏电流，并进而应用于 JBS结构的设计。

7. 结论

我们将4H-SiC肖特基势垒二极管的反向漏电流视为费米–狄拉克供给函数与WKB透射的能量积分，并从理论上梳理了发射机制和隧穿输运。对于具有恒定质量且不考虑像力的三角势垒，$F_{\mathrm{s}}/F_{\mathrm{c}}$ 给出了鞍点深度 $\Delta = \Phi_{\mathrm{B}}(F_{\mathrm{s}}/F_{\mathrm{c}})^{2},$，并且鞍点在 $F_{\mathrm{s}} = F_{\mathrm{c}}$处达到费米能级。在非穿通耗尽近似下，$F_{\mathrm{s}}/F_{\mathrm{c}} = (E_{00}/k_{\mathrm{B}}T)\sqrt{B/\Phi_{\mathrm{B}}}$，这解释了为什么即使在 $E_{00}/k_{\mathrm{B}}T$较小的低掺杂层中，隧穿在高反向偏压下仍变得十分重要。艾里能量 E_{A} 和艾里长度 l_{A} 是控制电子波函数在势垒中衰减的尺度，并且源自与三角势阱中二维电子所满足的相同艾里方程。利用这些尺度，我们区分了TE与隧穿分量之间的交叉转变（$E_{\mathrm{A}} \approx 0.80k_{\mathrm{B}}T$）、TFE鞍点近似的指导条件（$\Delta = 3k_{\mathrm{B}}T$）以及形式上的热场发射/场发射边界（$\Delta = \Phi_{\mathrm{B}}$）。TFE/FE边界推广为 $c_1 k_{\mathrm{B}}T \approx 1$，其中包含费米能级处指数的斜率；对于重掺杂层的转变点，$c_1 k_{\mathrm{B}}T \approx 0.87$ 与 N_{D} 无关，直至 $1.2 \times 10^{19}\mathrm{cm}^{-3}$。

我们总结了三角势垒（FN、FE 和 TFE）与二次势垒（FE 和 TFE）的反向场发射和热场发射电流的闭式表达式，并重新审视了 PS公式。PS 的反向场发射公式（PS 的式（37）–（39））是反向电压远大于势垒高度时的首项，实际上就是三角势垒公式。在势垒曲率不可忽略的重掺杂层中（$N_{\mathrm{D}} = 10^{19}\mathrm{cm}^{-3}$，1–10 V），这些公式会将二次势垒的 WKB电流高估 1.4–7.9 倍，而采用精确b_1 和 c_1 的 FE表达式所得结果与之相差不超过 15%。对于 300–433 K 的低掺杂漂移层（表 B1 的条件），PS 的反向热场发射公式（PS 的式（50））给出的总 WKB电流是实际值的 2.5–3.6 倍，这是因为其前因子中的曲率经过近似处理，且采用了单侧高斯积分；在相同条件下，采用鞍点处精确曲率的表达式与总 WKB电流相差约 2% 以内。在低掺杂层的条件下，二次势垒的鞍点近似可化为三角势垒TFE公式。像力除了降低势垒顶之外，还会改变作用量积分；在 300 K、恒定质量条件下，总电流的增强在约 0.5 兆伏/厘米时最大，随后随电场增强而减小

在更高电场下，且该最大值的位置也取决于温度。另一方面，能量依赖隧穿有效质量能够体现高电场和低温下涉及的深能级能量的影响。这一观点为将传统恒定质量解释为取决于分析范围的等效质量提供了依据。例如，在相同条件下，Hara 等人的 $0.30m_0$ 与 $m_{\mathrm{tun}}(E)$ 的等效质量一致（正向偏置下为 0.25–$0.32m_0$，反向转变点处为 $0.23m_0$）。

作为一项应用，我们重新分析了Ti/4H-SiC肖特基势垒二极管在30–160 ℃和50–950 V下的反向特性。在对四种模型进行比较时，所有温度均采用相同的势垒高度进行拟合；在标称样品参数下引入 $m_{\mathrm{tun}}(E)$，无需质量调整参数即可获得0.11–0.12 dex的均方根误差，并改善了对电压依赖性的再现。施主浓度和层厚度与质量模型相关，而镜像力贡献无法与约0.035 eV的势垒高度调整区分开来；此外，该模型未纳入界面处的量子力学反射。因此，需要对样品进行独立表征，以辨识各项效应。后续将通过测量进一步考察低温和高电压下的特性；这些测量将区分肖特基势垒电流以外的电流分量（深能级、表面和终端电流），并考察自热效应。

预测物理模型是仅拟合 Φ_{B} 、并根据能带结构获取质量的能量依赖性的模型，因为对于未知器件，无法预先设定隧穿质量；作为参考，给出了与势垒高度共同拟合的恒定质量（均方根误差 0.078 dex）。该模型可通过 TwoBand选项在 Sentaurus Device 中实现，该选项采用 Franz 双能带色散关系：拟合电流得到的两个质量能够以 $m_{\mathrm{tun}}(E)$ 在 0.005 dex（均方根）以内复现电流，并且在低于导带边缘 0.8 电子伏特的范围内，将质量近似到 2.2% 以内。因此，该模型可用于 JBS结构设计中的漏电流预测。

数据可用性声明

复现本文图表和补充数据的代码、测得的反向电流–电压数据以及 Sentaurus Device 输入文件均可在 `https://doi.org/10.5281/zenodo.24337950` 处公开获取。

致谢

本工作得到了JSPS科研费项目（编号JP23K03928和JP26K07588）的资助，得到了Synopsys Japan G.K.通过东京大学VDEC、d.lab活动提供的支持，并获得了Toshiba Electronic Devices & Storage Corporation的学术研究资助。作者由衷感谢Shin-Ichiro Kuroki教授、Manabu Arai教授和Akira Toriumi教授提供开展这项

研究的机会。

附录 A. 三角势垒的TFE公式（Hatakeyama 公式）与临界电场

本附录推导第 3.4 节的三角势垒TFE公式 (23)（Hatakeyama 等人的公式 (3)[10]）以及临界电场 F_{c}。当在远高于费米能级处用玻尔兹曼形式近似供给函数时，公式 (2) 和 (4) 的被积函数变为 $\exp[-g(E)]$，其中

$$g(E)=\frac{4\sqrt{2m_{\mathrm{tun}}}}{3e\hbar F_{\mathrm{s}}}(E_0-E)^{3/2}+\frac{E-E_{\mathrm{F}}}{k_{\mathrm{B}}T}. \tag{A.1}$$

由 $g'(E_{\mathrm{p}})=0$ 可得，鞍点为

$$E_0-E_{\mathrm{p}}=\left(\frac{e\hbar F_{\mathrm{s}}}{2\sqrt{2m_{\mathrm{tun}}}k_{\mathrm{B}}T}\right)^2=\Phi_{\mathrm{B}}\left(\frac{F_{\mathrm{s}}}{F_{\mathrm{c}}}\right)^2,\qquad F_{\mathrm{c}}=\frac{2k_{\mathrm{B}}T\sqrt{2m_{\mathrm{tun}}\Phi_{\mathrm{B}}}}{e\hbar}, \tag{A.2}$$

鞍点处的函数值和曲率为

$$g(E_{\mathrm{p}})=\frac{\Phi_{\mathrm{B}}}{k_{\mathrm{B}}T}-\frac{(e\hbar F_{\mathrm{s}})^2}{24m_{\mathrm{tun}}(k_{\mathrm{B}}T)^3},\qquad g''(E_{\mathrm{p}})=\frac{4m_{\mathrm{tun}}k_{\mathrm{B}}T}{(e\hbar F_{\mathrm{s}})^2}. \tag{A.3}$$

进行高斯积分 $\int e^{-g''(E-E_{\mathrm{p}})^2/2}dE=\sqrt{2\pi/g''}$ 即可得到公式(23)。指数中的第二项是由隧穿引起的增量，等于$\Phi_{\mathrm{B}}(F_{\mathrm{s}}/F_{\mathrm{c}})^2/(3k_{\mathrm{B}}T)$。令艾里能量为 $E_{\mathrm{A}}=[(e\hbar F_{\mathrm{s}})^2/(2m_{\mathrm{tun}})]^{1/3}$，并令$e\hbar F_{\mathrm{s}}/\sqrt{2m_{\mathrm{tun}}}=E_{\mathrm{A}}^{3/2}$，

$$J_{\mathrm{TFE}}=A_{\mathrm{R}}T^2\exp\left(-\frac{\Phi_{\mathrm{B}}}{k_{\mathrm{B}}T}\right)\cdot\sqrt{\pi}\left(\frac{E_{\mathrm{A}}}{k_{\mathrm{B}}T}\right)^{3/2}\exp\left[\frac{1}{12}\left(\frac{E_{\mathrm{A}}}{k_{\mathrm{B}}T}\right)^3\right]. \tag{A.4}$$

第一个因子是热发射电流，因此热场发射电流等于热发射电流乘以一个仅取决于 $E_{\mathrm{A}}/k_{\mathrm{B}}T$ 的函数。

该公式要求鞍点位于费米能级（$F_{\mathrm{s}}<F_{\mathrm{c}}$）之上，且满足$E_{\mathrm{p}}-E_{\mathrm{F}}\gg k_{\mathrm{B}}T$；同时，鞍点应低于势垒顶，且两者之间的距离大于高斯分布的标准差（约为 $\sigma_E=1/\sqrt{g''}=\sqrt{2k_{\mathrm{B}}T\Delta}$），即 $\Delta\gtrsim 2k_{\mathrm{B}}T$（这是低场侧的极限，此时热场发射趋近于热发射）。对于 $F_{\mathrm{s}}>F_{\mathrm{c}}$，采用在费米能级处对指数进行线性化后得到的场发射公式；其收敛条件恰好是 $F_{\mathrm{s}}>F_{\mathrm{c}}$（式（22）；场发射公式和 Fowler–Nordheim 公式见补充数据的 S3 节）。该公式未计入像力。将降低了ΔU 的势垒高度代入该公式并不可行，因为该公式未考虑势垒形状的变化（第 4 节）。

附录 B。Padovani–Stratton 反向场发射和热场发射公式的重新评估

我们计算二次耗尽势垒的场发射电流和热场发射电流，并将其与 PS 的反向公式进行比较。[13] 在本附录中 $E_{\mathrm{F}}=0$。其中的能量以

国际单位制单位（J）表示，而数值表以电子伏特表示；在以电子伏特计算能量比时，包括 $k_{\mathrm{B}}T$ 在内的所有能量都必须采用相同单位。

附录*B.1.* 场发射公式

在费米能级 ($E = 0$) 附近将方程（5）的指数展开至一阶，$G(E) \simeq b_1 - c_1 E$，得到方程（24）的 b_1 和 c_1 以及场发射电流（25）（补充数据，第 S4.4 节）。PS 的方程（34）和（35）在 $eV_{\mathrm{n}} = 0$时与方程（24）一致。PS 的方程（37）和（38）是 $\Phi_{\mathrm{B}}/X \ll 1$、$b = 2\Phi^{3/2}{}_{\mathrm{B}}/(3E_{00}\sqrt{B})$ 和 $c = \sqrt{\Phi_{\mathrm{B}}/B}/E_{00}$ 的首项，其中 $eV_{\mathrm{n}} = 0$；这些分别是三角势垒的 b 和 c。比值为 $b_1/b = 1 + \Phi_{\mathrm{B}}/(5X) + \cdots$ 和 $c_1/c = 1 + \Phi_{\mathrm{B}}/(3X) + \cdots$。

附录*B.2.* 鞍点和指数

在 $X = eV_{\mathrm{R}} - eV_{\mathrm{n}}$ 下，体材料导带边缘为 $E_{\mathrm{C,\,b}} = -X$ 能带弯曲为 $B = \Phi_{\mathrm{B}} + X$。公式（5）的指数的导数为

$$G'(E) = -\frac{1}{E_{00}}\operatorname{arcosh}\frac{1}{\sqrt{u}}, \qquad G''(E) = \frac{1}{2E_{00}B\,u\sqrt{1-u}}, \qquad u = \frac{E - E_{\mathrm{C,b}}}{B}. \tag{B.1}$$

采用玻尔兹曼供给时，鞍点位于 $G'(E_{\mathrm{m}}) = -1/k_{\mathrm{B}}T$，其中 $t = E_{00}/k_{\mathrm{B}}T$，

$$E_{\mathrm{m}} = -X + B\operatorname{sech}^2 t, \tag{B.2}$$

该点位于势垒顶下方 B 双曲正切$^2\,t$。鞍点处的指数为

$$G(E_{\mathrm{m}}) + \frac{E_{\mathrm{m}}}{k_{\mathrm{B}}T} = \frac{B}{E_{00}}\tanh t - \frac{X}{k_{\mathrm{B}}T} = \frac{\Phi_{\mathrm{B}}}{E_{0,\mathrm{PS}}} - \frac{X}{E'} \tag{B.3}$$

其中 $E_{0,\,\mathrm{PS}} = E_{00}$ 双曲余切 t 且 $E' = E_{00}/(t -$ 双曲正切 $t)$。这与 PS 的公式（45）–（49）相同；电压斜率 $1/E'$ 和温度依赖性均与其结果一致。

附录*B.3.* 前因子

鞍点处的曲率为 $G''(E_{\mathrm{m}}) = \cosh^2 t/(2E_{00}B$ 双曲正切 $t)$。计算高斯积分 $\int e^{-G''(E-E_{\mathrm{m}})^{2/2}}dE = \sqrt{2\pi/G''}$ 得到公式（26）。PS 公式（50）的前因子为 $(A_{\mathrm{R}}T/k_{\mathrm{B}})\sqrt{\pi E_{00}(eV_{\mathrm{R}} + \Phi_{\mathrm{B}}\operatorname{sech}^2 t)}$，二者之比为

$$\frac{J_{\mathrm{PS(50)}}}{J_{\mathrm{TFE}}^{\mathrm{quad}}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\tanh t}}\cdot\sqrt{\frac{eV_{\mathrm{R}} + \Phi_{\mathrm{B}}\operatorname{sech}^2 t}{B\operatorname{sech}^2 t}}. \tag{B.4}$$

第二个因子是主要差异。PS 的曲率系数（其公式（24）和（44））对应于将公式（B.1）中的 $\sqrt{1-u}$ 设为 1；当鞍点远低于势垒顶（$u \ll 1$）时，这一近似是有效的。在 TFE机制中，尤其是对于 $E_{00} \ll k_{\mathrm{B}}T$ $u = \operatorname{sech}^2 t \simeq 1$ 的情况，曲率会被低估一个双曲正切 t 的因子，而电流则会被高估。第一个因子源于公式（50）

PS 的公式（50）对应于高斯积分的一侧（推测是由于省略了其公式（17）中的误差函数项）。第三个因子反映了括号中内容的差异，对于 $t \ll 1$ 而言几乎等于 1。由于指数一致，PS 在其实验分析中所采用的斜率和势垒高度受到的影响很小。

附录*B.4.* 数值检验及其与三角势垒的关系

表 B1 显示了对于二次势垒，式 (26) 和 PS 的式 (50) 相对于 WKB 数值积分 (2) 的误差。在这些条件下，式 (26) 与包含热发射（TE）在内的 WKB 总电流相差约 2% 以内（仅考虑隧穿分量时相差 8% 以内）；而在 300–433 K 时，PS 的式 (50) 对 SiC 漂移层给出的电流大 2.5–3.6 倍，在 100 K 时大 1.45 倍，而对于 $10^{18}\,\mathrm{cm}^{-3}$（1 V，超出 PS 式 (51) 的有效范围），则小 14%。当鞍点接近势垒顶，且二者间距在高斯分布的标准差 $\sigma_E = 1/\sqrt{G''(E_\mathrm{m})}$ 左右时，式 (26) 的误差会增大；例如，对于 $10^{16}\,\mathrm{cm}^{-3}$、300 K 和 10 V，误差为−6.6%，在有效范围边缘则达到约 15%（图 S2）。

表 B1. 相对于总 WKB电流（式 (2)）的热场发射公式误差，其中包括势垒顶以上的热发射分量。 $\Phi_\mathrm{B} = 1.0$电子伏特， $m_\mathrm{tun} = 0.31 m_0$， $\varepsilon_\mathrm{r} = 10.03$。 E_m 是相对于费米能级测得的鞍点。 †低于 PS 式 (51) 给出的热场发射最小偏压（该条件下约为 1.25 伏特），即超出 PS 公式的有效范围。

N_D (厘米$^{-3}$)	T (开尔文)	V_R (伏特)	t	E_m (电子伏特)	式 (26)	PS 方程（50）
5×10^{15}	300	300	0.029	0.751	+1.1%	+198%
5×10^{15}	433	300	0.020	0.880	+2.0%	+261%
10^{16}	100	10	0.122	0.838	+0.5%	+45%
10^{16}	300	100	0.041	0.833	+1.5%	+152%
10^{18}	300	1	0.407	0.713	+1.1%	−14%†

对双曲正切 $t \simeq t - t^3/3$ 进行展开，取 $t \ll 1$ 并使用 $F_\mathrm{s}^2 = 2N_\mathrm{D}B/\varepsilon_\mathrm{s}$（$B$，单位为 J），式 (26) 在指数和前因子两方面均与三角势垒TFE公式 (23) 一致。指数中的下一项为 $-(2/15)\,(B/k_\mathrm{B}T)\,t^4$；对于 $N_\mathrm{D} = 5\times10^{15}$ cm^{-3}、$V_\mathrm{R} \le 300$ V 和 30–160 °C，这两个公式的差异小于 0.3%。因此，在这些条件下，三角势垒TFE公式实际上等同于二次势垒热场发射公式，且比 PS 的式 (50) 更准确。

附录 C. 数值方法

附录 *C.1.* 界面电场和内建电势

中性区中的费米能级位置为 $eV_\mathrm{n} = k_\mathrm{B}T\ln[N_\mathrm{C}(T)/N_\mathrm{D}]$，有效态密度为 $N_\mathrm{C}(T) = 1.7\times10^{19}(T/300)^{3/2}\,\mathrm{cm}^{-3}$，且 $eV_\mathrm{bi} = \Phi_\mathrm{B} - eV_\mathrm{n}$。

当耗尽层宽度 $W_{\mathrm{d}} = \sqrt{2\varepsilon_{\mathrm{s}}(V_{\mathrm{R}} + V_{\mathrm{bi}})/(eN_{\mathrm{D}})}$不超过漂移层厚度 d时，采用了公式（6）的第一行；对于 $W_{\mathrm{d}} > d$ （对于该样品，即高于约 450 V），在整个漂移层均耗尽的穿通状态下采用第二行。忽略了衬底侧的耗尽以及像力修正对界面电场的影响。我们采用了沿 c 轴的相对介电常数，$\varepsilon_{\mathrm{r}} = 10.03$[25]（该数值由对 6H-SiC 的测量获得，通常也用于 4H-SiC）。

附录 *C.2.* 拟合程序

对于每个温度，在 50–950 V 范围内每隔 25 V 设定一个评估电压，共 37 个；将测量点中与各评估电压相差不超过 ± 12.5V 的点的 $\log_{10} J$ 中位数作为测量值。品质因数为八个温度下 296 个点的 $\log_{10}(J_{\mathrm{calc}}/J_{\mathrm{meas}})$ 均方根误差（RMSE），并使用布伦特法，在 0.55–1.15 eV 范围内调整 Φ_{B}，使 RMSE 最小。

灵敏度分析见第5.4节和表 VIII。

参考文献

1) T. Kimoto, 《日本应用物理学杂志》**54**, 040103 (2015). 2) M. Bhatnagar, P. K. McLarty, and B. J. Baliga, 《IEEE电子器件快报》**13**, 501 (1992). 3) T. Hatakeyama, M. Kushibe, T. Watanabe, S. Imai, and T. Shinohe, 《材料科学论坛》**433–436**, 831 (2003). 4) J. Crofton and S. Sriram, 《IEEE电子器件汇刊》**43**, 2305 (1996). 5) M. Treu, R. Rupp, H. Kapels, and W. Bartsch, 《材料科学论坛》**353–356**, 679 (2001). 6) B. J. Baliga, 《功率半导体器件基础》（施普林格，纽约，2008）。7) B. J. Baliga, 《IEEE电子器件快报》**5**, 194 (1984). 8) S. M. Sze and K. K. Ng, 《半导体器件物理》（威立，霍博肯，新泽西州，2007），第3版。9) E. H. Rhoderick and R. H. Williams, 《金属-半导体接触》（克拉伦登出版社，牛津，1988），第2版。10) T. Hatakeyama and T. Shinohe, 《材料科学论坛》**389–393**, 1169 (2002). 11) R. H. Fowler and L. Nordheim, 《伦敦皇家学会会刊 A》**119**, 173 (1928). 12) E. L. Murphy and R. H. Good, Jr., 《物理评论》**102**, 1464 (1956). 13) F. A. Padovani and R. Stratton, 《固态电子学》**9**, 695 (1966). 14) R. Stratton, 《物理评论》**125**, 67 (1962). 15) C. R. Crowell and V. L. Rideout, 《固态电子学》**12**, 89 (1969). 16) W. Li, D. Jena, and H. G. Xing, 《应用物理学杂志》**131**, 015702 (2022). 17) M. Hara, H. Tanaka, M. Kaneko, and T. Kimoto, 《应用物理快报》**120**, 172103 (2022). 18) Y. Murakami, S. Nagamizo, H. Tanaka, and N. Mori, 《日本应用物理学杂志》**62**, SC1042 (2023). 19) R. Tsu and L. Esaki, 《应用物理快报》**22**, 562 (1973). 20) G. Wellenhofer and U. R¨ossler, 《固态物理 B》**202**, 107 (1997). 21) C. R. Crowell, 《固态电子学》**8**, 395 (1965). 22) C. R. Crowell, 《固态电子学》**12**, 55 (1969). 23) C. R. Crowell and S. M. Sze, 《固态电子学》**9**, 1035 (1966). 24) J. Nicholls, S. Dimitrijev, P. Tanner, and J. Han, 《科学报告》**9**, 3754 (2019). 25) L. Patrick and W. J. Choyke, 《物理评论 B》**2**, 2255 (1970). 26) F. W. J. Olver, A. B. Olde Daalhuis, D. W. Lozier, B. I. Schneider, R. F. Boisvert, C. W. Clark, B. R. Miller, B. V. Saunders, H. S. Cohl, and M. A. McClain（编），*NIST* 数学函数数字图书馆，第*9*章：艾里函数及相关函数 [https://dlmf.nist.gov/9]。

27) F. Stern, 《物理评论 B》**5**, 4891 (1972). 28) T. Ando, A. B. Fowler, and F. Stern, 《现代物理评论》**54**, 437 (1982). 29) F. W. J. Olver, A. B. Olde Daalhuis, D. W. Lozier, B. I. Schneider, R. F. Boisvert, C. W. Clark, B. R. Miller, B. V. Saunders, H. S. Cohl, and M. A. McClain（编），*NIST* 数学函数数字图书馆，第*12*章：抛物柱函数 [https://dlmf.nist.gov/12]。30) F. W. J. Olver, 《国家标准局研究杂志》**63B**, 131 (1959). 31) K. H. Gundlach, 《固态电子学》**9**, 949 (1966). 32) W. Li, K. Nomoto, D. Jena, and H. G. Xing, 《应用物理快报》**117**, 222104 (2020). 33) R. G. Forbes, 《应用物理快报》**89**, 113122 (2006). 34) V. Heine, 《物理学会会刊》**81**, 300 (1963). 35) Y.-C. Chang and J. N. Schulman, 《物理评论 B》**25**, 3975 (1982). 36) E. O. Kane, 《应用物理学杂志》**32**, 83 (1961). 37) T. Hatakeyama, T. Watanabe, T. Shinohe, K. Kojima, K. Arai, and N. Sano, 《应用物理快报》**85**, 1380 (2004). 38) H. Okino, N. Kameshiro, K. Konishi, A. Shima, and R. Yamada, 《应用物理学杂志》**122**, 235704 (2017). 39) J. H. Werner and H. H. G¨uttler, 《应用物理学杂志》**69**, 1522 (1991). 40) R. T. Tung, 《物理评论 B》**45**, 13509 (1992). 41) *Sentaurus*器件用户指南，版本 *W-2024.09*（Synopsys，山景城，加利福尼亚州，2024）。42) W. Franz, 载于《物理学手册》，S. Fl¨ugge（编）（施普林格，柏林，1956），第17卷，第155页。