arXiv:2611.32149v1 [math.GR] 24 Nov 2026

Babai–Goodman–Pyber 定理中的最优指数

SHAOWU ZHENG

摘要。Babai、Goodman 和 Pyber 证明，存在一个绝对常数 c，使得 $[X:\mathrm{Rad}(X)] \le [X:H]^c$，对任意有限群 X 和任意可解子群 $H \le X$ 均成立，其中 $\mathrm{Rad}(X)$ 表示 X 的最大可解正规子群。我们证明，c 的最小可能值为

$$b_0 = 1 + \log_9(168 \cdot 24^{1/3}) \approx 3.8141.$$

对于非可解的 X，我们得到更强的不等式 $[X:\mathrm{Rad}(X)] \le 24^{-1/3}[X:H]^{b_0}$，且系数 $24^{-1/3}$ 对于此指数是最优的。我们将问题归结为有限单群自同构群的可解子群的界。基于 $\mathrm{PSL}_2(8)$ 的例子证明了该界是尖锐的。

1. 引言与主要结果

设 X 是一个有限群，且 $H \le X$ 是可解的。记 $\mathrm{Rad}(X)$ 为 X 的最大可解正规子群。Babai、Goodman 和 Pyber [1, 定理 2.13] 证明，存在一个绝对常数 c，使得

$$[X:\mathrm{Rad}(X)] \le [X:H]^c.$$

他们猜想可以取 $c = 7$ [1, 猜想 6.6]。一个归因于 Babai、Goodman 和 Pyber 的更强猜想 [13, 问题 17.41(a)], 指出，当 $\mathrm{Rad}(X) = 1$ 时，H 的七个共轭的交为平凡群。这将意味着 $c = 7$ 即可。Vdovin 后来猜想，在相同假设下五个共轭即可 [13, 问题 17.41(b)]。对于具有可解点稳定子的有限本原置换群，Burness [4, 定理 1] 证明了，存在点稳定子的五个共轭，使其交为平凡群。对于素数幂指数 $m = [X:H] = p^a$，Bastos 和 Schneider [2, 定理 4] 证明了 $[X:\mathrm{Rad}(X)] \le m^5$，并在 $p \ne 13$ 时将其改进为 $[X:\mathrm{Rad}(X)] \le m^4$。

我们确定了对所有有限群 X 和可解子群 $H \le X$ 而言 c 的最小可能值。令

$$\delta = 24^{1/3}, \qquad r_0 = \log_9(168\delta), \qquad b_0 = 1 + r_0 \approx 3.8141.$$

定理 A。对于每个有限群 X 及其每个可解子群 $H \le X$，

$$[X:\mathrm{Rad}(X)] \le [X:H]^{b_0}.$$

若 X 不可解，则有更强的不等式 $[X:\mathrm{Rad}(X)] \le \delta^{-1}[X:H]^{b_0}$。指数 b_0是第一个不等式中可能的最小指数。对于此指数，δ^{-1} 是第二个不等式中可能的最小系数。

定理 B。设 $r \ge 0$。以下命题等价。

(i) 对于每个非阿贝尔有限单群 T及每个可解子群 $B \le \mathrm{Aut}(T)$，$\delta|B| \le [T:B\cap T]^r$。(ii) 对于每个有限群 X 及其每个可解子群 $H \le X$，$[X:\mathrm{Rad}(X)] \le [X:H]^{r+1}$。

此外，若(i) 成立，则对于每个非可解有限群 X 及其每个可解子群 $H \le X$，有 $[X:\mathrm{Rad}(X)] \le \delta^{-1}[X:H]^{r+1}$。

由定理 B取 $r = r_0$，即得定理 A。定理 B 中蕴含 (i)⇒(ii) 的证明使用了 $X/\mathrm{Rad}(X)$ 的非阿贝尔底群，以及可解置换群的 Dixon 界 [8, 定理 3]。反向蕴含的证明使用了迭代

日期：2026年11月。2020 数学主题分类。主分类：20D60；次分类：20D05、20D10。关键词和短语。有限群、可解子群、可解根、有限单群、Babai–Goodman– Pyber 定理。

与 Sym(4) 的非本原 wreath 积。定理 A 中指数和系数的最优性由定理 B 和命题 2.1 得出。

为建立这一不等式，我们通过对单群的阶进行归纳，证明非阿贝尔有限单群的一个一致估计（定理 3.2）。我们利用有限单群分类处理交错群、散在群和李型群族。对于散在群和蒂茨群，我们使用 Burness 的结果 [5]。我们使用 Mann 的结果 [16] 来确定当 $n \geq 3$时 $\mathrm{PSL}_n(q)$ 的可解子群的最大阶。最小指标界 [11] 处理 $\mathrm{PSU}_3(q)$、$\mathrm{PSU}_5(q)$ 和 $\mathrm{PSp}_4(q)$，包括 $\mathrm{PSU}_4(2) \cong \mathrm{PSp}_4(3)$。对于其余的经典群以及特征为 p 的分裂例外群 $E_6(q)$、$E_7(q)$ 和 $E_8(q)$，我们分别考察满足 $O_p(U) \neq 1$ 的可解子群 U 以及满足 $O_p(U) = 1$ 的可解子群。在第一种情形中，Borel–Tits 定理 [10, 3] 将 U 置于一个抛物子群中，从而使我们能够对其 Levi 商群的非阿贝尔合成因子应用归纳法。在第二种情形中，我们使用可解线性群和环面正规化子[17, 22, 20]的界。其余七个例外群族则利用真子群指标的下界进行处理。

A附录 A 给出了 $\mathrm{PSL}_2(q)$ 剩余的算术检验，以及对 t he rema余下经典抛物情形的枚举。

本文安排如下。第 2 节证明局部到整体等价性及其锐性。第 3 节给出一致约化。第 4–7 节建立各简单群族的估计。最后，第 8 节完成定理 A 的证明。

2. 局部到整体等价性及其锐性

定理 *B* 的证明。 假设 (i) 成立。设 X 是一个有限群，且 $H \leq X$ 可解。记 $R = \mathrm{Rad}(X)$、$G = X/R$ 和 $J = HR/R$。则 J 可解，且 $\mathrm{Rad}(G) = 1$。若 $G = 1$，则 $[X : R] = 1$，故 (ii) 成立。假设 $G \neq 1$。由于 $H \leq HR$，我们有 $[G : J] = [X : HR] \mid [X : H]$。由于 $[X : R] = |G| = [G : J]|J|$，只需证明 $|J| \leq \delta^{-1}[G : J]^r$。

为应用 (i)，我们考虑 J 对 G的基的单因子的作用。

步骤 *1*。对单因子的作用。

由于 $\mathrm{Rad}(G) = 1$，G的基具有如下形式：$S = \mathrm{Soc}(G) = T_1 \times \cdots \times T_k$，其中 $k \geq 1$和所有T_i 都是非阿贝尔单群。由于 $S \trianglelefteq G$，由 J 进行共轭会诱导出 S的自同构。由于$T_1, \ldots, T_k$是 S的极小正规子群，这些自同构会置换各个因子。令K为 J在 $\{T_1, \ldots, T_k\}$上的作用的核，并令 $P \leq \mathrm{Sym}(k)$ 为 J诱导的置换群。那么 $P \cong J/K$ 是可解的，且 $|J| = |K||P|$。我们使用 (i) 对 $|K|$ 进行界定，并使用 Dixon 界对 $|P|$ 进行界定。

步骤 *2*。界定 $|K|$。

由于 K 正规化每个 T_i，共轭给出一个同态 $K \to \mathrm{Aut}(T_i)$。令 B_i 为其像，并将 T_i 与 $\mathrm{Aut}(T_i)$ 中的内自同构群对应起来。记 $W_i = B_i \cap T_i$。由于 B_i是可解群 K的同态像，因此它是可解的。

我们首先证明 K 忠实地作用于 S。由于 $S \trianglelefteq G$，我们有 $C_G(S) \trianglelefteq G$。如果 $C_G(S) \neq 1$，则它包含 G的一个极小正规子群 N。根据基的定义，$N \leq S$，因而 $N \leq S \cap C_G(S) = Z(S) = 1$，矛盾。因此 $C_G(S) = 1$。同态 $K \to B_i$诱导出一个同态 $K \to \prod_{i=1}^k B_i$。由于其核为 $C_K(S) \leq C_G(S) = 1$，该同态是单射。因此 $|K| \leq \prod_{i=1}^k |B_i|$。对每个 B_i应用 (i)，我们得到

$$|K| \leq \prod_{i=1}^{k} |B_i| \leq \delta^{-k} \left(\prod_{i=1}^{k} [T_i : W_i] \right)^r .$$

现在我们用 $[G$ 对指数乘积进行界定：$J]$。由于每个 T_i 在 S 中都是正规的，因此 S 中的每个元素都会正规化每个 T_i。根据 K 的定义，我们有 $J \cap S \leq K$。对于 $x = (x_1, \ldots, x_k) \in J \cap S$，由 x 在 T_i 上诱导的共轭是由 x_i 诱导的内自同构。由于 $x \in K$，该自同构属于 B_i，因此 $x_i \in W_i$。于是 $J \cap S \leq \prod_{i=1}^k W_i$。因此，

$$\prod_{i=1}^{k} [T_i : W_i] = [S : \prod_{i=1}^{k} W_i] \mid [S : J \cap S] = [SJ : J] \mid [G : J].$$

由于 $r \geq 0$，我们得出 $|K| \leq \delta^{-k}[G : J]^r$。

步骤 *3*。完成界。

由于 P 是一个次数为 k的可解置换群，Dixon 界 [8, 定理 3] 给出 $|P| \leq 24^{(k-1)/3} = \delta^{k-1}$。将其与关于 K的界结合，我们得到 $|J| = |K||P| \leq \delta^{-1}[G : J]^r$。因此

$$[X : R] = |G| = [G : J]|J| \leq \delta^{-1}[G : J]^{r+1} \leq \delta^{-1}[X : H]^{r+1}.$$

这就证明了最后一个断言；由于 $\delta > 1$，(ii) 也得到了证明。

反过来，假设 (ii) 成立。设 T 是一个非阿贝尔有限单群，且 $B \leq \mathrm{Aut}(T)$ 可解。将 T 视为其内自同构群，记 $h = [T\colon B \cap T]$。我们旨在证明 $\delta|B| \leq h^r$。设 $A = TB \leq \mathrm{Aut}(T)$。由于 $T \trianglelefteq \mathrm{Aut}(T)$，我们有 $[A\colon B] = h$ 以及 $|A| = h|B|$。因此，只需证明 $\delta|A| \leq h^{r+1}$。

为证明这一点，我们构造有限群 X，使得 $\mathrm{Rad}(X) = 1$，并构造可解子群 $H \leq X$，然后应用 (ii)。设 $n \geq 1$，并设 $Q \leq \mathrm{Sym}(n)$ 可解。设 $X = A^n \rtimes Q$ 和 $H = B^n \rtimes Q$，其中 Q 对坐标进行置换。则 H 可解，且 $[X\colon H] = h^n$。

我们首先证明 $\mathrm{Rad}(X) = 1$。令 $M = T^n \trianglelefteq X$。如果 $N \trianglelefteq X$ 可解，则 $N \cap M$ 是 M的可解正规子群。由于 M是非阿贝尔单群的直积，因此有 $N \cap M = 1$。由于 N和 M都是 X的正规子群，因此有 $[N, M] \leq N \cap M = 1$。于是 $N \leq C_X(M)$。由于$Z(T) = 1$，我们有 $C_{\mathrm{Aut}(T)}(\mathrm{Inn}(T)) = 1$，从而 $C_A(T) = 1$。$C_X(M)$中的每个元素都正规化 M的每个单因子。由于 A^n 正规化这些因子中的每一个，而 Q 忠实地置换它们，因此可得 $C_X(M) \leq A^n$。因此，$C_X(M) = C_{A^n}(M) = C_A(T)^n = 1$。故 $N = 1$，从而证明了 $\mathrm{Rad}(X) = 1$。将 (ii) 应用于 X 和 H，我们得到

$$|A|^n|Q| = |X| \leq [X : H]^{r+1} = h^{n(r+1)}.$$

取 n 次方根，得到 $|A||Q|^{1/n} \leq h^{r+1}$。剩下的任务是选择次数为 n 的可解置换群 Q，使得 $|Q|^{1/n} \to \delta$。令 $Q_0 = 1$ 在一个点上作用，并定义 $Q_{s+1} = Q_s \wr$ 在非本原作用下的 $\mathrm{Sym}(4)$。每个 Q_s 都是次数为 $n_s = 4^s$ 的可解群。由于 $|Q_{s+1}| = 24|Q_s|^4$，由归纳法可得 $|Q_s| = 24^{(n_s-1)/3} = \delta^{n_s-1}$。将 $Q = Q_s$ 代入前述不等式，得到 $|A|\delta^{1-1/n_s} \leq h^{r+1}$。由于 $n_s \to \infty$，可推出 $\delta|A| \leq h^{r+1}$。由于 $|A| = h|B|$，我们得出 $\delta|B| \leq h^r$，从而证明了 (i)。

□

命题 2.1。设 $T = \mathrm{PSL}_2(8)$，并设 $B = A\Gamma L_1(8) \leq \mathrm{Aut}(T)$ 是 $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_8)$上的一个点稳定子。对于 $X = TB$ 和 $H = B$，有 $\mathrm{Rad}(X) = 1$，且 $[X : \mathrm{Rad}(X)] = \delta^{-1}[X\colon H]^{b_0}$.

证明。我们有 $|B| = 8 \cdot 7 \cdot 3 = 168$, $|B \cap T| = 56$ 以及 $|T| = 504$。因此 $[X\colon H] = [T\colon B \cap T] = 9$。由于 X 是几乎单群，$\mathrm{Rad}(X) = 1$。此外，$|X| = 9 \cdot 168$ 且 $9^{b_0} = 9 \cdot 168\delta$。于是

$$[X : \mathrm{Rad}(X)] = |X| = \delta^{-1}9^{b_0} = \delta^{-1}[X : H]^{b_0}.$$

□

3. 有限单群的统一约化

根据定理 B，只需证明对每个非阿贝尔有限单群T 以及每个可解子群 $B \leq \mathrm{Aut}(T)$，均有 $\delta|B| \leq [T\colon B \cap T]^{r_0}$。

引理 3.1. 设 T 是一个非阿贝尔有限单群，且设 $s > 0$ 和 $k > 1$。假设

$$\delta|\mathrm{Out}(T)|\,|T| < k^{1+s}. \tag{3.1}$$

那么，每个满足 $[T\colon B \cap T] \geq k$ 的可解子群 $B \leq \mathrm{Aut}(T)$ 均满足 $\delta|B| < [T\colon B \cap T]^s$.

证明。记 $h = [T\colon B \cap T]$。由于 $B/(B \cap T) \cong BT/T \leq \mathrm{Out}(T)$，我们有

$$\delta|B| \leq \frac{\delta|\mathrm{Out}(T)|\,|T|}{h} < \frac{k^{1+s}}{h} \leq h^s.$$

□

对于有限群 X，定义 $\sigma(X) = \max\{|K|\colon K \leq X,\ K \text{ 可解}\}$。在本文其余部分，固定 $s = 39/14 < r_0$。对于非阿贝尔有限单群 T，考虑以下不等式

$$\sigma(T)^{1+s} < |T|^s, \tag{3.2}$$

$$\delta|\mathrm{Out}(T)|\sigma(T)^{1+s} < |T|^s. \tag{3.3}$$

假设 T满足（3.3），并令 $B \leq \mathrm{Aut}(T)$ 为可解群。由于 $|B \cap T| \leq \sigma(T)$，我们有$[T\colon\ B \cap T] \geq |T|/\sigma(T) > 1$。取 $k = |T|/\sigma(T)$ 后，条件（3.1）等价于（3.3）。因此，引理 3.1 和 $s < r_0$ 给出 $\delta|B| < [T\colon\ B \cap T]^s < [T\colon\ B \cap T]^{r_0}$。

定理 3.2。每个非阿贝尔有限单群 T 都满足(3.2)。此外，(3.3) 当且仅当以下情况成立时不成立

$$T \cong \mathrm{PSL}_2(8), \quad \mathrm{PSL}_2(16), \quad or \quad \mathrm{PSL}_3(3).$$

这三个例外群将分别处理。下文中的一些结果假设（3.2）对阶较小的所有非阿贝尔单群都成立。这一假设将在第 8 节通过对 $|T|$ 使用归纳法予以证明。

对于有限群 X，令 $c(X)$ 为其阿贝尔合成因子的阶的乘积，按重数计。

引理 3.3。设 X 为有限群，且 S_1、.....、S_m 为其非阿贝尔合成因子，按重数计。则 $\sigma(X) \leq c(X)\prod_{i=1}^{m}\sigma(S_i)$。

证明。若 $N \trianglelefteq X$，则对于每个可解群 $K \leq X$，$|K| = |K \cap N|\,|KN/N| \leq \sigma(N)\sigma(X/N)$。因此$\sigma(X) \leq \sigma(N)\sigma(X/N)$。

设 $1 = X_0 \lhd X_1 \lhd \cdots \lhd X_t = X$ 是 X 的一个合成列。对 $i = 1, \ldots, t$ 中的 $X_{i-1} \trianglelefteq X_i$ 应用前述不等式，我们得到 $\sigma(X) \leq \prod_{i=1}^{t}\sigma(X_i/X_{i-1})$。这里，当 X_i/X_{i-1} 为阿贝尔群时，$\sigma(X_i/X_{i-1}) = |X_i/X_{i-1}|$。由于阿贝尔因子的阶的乘积为 $c(X)$，结论得证。□

4. $\mathrm{PSL}_2(q)$、交错群与散在群

本节中，我们将对 $\mathrm{PSL}_2(q)$（其中 $q \notin \{8,16\}$）、交错单群、散在单群以及蒂茨群证明 (3.3)。对于 $\mathrm{PSL}_2(8)$ 和 $\mathrm{PSL}_2(16)$，我们证明 $\delta|B| \leq [T$：对于每个可解 $B \leq \mathrm{Aut}(T)$，均有 $B \cap T]^{r_0}$。

引理 4.1。设 $1 \neq H \leq \mathrm{PGL}_2(q)$ 可解，其中 $q = p^f$。则以下情形之一成立：

(1) H 固定 $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)$中的一个点；(2) H 包含于一个阶为 $2(q-1)$ 或 $2(q+1)$的环面正规化子中；(3) p 为奇数且 $|H| \mid 24$。

此外，每个阶为$2(q \pm 1)$ 的环面正规化子 $N \leq \mathrm{PGL}_2(q)$ 均满足 $|N \cap \mathrm{PSL}_2(q)| = 2(q \pm 1)/$ 最大公约数$(2,\ q-1)$。

证明。设 E 是 H的极小非平凡正规子群。由于 H 可解，E 是阶为 r^a 的初等阿贝尔群，其中 r为某个素数。

情形 *1*：$r = p$。E 的每个非单位元都是幺幂元，并且在 $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)$ 中有唯一的不动点。由于 E 是阿贝尔的，所有这些元素都有相同的不动点。由于 $E \lhd H$，该点也由 H固定，从而得到 (1)。

情形 *2*：$r \neq p$ 是奇数。取 $1 \neq x \in E$。于是 x 在 $\mathbb{F}_q$上有两条不同的特征直线，且其射影中心化子是一个环面。由于 E 是阿贝尔群，它包含于此中心化子中，因此 E的所有非单位元都具有相同的一对特征直线。由于 $E \lhd H$，H 的共轭作用会置换E的非单位元。因此，H 保持 x的这对特征直线不变。由于 $x \in \mathrm{PGL}_2(q)$，这对特征直线是弗罗贝尼乌斯稳定的。它在 $\mathrm{PGL}_2(q)$ 中的稳定子是阶为 $2(q-1)$ 或 $2(q+1)$ 的环面正规化子。因此 (2) 成立。

情形 *3*：$r = 2 \neq p$。取一个对合 $x \in E$。在 $\mathbb{F}_q$上共轭之后，我们不妨设$x\colon\ z \mapsto -z$。它的射影中心化子由映射 $z \mapsto az$ 和 $z \mapsto a/z$组成。令 D 为由映射 $z \mapsto az$组成的环面，它在此中心化子中的指数为二。由于 $D \cong \mathbb{F}_q^{\times}$，$D$ 的每个有限子群都是循环群。由于 E 是初等阿贝尔群且中心化 x，因此 $E \cap D = \langle x \rangle$。故 $|E| \leq 4$。

若 $|E| = 2$，则 x 在 H 中是中心的。因此，H 保持 x 的特征直线对，从而得到 (2)。

如果 $|E| = 4$，选取 $y \in E \setminus D$。那么 $E = \langle x, y \rangle$，其中 $y\colon\ z \mapsto b/z$ 对某个 $b \neq 0$成立。直接计算表明，$C_{\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_q)}(E) = E$。由于 $E \lhd H$，共轭给出了从 H到 $\mathrm{Aut}(E)$ 的同态，其核为 $C_H(E) = E$。因此，H/E 嵌入 $\mathrm{Aut}(E) \cong \mathrm{Sym}(3)$。由于 $|E| = 4$ 和$|\mathrm{Aut}(E)| = 6$，我们得到 $|H| \mid 24$，从而得到 (3)。

最后的断言尚待证明。对于偶数 q，我们有 $\mathrm{PSL}_2(q) = \mathrm{PGL}_2(q)$，因此无需证明。对于奇数 q，群 $\mathrm{PSL}_2(q)$ 是行列式平方类映射的核

$$\mathrm{PGL}_2(q) \longrightarrow \mathbb{F}_q^\times/(\mathbb{F}_q^\times)^2.$$

分裂环面和非分裂环面都包含行列式为非平方的元素。分裂环面的情形显然；对于非分裂环面，这由范数映射的满射性 $\mathbb{F}_{q^2}^\times \to \mathbb{F}_q^\times$ 得出。因此，每个环面正规化子 N 都满足 $[N : N \cap \mathrm{PSL}_2(q)] = 2$. □

命题 4.2。 设 $T = \mathrm{PSL}_2(q)$，其中 $q = p^f \geq 4$ 且 $q \neq 5$。对于每个可解的 $B \leq \mathrm{Aut}(T)$，记 $h = [T : B \cap T]$，并令 $r_{16} = \log_{17}(960\delta) < r_0$。则以下结论成立：

(i) 若 $q \notin \{8, 16\}$，则 (3.3) 成立。

(ii) 若 $q = 8$，则 $\delta|B| \leq h^{r_0}$。(iii) 若 $q = 16$，则 $\delta|B| \leq h^{r_{16}}$。

在(ii) 和(iii)中，当且仅当对于某个 $\alpha \in \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)$，有 $B = \mathrm{Aut}(T)_\alpha$ 时，等号成立。

Proof. 令 $d =$ 最大公约数$(2, q-1)$。我们有 $\mathrm{Aut}(T) = P\Gamma\mathrm{L}_2(q)$、$|\mathrm{Out}(T)| = df$ 以及 $|\mathrm{Out}(T)||T| = fq(q^2-1)$。对于 $q \notin \{8, 16\}$，这些界

$$\sigma(T) \leq \frac{|T|}{k} \qquad \text{and} \qquad \delta fq(q^2-1) < k^{1+s}$$

共同推出 (3.3)。我们取 $k = q+1$ 为 $q \neq 7$，取 $k = 7$ 为 $q = 7$。我们首先建立界 $\sigma(T) \leq |T|/k$ nd通过证明 $[T : \text{对于每个可解的 } U \leq T,\ U] \geq k$。

这对 $U = 1$成立，因此设 $U \neq 1$ 并将引理 4.1应用于 $U \leq \mathrm{PGL}_2(q)$。在情形 (1) 中，U包含于 T的一个点稳定子中。由于此类稳定子的阶为 $q(q-1)/d$，故有 $[T : U] \geq q+1$。在情形 (2) 中，对于某个环面正规化子 $N \leq \mathrm{PGL}_2(q)$，$U \leq T \cap N$，其阶为 $2(q \pm 1)$。根据引理 4.1的最后一项断言，有 $|T \cap N| = 2(q \pm 1)/d$。因此，$[T : U] \geq q(q-1)/2 \geq q+1$。在情形 (3) 中，$q$为奇数且 $|U| \leq 24$，所以 $[T : U] \geq q(q^2-1)/48$。界 $q(q^2-1)/48$对于 $q \geq 9$至少为 $q+1$，而对于 $q = 7$等于 7。

(i) $q \notin \{8, 16\}$。根据刚刚证明的指标界，还需验证（3.1），即 $\delta fq(q^2-1) < k^{1+s}$。对于 $q \neq 7$，这等价于 $\delta fq(q-1) < (q+1)^s$。对于 $q \geq 64$，我们有 $f \leq \sqrt{q}$。由于 $s - 5/2 = 2/7$和 $3^7 < 64^2 \leq q^2$，我们也有 $3 < q^{s-5/2}$。由于 $\delta < 3$，可得

$$\delta fq(q-1) < 3q^{5/2} < q^s < (q+1)^s.$$

由于 $\mathrm{PSL}_2(5) \cong \mathrm{PSL}_2(4)$，情形 $q = 5$ 已由 $q = 4$涵盖。我们分别处理情形 $q = 8$ 和 $q = 16$。对于其余的素数幂 $4 \leq q < 64$，不等式 $\delta fq(q^2-1) < k^{1+s}$ 已在附录 A.1 中得到验证。

(ii) 和 *(iii)* $q = 8$ 或 $q = 16$。 </style}前面的情形分析表明，T的最大可解子群是点稳定子。由于 T的一个点稳定子的阶为 $q(q-1)/d$，我们得到 $\sigma(T) = 56$ 对于$q = 8$ 以及 $\sigma(T) = 240$ 对于 $q = 16$。

对于可解的 $B \leq \mathrm{Aut}(T)$，我们有 $[B : B \cap T] \leq |\mathrm{Out}(T)| = f$。因此 $|B| \leq f\sigma(T)$。由于$h = [T : B \cap T] \geq q+1$，我们有

$$\delta|B| \leq 168\delta = 9^{r_0} \leq h^{r_0} \qquad \text{if } q = 8,$$
$$\delta|B| \leq 960\delta = 17^{r_{16}} \leq h^{r_{16}} \qquad \text{if } q = 16.$$

任一界中的等号都要求前述链中的每一步均取等号。因此 $h = q+1$ 和$|B| = f\sigma(T)$。于是 $B \cap T$是 T的一个点稳定子。由于 B正规化 $B \cap T$，它固定由 $B \cap T$固定的唯一点 $\alpha \in \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)$。因此，$B \leq \mathrm{Aut}(T)_\alpha$。由于 $|B| = fq(q-1) = |\mathrm{Aut}(T)_\alpha|$，我们有 $B = \mathrm{Aut}(T)_\alpha$。反之，每个这样的点稳定子都在相应的界中取等号。直接计算得到 $(960\delta)^5 < 17^{14}$ 以及 $9^{14} < (168\delta)^5$, , 因此 $r_{16} < 14/5 < r_0$。 □

注记 4.3。尽管对于 $T \cong \mathrm{PSL}_2(8)$ 和 $\mathrm{PSL}_2(16)$，(3.3) 不成立，但命题 4.2 对每个可解的 $B \leq \mathrm{Aut}(T)$ 都给出 $\delta|B| \leq [T : B \cap T]^{r_0}$，因为 $r_{16} < r_0$。

命题 4.4。 对于每个交错单群 $T = A_n$、$n \geq 5$，不等式 (3.3) 成立。

证明。由于 $s = 39/14$ 和 $\delta = 24^{1/3}$，在 (3.3) 两边取 42 次方得到等价不等式

$$24^{14}|\mathrm{Out}(A_n)|^{42}\sigma(A_n)^{159} < |A_n|^{117}.$$

(i) $5 \leq n \leq 9$. 由于 $A_5 \cong \mathrm{PSL}_2(4)$ 和 $A_6 \cong \mathrm{PSL}_2(9)$，$n = 5,6$ 的结果可由命题 4.2 推出。对于 $7 \leq n \leq 9$，Mann 的定理 1 和 3 [16] 给出 $\sigma(A_n) \leq m_n$，其中

表1. 小交错群的可解子群界

n	7	8	9
m_n	144	576	1296

由于 $|\mathrm{Out}(A_n)|=2$ 且 $|A_n|=n!/2$，界 $\sigma(A_n)\le m_n$ 表明只需证明 fy

$$24^{14}2^{42}m_n^{159}<(n!/2)^{117}.$$

这些不等式对于 $n=7$、8、9 成立，从而证明 (3.3)。

(ii) $n\ge 10$。根据 Dixon 界 [8, 定理 3], $\sigma(A_n)\le\delta^{n-1}$，以及 $|\mathrm{Out}(A_n)|=2$。由于 $|A_n|=n!\quad/2$ and $\delta^{159}=24^{53}$，只需证明

$$2^{42}24^{14+53(n-1)}<(n!/2)^{117}.$$

对于 $n=10$，左边为 $2^{42}24^{491}$。由于 $10!/2>4\cdot 24^4,$，右边大于 $2^{234}24^{468}$。因此，由 $24^{23}<2^{192}$ 可得该不等式。当 n 增加 1 时，两边分别乘以 24^{53} 和 $(n+1)^{117},$。由于 $24<11^2$，对于 $n\ge 10$，有 $24^{53}<11^{117}\le(n+1)^{117}$。因此，由归纳法可得该不等式。□

命题4.5。不等式 (3.3) 对所有26个散在单群以及蒂茨群${}^2F_4(2)'$均成立。

证明。由于 $s-2(1+s)/3=11/42$ 且 $\delta^{42}=24^{14}$，只需证明

$$\sigma(T)\le|T|^{2/3}\qquad\text{and}\qquad 24^{14}|\operatorname{Out}(T)|^{42}<|T|^{11}.$$

根据 [5, 关于26个散在群的定理 1] 以及 [5, 关于蒂茨群的注记1(d)]，对于任意可解 $U\le T$，T 在 T/U 上的作用的基大小至多为三。记 $h=[T\colon U]$。由于该作用是忠实的，基大小至多为三意味着 $|T|\le h^3$。因此 $|U|=|T|/h\le|T|^{2/3}$，从而证明了$\sigma(T)\le|T|^{2/3}$。由于 $|\mathrm{Out}(T)|\le 2$、$|T|\ge 7920$ 且 $24^{14}2^{42}<7920^{11}$，第二个不等式也成立。□

5. 李型群：Borel–Tits二分法

现在我们转而讨论李型单群。为了对这样的群 T建立 (3.3)，只需证明对于每个可解子群 $U\le T$都有 $\delta|\mathrm{Out}(T)|\,|U|^{1+s}<|T|^s$。我们区分 $O_p(U)$ 是否为平凡群，其中 p 是定义特征。若 $O_p(U)\ne 1$，则 Borel–Tits 定理将 U 置于一个抛物子群中，而命题 5.2 将所需不等式归结为下面的数值条件 (5.2)。对于 $O_p(U)=1$ 的情形，我们也建立了第 6 节和第 7 节中所使用的界。

设 T是在特征 p 下、定义于 $\mathbb{F}_q$上的李型单群，其中 $q=p^f$。我们仅在第 6 节所处理的经典群，以及 $E_6(q)$、$E_7(q)$ 和 $E_8(q)$ 的情形中采用这一设置。对于经典 T，取X 为相应的自然矩阵群 $\mathrm{SL}_n(q)$、$\mathrm{SU}_n(q)$、$\mathrm{Sp}_n(q)$ 或 $\Omega^\varepsilon_n(q)$。对于 $T=E_6(q)$、$E_7(q)$ 或 $E_8(q)$，令 $\mathbf{G}$ 为定义于 $\mathbb{F}_p$上的同类型单连通单代数群，并令 σ 为 $\mathbf{G}$ 在 $\mathbb{F}_q$上的标准 Frobenius自同态。然后取 X 为 $\mathbf{G}$中 σ 的不动点群，即 $X=\mathbf{G}^\sigma$。

在每种情形下，$X/Z(X)\cong T$ 和 $p\nmid|Z(X)|$。令 $\pi\colon X\to T$ 为相应的商映射。对于 $U\le T$，令 $\widehat{U}=\pi^{-1}(U)$。记 $Z=Z(X)$ 和 $z=|Z|$。于是

$$|\widehat{U}|=z|U|,\qquad O_p(\widehat{U})\cong O_p(U).$$

为证明第二个断言，记 $E=\pi^{-1}(O_p(U))$。由于 E/Z 是一个 p-群，且 Z 是一个中心$\frown p'$-子群，对于 E的一个 Sylow p-子群 P，有 $E=Z\times P$。由于 $P=O_p(E)$ 且 $E\trianglelefteq U$，我们$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$有 $P\trianglelefteq U$。此外，$O_p(U)\le E$，因此 $O_p(U)=P$。由于 π将 P同构地映到 $O_p(U)$ 上，结论得证。

定理 5.1 (Borel–Tits [10, 定理3.1.3(a)], [3])。若 R 是 T的一个非平凡 p-子群，则存在 T的一个真抛物子群 P，使得 $N_T(R)\le P$。

设 $U\le T$ 为可解群，且 $O_p(U)\ne 1$。由于 $U\le N_T(O_p(U))$，定理 5.1 给出了包含 U 的 T 的真抛物子群，因而存在 T 的极大抛物子群 P，使得$U\le P$。T 的每个抛物子群都是 X 的某个抛物子群在 π 下的像。由于每个

X 的抛物子群都包含 Z，子群 $\widehat{P} = \pi^{-1}(P)$ 是 $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }X$ 的极大抛物子群。因此 $U \le P$。

记

$$|O_p(\widehat{P})| = q^u, \qquad L = \widehat{P}/O_p(\widehat{P}), \qquad N = [X : \widehat{P}].$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$我们称 L P 的**Levi** 商群 为。对于下文讨论的抛物子群，$O_p(P)$ 是 P 的$\widehat{\ }$幺幂根（见第 6 节和引理 7.2 的证明），因此 L 同构于 P 的 Levi$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$补群。对向幺幂根的阶为 q^u，且与 P 的交平凡。因此，其元素$\widehat{\ }$代表 P 的不同陪集，所以 $N \ge q^u$。下面的命题表明，若每个阶小于 $|T|$ 的非阿贝尔单群都满足 (3.2)$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$，则每个满足 $U \le P$ 的可解 $U \le T$ 都满足所需不等式，前提是

$$\delta|\operatorname{Out}(T)|q^u c(L) < zN^s. \tag{5.1}$$

由于 $N \ge q^u$ 和 $\delta < 3$，条件 (5.1) 在以下情形成立

$$3\big(|\operatorname{Out}(T)|/z\big)c(L) \le q^{(s-1)u}. \tag{5.2}$$

命题 5.2。假设每个阶小于 $|T|$ 的非阿贝尔单群都满足(3.2) 。若(5.1) 成立，则每个满足 $\widehat{U} \le \widehat{P}$ 的可解 $U \le T$ 都满足 $\delta|\operatorname{Out}(T)|\,|U|^{1+s} < |T|^s$.

证明。令 $S_1, \dots, S_m$ 为 L的非阿贝尔合成因子。由于 Z是阿贝尔群，这些也是 $P/Z \cong P$的合成因子。由于 $P < T$，对于每个 i，都有 $|S_i| < |T|$。由于 U是可解的，引理 3.3 给出 $z|U| = |\widehat{U}| \le \sigma(\widehat{P}) \le q^u c(L) \prod_{i=1}^m \sigma(S_i)$。另一方面，由于 $|\widehat{P}| = q^u|L|$，我们有 $z|T| = N|\widehat{P}| = Nq^u c(L) \prod_{i=1}^m |S_i|$. 根据归纳假设 (3.2)，对于每个 i，$\sigma(S_i)^{1+s} < |S_i|^s$。因此，

$$\delta|\operatorname{Out}(T)|\frac{|U|^{1+s}}{|T|^s} \le \frac{\delta|\operatorname{Out}(T)|q^u c(L)}{zN^s}\prod_{i=1}^m \frac{\sigma(S_i)^{1+s}}{|S_i|^s} \le \frac{\delta|\operatorname{Out}(T)|q^u c(L)}{zN^s} < 1,$$

其中最后一个不等式由 (5.1) 得出。 □

因此，情形 $O_p(U) \ne 1$ 归结为验证相关极大抛物子群的 (5.1)。我们将在第 6 节和第 7 节中完成这些验证。

接下来考虑情形 $O_p(U) = 1$。下面的引理使我们能够应用完全可约可解线性群的界。

引理 5.3。设 $A \le \mathrm{GL}_d(q)$，其中 $q = p^f$，且设 $V = \mathbb{F}_q^d$。考虑 V 作为 $\mathbb{F}_q A$-模的一条合成列：$0 = V_0 < V_1 < \cdots < V_k = V.$。记 $d_i =$维数$_{\mathbb{F}_q}(V_i/V_{i-1})$，并设 K 为 A 在 $\bigoplus_{i=1}^k V_i/V_{i-1}$. 上作用的核。则 $K \le O_p(A)$ 且 $|K| \le q^{\sum_{i<j} d_i d_j}$。

证明。选取 V 的一组基，使其适配于该合成列：依次扩充各个 V_i 的基。由于每个 V_i 都是 A-不变的，A 的元素可表示为分块上三角矩阵，其对角块描述了在 V_i/V_{i-1} 上的诱导作用。

由于 K 在每个 V_i/V_{i-1} 上的作用都是平凡的，K 的每个元素都具有如下形式

$$\begin{pmatrix} I_{d_1} & * & \cdots & * \\ 0 & I_{d_2} & \cdots & * \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & I_{d_k} \end{pmatrix}.$$

这种形式的分块上单位三角矩阵构成一个阶为 $q^{\sum_{i<j} d_i d_j}$ 的群，因为对于每个 $i < j$，$(i,\ j)$-分块在 $\mathbb{F}_q$ 上有 $d_i d_j$ 个元素。因此，K 是一个阶至多为 $q^{\sum_{i<j} d_i d_j}$ 的 p-群。由于 $K \lhd A$，我们有 $K \le O_p(A)$。□

我们将使用以下关于完全可约可解线性群的两个结果。对于一个正整数 m 和一个素数 r，令 m_r 表示整除 m的 r 的最大幂。

定理 5.4 (Pálfy–Wolf [17], [22, 定理3.1(a)])。设 V 为非零有限维向量空间，且$G \le \mathrm{GL}(V)$ 为可解且完全可约。则 $|G| \le \delta^{-1}|V|^{\beta}$，其中 $\beta = \log(48\delta)/\log 9 <$2.2441。

定理 5.5 (Dixon [9])。 设 F 为完美域， r 为素数，且 $G \le \mathrm{GL}_n(F)$ 为有限、可解且完全可约。则 $|G : O_r(G)|_r \le r^{\lambda_r(n)}$，其中

$$\lambda_r(n) = \begin{cases} \lfloor 4n/3 \rfloor - 1, & r = 2, \\ \displaystyle\sum_{i \ge 0} \left\lfloor \frac{n}{(r-1)r^i} \right\rfloor, & r \text{ is a Fermat prime}, \\ \displaystyle\sum_{i \ge 1} \left\lfloor \frac{n}{r^i} \right\rfloor, & r \text{ is odd and not a Fermat prime}. \end{cases}$$

若 $r =$ 特征 F，则 $O_r(G) = 1$ 以及 $|G|_r \le r^{\lambda_r(n)}$。若 $r > n+1$，则 $\lambda_r(n) = 0$，且 G 具有一个正规 *Sylow* r-子群。

对于素数 ℓ 和一个与 ℓ互素的整数 a ，记 $\mathrm{ord}_\ell(a)$ 为 a模 ℓ的乘法阶。下面的引理将这些结果应用于具有平凡 p-核的经典群的可解子群。我们在第 6 节中利用这些界来证明 (3.3)。

引理 5.6。 设 X 为一个经典群，其自然模为 $\mathbb{F}_Q^n$；对于酉群， $Q = q^2$ ，而在其他情形下 $Q = q$ 。设 $U \le T$ 为可解群，且 $O_p(U) = 1$。则

(a) $|U| \le Q^{\beta n}/(\delta(Q-1))$; (b) $|U|_p \le p^{\lambda_p(n)}$; (c) 若 $\ell \ne p$ 是 $|U|$ 的一个素因子，且 $\ell > n+1$ 以及 $j = \mathrm{ord}_\ell(Q) > n/2$，则 $|U| \le j(Q^j-1)|\mathrm{GL}_{n-j}(Q)|/(Q-1)$。

证明。令 $V = \mathbb{F}_Q^n$，并将 $\mathbb{F}_Q^\times$ 认作 $\mathrm{GL}(V)$ 中的数量矩阵子群。由于 $X \cap \mathbb{F}_Q^\times = Z \le \widehat{U}$，群 $J = \widehat{U}\mathbb{F}_Q^\times$ 可解，且阶为 $(Q-1)|U|$。由于 $\mathbb{F}_Q^\times$ 是 $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }\mathrm{GL}(V)$ 中心的，我们有 $U \trianglelefteq J$。由于 $[J\colon U]$ 与 p 互素，因此可得 $O_p(J) \le O_p(U) = 1$。

根据引理 5.3， J 忠实地作用于 V 的合成因子的直和上，将其视为一个 $\mathbb{F}_Q J$-模。该模完全可约，且维数为 n。因此， J 同构于 $\mathrm{GL}_n(Q)$ 的一个完全可约可解子群 $J^* \le$。

(a). 根据定理 5.4， $(Q-1)|U| = |J| \le \delta^{-1} Q^{\beta n}$。
(b). 应用定理 5.5 于 $r = p$ ，得到 $|J|_p \le p^{\lambda_p(n)}$。由于 $p \nmid (Q-1)$，我们有 $|U|_p = |J|_p$.
(c). 由于 $\ell \mid |U|$ 和 $J \le \mathrm{GL}_n(Q)$，我们有 $\ell \mid |\mathrm{GL}_n(Q)|$，因此 $j \le n$。由于 $j = \mathrm{ord}_\ell(Q) > n/2$，唯一一个 $Q^k - 1$ 且 $1 \le k \le n$ 能被 ℓ 整除的因子是 $Q^j - 1$。因此，$\mathrm{GL}_j(Q)$ 的一个 Singer 循环子群包含 $\mathrm{GL}_n(Q)$ 的一个 Sylow ℓ-子群，所以 J 的 Sylow ℓ-子群是循环的。由于 $\ell > n+1$，将定理 5.5 应用于 J^* 可得 J的一个正规 Sylow ℓ-子群。由于这个 Sylow ℓ-子群是循环的，它有唯一一个阶为 ℓ的子群$\langle x \rangle$ 。由于该 Sylow 子群在 J中正规，$\langle x \rangle$ 也正规。

现在我们回到 J 在自然模 V上的作用。由于 $\ell \ne p$, $\langle x \rangle$ 的作用是完全可约的，并且每个非平凡不可约成分的维数都是 j。由于 $x \ne 1$ 和$2j > n$，这样的成分恰好有一个。记 $[V,x] = (x-1)V$。因此 $V = [V,x] \oplus C_V(x)$，其中 $[V,x]$ 是维数为 j的不可约成分。

由于 J正规化了 $\langle x \rangle$，因此 $[V,x]$ 和 $C_V(x)$ 都是 J-不变的。 x 在 $[V,x]$ 上的最小多项式是次数为 j 的不可约多项式。因此，由该限制生成的代数 $\mathbb{F}_Q[x]$ 是一个与 $\mathbb{F}_{Q^j}$ 同构的域。 J 在 $\mathrm{GL}([V,x])$ 中的像也正规化了这个域。将 $[V,x]$ 与 $\mathbb{F}_{Q^j}$ 等同后可见， $\mathrm{GL}([V,x])$ 中 $\mathbb{F}_Q[x]$ 的正规化子由满足 $b \in \mathbb{F}_{Q^j}^\times$ 和 $0 \le i < j$ 的映射 $v \mapsto bv^{Q^i}$ 构成，其阶为 $j(Q^j-1)$。最后，由于 J 忠实地作用于 V，我们有 $(Q-1)|U| = |J| \le j(Q^j-1)|\,\mathrm{GL}_{n-j}(Q)|$。

□

接下来我们为群 $E_6(q)$、 $E_7(q)$ 和 $E_8(q)$ 建立界。情形 $E_6(2)$ 需要以下关于 Weyl 群的界。

引理 5.7。 *Weyl* 群 $W(E_6)$ 的每个奇数阶幂零子群的阶至多为81。

证明。设 K是 $W(E_6)$ 的一个奇数阶幂零子群。由于 $|W(E_6)| = 2^7 3^4 5$，若 $5 \nmid |K|$，则K 是一个 3-群，且 $|K| \le 81$。现在设 $5 \mid |K|$。取一个阶为 5 的 $x \in K$ ，并令 A 为 K的一个 Sylow 3-子群。由于 K 是幂零的， A 中心化 x。

设 W 为 $W(E_6)$ 的六维有理反射模。记 $\Phi_5(t) = t^4+t^3+t^2+t+1$ 为第五圆分多项式。 x 在 W 上的特征多项式为 $(t-1)^2\Phi_5(t)$。因此

$W = W_0 \oplus W_1$，其中 W_0 是 x 的 2 维不动子空间，而 W_1 是一个 4 维的 x-不变子空间。x 在 W_1 上的最小多项式是 $\Phi_5(t)$。因此，W_1 在 $\mathbb{Q}(\zeta_5)$ 上是一维的。由于 A 中心化 x，它保留 W_0 和 W_1。它在 W_1 上的作用是 $\mathbb{Q}(\zeta_5)$- 线性的，因此其像包含于 $\mathbb{Q}(\zeta_5)^\times$ 中。该群的挠子群阶为 10。由于 A 是一个 3-群，它在 W_1 上平凡作用。由于反射表示是忠实的，A 忠实地作用于 W_0。

若 $A \neq 1$，则取 $a \in Z(A)$ 中的一个三阶元素。由于 A 忠实地作用于 W_0，元素 a 在 W_0上的作用非平凡。由于 $\dim_{\mathbb{Q}} W_0 = 2$，其最小多项式为 $t^2 + t + 1$。因此 $C_{\mathrm{GL}(W_0)}(a) \cong \mathbb{Q}(\zeta_3)^\times$。$\mathbb{Q}(\zeta_3)^\times$ 的挠子群的阶为 6。由于 $a \in Z(A)$，我们有 $A \le C_{\mathrm{GL}(W_0)}(a)$，所以 $|A| \le 3$。当 $A = 1$时同样成立。因此 $|K| = 5|A| \le 15$。

□

引理 5.8。设 $T = E_6(q)$、$E_7(q)$ 或 $E_8(q)$，其中 $q = p^f$，并设 $U \le T$为可解群，且 $O_p(U) = 1$。则

$$|U| < q^{52}, \qquad |U| < q^{91}, \qquad |U| < q^{104},$$

分别。

证明。不妨设 $U \neq 1$，并令 $F = F(U)$ 为 U 的 Fitting 子群。由于 F 是幂零的，其 Sylow p-子群是 F 的特征子群，因此是 U 的正规子群。由于 $O_p(U) = 1$，可知 F 是一个 p'-群。

步骤 *1.* 对 $|F|$ 的界定。令 $\mathbf{G}_{\mathrm{ad}} = \mathbf{G}/Z(\mathbf{G})$ 为相应的伴随代数群。自同态 σ 也在 $\mathbf{G}_{\mathrm{ad}}$ 上诱导出一个 Steinberg 自同态。我们将 T 视为$\mathbf{G}_{\mathrm{ad}}^{\sigma}$ 的子群。将 Vdovin [20, 引理 2.3] 应用于$\mathbf{G}_{\mathrm{ad}}^{\sigma}$，可知 F 正规化了$\mathbf{G}_{\mathrm{ad}}$ 中一个 σ-稳定的极大环面$\mathbf{A}$。记 $W = N_{\mathbf{G}_{\mathrm{ad}}}(\mathbf{A})/\mathbf{A}$ 为 Weyl 群。由于 $F \le N_{\mathbf{G}_{\mathrm{ad}}}(\mathbf{A})$，自然商映射诱导出一个嵌入 $F/(F \cap \mathbf{A}) \to W$。因此，$F/(F \cap \mathbf{A})$ 是 W 的一个幂零 p'-子群。

令 $\ell = \dim \mathbf{A}$ 为 $\mathbf{G}_{\mathrm{ad}}$ 的秩。因此，对于这三个群，$\ell = 6$，7、8 分别成立。令 D 为 σ 在 $\mathbf{A}$ 的余特征格上诱导的端omorphism。由于这些群在 $\mathbb{F}_q$ 上是分裂的，端omorphism D/q 具有有限阶。因此，对某个正整数 m 有 $D^m = q^m I$，所以 D 的每个特征值的绝对值为 q。现在，代数环面的不动点公式给出$|\mathbf{A}^\sigma| = |\det(D - I)| \le (q+1)^\ell$.。映射 $F \to W$ 的核为 $F \cap \mathbf{A} \le \mathbf{A}^\sigma$。因此，$|F| \le w(q+1)^\ell$，其中 w 是 $|F/(F \cap \mathbf{A})|$的一个上界。根据引理 5.7，我们可以取 $|W|_{p'}$，或者对于 $T = E_6(2)$ 取 81。

利用 Weyl 群阶 [6] 和引理 5.7，我们得到以下 w 取值。选择指数 a 是为了确立 $w(q+1)^\ell < q^a$。

表 2. 分裂例外群的 Weyl 群界

T	q	w	a
E_6	2	81	16
E_6	3	640	16
E_6	≥ 4	51840	16
E_7	2	2835	28
E_7	≥ 3	2903040	28
E_8	2	42525	32
E_8	≥ 3	696729600	32

例如，$|W(E_6)| = 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5$，因此 $w = 640$ 当 $q = 3$ 时。在此情形下，$640 \cdot 4^6 < 3^{16}$。由于 $a > \ell$，比值 $(q+1)^\ell/q^a$ 随 q 递减。直接计算表明，在表 2 每一行中 $w(q+1)^\ell < q^a$ 取最小的 q 值时成立。因此，$|F| < q^{16}, q^{28}, q^{32}$，分别成立。

步骤 *2.* 给 $|U|$ 作界。由 Gaschütz 定理 [12, III.4.5]，$F/\Phi(U) = F(U/\Phi(U))$ 是 $U/\Phi(U)$ 的阿贝尔极小正规子群的直积。由 [12, III.4.2(b),(c)],，我们有 $C_{U/\Phi(U)}(F/\Phi(U)) \le F/\Phi(U)$，且 $\Phi(U) < F$。因此，U/F 忠实地作用于非平凡群 $F/\Phi(U)$ 上。

记 $F/\Phi(U) = \prod_r A_r$ 为其主分量。对于每个非平凡的 A_r，令 G_r 为 U/F 在 A_r 上的像。于是 G_r 是可解且完全可约的，因此由定理 5.4 得到 $|G_r| \le \delta^{-1}|A_r|^\beta$。由于 U/F 嵌入这些群的直积中，且 $\delta > 1$，我们有 $|U/F| \le \delta^{-1}|F/\Phi(U)|^\beta \le \delta^{-1}|F|^\beta$.。由于 $\beta < 9/4$，可推出 $|U| \le \delta^{-1}|F|^{1+\beta} < |F|^{13/4}$.。现在对 $|F|$ 的三个界给出了 $|U|$所需的界。□

6. 经典群

在第 5 节中，我们将 $O_p(U) \neq 1$ 的情形归约为对抛物子群的界，并对 $O_p(U) = 1$ 的情形得到了估计。现在我们利用这些结果，为经典单群建立 (3.3)，但不包括 $\mathrm{PSL}_3(3)$；后者将单独处理。

有限经典单群源自四个族：线性群、酉群、辛群和正交群。它们分别表示为 $\mathrm{PSL}_n(q)$、$\mathrm{PSU}_n(q)$、$\mathrm{PSp}_n(q)$，以及 $\Omega_n(q)$ 或 $\mathrm{P}\Omega_n^{\pm}(q)$，其中参数需满足适当的限制。由于群 $\mathrm{PSL}_2(q)$ 已在第4节中处理过，我们采用以下标准的低维同构 [14, 第 2 节。9] 以避免重复：

表3。低维经典群同构

群	同构群
$\mathrm{PSU}_2(q)$，$\mathrm{PSp}_2(q)$	$\mathrm{PSL}_2(q)$
$\Omega_3(q)$，q 奇数	$\mathrm{PSL}_2(q)$
$\mathrm{P}\Omega_4^+(q)$	$\mathrm{PSL}_2(q) \times \mathrm{PSL}_2(q)$
$\mathrm{P}\Omega_4^-(q)$	$\mathrm{PSL}_2(q^2)$
$\Omega_5(q)$, q 奇数	$\mathrm{PSp}_4(q)$
$\mathrm{P}\Omega_6^+(q)$	$\mathrm{PSL}_4(q)$
$\mathrm{P}\Omega_6^-(q)$	$\mathrm{PSU}_4(q)$
$\Omega_{2m+1}(q)$, q 偶数	$\mathrm{PSp}_{2m}(q)$

我们还排除 $\mathrm{PSL}_3(2) \cong \mathrm{PSL}_2(7)$ 和 $\mathrm{PSL}_4(2) \cong A_8$，这些群已被处理；此外还排除可解群 $\mathrm{PSU}_3(2)$ 和非单群 $\mathrm{PSp}_4(2) \cong S_6$。因此，除上述排除的四个小情形外，其余经典群如下：

表 4. 其余经典群

type	群	参数
线性	$\mathrm{PSL}_n(q)$	$n \geq 3$
酉型	$\mathrm{PSU}_n(q)$	$n \geq 3$
辛	$\mathrm{PSp}_n(q)$	$n \geq 4$ 偶数
正交	$\Omega_n(q)$	$n \geq 7$ 奇数，q 奇数
	$\mathrm{P}\Omega_n^{\pm}(q)$	$n \geq 8$ 偶

我们记 $U_n(q) = \mathrm{PSU}_n(q)$，记 $S_n(q) = \mathrm{PSp}_n(q)$。在下列表格中，$L_n$、$U_n$、$S_n$、$O_n$ 和 $O_n^{\pm}$ 分别用作线性型、酉型、辛型、奇维正交型和偶维正交型的标签。我们使用以下标准数据 [14, 表 5.1.A]。其中，$q = p^f$，p 为素数，$z = |Z(X)|$，$|T|_p = q^{\nu}$，而 D 是相应单代数群的维数。对于偶维正交群，$\varepsilon \in \{+1, -1\}$ 表示正型或负型。

表 5. 经典群的参数

type	z	$\lvert \mathrm{Out}(T) \rvert$	ν	D
L_n	最大公约数$(n, q-1)$	$2f$ 最大公约数$(n, q-1)$	$n(n-1)/2$	n^2-1
U_n	最大公约数$(n, q+1)$	$2f$ 最大公约数$(n, q+1)$	$n(n-1)/2$	n^2-1
S_n	最大公约数$(2, q-1)$	f 最大公约数$(2, q-1)$；$2f$ 如果 $n=4$，$p=2$	$n^2/4$	$n(n+1)/2$
O_n, n为奇数	1	$2f$	$(n-1)^2/4$	$n(n-1)/2$
O_n^{ε}, $n = 2m$ 最大公约数$(4, q^m - \varepsilon)$/ 最大公约数$(2, q-1)$		$2f$ 最大公约数$(4, q^m - \varepsilon)$	$m(m-1)$	$n(n-1)/2$

对于 $O_8^+(q)$，外自同构群的阶改为 $6f\gcd(4, q^4-1)$。在所有情形下，$|\mathrm{Out}(T)| \leq 12fz$。标准阶公式还给出 $q^D/(4z) \leq |T| < q^D$。

命题 6.1。设 $T = \mathrm{PSL}_n(q)$ 满足 $n \geq 3$。则 (3.3) 成立，除非 $(n, q) = (3, 3)$。

证明。(1) 确定 $\sigma(T)$。令 H 为 $\mathrm{SL}_n(q)$ 的最大阶可解子群。由于 $n \geq 3$，Mann 定理 8 [16] 给出了 $\mathrm{GL}_n(q)$ 的一个最大阶可解子群 M，且满足 $H = M \cap \mathrm{SL}_n(q)$。根据 Mann 定理 5 和 6，在适当的基 M 下，当 $q = 4$ 或 $q \geq 7$时为三角形的。对于 $q = 2$，3，5，

它是分块三角形的，其中有 $\lfloor n/2 \rfloor$ 个二维对角块；当 n 为奇数时，还有一个一维对角块。对于 $q = 2$, 3，5，二维对角块的阶分别为 6、48 和 96。

设

$$c_q = \begin{cases} 3, & q = 2, \\ 4, & q = 3, \\ 6/5, & q = 5, \\ 1, & q = 4 \text{ or } q \geq 7. \end{cases}$$

计算这些块的数量得到 $|M| = q^{n(n-1)/2}(q-1)^n c_q^{\lfloor n/2 \rfloor}$。

为了从 $\mathrm{GL}_n(q)$ 转到 $\mathrm{SL}_n(q)$，我们首先证明 $\det(M) = \mathbb{F}_q^\times$，其中 $\det : \mathrm{GL}_n(q) \to \mathbb{F}_q^\times$ 是行列式同态。当 M 是三角形的时，这一点显然。对于 $q = 2$，群 $\mathbb{F}_q^\times$ 是平凡的；而对于 $q = 3$，二维块为 $\mathrm{GL}_2(3)$。对于 $q = 5$，设 $B \leq \mathrm{GL}_2(5)$ 是一个阶为 96 的对角块，并记 $e = |\det(B)|$。由于 $e \mid 4$ 且 $96/e$ 整除 $|\mathrm{SL}_2(5)| = 120$，我们有 $e = 4$。因此，在每种情形下，$\det(M) = \mathbb{F}_q^\times$。

由此可得 $|H| = |M|/(q-1)$。记 $Z = Z(\mathrm{SL}_n(q))$，于是 $|Z| =$ 最大公约数$(n,\ q-1) = d$。由于 HZ 是可解的，并且 H 具有最大阶，我们有 $Z \leq H$。

令 $\pi : \mathrm{SL}_n(q) \to T$ 为自然商映射，其核为 Z。由于 Z 为阿贝尔群，对于每个可解子群 $U \leq T$，$\pi^{-1}(U)$ 都是可解的。由于 H 具有最大阶，我们得到 $d|U| = |\pi^{-1}(U)| \trianglelefteq H|$。另一方面，$\pi(H)$ 是可解的，且阶为 $|H|/d$。因此

$$\sigma(T) = \frac{q^{n(n-1)/2}(q-1)^{n-1}}{d} c_q^{\lfloor n/2 \rfloor}. \tag{6.1}$$

现在证明（3.3）。由于

$$|T| = \frac{q^{n^2-1}}{d} \prod_{i=2}^{n} (1 - q^{-i}), \qquad |\operatorname{Out}(T)| = 2df,$$

方程（6.1）表明（3.3）等价于

$$\frac{2\delta f\, c_q^{53\lfloor n/2 \rfloor/14} (1-q^{-1})^{53(n-1)/14}}{q^{(n-1)(25n-28)/28} \left(\prod_{i=2}^{n}(1-q^{-i})\right)^{39/14}} < 1.$$

记

$$P_n(q) = \prod_{i=2}^{n} (1 - q^{-i}), \qquad a_n = \frac{(n-1)(25n-28)}{28},$$

并定义

$$R_{n,q} = \frac{2\delta f\, c_q^{53\lfloor n/2 \rfloor/14} (1-q^{-1})^{53(n-1)/14}}{q^{a_n} P_n(q)^{39/14}}.$$

剩下要证明 $R_{n,q} < 1$。我们分别考虑 $q \geq 4$ 和 $q = 2$,3。

(2) 该情形 $q \geq 4$。我们有 $c_q \leq 6/5$ 和 $P_n(q) > 1 - 1/(q(q-1)) \geq 11/12$。此外，对于 $n \geq 3$，$a_n \geq n$ 因为 $28\ (a_n - n) = 25n^2 - 81n + 28 > 0$。

由于 $53/14 < 4$ 和 $39/14 < 3$，我们有

$$(6/5)^{53/14} < (6/5)^4 < (3/2)^2, \qquad (12/11)^{39/14} < (12/11)^3 < 4/3.$$

由于 $\delta < 3$ 和 $f \leq q/2$，可推出

$$R_{n,q} < 8 f q^{-a_n} (3/2)^n \leq 4q \left(\frac{3}{2q}\right)^n \leq \frac{27}{2q^2} \leq \frac{27}{32} < 1.$$

(3) 情形 $q = 2$，3。我们证明，$R_{n,\,q}$ 随 n 减小。记 $\epsilon_n = \lfloor (n+1)/2 \rfloor - \lfloor n/2 \rfloor$。由于 $n \geq 3$，我们有 $(25n-14)/14 > 4$ 以及 $1 - q^{-(n+1)} \geq 1 - q^{-4}$。此外，$s < 3$ 和 $c_q(1-q^{-1}) > 1$。因此

$$\frac{R_{n+1,q}}{R_{n,q}} = \frac{c_q^{53\epsilon_n/14}(1-q^{-1})^{53/14}}{q^{(25n-14)/14}(1-q^{-(n+1)})^{39/14}} < \frac{[c_q(1-q^{-1})]^4}{q^4(1-q^{-4})^3} = \begin{cases} 48/125, & q = 2, \\ 81/125, & q = 3. \end{cases}$$

因此 $R_{n,\,q}$ 对于 q 的两个值，均随 n 严格递减。

最后，直接计算可得

$$R_{3,2}^{42} = \frac{2^{210}3^{56}}{7^{117}} < 1, \qquad R_{3,3}^{42} = \frac{2^{252}3^{140}}{13^{117}} > 1,$$

and

$$R_{4,3}^{42}=\frac{2^{261}3^{266}}{65^{117}}<1.$$

因此 $R_{n,\ q}<1$ 对所有 $n\geq 3$ 和 $q=2,\ 3$ 都成立，除非 $(n,\ q)=(3,\ 3)$。结合 (2)，这就证明了该命题。□

命题 6.2。令 $T=\mathrm{PSL}_3(3)$。则对于每个可解子群 $\delta|B|<[T:\ \ B\cap T]^s$ $B\leq \mathrm{Aut}(T)$，都有。

证明。这里 $|T|=5616$ 和 $\sigma(T)=432$ 由（6.1）得到。除 T 以外，Aut(T) 的极大子群的阶为 216、96、78、48（见 [7]）。因此，Aut(T) 的每个可解子群 $B\leq$ 的阶至多为 432。记 $h=[T:\ \ B\cap T]$。由于 $|B\cap T|\leq 432$，我们有 $h\geq 13$。整数比较$24^{14}\cdot 432^{42}<13^{117}$ 给出 $\delta|B|\leq\delta\cdot 432<13^s\leq h^s$。□

注 6.3。尽管（3.3）对于 $T\cong \mathrm{PSL}_3(3)$ 不成立，但命题 6.2 给出 $\delta|B|<[T:$ 对于每个可解 $B\leq$ Aut(T)，都有 $B\cap T]^{r_0}$，因为 $s<r_0$。

引理 6.4。令 T 为下列群之一:

$$U_3(q)\ (q\geq 3),\quad U_5(q)\ (q\geq 2),\quad S_4(q)\ (q\geq 3),\quad U_4(2).$$

对于每个真子群 $U<T$，记 $h=[T:\ \ U]$。则 $\delta|\mathrm{Out}(T)|\,|T|<h^{15/4}$.

证明。记 $t=|T|$ 以及 $o=|\mathrm{Out}(T)|$。令 $\mu(T)$ 表示 T的真子群的最小指数。由于 $h\geq\mu(T)$，只需证明 $\delta ot<\mu(T)^{15/4}$.由于 T是非阿贝尔单群，每个真子群都是核自由的。因此，$\mu(T)$ 等于 T的忠实置换表示的最小次数，如 [11, 表 4]所列。

(1) 群 $U_3(q)$。对于 $q\neq 5$，我们有 $\mu(T)=q^3+1$ 以及 $ot=2fq^3(q^3+1)(q^2-1)$。由于 $\delta<3$和 $f\leq q/2$，我们有

$$\frac{\delta ot}{\mu(T)^{15/4}}<\frac{6fq^5}{q^{33/4}}\leq 3q^{-9/4}<1.$$

(2) 群 $U_5(q)$。我们有

$$\mu(T)=\frac{(q^5+1)(q^4-1)}{q^2-1}=(q^5+1)(q^2+1)>q^7.$$

由于 $(1-q^{-2})(1+q^{-3})<1$ 且 $(1-q^{-4})(1+q^{-5})<1$，由阶公式可得

$$ot=2fq^{10}(q^2-1)(q^3+1)(q^4-1)(q^5+1)<2fq^{24}.$$

对于 $q\geq 3$，我们有 $f\leq q/2$和 $3<q^{5/4}$。因此 $\delta ot<6fq^{24}\leq 3q^{25}<q^{105/4}<\mu(T)^{15/4}$.

(3) 群 $S_4(q)$。对于 $q>3$，我们有 $\mu(T)=(q^4-1)/(q-1)>q^3$。若 $q>3$ 为奇数，则$ot<fq^{10}$且 $3f\leq q$。因此 $\delta ot<3fq^{10}\leq q^{11}<q^{45/4}<\mu(T)^{15/4}$.

对于满足 $f\geq 4$ 的 $q=2^f$，我们有 $ot<2fq^{10}$。由于 $6\cdot 4<2^5$ 且对于 $f\geq 4$ 有 $(f+1)/f\leq 5/4<2^{5/4}$，由归纳法可得 $6f<q^{5/4}$。因此 $\delta ot<6fq^{10}<q^{45/4}<\mu(T)^{15/4}$.

(4) 剩余情形。因此，对于 $S_4(q)$，只剩下 $q=3$、4、8。还需检验 $U_3(5)$、$U_5(2)$、$S_4(3)$、$S_4(4)$ 和 $S_4(8)$。群 $U_4(2)$ 也已涵盖，因为 $U_4(2)\cong S_4(3)$。t 和 o 的值可由上面的标准公式得出，而 $\mu(T)$ 的值列于 [11, 表 4]:

表6. 小型经典群的指数

T	t	o	$\mu(T)$
$U_3(5)$	126000	6	50
$U_5(2)$	13685760	2	165
$S_4(3)\cong U_4(2)$	25920	2	27
$S_4(4)$	979200	4	85
$S_4(8)$	1056706560	6	585

由于 $\delta<3$，只需验证 $(3ot)^4<\mu(T)^{15}$. 。通过直接整数比较可验证这一点对每一行都成立。□

结合表 4、命题 6.1 和 6.2 以及引理 6.4，我们得到以下总结：

表 7. 已完成和剩余的经典情形

群	已处理	剩余情形
$\mathrm{PSL}_n(q)$	所有情形（命题 6.1 和 6.2）	—
$\mathrm{PSU}_n(q)$	引理 6.4 中的情形	$U_4(q)$，其中 $q \geq 3$； $U_n(q)$，其中 $n \geq 6$
$\mathrm{PSp}_n(q)$	引理 6.4 中的情形	$n \geq 6$ 偶数
$\Omega_n(q)$	—	$n \geq 7$ 奇数， q 奇数
$\mathrm{P}\Omega q(q)$	—	$n \geq 8$ 偶数

现在我们考虑剩余的酉型、辛型和正交群，从满足 $O_p(U) \neq 1$ 的可解子群 $U \leq T$ 开始。

回顾第 5 节， $X/Z(X) \cong T$，其中 $z = |Z(X)|$。根据 Borel–Tits 定理，每个满足 $O_p(U) \neq 1$ 的可解 $U \leq T$ 都包含在 $\widehat{X}$ 的某个极大抛物子群 P 的像中。令 $|O_p(P)| = q^u$，并设 $L = P/O_p(P)$ 为 Levi 商群。由于 $[X: P] \geq q^u$ 且 $\delta < 3$，命题 5.2 表明，假设 (3.2) 对更小的非阿贝尔单群成立，只需验证 (5.2)，即

$$3\frac{|\operatorname{Out}(T)|}{z} c(L) \leq q^{(s-1)u}.$$

因此，我们需要求出每个极大抛物子群对应的 u 值，并为 $c(L)$ 给出一个上界。对于其余经典群，这些子群在酉型和正交情形下是全奇异 k-空间的稳定子，在辛情形下则是全各向同性 k-空间的稳定子。

回顾一下，对于任意有限群 Y， $c(Y)$ 表示其阿贝尔合成因子的阶之积。为界定 $c(L)$，我们使用以下记号： $c_{\mathrm{SL}}(r, q) = c(\mathrm{SL}_r(q))$、 $c_{\mathrm{SU}}(r, q) = c(\mathrm{SU}_r(q)$）以及 $c_{\mathrm{Sp}}(r, q) = c(\mathrm{Sp}_r(q))$。对于全正交群，当 r 为奇数时，记为 $c_{\mathrm{O}}(r, q) = c(\mathrm{O}_r(q))$；当 $r > 0$ 为偶数时，记为 $c_{\mathrm{O}}(r, q) = c(\mathrm{O}_r^\varepsilon(q))$，其中 $c_{\mathrm{O}}(0, q) = 1$。符号 ε 由正交型决定。以下数值由经典群的标准阶和合成因子（见 [14, 第 2] 章），以及上文列出的低维同构得到：

表 8。经典群的阿贝尔合成因子之积

函数	case	值
$c_{\mathrm{SL}}(r, q)$	$r \leq 1$	1
	$(r, q) = (2, 2), (2, 3)$	6，24
	否则	最大公约数$(r, q - 1)$
$c_{\mathrm{SU}}(r, q)$	$r \leq 1$	1
	$(r, q) = (2, 2), (2, 3), (3, 2)$	6，24，216
	否则	最大公约数$(r, q + 1)$
$c_{\mathrm{Sp}}(r, q)$	$r = 0$	1
	$(r, q) = (2, 2), (2, 3), (4, 2)$	6,24, 2
	否则	最大公约数$(2, q - 1)$
$c_{\mathrm{O}}(r, q)$	$r = 0$	1
	$r = 1$	最大公约数$(2, q - 1)$
	$r = 2$	$2(q - \varepsilon)$
	$(r, q) = (3, 3)$	48
	$r \geq 3$ 为奇数，否则	4
	$(r, q, \varepsilon) = (4, 2, +1), (4, 3, +1)$	72，1152
	$r \geq 4$ 偶数，否则	$2\gcd(4, q^{r/2} - \varepsilon)$

对于辛群， r 为偶数；在奇数维正交情形中， q 为奇数。Th

在酉情形下，给出分解以及 $c(L)$ 的上界，其中行列式条件 $2k$: 在 Q 为 P 的幺幂根。每一行中，通常的 Levi 补在相应的广义线性群与全等距群的直积中正规。这些直积的因子都没有非平凡的 p-核。事实上，广义线性群、广义酉群和辛群在其自然模上不可约，

表 9。幺幂指数和列维商的界

type	k	u	$c(L)$ 的上界
U_n	$1 \le k \le n/2$	$k(k+2m)$	$(q^2-1)c_{\mathrm{SL}}(k,q^2)c_{\mathrm{SU}}(m,q)$
S_n	$1 \le k \le n/2$	$km+k(k+1)/2$	$(q-1)c_{\mathrm{SL}}(k,\ q)c_{\mathrm{Sp}}(m,\ q)$
$O_n^{(\varepsilon)}$	$1 \le k \le$ 维特指标 $(k \ne n/2-1$ 当 O_n^+ 时)	$km+k(k-1)/2$	$(q-1)c_{\mathrm{SL}}(k,q)c_{\mathrm{O}}(m,q)$

维数至少为三时，全正交群也如此。维数为零或一的因子的阶与 p互素。对于维数为二的正交因子，关于 k 的限制排除了正型。其阶为 $2(q+1)$；当 $p=2$ 时，它是一个二面体群，且有一个奇数阶为 $q+1>1$的循环子群，因此其 2-核平凡。故 Levi 补没有非平凡的 p-核，并且$\frown O_p(P)=Q$。特别地， L 同构于 Levi 补，而 u 的值就是幺幂根的值。在酉群行中，当 $m>0$时， $c(L)$ 的上界是精确的。当 $m=0$时，我们有 $c(L)=c(\mathrm{GL}_k(q^2))/(q+1)$，因此表列上界比 $c(L)$ 大 $q+1$倍。在正交群行中，Levi 补是 X 与全等距群的分块对角子群 $\mathrm{GL}_k(q)\times \mathrm{O}_m^{(\varepsilon)}(q)$ 的交，其中第二个因子具有所示类型，且当 $m=0$时为平凡群。由于 X 在全等距群中正规，此交在直积中正规。因此 $c(L) \le c(\mathrm{GL}_k(q))c_{\mathrm{O}}(m,q)$。在 O_n^+型且 n为偶数时，极大全奇异 $n/2$空间分成两个 X-轨道，其稳定子在 X 中的指数相同，且 u 和 $c(L)$ 的值也相同。

下面的引理讨论情形 $O_p(U)\ne 1$。

引理 6.5. 设 T 是以下群之一:

$$U_4(q)\ (q\ge 3),\quad U_n(q)\ (n\ge 6),\quad S_n(q)\ (n\ge 6\ even),$$
$$\Omega_n(q)\ (n\ge 7\ odd,\ q\ odd),\quad \mathrm{P}\Omega_n^{\varepsilon}(q)\ (n\ge 8\ even).$$

假设对于阶小于 $|T|$ 的每个非阿贝尔单群，(3.2) 均成立。设 $U\le T$ 可解，且 $O_p(U)\ne 1$，并记 $h=[T\colon\ U]$。那么 $\delta|\mathrm{Out}(T)||T|<h^{1+s}$.

证明。 由定理 5.1， U 在 X 中的完全原像 $\widehat{U}$ 包含于 X 的一个极大抛物子群 P 中。由命题 5.2，只需验证 X 的每个极大抛物子群都满足 (5.2)。令 $o=|\mathrm{Out}(T)|$。由于 $s-1=25/14$，(5.2) 化为 $3(o/z)c(L)\le q^{25u/14}$.

(1) 情形 $q\ge 4$。表 8 给出

$$c_{\mathrm{SL}}(k,q)\le q-1,\qquad c_{\mathrm{SL}}(k,q^2)\le q^2-1,$$
$$c_{\mathrm{SU}}(m,q)\le q+1,\qquad c_{\mathrm{Sp}}(m,q)\le 2,\qquad c_{\mathrm{O}}(m,q)\le 2(q+1).$$

结合表 9，这些界给出 $c(L)\le(q+1)^5$。由于 $o/z\le 12f$ 和 $f\le q/2$，我们有 $3(o/z)c(L)\le 18q(q+1)^5<55q^6$. 若 $u\ge 5$，则 $25u/14-6\ge 41/14$。由于 $55^{14}<4^{41}$ 和 $q\ge 4$，可得 $55q^6<q^{25u/14}$。

根据表 9，我们有 $u\ge 5$，但 $U_4(q)$ 除外，其中 $k=2$，且 $m=0$ 和 $u=4$。在这种情形下，同一张表给出 $c(L)\le 2(q^2-1)$，而 $o/z=2f\le q$。因此 $3(o/z)c(L)\le 6q^3<q^5<q^{100/14}$。

(2) 情形 $q=2,3$。对于 $q=2$，表 8 和表 9 给出 $c(L)\le 1944$，而表 5 给出 $o/z\le 6$。对于 $q=3$，相应的界为 $c(L)\le 55296$ 和 $o/z\le 12$。这里 $1944=3\cdot 3\cdot 216$ 和$55296=2\cdot 24\cdot 1152$，分别使用酉型和正交群行。因此

$$3(o/z)c(L)\le\begin{cases}3\cdot 6\cdot 1944=34992, & q=2,\\ 3\cdot 12\cdot 55296=1990656, & q=3.\end{cases}$$

由于

$$34992<2^{16}<2^{225/14},\qquad 1990656<3^{14}<3^{200/14},$$

(5.2) 在 $q=2$ 时对 $u\ge 9$ 成立，在 $q=3$ 时对 $u\ge 8$ 成立。

剩下需要考虑 $u\le 8$ 当 $q=2$ 以及 $u\le 7$ 当 $q=3$。固定 n后，表 9 中关于 u 的每个公式都是 k的凹二次函数。在 k允许的最小值和最大值处计算，可得每种情形下的 $u\ge n-2$。因此，当 $q=2$ 时有 $n\le 10$，当 $q=3$ 时有 $n\le 9$。

(3) 剩余情形。对于满足 $n \geq 6$的 $U_n(q)$，表 9 给出 $u \geq 9$，因此这些群已涵盖在内。附录 A.2 中的枚举给出了下文所列的剩余情形，并按 $(q,\ u)$ 分组。对于每种情形，上述表格给出了 o/z 以及 $c(L)$ 的上界。最后一列给出了每一行中所得的 3 $(o/z)\ c(L)$ 各上界的最大 M。

表 10。剩余的经典抛物型 c ases

q	u	（类型 k）	M
2	5	$(S_6,\ 1)$	6
2	6	$(S_6,\ 3)$，$(O_8^+,\ 1)$，$(O_8^+,\ 4)$，$(O_8^-,\ 1)$	36
2	7	$(S_6,\ 2)$，$(S_8,\ 1)$	108
2	8	$(O_{10}^{\pm},\ 1)$	12
3	4	$(U_4,\ 2)$	96
3	5	$(U_4,\ 1),\ (S_6,\ 1),\ (O_7,\ 1)$	1152
3	6	$(S_6,\ 3),\ (O_7,\ 3),\ (O_8^+,\ 1),\ (O_8^+,\ 4),\ (O_8^-,\ 1)$	288
3	7	$(S_6,\ 2),\ (S_8,\ 1),\ (O_7,\ 2),\ (O_9,\ 1)$	13824

这里 $O_{10}^{\pm}$ 包含两种类型。例如，当 $q = 3$ 时，情形 O_7(3) 满足 $k = 2$，且有 $u = 7$。表格给出 $o/z = 2$ 和 $c(L) \leq 2 \cdot 24 \cdot 48$，因此 3$(o/z)c(L) \leq 3 \cdot 2 \cdot (2 \cdot 24 \cdot 48) = 13824$，这就是 $(q,\ u) =$ (3，7) 的最大值。表格中的每个值 M都满足 $M < q^{u+2}$。由于 $u \geq 4$，我们有 $u + 2 < 25u/14$。因此 3$(o/z)c(L) \leq M < q^{u+2} < q^{25u/14}$. 于是，对于 X 的每个极大抛物子群，(5.2) 都成立。根据命题 5.2，$\delta o|U|^{1+s} < |T|^s$.由于 $|T| = h|U|$，这等价于 $\delta o|T| < h^{1+s}$。□

引理 6.6。设 T 如引理 *6.5* 中所述，并设 $U \leq T$ 为可解群，且 $O_p(U) = 1$。记 $h = [T\colon\ U]$。则 $\delta|\operatorname{Out}(T)|\,|T| < h^{15/4}$.

证明。记 $t = |T|$、$o = |\operatorname{Out}(T)|$ 和 $Q = q^a$，其中 $a = 2$ 为酉型，而 $a = 1$ 为其他类型。我们旨在证明 $\delta ot < h^{15/4}$。首先利用阶公式建立界。然后使用引理 5.6(a) 处理高维群，并处理 $O_7(q)$。剩余的群 $U_4(q)$ 和 $U_6(q)$，则利用引理 5.6(b)、(c) 处理。

步骤 *1*。初步界。我们首先建立

$$\delta zt > q^D, \qquad ot < 6fq^D, \qquad z \leq Q - 1,$$

利用经典群的标准阶公式以及表 5 中的 z 和 o。

我们使用 $5/2 < \delta < 3$。在酉型中，由于 $zt = |\mathrm{SU}_n(q)|$ 和 $D = n^2 - 1$，标准阶公式给出

$$\frac{zt}{q^D} = \prod_{i=2}^{n}(1 - (-1)^i q^{-i}) \geq \prod_{i=2}^{n}(1 - q^{-i}) \geq 1 - \sum_{i=2}^{n} q^{-i} > \frac{1}{2}.$$

在辛型中，写作 $n = 2m$，我们有

$$\frac{zt}{q^D} = \prod_{i=1}^{m}(1 - q^{-2i}) \geq \frac{3}{4}\left(1 - \sum_{i=2}^{\infty} 4^{-i}\right) = \frac{11}{16} > \frac{2}{3}.$$

在正交型中，写作 $r = \lfloor n/2 \rfloor$ 和 $d =$ 最大公约数(2，$q - 1$)。标准阶公式给出

$$\frac{zt}{q^D} = \begin{cases} \dfrac{1}{d}\displaystyle\prod_{i=1}^{r}(1 - q^{-2i}), & n = 2r + 1, \\ \dfrac{1 - \varepsilon q^{-r}}{d}\displaystyle\prod_{i=1}^{r-1}(1 - q^{-2i}), & n = 2r. \end{cases}$$

对于每个 $k \geq 1$,

$$\prod_{i=1}^{k}(1 - q^{-2i}) \geq 1 - \sum_{i=1}^{k} q^{-2i} > 1 - \frac{1}{q^2 - 1}.$$

对于 $n=2r$，我们有 $r\geq 4$，因此 $1-\varepsilon q^{-r}\geq 1-q^{-4}$。由于当 q 为奇数时 $d=2$，当 q 为偶数时 $d=1$，我们有

$$\frac{zt}{q^D}>\begin{cases}(1-3^{-4})(1-1/8)/2=35/81, & q \text{ odd},\\ (1-2^{-4})(1-1/3)=5/8, & q \text{ even}.\end{cases}$$

所有这些下界都大于 $2/5>1/\delta$。因此 $\delta zt>q^D$。

接下来我们给出 ot 的界。根据表 5，在酉型中有 $o/z=2f$，在辛型中有 $o/z=f$。在奇数维正交型中，$o=2f$ 且 $d=2$。在偶数维正交型中，$o/z=2fd$，但 O_8^+ 除外，此时$o/z=6fd$。为了给 ot 取界，我们使用 $ot=(o/z)zt$。在酉型中，我们有 $(1-q^{-2i})(1+q^{-(2i+1)})<1$，而在正交负型中，$(1-q^{-2})(1+q^{-r})<1$. 结合上述阶公式以及表 5 中 o/z 的值，可得

$$ot<\begin{cases}fq^D, & \text{in odd orthogonal type},\\ 6fq^D, & \text{for } O_8^+(q),\\ 2fq^D, & \text{in all other cases}.\end{cases}$$

特别地，$ot<6fq^D$。最后，根据表 5，$z\leq Q-1$。

步骤 *2.* 高维群。由引理5.6(a)，$h\geq t\delta(Q-1)Q^{-\beta n}$. 将此与步骤 1 中的$\delta zt>q^D$ 结合，得到

$$\frac{h^{15/4}}{q^D}>q^{(11D-15a\beta n)/4}\left(\frac{Q-1}{z}\right)^{15/4}.$$

由于 $\beta<9/4$，我们有

$$\frac{h^{15/4}}{q^D}>q^{A/16}\left(\frac{Q-1}{z}\right)^{15/4},\qquad A=44D-135an.$$

假设 $n\geq 7$ 属于酉型，$n\geq 6$ 属于辛型，或 $n\geq 8$ 属于正交型。由表 5，

$$A=\begin{cases}44n^2-270n-44, & \text{unitary type},\\ 22n^2-113n, & \text{symplectic type},\\ 22n^2-157n, & \text{orthogonal type}.\end{cases}$$

Thes这些表达式在各自的范围内递增，初始值分别为 222、114 和 152。 In 部分别地，$A\geq 114$。由于 $z\leq Q-1$，步骤 1 中的界以及 $f\leq q/2$ 给出

$$\delta ot<18fq^D\leq 9q^{D+1}<q^{D+114/16}\leq q^{D+A/16}<h^{15/4}.$$

这就证明了所述范围内的结论。

步骤 *3*。情形 $O_7(q)$。此处 $q\geq 3$ 为奇数，$Q=q$、$z=1$ 和 $A=-21$。由于 $q-1\geq 2q/3$ 且$2^8>3^5$，我们有 $(q-1)^8>q^5$。因此，步骤 2 中的界给出

$$\frac{h^{15/4}}{q^D}>q^{-21/16}(q-1)^{15/4}>q^{33/32}>q\geq 3f>\frac{\delta ot}{q^D},$$

其中，最后一个不等式使用了 $ot<fq^D$ 和 $\delta<3$。因此 $h^{15/4}>\delta ot$。

步骤 *4*。情形 $U_4(q)$ 和 $U_6(q)$。还需考虑 $U_4(q)$，其中 $q\geq 3$，以及 $U_6(q)$，其中 $q\geq 2$。记 $q^\nu=|T|_p$。相关参数如下。

表11。小型酉群参数

T	range	$\Phi_m(q)$	j	a_0	ν	c
$U_4(q)$	$q\geq 3$	q^2-q+1	3	16	6	1/4
$U_6(q)$	$q\geq 2$	$q^4-q^3+q^2-q+1$	5	128	15	1/16

这里 $m=6$，分别表示各行中的 10，Φ_m 表示第 m 个圆分多项式，且 $j=m/2$。ν的值由 $|T|_p=q^{n(n-1)/2}$ 得出。由引理 5.6(b)，我们有 $|U|_p\leq p^{\lambda_p(n)}$，其中 $n=4$，分别为 6。对于 $p=2$，定理 5.5 给出 $\lambda_2(4)=4$ 和 $\lambda_2(6)=7$。对于奇数 p，同一公式给出 $p^{\lambda_p(4)}\leq 9$ 和 $p^{\lambda_p(6)}\leq 81$。因此，两行中都有 $|U|_p\leq a_0$。常数 c 的选取是为了

以下估计。在这些族中， $ot < 2fq^D$，其中 $(D,\ \nu) = (15,\ 6),\ (35,\ 15)$。由于 $\delta < 3$ 和 $f \le q/2$，我们有 $\delta ot < 3q^{D+1}$. 。因此，只需证明

$$h > cq^{\nu} \tag{6.2}$$

并且 $c^{15}q^{15\nu-4D-4} > 3^4$. 事实上，这些不等式蕴含了 $h^{15/4} > 3q^{D+1} > \delta ot$。

指数 $15\nu - 4D - 4$ 分别为 26 和 81。在允许的最小域大小下，第二个不等式分别变为 $3^{22} > 2^{30}$ 和 $2^{21} > 3^4$。由于两个指数均为正数，因此在所述范围内始终成立。

为证明 (6.2)，我们选取一个素数 $\ell \mid t$。如果 $\ell \nmid |U|$，则 $\ell \mid h$；否则，我们将使用引理 5.6(c) 来界定 $|U|$。记 $Q = q^2$。对于 $U_4(q)$，选取一个整除 $\Phi_6(q)$ 的素数 $\ell \ne 3$ 。对于 $U_6(q)$，选取一个整除 $\Phi_{10}(q)$ 的素数 $\ell \ne 5$ 。这样的素数确实存在。如果 $3 \mid \Phi_6(q)$，则 $\Phi_6(q) \equiv 3$ （模 9）。同样地，如果 $5 \mid \Phi_{10}(q)$，则 $\Phi_{10}(q) \equiv 5$ （模 25）。由于对于 $q \ge 3$ ， $\Phi_6(q) > 3$ ，并且对于 $q \ge 2$， $\Phi_{10}(q) > 5$ ，所需的素数确实存在。

由于 $\Phi_m(q)$ 为奇数，且 $\Phi_m(q) \equiv 1$ (模 p)，因此有 $\ell \nmid 2p$。我们对 ℓ 的选择也给出 $\ell \nmid m$。由于 $\ell \mid \Phi_m(q)$，分圆阶判据给出

$$\mathrm{ord}_\ell(q) = m, \qquad \mathrm{ord}_\ell(Q) = j = m/2.$$

特别地， $m \mid (\ell - 1)$，因此对于 $U_4(q)$ 有 $\ell \ge 7$ ，对于 $U_6(q)$ 有 $\ell \ge 11$ 。因此，两种情形下都有 $\ell > n+1$ 和 $n/2 < j \le n$。由于 $\Phi_6(q) \mid (q^3+1)$ 且 $\Phi_{10}(q) \mid (q^5+1)$，$\mathrm{SU}_n(q)$ 的阶公式给出 $\ell \mid zt$。由于 $\ell > n$ 且 $z =$ 与 $n, q+1$ 互素，因此有 $\ell \mid t$。我们区分两种情形。

情形 *1*。 $\ell \nmid |U|$。于是 $\ell \mid h$，由引理 5.6(b) 得到 $h_p = q^\nu/|U|_p \ge q^\nu/a_0$。由于 $\ell \ne p$，我们有$h \ge \ell q^\nu/a_0$。分别对于 $U_4(q)$ 和 $U_6(q)$，有 $\ell/a_0 \ge 7/16 > 1/4 = c$ 和 $\ell/a_0 \ge 11/128 > 1/16 = c$。因此 (6.2) 成立。

情形 *2*。 $\ell \mid |U|$。根据引理 5.6(c)，

$$|U| \le \frac{j(Q^j-1)|\,\mathrm{GL}_{n-j}(Q)|}{Q-1} = \begin{cases} 3(q^6-1), & T = U_4(q), \\ 5(q^{10}-1), & T = U_6(q). \end{cases}$$

对于 $U_4(q)$，由于 $z \le q+1$ 且 $(q^4-1)/(q^3-1) > q$，我们有

$$\frac{h}{q^6} \ge \frac{(q^4-1)(q^2-1)}{3z(q^3-1)} > \frac{q(q-1)}{3} > 1.$$

对于 $U_6(q)$，由于 $z \le q+1$ 且 $(q^3+1)(q^2+1) > q^5 - 1$，我们有

$$\frac{h}{q^{15}} \ge \frac{(q^2-1)(q^3+1)(q^4-1)(q^6-1)}{5z(q^5-1)} > \frac{(q-1)^2(q+1)(q^6-1)}{5} \ge \frac{189}{5} > 1.$$

因此 $h > q^\nu > cq^\nu$ 在两种情形下都成立，证明完毕。

□

定理 6.7。 设 T 是表 *4* 中剩余的经典单群之一，但不包括 $\mathrm{PSL}_3(3)$。假设对于阶小于 $|T|$ 的每个非阿贝尔单群，(3.2) 均成立。那么

$$\delta|\,\mathrm{Out}(T)|\sigma(T)^{1+s} < |T|^s.$$

证明。 设 $U \le T$可解，并记 $h = [T\colon\ U] > 1$。只需证明 $\delta|\,\mathrm{Out}(T)|\,|T| < h^{1+s}$.若 $T = \mathrm{PSL}_n(q)$，则这由命题 6.1 得出。若 T 是 $U_3(q)$、 $U_5(q)$、 $S_4(q)$ 或 $U_4(2)$ 中的一个，则引理 6.4 给出 $\delta|\,\mathrm{Out}(T)|\,|T| < h^{15/4}$。

对于其余的群，当 $O_p(U) \ne 1$ 时，引理 6.5 给出所需不等式。当$O_p(U) = 1$ 时，引理 6.6 给出 $\delta|\,\mathrm{Out}(T)|\,|T| < h^{15/4}$。由于 $15/4 < 1 + s = 53/14$，这些界在所有情形下都能建立所需不等式。取 $|U| = \sigma(T)$ 即得 (3.3)。□

7. 例外群

我们为李型例外单群证明了（3.3）。对于四个族，参数最小的群不是单群。表 12 列出了这些情形，并给出了 [15, 注 24.18], 中的低参数对应关系，以及涵盖所得单群的早期结果。

表 12. 例外群的低参数情形

低参数群	相关事实	剩余范围
$G_2(2)$	$G_2(2)' \cong \mathrm{PSU}_3(3)$（定理 6.7）	$q \geq 3$
${}^2B_2(2)$	可解	$q \geq 8$
${}^2G_2(3)$	${}^2G_2(3)' \cong \mathrm{PSL}_2(8)$（命题 4.2）	$q \geq 27$
${}^2F_4(2)$	${}^2F_4(2)'$ (命题4.5)	$q \geq 8$

我们首先利用最小子群指数处理七个族。对于其余的族 $E_6(q)$、$E_7(q)$ 和 $E_8(q)$，我们根据 $O_p(U)$ 是否平凡来考察可解子群 $U \leq T$。只有当 $O_p(U) \neq 1$ 时，才需要对（3.2）使用归纳假设。在本节中，$q = p^f$ 始终表示群名中的参数。对于 ${}^2B_2(q)$ 和 ${}^2F_4(q)$，我们有 $p = 2$，且 f 为奇数。对于 ${}^2G_2(q)$，我们有 $p = 3$，且 f 为奇数。

引理 7.1。设 T是下列某一类型的单群：G_2、F_4、${}^2E_6$、${}^3D_4$、${}^2F_4$、${}^2B_2$、${}^2G_2$；当 G_2为 $q \geq 3(q)$时，$q \geq 8$；当 ${}^2B_2$为$q(q)$ 时，${}^2F_4$；当 ${}^2G_2$为 $q \geq 27\ (q)$时，$q \geq 27$。则对于 T，(3.3) 成立。

证明。步骤 *1*。归约至最小指数。记 $o = |\mathrm{Out}(T)|$ 以及 $\mu(T) = \min\{[T\colon H]\colon H < T\}$。由于 T 的每个可解子群都是真子群，故 $\sigma(T) \leq |T|/\mu(T)$。因此，为证明 (3.3)，只需证明 $\delta o|T| < \mu(T)^{53/14}$.。我们首先考虑除 $G_2(4)$ 和 ${}^2E_6(q)$ 之外的所有情形，这两种情形将在步骤 4 中分别处理。

Step 2. 奇维正交型 $\mu(T)$ 和 $o|T|$。对于步骤 3 中处理的情形，我们建立了以下界：

$$\mu(T) > q^m, \qquad o|T| < cfq^D,$$

其中 c、D、m 取决于所属的族。

对于单群 T，其最小忠实置换次数等于 $\mu(T)$，如引理 6.4 的证明中所述。所需的最小指数由 Vasil'ev 给出：G_2 和 F_4对应的结果见 [18]，五个扭曲族对应的结果见 [19]；这些结果也列于 [11, 表 4] 中：

表 13. 例外群的最小指数

T	$\mu(T)$
$G_2(3),\ G_2(4)$	$351,\ 416$
$G_2(q),\ q > 4$	$(q^6-1)/(q-1)$
$F_4(q)$	$(q^{12}-1)(q^4+1)/(q-1)$
${}^2E_6(q)$	$(q^{12}-1)(q^6-q^3+1)(q^4+1)/(q-1)$
${}^3D_4(q)$	$(q^8+q^4+1)(q+1)$
${}^2F_4(q)$	$(q^6+1)(q^3+1)(q+1)$
${}^2B_2(q)$	q^2+1
${}^2G_2(q)$	q^3+1

这些公式给出

$$\begin{aligned}
\mu(G_2(q)) &> q^5 \qquad (q \neq 4),\\
\mu(F_4(q)) &> q^{15},\\
\mu({}^3D_4(q)) &> q^9,\\
\mu({}^2F_4(q)) &> q^{10},\\
\mu({}^2B_2(q)) &> q^2,\\
\mu({}^2G_2(q)) &> q^3.
\end{aligned}$$

对于 $G_2(3)$，该界由 $351 > 3^5$ 得出。对于 $G_2(4)$，该界不成立，因为 $\mu(G_2(4)) = 416 < 4^5$。此情形将在步骤 4 中单独处理。

接下来，我们利用标准的群阶和外自同构公式 [15, 21]，建立 $o|T|$的上界。对于 $G_2(q)$ 和 $F_4(q)$，分别有：

$$\begin{aligned}
|T| &= q^6(q^6-1)(q^2-1),\\
|T| &= q^{24}(q^{12}-1)(q^8-1)(q^6-1)(q^2-1).
\end{aligned}$$

由于两种情形下均有 $o \le 2f$，因此得到

$$o|G_2(q)| < 2fq^{14}, \qquad o|F_4(q)| < 2fq^{52}.$$

对于所考虑的四个扭曲族，其阶为

表14. 扭曲例外群的阶

T	$\lvert T\rvert$	o
${}^3D_4(q)$	$q^{12}(q^8+q^4+1)(q^6-1)(q^2-1)$	$3f$
${}^2F_4(q)$	$q^{12}(q^6+1)(q^4-1)(q^3+1)(q-1)$	f
${}^2B_2(q)$	$q^2(q^2+1)(q-1)$	f
${}^2G_2(q)$	$q^3(q^3+1)(q-1)$	f

对于 ${}^3D_4(q)$，我们有

$$(1-q^{-2})(1+q^{-4}+q^{-8}) < 1.$$

对于 ${}^2F_4(q)$，我们有

$$(1-q^{-4})(1+q^{-6}) < 1, \qquad (1-q^{-1})(1+q^{-3}) < 1.$$

对于 ${}^2B_2(q)$和 ${}^2G_2(q)$，相应的不等式为

$$(1-q^{-1})(1+q^{-2}) < 1, \qquad (1-q^{-1})(1+q^{-3}) < 1,$$

分别如下。前述公式和不等式给出了步骤 3 中所考察的六个族的以下界：

表15. 例外群的界

T	$\mu(T)$	$o\lvert T\rvert$
$G_2(q)\quad q\neq 4$	$> q^5$	$< 2fq^{14}$
$F_4(q)$	$> q^{15}$	$< 2fq^{52}$
${}^3D_4(q)$	$> q^9$	$< 3fq^{28}$
${}^2F_4(q)$	$> q^{10}$	$< fq^{26}$
${}^2B_2(q)$	$> q^2$	$< fq^5$
${}^2G_2(q)$	$> q^3$	$< fq^7$

步骤 *3*。验证所需不等式。步骤 2 中建立的界给出了以下 c，D，m 和 $M = 53m - 14D$ 的值：

表 16。指数比较的参数

T	c	D	m	M
$G_2(q)\quad q\neq 4$	2	14	5	69
$F_4(q)$	2	52	15	67
${}^3D_4(q)$	3	28	9	85
${}^2F_4(q)$	1	26	10	166
${}^2B_2(q)$	1	5	2	36
${}^2G_2(q)$	1	7	3	61

由于 $q \ge 2$，表 16 中的值给出 $(3c/2)^{14} < 2^{M-14} \le q^{M-14}$. 结合 $f \le q/2$ 和 $\delta < 3$，可得

$$(\delta o|T|)^{14} < (3cfq^D)^{14} \le (3c/2)^{14} q^{14D+14} < q^{53m} < \mu(T)^{53}.$$

因此，对于表中的所有群，均有 $\delta o|T| < \mu(T)^{53/14}$。

步骤 *4*。剩余情形。还需考虑 $G_2(4)$和 ${}^2E_6(q)$。

情形 G_2（4）。这些值

$$|T| = 251596800, \qquad o = 2, \qquad \mu(T) = 416$$

给出（$6\cdot 251596800$）$^{14} < 416^{53}$. 由于 $\delta < 3$，这证明了 $\delta o|T| < \mu(T)^{53/14}$。

函数 f 族 ${}^2E_6(q)$。写出 $d = \gcd(3,\ q+1)$。群阶和外自同构阶满足 fy

$$d|T| = q^{36}(q^2-1)(q^5+1)(q^6-1)(q^8-1)(q^9+1)(q^{12}-1), \qquad o = 2fd.$$

由于

$$(1-q^{-2})(1+q^{-5}) < 1, \qquad (1-q^{-8})(1+q^{-9}) < 1,$$

我们有 $d|T| < q^{78}$。因此 $o|T| = 2f(d|T|) < 2fq^{78} \le q^{79}$. 最小指标公式给出

$$\mu(T) > (q^{11}+q^{10}+q^9)(q^6-q^3)q^4 = q^{20}(q+1) + q^{16}(q^3-q^2-q-1) > q^{20}(q+1),$$

因为 $q^3-q^2-q-1 = (q-2)(q^2+q+1) + 1 > 0$ 对于 $q \ge 2$。由于 $53/14 > 3$，我们有

$$\mu(T)^{53/14} > q^{79}\sqrt{q}(1+1/q)^{53/14} > q^{79}\left(\sqrt{q} + \frac{3}{\sqrt{q}}\right) \ge 2\sqrt{3}\,q^{79} > \delta o|T|.$$

因此，$\delta o|T| < \mu(T)^{53/14}$ 在这两种情形下也成立，从而得到 (3.3)。 □

引理 7.2. 设 $T = E_6(q)$、$E_7(q)$ 或 $E_8(q)$。假设对每个阶小于 $|T|$ 的非阿贝尔单群，(3.2) 都成立。那么 (3.3) 对 T 成立。

证明. 记 $o = |\mathrm{Out}(T)|$。由于 $\sigma(T)$ 是 T 的可解子群的最大阶，要证明 (3.3)，只需证明对每个可解子群 $U \le T$，$\delta o|U|^{1+s} < |T|^s$ 成立。设 $U \le T$ 是任意一个可解子群。与第 5 节中一样，设 $X = \mathbf{G}^\sigma$ 是 T 的单连通覆盖，并记 $z = |Z(X)|$。

情形 *1.* $O_p(U) \ne 1$。

步骤 *1.* 化归为抛物估计。由定理 5.1，U 的完全原像包含于 X 的一个极大抛物子群 P 中。选取 Levi 分解 $P = QL$，其中 Q 是幺幂根，$L = \mathbf{L}^\sigma$ 是 Levi 补，且 $\mathbf{L}$ 是 $\mathbf{G}$ 的一个 σ-稳定 Levi 子群。记 $|Q| = q^u$。由命题 5.2 和 (5.2)，只需证明

$$Q = O_p(\widehat{P}) \qquad \text{and} \qquad 3(o/z)c(L) \le q^{25u/14}.$$

步骤 *2. Levi* 结构与幺幂指数。我们采用 [15, 第 12]章中关于 Lie 型分裂群的极大抛物子群的标准结构。根据 [15, 命题 12.14], , 导出子群 $[\mathbf{L},\mathbf{L}]$ 是单连通的。因此，$K = [\mathbf{L},\mathbf{L}]^\sigma$ 是若干单连通群的直积。它们的类型对应于删去一个节点后所得 Dynkin 图的各个连通分支。

商群 $\mathbf{L}/[\mathbf{L},\mathbf{L}]$ 是秩为一的分裂环面。由于 $[\mathbf{L},\mathbf{L}]$ 是连通的，Lang–Steinberg 定理 [15, 定理 21.7] 给出了一个满射 $L \to (\mathbf{L}/[\mathbf{L},\mathbf{L}])^\sigma$，其核为 K。因此

$$|L/K| = q-1, \qquad c(L) = (q-1)c(K).$$

K 的每个直因子都没有非平凡的 p-核。这包括 $\mathrm{SL}_2(2)$ 和 $\mathrm{SL}_2(3)$，它们可能在较小的 q 时出现。因此 $O_p(K) = 1$。由于 $p \nmid (q-1)$，我们有 $O_p(L) = 1$。从而，$Q = O_p(P)$。

抛物子群 $\widehat{P}$ 含有 X 的一个 Sylow p-子群。由于 $|L/K| = q-1$，我们有 e

$$q^u = \frac{|X|_p}{|K|_p}.$$

对于分裂单连通群，其阶的 p-部分为 q^N，其中 N 是正根的数目。因此，u 是 $\mathbf{G}$ 与 $[\mathbf{L},\ \mathbf{L}]$的正根数目之差。

在 Bourbaki 编号中，节点 1、3、4、5、.. . 、ℓ 构成一条链，节点 2 与节点 4 相连。K 的类型及相应的 u 值列于表 17 [6, 15, 10, 21]中。

表17. 分裂例外群的 u Levi类型及其值

删除节点	$E_6(q)$ 类型为 K	u	$E_7(q)$ K的类型	u	$E_8(q)$ K的类型	u
1	D_5	16	D_6	33	D_7	78
2	A_5	21	A_6	42	A_7	92
3	A_1A_4	25	A_1A_5	47	A_1A_6	98
4	$A_2A_1A_2$	29	$A_2A_1A_3$	53	$A_2A_1A_4$	106
5	A_4A_1	25	A_4A_2	50	A_4A_3	104
6	D_5	16	D_5A_1	42	D_5A_2	97
7	–	–	E_6	27	E_6A_1	83
8	–	–	–	–	E_7	57

特别是， $u \geq 16$ 在每种情形下都成立。

步骤 *3*。抛物估计的验证。设 J 是上述分解中 K 的一个直因子。根据 [15, 定理 24，表中不是拟单的唯一因子是 $\mathrm{SL}_2(2)$ 和 $\mathrm{SL}_2(3)$。二者都是可解群，且阶至多为 24。对于其他任意因子 J，由 [15, 表 24 可得 $c(J) = |Z(J)| \leq 24$。由于 K 至多有三个这样的因子，因此 $c(K) \leq 24^3$。于是

$$c(L) = (q-1)c(K) \leq (q-1)24^3.$$

外自同构阶 [15, 21] 给出 $o/z \leq 2f$。由于 $f \leq q/2$、$u \geq 16$ 以及 $3 \cdot 24^3 < 2^{16} \leq q^{16}$，我们有

$$3(o/z)c(L) \leq 6f(q-1)24^3 < 3 \cdot 24^3 q^2 < q^{18} < q^{25u/14}.$$

因此 (5.2) 成立。将假定的内部不等式应用于命题 5.2，得到 $\delta o|U|^{1+s} < |T|^s$。

情形 *2*。 $O_p(U) = 1$。根据引理 5.8，我们有 $|U| \leq q^a$，其中 $a = 52$、91、104 分别对应于 $E_6(q)$ $E_7(q)$ $E_8(q)$。我们对 $|T|$ 建立下界并对 δo 建立上界，然后证明所需不等式。

步骤 *1*。关于 $|T|$ 和 δo。标准阶公式 [15, 21] 给出 $z|T| = q^D \prod_{i \in I}(1 - q^{-i})$，其数据如下：

表 18。分裂例外群的阶参数

T	D	z	I	o/z
$E_6(q)$	78	最大公约数(3、$q-1$)	2、5、6、8、9、12	$2f$
$E_7(q)$	133	最大公约数(2，$q-1$)	2，6，8，10，12，14，18	f
$E_8(q)$	248	1	2，8，12，14，18，20，24，30	f

由于 I 由互不相同且至少为二的整数构成，

$$\prod_{i \in I}(1 - q^{-i}) > 1 - \sum_{i \in I} q^{-i} > 1 - \frac{1}{q(q-1)} \geq \frac{1}{2}.$$

由于 $z \leq 3$ 和 $q \geq 2$，因此 $|T| > q^D/(2z) \geq q^D/6 > q^{D-3}$. 表中的外自同构阶给出 $o/z \leq 2f$。由于 $z \leq 3$、$\delta < 3$ 和 $f \leq q/2$，我们有 $\delta o < 18f \leq 9q < q^5$.

步骤 *2*。所需不等式的验证。 a 和 D 的值给出以下指数比较：

表19。分裂例外群的指数比较

T	a	D	$53a + 70$		$39(D-3)$
$E_6(q)$	52	78	2826	$<$	2925
$E_7(q)$	91	133	4893	$<$	5070
$E_8(q)$	104	248	5582	$<$	9555

将这些不等式与 $|U|$、δo 和 $|T|$ 的界结合起来，我们得到

$$(\delta o)^{14}|U|^{53} < q^{70+53a} < q^{39(D-3)} < |T|^{39}.$$

因此，在此情形下也有 $\delta o|U|^{1+s} < |T|^{s}$。 □

8. 证明的完成

定理 *3.2* 的证明。 我们对 $|T|$ 进行强归纳法证明 (3.2)，并在每个阶数下确定 (3.3) 是否成立。假设对于阶小于 $|T|$ 的每个非阿贝尔单群，(3.2) 均成立。根据命题 5.2 中的论证，Levi 商群的非阿贝尔合成因子的阶小于 $|T|$。

根据归纳假设，我们可以应用定理 6.7 和引理 7.2。结合命题 4.2、4.4 和 4.5 以及引理 7.1，根据有限单群分类和第 6 节和第 7 节中的约化，这些结果涵盖了所有非阿贝尔有限单群。除非 $T \cong$ $\mathrm{PSL}_2(8)$、$\mathrm{PSL}_2(16)$ 或 $\mathrm{PSL}_3(3)$，否则它们确立了 (3.3)。由于 $\delta|\operatorname{Out}(T)| > 1$，(3.3) 蕴含 (3.2)。

现在还需考虑这三个例外。$\mathrm{PSL}_2(8)$ 和 $\mathrm{PSL}_2(16)$ 的 $\sigma(T)$ 值已在命题 4.2 的证明中得到，而 $\mathrm{PSL}_3(3)$ 的相应值则由 (6.1) 得出。相关值如下：

表 20。(3.3) 的三个例外

T	$\sigma(T)$	$\lvert T\rvert/\sigma(T)$	$\lvert\operatorname{Out}(T)\rvert$
$\mathrm{PSL}_2(8)$	56	9	3
$\mathrm{PSL}_2(16)$	240	17	4
$\mathrm{PSL}_3(3)$	432	13	2

对于表中的每一行，通过直接计算可得

$$\sigma(T) < (|T|/\sigma(T))^{s} < \delta|\operatorname{Out}(T)|\sigma(T).$$

第一个不等式等价于 (3.2)，而第二个表明 (3.3) 不成立。至此，归纳法完成，定理的两个断言也得以证明。□

定理 *A* 的证明。 设 T 为一个非阿贝尔有限单群，且 $B \le \mathrm{Aut}(T)$ 为可解群。记 $h = [T\colon\ B \cap T]$。由于 B 是可解的，而 T 是不可解的，因此有 $h > 1$。

如果 T 不是定理 3.2 中的三个例外之一，则 (3.3) 和引理 3.1 给出 $\delta|B| < h^{s} < h^{r_0}$。对于这三个例外，备注 4.3 和 6.3 给出 $\delta|B| \le h^{r_0}$。因此

$$\delta|B| \le [T : B \cap T]^{r_0}$$

对于每个非阿贝尔有限单群 T 以及每个可解 $B \le \mathrm{Aut}(T)$。由于 $b_0 = 1 + r_0$，取 $r = r_0$，定理 B 给出了定理 A 中的两个不等式。

现在设 b 为满足 $[X$ 的实数：对于每个有限群 $X] \le [X\colon\ H]^{b}$ 以及每个可解子群 X $H \le X$。取 X 为一个非阿贝尔有限单群，并令 $H = 1$，得到 $b \ge 1$。由定理 B 及 $r = b - 1$，我们有

$$\delta|B| \le [T : B \cap T]^{b-1}$$

对于每个非阿贝尔有限单群 T 以及每个可解 $B \le \mathrm{Aut}(T)$。取命题 2.1 中的 T 和 B，我们有 $168\delta \le 9^{b-1}$. 因此 $b \ge 1 + \log_9(168\delta) = b_0$。

最后，命题2.1中达到的等式表明，对于固定的指数 b_0，定理 A 第二个不等式中的系数δ^{-1} 不能减小。□

附录 A。有限算术验证

我们给出其余的算术检验，并证明经典抛物情形列表的合理性。

A.1. 群 $\mathrm{PSL}_2(q)$。 在命题 4.2 中，尚需验证对于满足 $4 \le q < 64$ 和 $q \notin \{5,8,16\}$ 的素数幂 $q = p^f$，$\delta f q(q^2-1) < k^{1+s}$。$k$ 和 f 的相应值以及所需的不等式如下所示。

表 21. $\mathrm{PSL}_2(q)$ 的算术检验

q	k	f	$\delta f q(q^2-1) < k^{1+s}$
4	5	2	$120\delta < 5^{1+s}$
7	7	1	$336\delta < 7^{1+s}$
$11 \le q < 64$，q 素数 $9,\ 25,\ 49$	$q+1$	1	$\delta q(q^2-1) < (q+1)^{1+s}$
	$q+1$	2	$2\delta q(q^2-1) < (q+1)^{1+s}$
27	$q+1$	3	$3\delta q(q^2-1) < (q+1)^{1+s}$
32	$q+1$	5	$5\delta q(q^2-1) < (q+1)^{1+s}$

前两行中的不等式可通过直接计算得到。对于其余四行，由于$\delta < 3$且 $q(q-1) < (q+1)^2$,，我们有 $\delta f q(q^2-1) < 3f(q+1)^3$。由于 $s - 2 = 11/14$，所需不等式可由 $(3f)^{14} < (q+1)^{11}$推出。直接计算表明，在每一行中，该不等式在 q 的最小值处成立，因此对所列出的 q 的所有值均成立。

A.2. 剩余经典抛物情形。 在引理 6.5 中，剩余情形在 $q = 2$ 时满足 $u \le 8$，并在 $q = 3$ 时满足 $u \le 7$。由于 $u \ge n - 2$，我们得到关于 n 的相应界。对于$U_n(q)$ 且 $n \ge 6$ 的情形，我们有 $u \ge 9$。结合引理 6.5 中的限制，这些界给出了 n的以下可能值：

表 22. 剩余情形的可能维数

	界		n的可能值			
q	u	n	U_n	S_n	O_n （n为奇数）	$O_n^{\pm}$
2	≤ 8	≤ 10	$-$	$6, 8, 10$	$-$	$8, 10$
3	≤ 7	≤ 9	4	$6, 8$	$7, 9$	8

对于表 22 中的每个群，我们采用表 9 中 k 的取值范围及 u 的公式。由此得到的 u 值如下。最后两列分别列出了在考虑 $q = 2$ 和 $q = 3$ 时仍需考察的 k 值。

表 23. 经典抛物情形剩余部分的枚举

			k的剩余值	
k类型		u	$q = 2$	$q = 3$
U_4	$1, 2$	$5, 4$	$-$	$1, 2$
S_6	$1, 2, 3$	$5, 7, 6$	$1, 2, 3$	$1, 2, 3$
S_8	$1, 2, 3, 4$	$7, 11, 12, 10$	1	1
S_{10}	$1, 2, 3, 4, 5$	$9, 15, 18, 18, 15$	$-$	$-$
O_7	$1, 2, 3$	$5, 7, 6$	$-$	$1, 2, 3$
O_9	$1, 2, 3, 4$	$7, 11, 12, 10$	$-$	1
O_8^+	$1, 2, 4$	$6, 9, 6$	$1, 4$	$1, 4$
O_8^-	$1, 2, 3$	$6, 9, 9$	1	1
O_{10}^+	$1, 2, 3, 5$	$8, 13, 15, 10$	1	$-$
O_{10}^-	$1, 2, 3, 4$	$8, 13, 15, 14$	1	$-$

对于 $O_n^{\pm}$类型，极大全奇异子空间的两类只计数一次，因为它们给出的 u 和 c值相同（L）。这就得到 $q = 2$ 的九种情形和$q = 3$ 的十三种情形，如表 10所列。

人工智能使用声明

作者使用 ChatGPT（GPT-6，OpenAI）和 Claude（Opus 5.5，Anthropic）协助进行语言编辑、数学论证讨论，以及对 Lie 型有限群开展一些较为复杂的计算和估计。最终稿中的所有数学结果和证明均已由作者核验，作者对其内容承担全部责任。

参考文献

1. L. Babai、A. J. Goodman 和 L. Pyber，《没有小次数忠实传递置换表示的群》，J. Algebra 195 (1997), 1–29。2. R. Bastos 和 C. Schneider，《具有素数幂指数可解子群的群》，Monatsh. Math. 194 (2021), 471–480。3. N. Burgoyne 和 C. Williamson，《关于有限Chevalley群的 Borel–Tits定理》，Arch. Math. (Basel) 27 (1976), 489–491。4. T. C. Burness，《具有可解稳定子的本原群的基大小》，Algebra Number Theory 15 (2021), 1755–1807。5. ，《关于散在群的可解子群》，Israel J. Math. 254 (2023), 313–340。6. R. W. Carter，《Lie型有限群：共轭类与复特征标》，Wiley，1985。7. J. H. Conway、R. T. Curtis、S. P. Norton、R. A. Parker 和 R. A. Wilson，《有限群图谱：单群的极大子群与普通特征标》，Clarendon Press，Oxford，1985。8. J. D. Dixon，《线性可解群的 Fitting 子群》，J. Austral. Math. Soc. 7 (1967), 417–424。9. ，《可解线性群的正规 p-子群》，J. Austral. Math. Soc. 7 (1967), 545–551。10. D. Gorenstein、R. Lyons 和 R. Solomon，《有限单群分类》，第3卷，Math. Surveys Monogr.，第40.3卷，Amer. Math. Soc.，1998。11. S. Guest、J. Morris、C. E. Praeger 和 P. Spiga，《有限几乎单群和本原置换群中元素的最大阶》，Trans. Amer. Math. Soc. 367 (2015), 7665–7694。12. B. Huppert，《有限群I》，Springer，1967。13. E. I. Khukhro 和 V. D. Mazurov（编），《群论未解决问题：《Kourovka笔记本》》，第21号，Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk，2026，arXiv:1401.0300。14. P. B. Kleidman 和 M. W. Liebeck，《有限经典群的子群结构》，London Math. Soc. Lecture Note Ser.，第129卷，Cambridge Univ. Press，1990。15. G. Malle 和 D. Testerman，《线性代数群与 Lie 型有限群》，Cambridge Stud. Adv. Math.，第133卷，Cambridge Univ. Press，2011。16. A. Mann，《对称群和线性群的可解子群》，Israel J. Math. 55 (1986), 162–172。17. P. P. Pálfy，《本原可解群的阶的一个多项式界》，J. Algebra 77 (1982), 127–137。18. A. V. Vasil'ev，《类型为 G_2 和 F_4 的有限单异常群的最小置换表示》，Algebra Logic 35 (1996), 371–383。19. ，《有限单异常扭曲群的最小置换表示》，Algebra Logic 37 (1998), 9–20。20. E. P. Vdovin，《Lie 型有限群中具有平凡幺幂根基的子群数目》，J. Group Theory 7 (2004), 99–112。21. R. A. Wilson，《有限单群》，Grad. Texts in Math.，第251卷，Springer，2009。22. T. R. Wolf，《GL(n, q^m) 的可解子群与幂零子群》，Canad. J. Math. 34 (1982), 1097–1111。

奥克兰大学数学系，私人信箱 92019，新西兰奥克兰 1142电子邮箱： shaowu.zheng@auckland.ac.nz