迈向阿秒电子束中的光控横向维格纳有序化

Yiming Pan[1†]、Jiapeng Yang[1], Hao Geng[2, 3††]

1. 量子功能材料国家重点实验室、变革科学中心和物理科学与技术学院，上海科技大学，中国上海 200031 2. 物理学院，南京航空航天大学，中国南京 211106 3. 航空航天信息感知与物理重点实验室，工业和信息化部，中国南京 211106

摘要

动能涨落和空间电荷膨胀阻碍了自由电子束中的维格纳有序。本文提出了一种通向瞬态、无基底维格纳有序的激光驱动方案，将光子诱导近场电子显微术（PINEM）阿秒聚束、同步磁聚焦和空间预调控相结合。经典弛豫以及零温固定节点扩散蒙特卡罗陷阱基准测试表明，从 1 特斯拉到亚特斯拉磁场，六重有序仍能抵御量子涨落，从而确定了超快制备目标。

当库仑排斥超过动能并驱动电子趋向有序的电荷构型时，维格纳结晶便会产生。自维格纳最初提出稀薄电子气以来[1], ，研究人员一直在受限平台中探索这一状态，例如量子点[2], 、氦表面电子[3], 、半导体异质结构和高迁移率二维电子系统 [4-8], ，以及单层或莫尔半导体 [9–11]。这些系统抑制动能涨落，从而显现电荷有序；与此同时，其材料环境则通过限域、屏蔽和无序塑造电子态。

自由传播的电子束消除了这种材料背景，却面临着另一种障碍：有利于有序化的库仑相互作用也会驱动快速的空间电荷膨胀。有限的发射度、横向温度、速度展宽和部分非相干性，进一步阻碍了空间有序化。近期的超快电子显微术研究已在少电子脉冲中展示出强烈的库仑反聚束、阿秒相空间关联和瞬态库仑晶化 [12–15]。所报道的晶化发生在细长的准一维脉冲中的短轴向链内。近期理论研究还探讨了横向引导和连续电子束晶化 [15]。若要将自由电子晶化拓展至与之相反的薄饼状准二维状态，使数十个电子能够形成三角关联，就需要控制面密度并降低有效横向温度，以达到强库仑耦合 [16,17]。然而，在传统高亮度束流中，提高密度会增强空间电荷力；当最初互不关联的电子弛豫时，还会引发无序诱导加热[18], ，并缩短可用于有序化的时间。强库仑耦合与束流稳定性之间的这种竞争，是实现自由电子维格纳结晶的核心挑战。

在此，我们提出一种激光驱动方案，将光子诱导近场电子显微术（PINEM）[19–24], 同步磁聚焦与空间预调控相结合。PINEM相互作用会施加光学能量调制，该调制在漂移过程中演化为一列阿秒电子片层[22], ，同时磁聚焦会使面密度瞬时增加。空间预调控可为与三角有序相容的密度模提供种子，并在短暂的焦点寿命内引导关联。通过在峰值压缩前预先将电子密度排列至低势能构型附近，空间预调控还可在保守输运过程中限制无序诱导的加热[18] 。综合我们的纵向聚束分析、经典能量最小化以及静态陷阱量子蒙特卡罗基准计算，可确定瞬态维格纳有序的制备目标及其在实空间和倒易空间中的特征。这些基准为检验压缩后的电子束能否形成并保持目标关联提供指导。

光学聚束与磁聚焦

图 1 展示了用于制备瞬态强关联电子片的拟议束线。飞秒激光触发的光阴极产生电子数可控的超快电子脉冲，该脉冲经加速后进入纳米结构化 PINEM 相互作用区 [19,20]。在此处，光学近场在纵向电子波包上印刻离散的能量边带，

在随后的漂移过程中，这种调制演化为一列阿秒成束电子片层 [21,22,25,26]。

同步磁聚光透镜提供横向聚焦。在沿 z 轴传播的束流的共动拉莫尔参考系中，我们将焦斑束腰处的浸入式轴向磁场表示为有效横向谐振阱，并保留实验室时间。磁聚焦、残余横向动能和成对库仑排斥共同决定横向动力学。

我们采用一个包含纵向激光耦合、横向磁约束和库仑

排斥：

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\tilde{p}_{z,i}^2}{2\gamma^3 m} - ev_0 A(z_i,t) + \frac{\mathbf{p}_{\perp,i}^2}{2\gamma m} + \frac{1}{2}\gamma m\omega_\perp^2 r_i^2\right) + \frac{1}{\gamma}\sum_{i<j}^{N}\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j|}. \qquad (1)$$

其中，N 表示电子数，$\boldsymbol{r}_i = (x_i, y_i)$和$\boldsymbol{p}_{\perp,i}$ 分别表示第i个电子的横向坐标和共轭动量。我们以中心束流动量$p_0 = \gamma m v_0$ 为基准，在以速度v_0共动的坐标中定义$\tilde{p}_{z,i} = p_{z,i} - p_0$ 。有效纵向光学矢势$A(z_i, t)$（其中已吸收电子电荷的符号）取决于坐标z_i 和时间t，而$\omega_\perp = eB/(2\gamma m)$表示轴向磁场$B$ [27]对应的拉莫尔横向俘获频率。对于电子静止质量m、电荷$-e$、真空介电常数ϵ_0、光速c和洛伦兹因子$\gamma = (1 - v_0^2/c^2)^{-1/2}$，因子$\gamma m$ 和$\gamma^3 m$ 分别表示相对论横向和纵向惯性质量。对于具有相同纵向速度的共面电子，磁吸引力会部分抵消实验室系电斥力，从而得到有效横向库仑耦合系数$C = e^2/(4\pi\epsilon_0\gamma)$ [28]。

由于光学近场相互作用的持续时间短于漂移和聚焦所需的时间，我们将纵向演化分为脉冲式 PINEM 调制阶段和随后的自由漂移阶段。在相互作用阶段，我们忽略纵向漂移，并采用 $H_{\mathrm{I}} \approx -ev_0\sum_{i=1}^{N} A(z_i,t)$。这种脉冲耦合会改变电子波包的相位与动量谱，而不会显著改变其瞬时密度（见补充材料 [29]）。图 2a 展示了基于薄膜或纳米尖端的激光调制 [21,22] 所形成的 PINEM相空间图样。波包离开近场后，我们采用独立电子漂移哈密顿量 $H_{\mathrm{II}} = \sum_i \tilde{p}_{z\,i}^2 \quad 2\gamma^3 m$ ，/( )。自

由色散会将 PINEM边带梳转化为压缩平面 [21–23], 处的类塔尔博特时间聚束，从而形成图 2b 中的阿秒电子片层。

我们将磁焦点与塔尔博特压缩平面对准，以最小化同一阿秒成束薄片的横向束腰。这种纵向压缩与横向聚焦的结合，旨在实现准二维状态，在该状态下，成对库仑排斥与量子零点运动及残余热扰动相互竞争。在这一拉莫尔参考系中，

我们用无量纲量子耦合参数来量化横向库仑斥力与谐性磁约束之间的竞争

$$\kappa(B) = \frac{C}{\hbar\omega_\perp l_q} = \frac{l_q}{a_0} = \sqrt{\frac{2\hbar}{eBa_0^2}} = \frac{\kappa_0}{\sqrt{B/(1\,\mathrm{T})}}, \tag{2}$$

我们将该参数定义为特征相互作用能 C/l_q 与横向谐振子零点长度 $l_q = \sqrt{\hbar/(\gamma m\omega_\perp)} = \sqrt{2\hbar/(eB)}$处的比值，再除以振子能量量子 $\hbar\omega_\perp$（其中 $\hbar$ 为约化普朗克常数）。由于横向质量 γm 和库仑系数 $C = e^2/(4\pi\epsilon_0\gamma)$中的洛伦兹因子 γ 相互抵消，$\kappa(B)$可化为l_q 与玻尔半径 $a_0 = 4\pi\epsilon_0\hbar^2/(me^2) \simeq 00.0529$ nm 的比值。这里，$\kappa_0 \equiv \sqrt{2\hbar/[e(1\,\mathrm{T})a_0^2]} \simeq 686$表示参考聚焦磁场为单位值 $B = 1$ T 时的特征量子耦合常数，该值仅由基本常数决定（$l_q(1\,\mathrm{T}) \simeq 363$ nm）。降低参考磁场会使零点动能 $\hbar\omega_\perp \propto B$ 的下降速度快于特征库仑能 $C/l_q \propto B^{1/2}$，这类似于降低载流子密度（增大维格纳–塞茨半径 r_s）时二维电子气的情形。在这一静态模型中，将 B 从 1 T 降至亚特斯拉区域（0.1–0.5 T），会使电子片扩展，同时令 $\kappa(B)$增至 $(1–2)\times10^3$ 范围，此时库仑排斥远强于量子零点运动。

在较大的 κ 下，热涨落会带来额外的制备约束：特征库仑能 $E_C = C/a_{\mathrm{eq}}$（在有效维格纳–塞茨半径 a_{eq} 处评估）必须超过剩余横向热能 $k_BT_\perp$（其中 k_B 为玻尔兹曼常数，$T_\perp$ 为有效横向温度）。我们将数量级为 10^2 的经典耦合比 $\Gamma = E_C/(k_BT_\perp)$ 作为强耦合制备目标 [16,17]。对于经 $\lambda_L = 800$ nm 驱动、相位调制幅度为 $g = 6–10$ 的 attobunched 200 千电子伏电子片（$N \sim 10–10^2$, ），其代表性光学设置和拉莫尔参考系制备目标详见补充材料 [29]。将 1 T 参考区域（$\kappa = \kappa_0$，图 3）与亚特斯拉区域（$B = 0.1–0.5$ T）进行比较可见，较弱聚焦会增大目标电子片（$a_{\mathrm{eq}} \simeq 0.29–0.86\,\mu$m），并放宽几何束团持续时间（$\tau_b \simeq 100–300$ as）和归一化热发射度（$\varepsilon_n \lesssim 11–18$ pm rad）的预算，同时要求更低的 $T_\perp \lesssim 0.14–0.41$ K [29]。

由于无约束轴向膨胀会在 $\sim 0.3\,\tau_C$ [29] 内使薄片厚度加倍，我们建议在最大压缩之前进行空间预调控，以缩短形成有序态所需的时间。通过调控横向聚焦轮廓，或采用结构化 PINEM 调制，可以在三角形维格纳有序态的倒格矢附近激发密度模。这些种子有望引导早期动力学，而不施加刚性晶格。在短暂的焦点窗口内，电子片可能会形成三角形空间关联、六重结构因子峰以及增强的键取向有序，这与维格纳有序构型相符。此处我们将

结晶化定义为一种有限的、非平衡的瞬态库仑主导有序态，通过同步纵向压缩和横向聚焦来实现。

瞬态结晶化与量子关联

我们将磁聚焦腰部与 PINEM塔尔博特压缩面同步，以获得一层薄微束团片，其共动纵向厚度（$\gamma\Delta z \sim 0.1\, a_{\mathrm{eq}}$）比有效维格纳–塞茨半径 a_{eq} 小一个数量级。假设采用上游单束团门控（或在净聚焦强度 [29] 中补偿平滑的片间场），那么在轴向空间电荷反弹之前、这一目标薄片窗口内，我们可在拉莫尔参考系 [29] 中用共面 $1/r_{\perp}$ 相互作用近似成对库仑排斥。由于保守聚焦会压缩空间包络，却不会带来耗散冷却，我们采用两个互补基准来考察横向维格纳有序：经典零温点电荷极限（$\hbar \to 0, T_{\perp} \to 0$，图 2c、d）用于识别有限团簇堆积；零温量子蒙特卡罗模拟（$\hbar \neq 0$，图 3）[29] 则用于检验六重有序能否在量子零点运动和泡利交换效应下保持。

在经典点电荷极限下，我们通过最小化横向阱中相互排斥电荷的势能来确定有序构型。中和体晶格研究倾向于三角配位 [32] 并提供局部堆积参照。有限陷阱没有中和背景；其束缚加排斥能、壳层占据和边界共同决定完整的经典构型 [17,33]。

我们采用随机梯度弛豫来最小化横向束缚加排斥势能 [29]。这里的弛豫步骤代表用于寻找低能静态构型的虚拟数值淬火进程，而不是实际的磁聚焦持续时间或物理束流冷却。从无序的二维电子云 [图 2(c)],开始进行数值退火，坐标以经典平衡长度 $l_{\mathrm{cl}} = [C/(\gamma m \omega_{\perp}^2)]^{1/3}$ 为单位；这一过程减少了五重和七重位错缺陷，并得到一种低能堆积构型 [图 2(d)] [29]: 谐性约束塑造出同心外壳层，围绕着内部的六重配位三角维格纳有序。

经典弛豫 [图 2(d)] 将电子视为点电荷；接下来，我们检验在零温极限（$T_{\perp} \to 0$）下，六重有序能否在量子零点运动的影响下保持。量子耦合 $\kappa(B)$ [式 (2)] 与 N无关，而谐束缚–排斥平衡仅使有效维格纳–塞茨半径 a_{eq} 和库仑尺度 E_C在 $N \sim 10$–10^2 [范围内发生微弱变化，见图 2(d) 中的 $N = 120$] [29]。我们采用变分蒙特卡罗和固定节点扩散蒙特卡罗（ VMC 和固定节点扩散蒙特卡罗 [29,33–36]），对静态横向陷阱中具有代表性的自旋极化闭壳层团簇的这一零温极限进行基准测试。在电子数和自旋极化固定时，以振子宽度 l_q 为尺度进行长度归一化后，$\kappa(B)$便是唯一的连续耦合参数。它决定了经典平衡长度与

单粒子零点宽度之比（$l_{\mathrm{cl}}/l_q \simeq 8.8$，温度为 $B = 1\,\mathrm{T}$）。在图 3(d) 中，FN-DMC 对每个电子能量的估计值 E_{DMC}/N （蓝色圆点）始终低于不含 Jastrow 因子的缩放 Slater 上界 E_{ub}/N （黑色虚线，保留精确的谐振子质心宽度[29]），这一趋势贯穿 $\kappa \geq 1$。相关能降低 $\Delta E_{\mathrm{corr}}/N \equiv (E_{\mathrm{ub}} - E_{\mathrm{DMC}})/$（图 3(d) 插图中的 N []）在强耦合下趋近于 $\kappa^{2/3}$ 标度，量化了相较于这一不含 Jastrow 因子的参照态所获得的能量增益。将 E_{ub} 与 FN-DMC 能量进行比较，可在共同的节点族内检验振幅关联，而非确定液体–晶体交叉或量子熔化阈值。

图 3(a)–3(c) 展示了该固定节点扩散蒙特卡罗状态在 $B = 1\,\mathrm{T}$ ($\kappa = \kappa_0 \simeq 686$) 下的实空间和倒易空间关联。圆形陷阱没有优先方位角。我们在平均 [29] 之前，按照内部六重键角对每个采样构型进行对齐。这种对齐显示，在对齐后的单体密度 $n(\boldsymbol{r})$ [图 3(a)] 中，同心壳层环绕着局域化的三角形核心；而对齐后的横向静态结构因子 $S(\boldsymbol{q})$ [图 3(b)] 中，主倒易环上出现六个尖锐的类布拉格峰。图 3(a) 中最外侧的环在以内核为基准对齐后呈现平滑分布。我们通过旋转采样坐标，将一个外壳层参考电子置于 $+x$ 轴上（青色标记）。随后，共旋转坐标系下的条件密度 $n_{\mathrm{cond}}(\boldsymbol{r})$ [图 3(c)] 显示，外环上有一个交换关联空穴，两侧分布着尖锐的最近邻峰 [37,38]。从弱耦合 ($\kappa \leq 1$) 到 1 T，再到更软的亚特斯拉陷阱 ($B = 0.5$–$0.1\,\mathrm{T}$)，内部六重键取向序参量 $|\psi_6|$ 从 0.12 增至 0.66–0.74 [29]，增幅超过五倍。

我们必须在名义上相同的多次实验中，重建这一有限且短暂存在状态的空间关联。要将图 2(d) 和图 3(a) 中的实空间图样与探测到的信号进行比较，需要传播与探测器响应模型。若要通过粒子成像提取 $S(\boldsymbol{q})$，必须记录单个微束团内多个电子的到达位置，例如对焦斑束腰进行高倍率共轭成像，并将目标物平面分辨率设为 $\lesssim$30–70 nm。超快衍射提供了一种可能的替代方案；无论采用哪种途径，都需要信号模型，而仅对单粒子密度图像进行平均无法恢复完整的结构因子。我们建议将 PINEM 激光器的时序或磁透镜电流调离设定值，作为实验控制手段，以检验时空压缩消失时六重倒易空间峰是否会减弱。

静态阱关联促使我们进一步检验有序的强耦合起源及其动力学生存能力。在聚焦条件固定时，过多的电子数（N）可能加剧空间电荷膨胀并破坏局域有序，而较大的横向动能展宽则会与相对局域化相抗衡；纵向能量展宽会影响可达到的微束团宽度。含时束流模拟可检验有限尺寸、非平衡的维格纳有序构型能否在焦点附近形成，并确定它在膨胀和动能涨落将其破坏之前能够存续多久。目标观测量是与三角形电子关联相符的瞬态结构因子。

因此，我们的目标是形成瞬态、有限尺寸、自由传播的电荷有序构型。该方案将库仑晶体和非中性等离子体的概念应用于激光压缩电子束，且不依赖衬底或静态晶格。我们所寻求的证据是：当阿秒电子片中的库仑排斥占主导、超过剩余动能时，三角关联会随之出现。因此，超快光学调制与磁性束流控制为检验无材料维格纳有序提供了一条途径。

进一步讨论

所提出的方案旨在自由传播的电子束中实现一种瞬态、无衬底的强关联态。PINEM 调制、磁聚焦、束流能量和能散可用于调控电子片密度、脉冲持续时间和有效相互作用强度。这种可调性有望使有限电子片成为一个平台，用于探究库仑有序如何形成、熔化，以及如何在超快时间尺度上支持集体模。这一思路也将量子电子光学 [24–26,39,40] 拓展到单粒子波包整形之外。阿秒纵向聚束可制备出具有特定时间结构的束流。我们的横向阱基准测试确定了磁焦点附近值得重点研究的空间关联。因此，该方案将基于 PINEM 的相干控制与集体电子有序联系起来，为构造经过调控的二维电子构型和结构化阿秒电子束团提供了一条途径。

仍有若干实验和理论挑战有待解决。要观测瞬态结晶化，需要高效率的位置敏感探测、良好的逐发可重复性，以及 PINEM 压缩与磁焦点之间的同步。发射度、能散、电子数和空间电荷膨胀限制了可操作范围；冷束流动力学也可能产生密度焦散 [41], ，因此实验必须区分焦散与粒子间有序。更广泛的研究背景还包括受限非中性等离子体和带电粒子库仑晶体 [42], ，但本文所讨论的自由传播、光束团聚束构型，需要借助超越平衡阱模型的时变多体量子束流模拟。未来工作应将经典弛豫和量子蒙特卡罗基准与束流动力学联系起来，并量化预处理、量子离域、交换效应和自旋制备对瞬态有序的影响。

结论

我们提出了一种面向自由传播电子束中瞬态维格纳有序的激光驱动方案。我们将 PINEM 诱导的阿秒聚束与同步横向磁聚焦相结合，以实现强耦合准二维电子片。我们的经典弛豫和静态陷阱量子蒙特卡罗基准结果显示出显著的六重取向有序和壳层局域化；在从 1 T 到亚特斯拉参考磁场的固定节点计算中，这些特征依然存在。静态陷阱固定节点扩散蒙特卡罗结果本身并不能证明传播束流中有序结构的形成或存续，因此必须通过含时计算检验这两点，并且检验应在瞬态焦区窗口内进行。这些基准结果确立了目标实-

空间和倒易空间关联特征，并为未来的含时束流模拟和超快衍射实验提供定量的相空间目标。

我们的工作提出了一条利用光和磁光学控制无材料强关联电子物质的途径。所提出的平台有望实现对有限库仑系统中无序到有序动力学、熔化过程和集体模的超快研究。该平台还将阿秒自由电子束工程与多体关联联系起来，可补充光介导电子配对的相关方案[40], ，并可能对量子电子光学 [39], 、束流物理以及结构化电子束团产生的相干辐射具有意义。

致谢

Y.P. 感谢国家自然科学基金委员会（编号：2023X0201-417-03）和上海科技大学启动经费的支持。H.G. 感谢国家自然科学基金委员会（资助编号：12304068）、南京航空航天大学启动基金（资助编号：YAH24076）以及中央高校基本科研业务费（资助编号：NS2026035）的支持。

通信作者及材料索取请联系 Y.P.（†yiming.pan@shanghaitech.edu.cn）和 H.G.（††genghao@nuaa.edu.cn）。

数据和代码可用性

我们将模拟代码和计算参数存储在 GitHub代码仓库中：https://github.com/genghaophy/FreeElectronWignerCrystal。我们将在论文发表时或之后公开该代码仓库。

利益冲突

作者声明不存在利益冲突。

参考文献：

[1] E. Wigner, 《金属中电子的相互作用》, 《物理评论》46, 1002（1934）。[2] S. M. Reimann 和 M. Manninen, 《量子点的电子结构》, 《现代物理评论》74, 1283（2002）。[3] C. C. Grimes 和 G. Adams, 《经典二维电子层中液体到晶体相变的证据》, 《物理评论快报》42, 795（1979）。[4] E. Y. Andrei、G. Deville、D. C. Glattli、F. I. B. Williams、E. Paris 和 B. Etienne, 《磁场诱导的维格纳固体的观测》, 《物理评论快报》60, 2765（1988）。[5] V. J. Goldman、M. Santos、M. Shayegan 和 J. E. Cunningham, 《二维量子维格纳晶体的证据》, 《物理评论快报》65, 2189（1990）。[6] J. Yoon、C. C. Li、D. Shahar、D. C. Tsui 和 M. Shayegan, 《砷化镓中磁场 B = 0下二维空穴的维格纳结晶与金属-绝缘体转变》, 《物理评论快报》82, 1744（1999年）。

[7] J. Jang、B. M. Hunt、L. N. Pfeiffer、K. W. West 和 R. C. Ashoori，《电子维格纳晶体振动产生的尖锐隧穿共振》，《自然·物理》13，340（2017）。[8] Y.-C. Tsui 等，《磁场诱导的维格纳晶体的直接观测》，《自然》628，287（2024）。[9] E. C. Regan 等，《WSe2/WS2 莫尔超晶格中的莫特态与广义维格纳晶体态》，《自然》579，359（2020）。[10] T. Smoleński 等，《单层半导体中电子维格纳晶体的特征》，《自然》595，53（2021）。[11] H. Li 等，《二维广义维格纳晶体成像》，《自然》597，650（2021）。[12] R. Haindl、A. Feist、T. Domröse、M. Möller、J. H. Gaida、S. V. Yalunin 和 C. Ropers，《透射电子显微镜电子束中的库仑关联电子数态》，《自然·物理》19，1410（2023）。[13] S. Meier、J. Heimerl 和 P. Hommelhoff，《纳米尺度针尖超快光电子发射后的少电子关联》，《自然·物理》19，1402（2023）。[14] R. Haindl、V. Di Giulio、A. Feist 和 C. Ropers，《少粒子光电子脉冲中的飞秒与阿秒相空间关联》，《物理评论快报》135，165002（2025）。[15] V. Di Giulio、R. Haindl、A. Feist 和 C. Ropers，《自由电子束中的库仑晶化》，arXiv:2610.37352（2026）。[16] R. C. Gann、S. Chakravarty 和 G. V. Chester，《经典二维单组分等离子体的蒙特卡罗模拟》，《物理评论 B》20，326（1979）。[17] V. M. Bedanov 和 F. M. Peeters，《经典有限二维系统中带电粒子的有序化与相变》，《物理评论 B》49，2667（1994）。[18] J. M. Maxson、I. V. Bazarov、W. Wan、H. A. Padmore 和 C. E. Coleman-Smith，《无序诱导加热导致的光电子发射亮度极限》，《新物理学杂志》15，103024（2013）。[19] B. Barwick、D. J. Flannigan 和 A. H. Zewail，《光子诱导近场电子显微术》，《自然》462，902（2009）。[20] S. T. Park、M. Lin 和 A. H. Zewail，《光子诱导近场电子显微术（PINEM）：理论与实验》，《新物理学杂志》12，123028（2010）。[21] A. Feist、K. E. Echternkamp、J. Schauss、S. V. Yalunin、S. Schäfer 和 C. Ropers，《超快透射电子显微镜中的量子相干光学相位调制》，《自然》521，200（2015）。[22] K. E. Priebe、C. Rathje、S. V. Yalunin、T. Hohage、A. Feist、S. Schäfer 和 C. Ropers，《超快透射电子显微术中的阿秒电子脉冲串与量子态重构》，《自然·光子学》11，793（2017）。[23] P. Baum 和 A. H. Zewail，《用于四维衍射与显微术的阿秒电子脉冲》，《美国国家科学院院刊》104，18409（2007）。[24] F. J. García de Abajo、A. Asenjo-Garcia 和 M. Kociak，《高速电子与倏逝光场相互作用引起的多光子吸收与发射》，《纳米快报》10，1859（2010）。

[25] A. Gover 和 Y. Pan，《单电子量子波包的维度依赖受激辐射相互作用》，《物理快报 A》382，1550（2018）。[26] Y. Pan、B. Zhang 和 A. Gover，《反常光子诱导近场电子显微术》，《物理评论快报》122，183204（2019）。[27] M. Reiser，《带电粒子束理论与设计》，第 2 版（Wiley-VCH，魏因海姆，2008）。[28] J. D. Jackson，《经典电动力学》，第 3 版（Wiley，纽约，1999年）。[29] 参见补充材料，网址见 [出版商稍后插入 URL]，其中介绍了解析 PINEM 和时间塔尔博特公式、经典随机淬火算法、VMC 和固定节点扩散蒙特卡罗方法，以及用于说明的 200 千电子伏光学参数和亚特斯拉拉莫尔阱参数估计，其中包含参考文献 [30,31]。[30] J. Casulleras 和 J. Boronat，《量子蒙特卡罗方法中的无偏估计量：液态氦-4的应用》，《物理评论 B》52，3654（1995）。[31] S. Karkare、G. Adhikari、W. A. Schroeder、J. K. Nangoi、T. Arias、J. Maxson 和 H. Padmore，《通过单晶 Cu(100) 的近阈值光电子发射获得超冷电子》，《物理评论快报》125，054801（2020）。[32] L. Bonsall 和 A. A. Maradudin，《二维维格纳晶体的一些静态和动态性质》，《物理评论 B》15，1959（1977）。[33] A. V. Filinov、M. Bonitz 和 Yu. E. Lozovik，《介观二维电子系统中的维格纳结晶》，《物理评论快报》86，3851（2001年）。[34] W. M. C. Foulkes、L. Mitas、R. J. Needs 和 G. Rajagopal，《固体的量子蒙特卡罗模拟》，《现代物理评论》73，33（2001年）。[35] B. Tanatar 和 D. M. Ceperley，《二维电子气的基态》，《物理评论 B》39，5005（1989）。[36] N. D. Drummond 和 R. J. Needs，《低密度二维均匀电子气的相图》，《物理评论快报》102，126402（2009）。[37] C. Yannouleas 和 U. Landman，《人工原子中电子分子的形成与控制：杂质和磁场效应》，《物理评论 B》61，15895（2000）。[38] S. M. Reimann、M. Koskinen 和 M. Manninen，《小型量子点中维格纳分子的形成》，《物理评论 B》62，8108（2000）。[39] R. Ruimy、A. Karnieli 和 I. Kaminer，《自由电子量子光学》，《自然·物理》21，193（2025）。[40] H. Geng、Q. Pan、J. Kang 和 Y. Pan，《空间电荷相互作用下超快电子束的光诱导配对不稳定性》，arXiv:2507.00869（2025）。[41] A. Tencate、A. Al Marzouk 和 B. Erdélyi，《纳米结构阴极产生的超冷电子束的动态演化》，《物理评论·加速器与束流》29，034201（2026）。[42] D. H. E. Dubin 和 T. M. O’Neil，《受限非中性等离子体、液体和晶体（热平衡态）》，《现代物理评论》71，87（1999年）。

图：

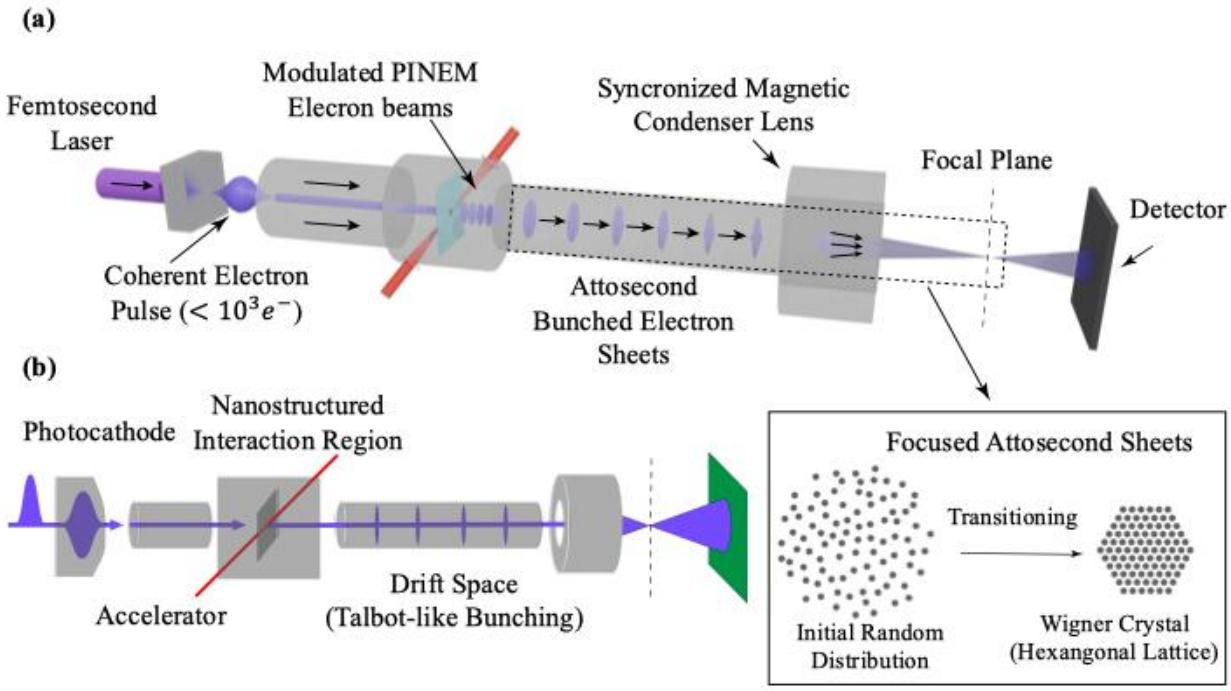


图 1：迈向瞬态维格纳有序的超快自由电子路径。（a）激光驱动束线。激光触发光电阴极在微束团选择前发射出包含 $N < 10^3$ 个电子的电子包。加速后，PINEM 印刻能量边带；自由漂移将其转换为阿秒束团。同步磁透镜在纵向压缩平面横向聚焦束流，目标是形成致密的准二维薄片。（b）从发射到探测的纵向演化示意图。有序插图展示了目标三角关联。

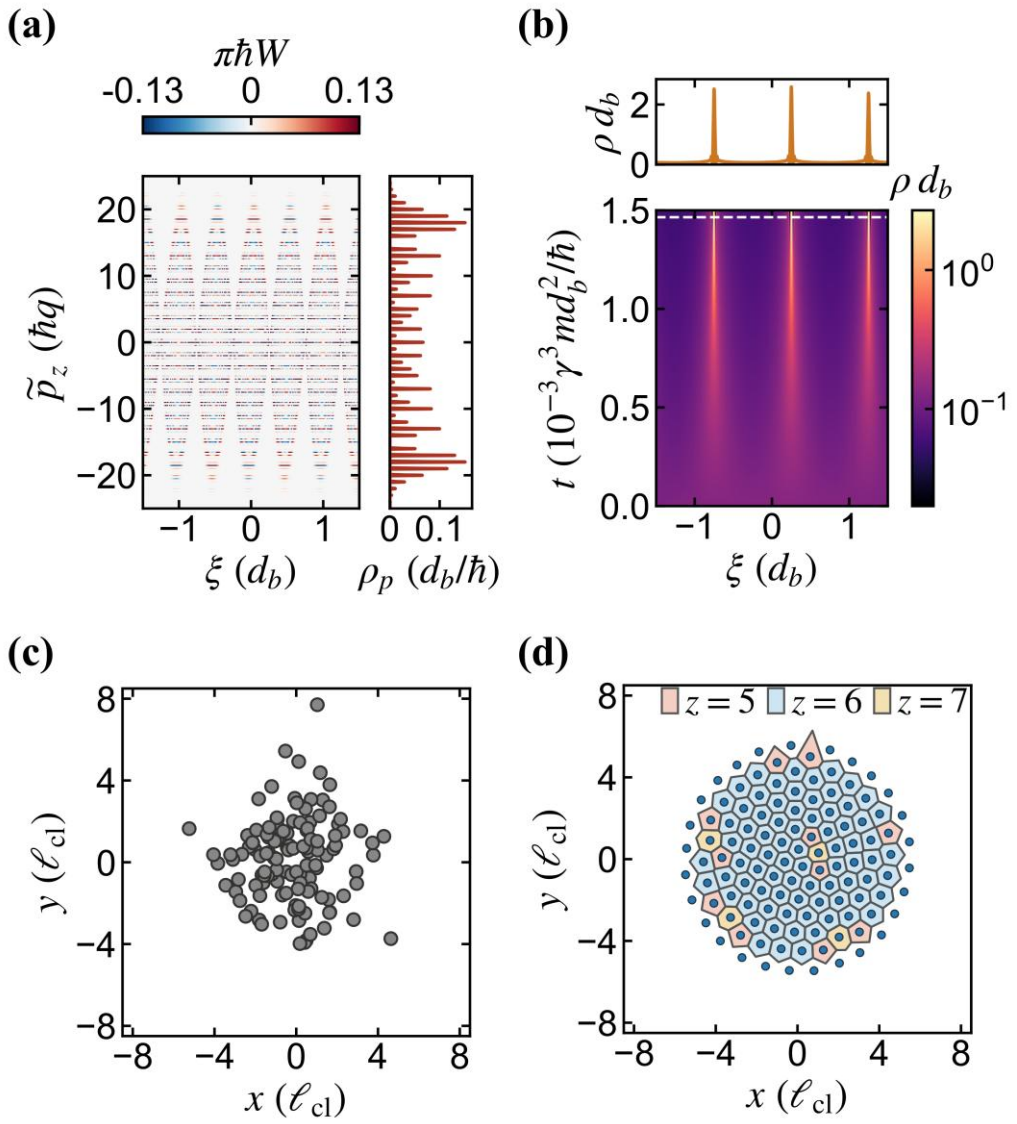


图 2： 纵向阿秒聚束与经典横向有序化。(a) 调制强度为 $g = 20$、初始包络宽度为 $\sigma_\xi = 3d_b$、漂移时间为 $t_* = \hbar t/(\gamma^3 m d_b^2) = 3\times10^{-4}$ 时的 PINEM 调制 Wigner函数 $W(\tilde{z}, \tilde{p}_z)$（颜色表示 $\pi\hbar W$，截取范围为 ±0.13，以便分辨干涉条纹）。坐标轴分别以 $d_b = 2\pi/q$ 和 $\hbar q$ 为单位表示 $\xi \equiv \tilde{z}$ 和 $\tilde{p}_z$；右侧面板显示动量边缘分布 ρ_p。(b) 独立电子漂移在 $\rho(\xi, t)$ 中产生阿秒密度峰；上方曲线显示虚线处的密度（$t_* \simeq 1.47\times10^{-3}$，接近 1.55×10^{-3} 聚焦位置）。(c,d) 对 $N = 120$ 个点电荷进行独立的经典基准模拟：数值淬火最小化前 (c) 和后 (d) 的谐势阱构型（此处为虚拟退火步骤，而非物理聚焦时间）。横向长度以 $l_{\rm cl}$ 为单位。弛豫后的构型具有三角形核心和外环；Voronoi颜色标示配位数 $z = 5$、6、7。

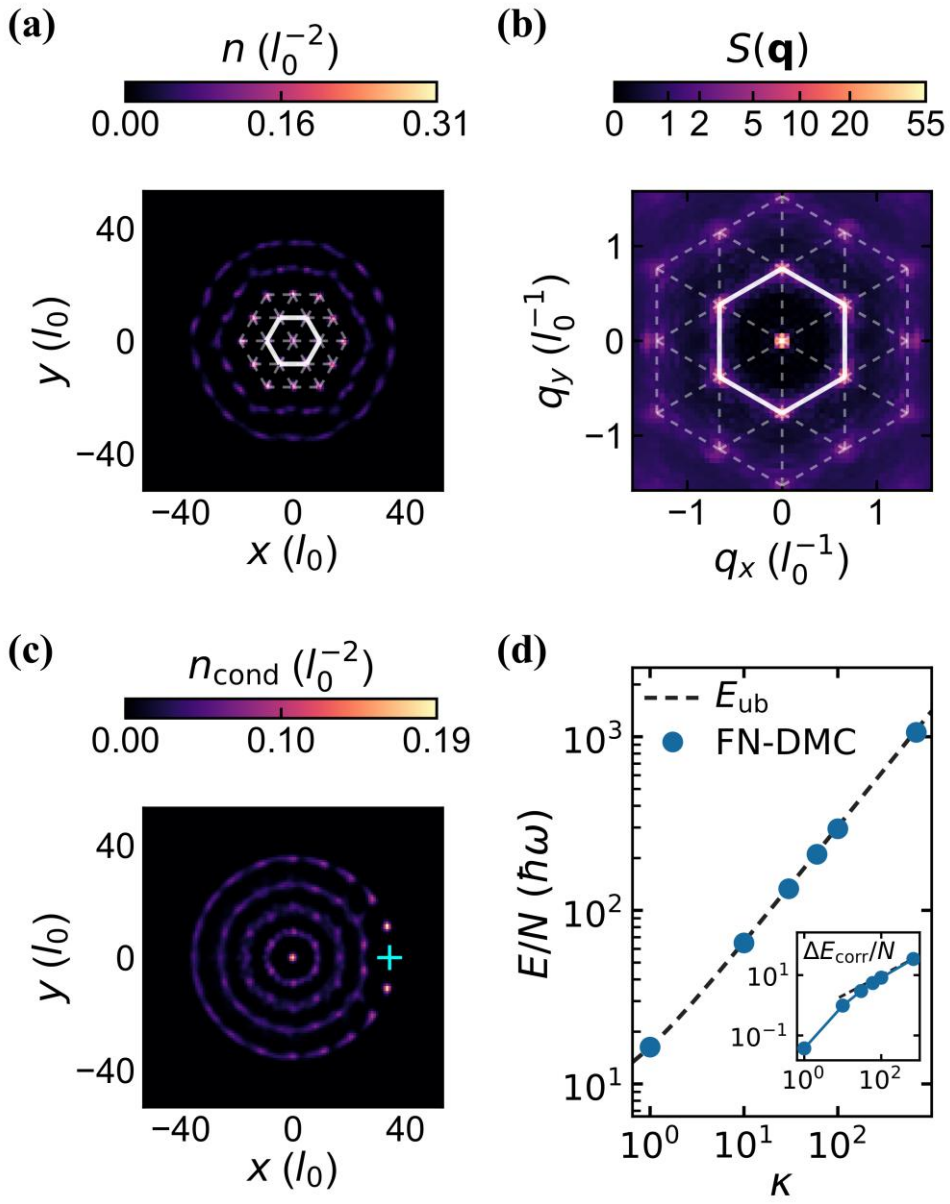


图 3： 二维谐振阱中存在 $1/r$ 库仑排斥时的零温量子关联。FN-DMC 处理 $N = 55$ 完全自旋极化的电子；长度以 l_q为单位（标记为 l_0）。分图 (a–c) 展示 1 T ($\kappa = \kappa_0 \simeq 686$) 下的结果。(a) 密度 $n(\boldsymbol{r})$ 按内核六重键角对齐，分辨出三角形核心和外壳层。(b) 同一参考系中的结构因子 $S(\boldsymbol{q})$ 显示出六个倒易空间峰；颜色对应 $\ln[1 + S(\boldsymbol{q})]$，刻度表示 $S(\boldsymbol{q})$。白线为几何参考线。(c) 条件密度 $n_{\mathrm{cond}}(\boldsymbol{r})$ 经过旋转，使外壳层参考电子位于 $+x$ （青色），揭示出交换-关联空穴及其相邻峰[37,38]。(d) 每电子能量 E/N 以 $\hbar\omega_\perp$ 为单位（标记为 $\hbar\omega$），随 κ变化：FN-DMC E_{DMC}/N（蓝色）和无 Jastrow 缩放斯莱特上界 E_{ub}/N （黑色虚线）。插图：能量降低 $\Delta E_{\mathrm{corr}}/N \equiv (E_{\mathrm{ub}} - E_{\mathrm{DMC}})/N$ 以相同单位表示，随 κ 变化，覆盖相同的耦合范围；虚线为强耦合渐近 $\propto \kappa^{2/3}$ 标度的参考线。

补充材料

迈向阿秒电子束中的光控横向维格纳有序化

Yiming Pan[1†]、Jiapeng Yang[1], Hao Geng[2, 3††]

4. 量子功能材料国家重点实验室、变革科学中心和物理科学与技术学院，上海科技大学，中国上海 200031 5. 物理学院，南京航空航天大学，中国南京 211106 6. 航空航天信息感知与物理重点实验室，工业和信息化部，中国南京 211106

A节：PINEM与阿秒聚束的解析表述

从相对论运动学推导哈密顿量。对于与光学近场相互作用的电子，我们将相对论能量-动量关系 $E=\sqrt{(p_z-eA_z)^2c^2+m^2c^4}$ 展开。对于中心动量为 $p_0=\gamma m v_0$ 的电子束团，我们假设动量涨落 $\delta p_z=p_z-p_0$ 和近场动量冲量 eA_z 相对于 p_0 较小，并将关于动能动量 $\Pi_z=p_z-eA_z$ 、在 p_0 附近的色散关系进行泰勒展开（使用 $\Pi_z=p_z-eA_z$，其中电子电荷的符号 $-e$ 被吸收到 A_z 的约定中）。

未扰动能量为 $E(p_0)=\gamma mc^2$。在 p_0 处求一阶导数，得到经典束团速度 v_0。二阶导数定义了众所周知的纵向质量 m_L：

$$\left.\frac{\partial^2 E}{\partial \Pi_z^2}\right|_{p_0}=\frac{1}{\gamma m}\left(1-\frac{v_0^2}{c^2}\right)=\frac{1}{\gamma^3 m}\equiv\frac{1}{m_L}$$

因此，展开至二阶可得：

$$E(p_z)\approx\gamma mc^2+v_0(p_z-p_0-eA_z)+\frac{(p_z-p_0-eA_z)^2}{2\gamma^3 m} \qquad (S1)$$

对共动纵向坐标进行含时正则变换后，引入相对动量 $\tilde{p}_z=p_z-p_0$ ；略去恒定能量偏移后，得到有效纵向哈密顿量：

$$\tilde{H}_z=-ev_0A_z+\frac{(\tilde{p}_z-eA_z)^2}{2\gamma^3 m} \qquad (S2)$$

只要动量展宽和近场冲量相对于 $p_0(|\tilde{p}_z|, |eA_z| \ll p_0)$ 足够小，且在亚微米相互作用区域内纵向色散可以忽略，我们就会在脉冲式 PINEM 阶段保留线性耦合 $-ev_0A_z$，并在随后的漂移过程中保留二次色散项 $\tilde{p}_z^2/(2\gamma^3 m)$。这种分离构成了正文所采用的两阶段处理的依据。

在独立电子近似下，我们对两个阶段的含时薛定谔方程进行解析求解。设进入相互作用区域的初始纵向波包是共动纵向坐标$\tilde{z} = z - v_0 t$的宽而平滑的函数 $\psi_0(\tilde{z})$。

第一阶段：量子相位调制。在较短的相互作用长度内，忽略空间漂移。在此冲激近似下，我们仅保留线性 PINEM 相互作用 $\mathrm{H}_I = -ev_0A(\tilde{z}, t)$。将所采样的光学近场表示为共动坐标中的有效准静态矢势光栅 $A(\tilde{z}, t) = A_0\sin(q\tilde{z} + \phi_0)$，通过对相互作用时间积分，得到电子的程函相位：

$$\psi_I(\tilde{z}) = \psi_0(\tilde{z})\exp[ig\sin(q\tilde{z} + \phi)] \tag{S3}$$

其中，A_0 和ϕ_0 分别是有效矢势光栅的峰值幅度和初始相位，g 是与相互作用长度和场强成正比的无量纲相位调制幅度，ϕ 是累积的相位偏移（通过选择共动坐标原点，以下将其设为$\phi = 0$），$q = \omega_L/v_0$ 是有效纵向调制波数，而ω_L是激光角频率。应用 Jacobi–Anger恒等式，我们将纯正弦相位调制分解为离散动量边带的相干叠加：

$$\psi_I(\tilde{z}) = \psi_0(\tilde{z}) \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(g) e^{inq\tilde{z}} \tag{S4}$$

其中 $J_n(g)$ 表示第 n 阶第一类贝塞尔函数。在这种仅相位近似下，实空间密度 $|\psi_I(\tilde{z})|^2 = |\psi_0(\tilde{z})|^2$ 保持不变，而动量分布获得光子边带。

第二阶段：时间Talbot效应与聚束。在随后的漂移区域中，光场消失（$A_0 = 0$）。此时纵向哈密顿量为 $\mathrm{H}_{II} = \frac{\tilde{p}_z^2}{2\gamma^3 m}$。在自由飞行时间 t_d 内，传播子为每个平面波分量添加二次相位 $k_n = nq$：

$$\psi_{\text{final}}(\tilde{z}, t_d) = \psi_0(\tilde{z}) \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(g) e^{inq\tilde{z}} \exp\left(-i\frac{\hbar q^2 t_d}{2\gamma^3 m} n^2\right) \tag{S5}$$

由无量纲边带色散参数 $\theta = \frac{\hbar q^2 t_d}{2\gamma^3 m}$ 控制的指数相位因子 $\exp(-i\theta n^2)$ 会产生时间塔尔博特演化。公式（S5）采用宽包络近似（$\sigma_{\tilde{z}} \gg d_b = 2\pi/q$），并忽略漂移过程中的包络演化；而图2(a,b)则在傅里叶空间中，使用二次自由空间传播子 $\exp[-i\hbar k^2 t_d/(2\gamma^3 m)]$传播完整的调制波包；以光学周期 $d_b = 2\pi/q$ 归一化长度后，图2(a,b)中的 θ 与无量纲漂移时间 $t_* = \hbar t_d/(\gamma^3 m d_b^2)$ 之间通过 $\theta = (q d_b)^2 t_*/2 = 2\pi^2 t_*$ 相关。对于 $\theta \ll 1$，差分边带相位会将动量梳转化为纵向密度调制；采用速度差 $\Delta v_n \approx n\hbar \frac{q}{\gamma^3 m}$，射线模型预测焦散出现在 $\theta_c = 1/(2g)$（$t_{*,\,c} = [4\pi^2 g]^{-1} \simeq 1.27 \times 10^{-3}$ 对于 $g = 20$），而波动计算得出的密度最大值略靠下游（$t_{*,\,\max} \simeq 1.55 \times 10^{-3}$）。

在压缩平面，边带干涉会使纵向密度 $\rho(\tilde{z}) = |\psi_{\text{final}}|^2$ 产生峰值，对应于一列阿秒尺度电子片，它们的到达时间间隔为一个光学周期。这种压缩形成了横向排序计算所假设的薄片初始几何结构。

示例光学参数与短波长片间耦合。为了将公式（S3）–（S5）与具有代表性的超快电子显微镜条件联系起来（不同于图2中强调制的$g = 20$ 相空间示例），我们考虑一束示例性的200 keV电子束（$\gamma \simeq 1.39, v_0 \simeq 0.70c$），其调制光学波长为$\lambda_L = 800$ nm（$\omega_L = 2\pi c/\lambda_L$, $\hbar\omega_L \simeq 1.55$ eV），以制备目标粒子数为 $N \sim 10$–10^2 的微束团片。无量纲PINEM相位调制振幅 $g = 6$–10会写入峰值纵向能量调制$g\hbar\omega_L \simeq 9$–16 eV。在示例性的相位匹配近场路径$L_{\text{phase}} \simeq 0.1\,\mu$m上累积后，该调制对应的有效峰值纵向电场为$E_{\text{pk}} = g\hbar\omega_L/(eL_{\text{phase}}) \simeq 0.12$ V/nm（$g = 8$），真空等效周期平均强度为$I_{\text{eq}} = \epsilon_0 c E_{\text{pk}}^2/2 \simeq 2$ GW cm^{-2}（所需入射激光强度取决于具体的近场增强几何结构）。在公式（S5）的零能散极限下，随后的自由空间漂移使射线焦散位于$L_c \simeq 3.8$–6.3 mm处，首个波动光学焦点位于$L_d \simeq 5.0$–9.0 mm处（对应$g = 10$–6），每个光学周期内有45%–47%的电子集中在中央尖峰周围150 as的时间窗中；该尖峰的半高全宽为90–144 as（对于$g = 8$ 在$L_d \simeq 6.5$ mm处，周期电荷的47%落在150 as内，FWHM为110 as；参见文献[S1、S2]中扣除背景后的实验脉冲列）。假设时间门控将该中央尖峰与未成束周期底座隔离开来，将纵向压缩与浸没式亚特斯拉磁聚焦（$B = 0.1$–0.5 T；B节）结合，可扩大横向团簇，并放宽几何薄片目标（$\gamma v_0 \tau_b/a_{\text{eq}} = 0.1$），使选定片的均方根时长达到$\tau_b \simeq 100$–$300$ as。相邻800 nm微束团在平均电子静止系中的间距为$D' = \gamma v_0 T_L \simeq 0.77\,\mu$m（$T_L = \lambda_L/c$）。若没有上游单束团门控，相邻薄片会产生平滑的径向散焦场；当$D' \lesssim 2\sigma_x$ 时，该场的大小与$\gamma m \omega_\perp^2 r$ 相当（必须在净聚焦强度中加以补偿，或通过上游门控将其消除），

而在首个三角倒格矢 $G_1 = 4\pi/(\sqrt{3}d_{\mathrm{nn}})$处，短波长片间库仑分量（最近邻间距为 $d_{\mathrm{nn}} = (2\pi/\sqrt{3})^{1/2}a_{\mathrm{eq}} \simeq 1.90\, a_{\mathrm{eq}}$）则会随$e^{-G_1 D_\prime} \simeq 3 \times 10^{-2}$ 呈指数衰减；在$B = 0.1$–0.5 T范围内，该分量降至4×10^{-5} 。

B节：维格纳结晶的经典与量子处理 **n**

A节建立了独立电子 PINEM 调制和塔尔博特压缩模型，以形成选定的共动厚度为 $\gamma\Delta z \ll a_{\mathrm{eq}}$ 的微束团；在此，我们对浸没于轴向磁场 B 中、同步磁聚焦条件下的理想二维横向多体模型进行基准测试。在压缩腰部（$\gamma\Delta z \sim 0.1\, a_{\mathrm{eq}}$），我们在轴向空间电荷反弹之前，于共动拉莫尔系中将瞬时成对库仑势近似为共面 $1/r_\perp$ 形式；在接近特征电子间距的分离处，其特征相对修正为 $\mathcal{O}[(\gamma\Delta z/a_{\mathrm{eq}})^2] \sim 10^{-2}$ 。首先，在经典零温点电荷极限（$\hbar \to 0, T_\perp \to 0$）下，将横向坐标按经典限域—排斥平衡长度 $l_{\mathrm{cl}} \equiv l_0$ 重新缩放，可分离出普适的几何堆积能量景观 U [（方程 (S7)）],；我们通过数值随机淬火 [（方程 (S10)）] 对其进行弛豫，得到低能量的壳层加三角形结构（图 2c、d）。其次，在量子多体区间（$\hbar \neq 0$）中，按谐振零点长度 $l_q = \kappa^{-1/3} l_{\mathrm{cl}}$ 重新缩放后，固定粒子数条件下的哈密顿量可用无量纲耦合 $\kappa(B)$ [（方程 (S8)–(S9)）]，表示；变分蒙特卡罗和固定节点扩散蒙特卡罗（VMC 和 FN-DMC）模拟 [（方程 (S11)–(S13)）] 则用于评估选定自旋扇区和固定节点近似下的晶体关联（图 3）。

横向哈密顿量与无量纲标度。在浸没于轴向磁场 B 中的纵向压缩腰部附近，我们在共动拉莫尔（x, y）平面内，将一个孤立的阿秒电子片建模为具有频率 $\omega_\perp = eB/(2\gamma m)$ 的有效谐振恢复势。我们考虑横向动能、谐性约束和共面库仑排斥：

$$\mathcal{H}_\perp = \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{\mathbf{p}_{\perp,i}^2}{2\gamma m} + \frac{1}{2}\gamma m\omega_\perp^2 \mathbf{r}_{\perp,i}^2\right] + \frac{1}{\gamma}\sum_{i<j}^{N}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{|\mathbf{r}_{\perp,i} - \mathbf{r}_{\perp,j}|} \qquad (S6)$$

这里，$\boldsymbol{r}_{\perp,\,i}$ 和 $\boldsymbol{p}_{\perp,\,i}$ 分别是二维横向坐标矢量和动量矢量。磁吸引力 F_B 部分抵消了实验室系横向电排斥力 F_E，产生合力 $F_{\mathrm{net}} = F_E - F_B = F_E/\gamma^2$；再结合共面共动电子的横向电场洛伦兹增强，得到有效库仑对系数$C = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\gamma}$ [S3]。横向惯性质量为 γm，不同于控制塔尔博特式聚束的纵向质量 $\gamma^3 m$ 。

为确定零温点电荷极限（$\hbar \to 0, \mathbf{p}_{\perp,\,i}=0$）下的经典有序图样，我们首先单独考察势能景观。我们引入经典特征长度$l_0 = [C/(\gamma m\omega_\perp^2)]^{1/3} = (\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\gamma^2 m\omega_\perp^2})^{1/3}$ （在图 2 中记为 $\mathrm{l_{cl}}$ ），其定义为谐性约束尺度 $\gamma m\omega_\perp^2 l_0^2$ 与库仑尺度 C/l_0 相等时对应的长度；采用无量纲坐标 $\tilde{\mathbf{r}}_i = \mathbf{r}_{\perp,\,i}/l_0$ 和经典能量单位 $E_{\mathrm{cl}} = \gamma m\omega_\perp^2 l_0^2 = C/l_0$后，在粒子数固定时，物理束流和透镜参数（$\gamma, B, \omega_\perp$）不再出现，从而得到普适形式：

$$U(\{\tilde{\boldsymbol{r}}_i\}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2}\tilde{r}_i^2 + \sum_{i<j}^{N} \frac{1}{|\tilde{\boldsymbol{r}}_i - \tilde{\boldsymbol{r}}_j|} \qquad (S7)$$

谐势阱会形成一个有限的非均匀团簇。在没有中和背景的情况下，其经典能量是式（S7）中的正值限域加排斥势能 U ，其最小值取决于粒子数、壳层占据和边界。体晶格研究[S4] 为三角形局部配位提供了依据；其马德隆能并不等同于这个有限陷阱的能量。

为描述库仑排斥与量子离域之间的竞争，我们将振子长度处的相互作用能除以振荡器能量尺度，定义为 κ 。取 $l_q = \sqrt{\hbar/(\gamma m\omega_\perp)}$ 后，束流参考耦合为

$$\kappa = \frac{C}{\hbar\omega_\perp l_q} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\gamma\,\hbar\omega_\perp}\sqrt{\frac{\gamma m\omega_\perp}{\hbar}}. \qquad (S8)$$

采用 $\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} = \alpha\hbar c$ ，可得一种便于使用束流参数的形式,

$$\kappa = \alpha\sqrt{\frac{mc^2}{\gamma\,\hbar\omega_\perp}}, \qquad (S9)$$

其中，$\alpha = e^2/(4\pi\epsilon_0\hbar c)$ 为精细结构常数。在共面、实验室时间的拉莫尔参考系中，横向质量 γm 和库仑系数 $C = e^2/(4\pi\epsilon_0\gamma)$ 给出有效玻尔半径 $\hbar^2/(\gamma mC) = a_0$，因此 $\kappa = l_q/a_0$ ，显式的束流能量依赖性从 $\kappa(B)$ [主文中的公式 (2)] 中消去。对于跨越参考聚焦磁场 B 的给定片层粒子数 N ，我们通过无量纲径向因子 $f(B) = \sqrt{r^2/(2l_q^2)}$，得到单轴均方根（rms）横向团簇宽度 $\sigma_x(B) = \sqrt{r^2/2}$（其中 r^2 为相对于陷阱中心的径向均方距离），即得：

$$\sigma_x(B) = f(B)\,l_q(B) \propto [\kappa(B)]^{1/3}\,l_q(B).$$

此处的 $\kappa^{1/3}$ 缩放反映了在固定 N 下（因为 $l_{\mathrm{cl}}/l_q = \kappa^{1/3}$），谐性约束与库仑排斥之间的渐近强耦合平衡。使用带前向行走投影的固定节点扩散蒙特卡罗 $L = 0。5\,\omega_\perp^{-1}$（$\Delta\tau = 0。0025\,\omega_\perp^{-1}$，$W = 256$ 行走者，四个副本）以及 1 T 试探参数（α_{orb}，b）=（0.7，0.64），在 $B = 0.5$、0.3 和 0.1 T（$\kappa \simeq$970、1.25×10^3 和 2.17×10^3）下进行的模拟得到有限投影径向因子 f（B）$\simeq$ 212、23.1 和 27.8（相对于 σ_x 中的维里定理和 $\kappa^{1/3}$ 缩放界限，在（α_{orb}，b）于各 κ 中保持固定时，带有 $\sim 1\%$ 的有限投影系统性上移残差），与亚特斯拉区域内的 $\kappa^{1/3}$ 展开一致。要将这一有效的浸入式拉莫尔阱与完整的束线实验连接起来，还需要纳入轴向磁透镜分布 B_z（z）、正则角动量和横向态制备。

随机梯度弛豫。我们通过对方程（S7）中的势能 U 进行数值弛豫，获得经典构型。减小位移噪声有助于探索构型空间。更新方程为：

$$\mathbf{u}_i^{(k+1)} = \mathbf{u}_i^{(k)} - \Delta s\,\nabla_{\mathbf{u}_i} U + \Delta s\,\sigma_k \boldsymbol{\eta}_i^{(k)}, \qquad (S10)$$

这里，$\boldsymbol{u}_i^{(k)}$ 表示电子 i 在第 k次迭代时的无量纲横向位置 $\tilde{\boldsymbol{r}}_i = \boldsymbol{r}_{\perp,\,i}/l_0$ Δs 是无量纲伪时间步长，$-\nabla_{\boldsymbol{u}_i} U$ 是确定性无量纲力（由向内的谐振恢复力 $-\boldsymbol{u}_i$ 与两两库仑排斥力之和构成），$\boldsymbol{\eta}_i^{(k)}$ 是相互独立的二维标准正态随机向量，σ_k 是逐渐减小的数值噪声振幅。数值上，方程（S10）实现了模拟退火淬火：从高斯随机云 [开始（图2(c)；$N = 120$，初始单轴均方根宽度为 $2l_0$，$\Delta s = 0.01$），经过10^4 步迭代，其中σ_k 在前6×10^3 步内从0.5线性减小到0，梯度下降将构型驱动至局部力学平衡，同时跨越浅势垒，以减少五重和七重位错缺陷。在图2(d)中（93个按配位数 $z = 5$、6、7着色的有界沃罗诺伊单元），在内部区域内，将距离不超过中位最近邻间距1.8倍的Delaunay键 $r_i \le 0.75 r_{\max}$（65个电荷）纳入统计，得到94%的六重配位，以及平均局域键取向模量$|\psi_{6,\,i}| \simeq 0.82$。至关重要的是，累积淬火参数 $s = k\Delta s$ 以及迭代次数 k 表示的是仅用于识别静态低能构型的虚构数值退火进程；它们不代表实时耗散冷却，也不代表电子束的物理磁聚焦飞行时间（其物理空间电荷重排尺度 τ_C 将在下文单独估算）。

变分蒙特卡罗和扩散蒙特卡罗方法。具有 $N \gtrsim 20$ 的有限团簇可以呈现同心壳层和局部六重配位核心 [S5,S6]。我们使用 VMC 和固定节点扩散蒙特卡罗，对代表性粒子数 $N = 55$ 下 $N \sim 10$–10^2 范围内的 $T_\perp = 0$、完全自旋极化固定节点基态进行基准测试。该粒子数填充最低的 $M = 10$ 个二维谐振子壳层 $[N = M(M+1)/2]$,，从而消除非相互作用参考态中的开壳层简并。以量子单位测量横向坐标，得到、】【

谐振子长度 $l_q=\sqrt{\hbar/(\gamma m\omega_\perp)}$（$\boldsymbol{x}_i=\boldsymbol{r}_{\perp,\,i}/l_q$；在图 3 的坐标轴上标记为 l_0 ）通过 $l_{\rm cl}/l_q=\kappa^{1/3}$ ($\boldsymbol{x}_i=\kappa^{1/3}\tilde{\boldsymbol{r}}_i$) 连接量子与经典无量纲坐标。比值 $\kappa^{1/3}$ 将经典约束—排斥平衡长度 $l_{\rm cl}$ 与振子长度 l_q进行比较：在 $B=1$ T（$\kappa_0\simeq 686$）时，$l_{\rm cl}/l_q\simeq 8.82$（在 $B=0.5$–0.1 T 范围内增至 9.9–12.9，此时深处于维格纳分子区，$r_s=a_{\rm eq}/a_0\sim 3.5\times10^3$–$6\times10^4$，且谐振子零点林德曼比为 $\lesssim 0.10$），量化了这些特征尺度之间的间隔。在共动拉莫尔参考系中（均匀轴向磁场通过回复频率 $\omega_\perp$进入），固定粒子数和自旋极化时，无量纲横向哈密顿量具有单耦合形式：

$$\frac{\mathcal{H}_\perp}{\hbar\omega_\perp}=\sum_i\left[-\frac{1}{2}\nabla_{x_i}^2+\frac{1}{2}x_i^2\right]+\kappa\sum_{i<j}\frac{1}{|\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{x}_j|}.$$

该试探态结合了尺度为 $\alpha_{\rm orb}$ 的满壳层振子行列式、正的同自旋对因子以及精确的质心高斯修正：

$$\Psi_T=D_{\alpha_{\rm orb}}\exp\left[\sum_{i<j}\frac{(\kappa/3)x_{ij}}{1+bx_{ij}}\right]\exp\left[-\frac{(1-\alpha_{\rm orb})N|\boldsymbol{X}_{\rm cm}|^2}{2}\right].$$

我们的量子计算基于这一假设分三步进行。首先，$D_{\alpha_{\rm orb}}$ 是由最低的 10 个封闭二维谐振子壳层构成的反对称斯莱特行列式，其无量纲逆宽度平方参数为 $\alpha_{\rm orb}$ （将轨道坐标缩放为 $\sqrt{\alpha_{\rm orb}}\,\boldsymbol{x}_i$）；而 $\boldsymbol{X}_{\rm cm}=N^{-1}\sum_i\boldsymbol{x}_i$ 中的高斯因子使谐振子质心（Kohn）模保持其精确的基态宽度；在零对贾斯特罗因子（$u=0$）下优化 $\alpha_{\rm orb}<1$，会使内部相对坐标在空间电荷排斥作用下展开，同时仅通过可分离的质心模耦合粒子坐标，从而定义无 Jastrow 缩放斯莱特上界 $E_{\rm ub}$ [，即图 3(d) 中的黑色虚线曲线]。其次，在 VMC 阶段，乘以对贾斯特罗因子 $\exp[\sum_{i<j}u(x_{ij})]$ （其中 $x_{ij}=|\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{x}_j|$ 是无量纲对间距，b 是变分贾斯特罗范围参数），通过在 $x_{ij}\to 0$ 时抑制构型的相对权重，引入库仑关联空穴；线性斜率 $\kappa/3$ 则满足二维同自旋库仑尖点条件。通过梅特罗波利斯随机游走对 $|\Psi_T(\boldsymbol{X})|^2$ 进行采样，选取 $(\alpha_{\rm orb},b)$ 以降低变分能量 $\Psi_T|\,\mathrm{H}_\perp|\Psi_T/\Psi_T|\Psi_T$ [，在 $B=1$ T 以及低于特斯拉量级的各次运行中使用 $(\alpha_{\rm orb},b)=(0.7,0.64)$，并在 $\kappa=0$–100] 范围内采用耦合适配的 $(\alpha_{\rm orb},b)$。

第三，FN-DMC [S7] 通过在无量纲虚时间 τ （单位为 $\omega_\perp^{-1}$）内演化 W 个多体构型（行走者，每个行走者为 $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_N)$，表示 N电子在$2N$维空间中的构型），在其固定节点面内投影试探态。虚时间传播子 $\exp(-\tau\mathrm{H}_\perp/\hbar\omega_\perp)$会抑制激发态分量；在重要性采样的

混合分布 $f(\boldsymbol{X},\tau) = \Phi(\boldsymbol{X},\tau)\Psi_T(\boldsymbol{X})$中，投影波函数 $\Phi(\boldsymbol{X},\tau)$趋近于与 Ψ_T的节点面相容的最低能量态。这种数学投影并不描述物理冷却。对于量子漂移速度 $\boldsymbol{v}_D(\boldsymbol{X}) = \nabla_{\boldsymbol{X}}\ln|\Psi_T(\boldsymbol{X})|$，$f(\boldsymbol{X},\tau)$的演化遵循广义福克–普朗克方程

$$\frac{\partial f(\mathbf{X},\tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\nabla^2 f(\mathbf{X},\tau) - \nabla\cdot[\mathbf{v}_D(\mathbf{X})f(\mathbf{X},\tau)] - [E_L(\mathbf{X}) - E_T]f(\mathbf{X},\tau) \qquad (S11)$$

其中，$E_L(\boldsymbol{X}) = \Psi_T(\boldsymbol{X})^{-1}(\mathrm{H}_\perp/\hbar\omega_\perp)\Psi_T(\boldsymbol{X})$ 是无量纲局域能量，E_T 是参考试探能量。在实际操作中，方程 (S11) 通过结合随机游走扩散 $[\frac{1}{2}\nabla_{\boldsymbol{X}}^2 f$，（代表量子零点动能涨落）], 、确定性漂移 $[-\nabla_{\boldsymbol{X}}\cdot(f\boldsymbol{v}_D)$（引导行走者前往 $|\Psi_T|$ 较大的区域并远离节点面], ）以及局域能量分支 $[-(E_L(\boldsymbol{X}) - E_T)f$，在每个虚时间步长 $\Delta\tau$ 内演化每个行走者 $\boldsymbol{X}$。局域能量分支会复制局域能量较低构型中的行走者 $E_L(\boldsymbol{X}) < E_T$，并消除局域能量较高构型中的行走者 $E_L(\boldsymbol{X}) > E_T]$；固定节点边界条件 $\Psi_T(\boldsymbol{X}) = 0$ 则禁止节点穿越，从而使 $f(\boldsymbol{X},\tau)$ 保持非负。我们通过漂移受限重要性采样蒙特卡罗游走和恒定种群分支重构来实现这一虚时间演化（$\Delta\tau = 0.00125\,\omega_\perp^{-1}$，$W = 512$–$1024$，1 T；$\Delta\tau = 0.0025\,\omega_\perp^{-1}$，$W = 256$，在 $\kappa = 0$–100 和 $B = 0.5$–0.1 T 范围内）。

在图 3(d) 中，将每电子固定节点能量 E_{DMC}/N（蓝色圆点，绘制于$\kappa = 1$–686范围内，统计误差条小于符号尺寸）与无 Jastrow 的标度化 Slater 上界 E_{ub}/N（黑色虚线）进行比较，可定义相对于该参考值的每电子能量降低，即 $\Delta E_{\mathrm{corr}}/N \equiv (E_{\mathrm{ub}} - E_{\mathrm{DMC}})/N \geq 0$ [图 3(d) 插图]。由于 E_{ub}/N 包含零点约束、泡利交换、精确的质心约束以及内部径向膨胀，$\Delta E_{\mathrm{corr}}/N$ 所测量的是所选节点扇区内额外的粒间关联能降低：它从$\kappa = 1$ 处的 $0.037\ \hbar\omega_\perp$ 增长了近三个数量级，在（$B = 1$ T）处达到 $34.27\ \hbar\omega_\perp$（跨越 $B = 0.5$–0.1 T 时达到 43.60–$75.51\ \hbar\omega_\perp$），趋近于渐近强耦合标度 $\Delta E_{\mathrm{corr}}/N \propto \kappa^{2/3}$（插图中的虚线引导线）。

非相互作用极限提供了一个解析检验；随后，FN-DMC 给出有限耦合下的固定节点能量基准。在非相互作用极限（$\kappa = 0$）中，$M = 10$ 闭壳层参考具有精确的基态能量 $E_0/N = (2M+1)/3 = 7\,\hbar\omega_\perp$，且陷阱中心均方半径为 $r^2 = 7\,l_q^2$；展宽轨道对照计算（$\alpha_{\mathrm{orb}} = 0.90$）在统计不确定性范围内重现了这些结果（$E_{\mathrm{DMC}}/N = 7.000 \pm 0.001\ \hbar\omega_\perp$，以及前向行走得到的 $r^2 = 7.01 \pm 0.01\,l_q^2$，投影间隔为 $L = 2$–$4\,\omega_\perp^{-1}$）。在强耦合区间，FN-DMC 在 $B = 1$ T 参考条件下得到$E_{\mathrm{DMC}}/N = 1059.54 \pm 0.01\ \hbar\omega_\perp$（$\kappa_0 \simeq 686$，低于无 Jastrow 因子上界 $E_{\mathrm{ub}}/N = 1093.81\ \hbar\omega_\perp$）；在 $B = 0.5$、0.3 和 0.1 T 下，四个独立重复样本的结果分别为 1334.50 ± 0.01、1581.94 ± 0.01 和 $2280.95 \pm 0.02\ \hbar\omega_\perp$（与 $E_{\mathrm{ub}}/N =$

1378.09、1633.90 和 2356.47 $\hbar\omega_\perp$ 相比；所报不确定性表示指定（$\Delta\tau$， W）方案下的副本间统计标准误）。

密度、结构因子和条件密度。由于标准的固定节点扩散蒙特卡罗（FN-DMC）对混合分布 $\Phi_0\Psi_T$ 进行采样，我们利用前向行走后代权重 [S8]，在投影区间 $L = 0.5\,\omega_\perp^{-1}$内估算图 3(a)–3(c) 中以及亚特斯拉磁场下的位置空间可观测量；这能抑制混合估计偏差，同时在游走者数量有限时保留足够的祖先多样性（其中 $n(\boldsymbol{r})$ 归一化为 $\int n(\boldsymbol{r})\, d^2r = N$）。利用下文定义的内部对齐采样构型，我们计算横向静态结构因子如下：

$$S(\boldsymbol{q}) = \frac{1}{N}\left\langle \left| \sum_{j=1}^{N} e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}_j} \right|^2 \right\rangle. \qquad (S12)$$

它同时包含有限密度分布和粒子间关联，其中 $S(\boldsymbol{0}) = N$；而对数映射 $\ln[1 + S(\boldsymbol{q})]$ 则增强了跨越动态范围的可视性。由于圆形谐振子阱没有优选取向，未对齐的系综平均会将取向结构模糊成环；因此，在累积图 3(a) 和 3(b)（来自两条 $W = 512$ 生产轨迹）之前，将每个采样构型绕阱中心刚性旋转 $-\Theta_6$，以对齐其内核的六重键取向相位 Θ_6（在 $r_i \le R_{\mathrm{inner}} \simeq 16.8\, l_q$ 范围内计算），且不进行平移或径向缩放。此后处理定义了一个对齐坐标系，不施加任何物理钉扎力。图 3(a) 中内核对齐后最外层平滑的外壳，与外壳和内核之间较弱的角向锁定（壳层间转动解耦）相符。为解析外环 [图 3(c)], 内的角向关联，依次将最外层壳中中心半径为 $r_0 \simeq 34.3\, l_q$ 、半宽为 $\delta \simeq 0.38\, l_q$ 的每个电子（指示函数 $I_i = 1$，当 $r_0 - \delta < |\boldsymbol{r}_i| < r_0 + \delta$ 时取值为 $I_i = 0$，否则取值为零）用作参考粒子：将其他所有电子的坐标旋转 $R(-\theta_i)$（其中 $\theta_i = \arg(\boldsymbol{r}_i)$ 是电子 i 的极角，R 是二维旋转矩阵），使参考电子位于 $+x$ 轴上（青色标记），从而得到共转条件数密度（其中 $\delta^{(2)}$ 是二维狄拉克 δ 函数）

$$n_{\mathrm{cond}}(\boldsymbol{r}) = \frac{\left\langle \sum_i I_i \sum_{j\neq i} \delta^{(2)}\left[\boldsymbol{r} - R(-\theta_i)\boldsymbol{r}_j\right] \right\rangle}{\langle \sum_i I_i \rangle}. \qquad (S13)$$

归一化为 $\int n_{\mathrm{cond}}(\boldsymbol{r})\, d^2r = N - 1$ （以 l_q^{-2} 为单位）后，$n_{\mathrm{cond}}(\boldsymbol{r})$ 可在不引入任何物理钉扎力的情况下探测本征二体关联：同心环反映径向壳层占据，角向叶瓣表示偏好的相对粒子位置 [S9、S10], ，而 $+x$ 参考标记周围的耗尽孔则反映泡利交换与库仑排斥的综合作用（图 3a、b 中的白色引导线为示意性几何参考线）。为量化不同耦合强度下内部区域的六角有序，我们计算六重键取向序

序参量 $|\psi_6| = |N_{\mathrm{bulk}}^{-1} \sum_{i\in \mathrm{bulk}} n_i^{-1} \sum_{j\in \mathcal{N}_i} e^{i6\theta_{ij}}|$，取内部壳层（在 1 T 下为 $r_i \le 24.0\, l_q$，并按照无 Jastrow 的缩放 Slater 均方根俘获半径随耦合强度进行缩放——在 $\kappa = 0$ 和 1 时分别为 $2.35\, l_q$ 和 $3.11\, l_q$，在强耦合下趋近于 $\propto \kappa^{1/3}$；同时，当 Delaunay键长度超过中位最近邻间距的 1.8 倍时予以截断，其中 N_{bulk} 为内部电子数，$\mathcal{N}_i$ 表示电子 i 的 n_i 个 Delaunay邻居，其键角为 θ_{ij}）。从弱相互作用气体（$\kappa = 0$–1）到 $B = 1$ T（$\kappa_0 \simeq 686$），再进入亚特斯拉区域（B =0.5、0.3 和 0.1 T），$|\psi_6|$ 从 0.12 上升至 0.66 ± 0.01（四副本 $W = 1024$ 基准；图 3 中两条 $W = 512$ 轨迹为 0.65 ± 0.01），并进一步升至 0.69 ± 0.01、0.68 ± 0.02 和 0.74 ± 0.01。在通过连通结构因子 $S_{\mathrm{conn}}(\boldsymbol{q}) = S(\boldsymbol{q}) - |\sum_j e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}_j}|^2/N$ 减去每个副本的相干平均密度贡献后，主倒易环上的副本平均归一化六次谐波角调制从 0.03–0.04（$\kappa \le 1$）增至 0.26 ± 0.01（1 T），并达到 0.34–0.39（0.5–0.1 T，副本间不确定度为 ±0.02–0.10），从而支持在固定节点近似下这一有限自旋极化团簇中显著的六重相关。

亚特斯拉拉莫尔阱尺度与相空间制备估算。将 1 T 参考基准（$\kappa_0 \simeq 686$, $l_q \simeq 36.3$ nm；图 3）扩展至亚特斯拉区域（B = 0.5、0.3 和 0.1 T），可以看出，较弱的磁聚焦会扩大空间片层，同时提高横向温度要求。对于一个示例性的 200 千电子伏电子束（$\gamma \simeq 1.391$），在有效谐和拉莫尔模型下，随着轴向参考磁场从 $B = 0.5$ T 降至 0.3 T 和 0.1 T，拉莫尔俘获频率 $\omega_\perp = eB/(2\gamma m)$ 从 3.16×10^{10} 降至 1.90×10^{10} 和 0.632×10^{10} rad/s（$\hbar\omega_\perp/k_B \simeq 0.241$、0.145 和 0.048 K）；与此同时，量子振子长度 $l_q = \sqrt{2\hbar/(eB)}$ 从 51.3 nm 增至 66.2 nm ~~和 115 n~~nm，而与 N 无关的耦合参数 $\kappa(B) = l_q/a_0$ 则从 970 增至 1.25×10^3 和 2.17×10^3。将有限投影（$L = 0.5\, \omega_\perp^{-1}$）固定节点扩散蒙特卡罗的径向因子 $f(B) \simeq 21.2$、23.1 和 27.8（对应示例性的 $N = 55$ 闭壳层参考，有限投影系统误差为 ~ 1%）乘以 $l_q(B)$，得到模型均方根束腰 $\sigma_x = f(B) l_q \simeq 1.09$、1.53 和 3.19 μm，有效Wigner–Seitz半径 $a_{\mathrm{eq}} = 2\sigma_x/\sqrt{N} \simeq 0.29$、0.41 和 0.86 μm，平均面密度[$(\overline{n} =)\pi a_{\mathrm{eq}}^2$.7、1.9 和 0.$^{-1} \simeq 3$m43 μ，以及特征库仑能 $^{-2}]/E_C = C$3.5、2.5 和 1.2 meV。对于片层粒子数 $a_{\mathrm{eq}} \simeq -N \sim 10$，谐势阱中的连续介质静电圆盘估算给出 10^2, ，因此 $\sigma_x \propto N^{1/3} l_{\mathrm{cl}}$ 和 $a_{\mathrm{eq}} \propto N^{-1/6} l_{\mathrm{cl}}$ 在 $E_C \propto N^{1/6}$ 改变一倍时变化不到 15%，在逐发泊松涨落下变化（N [）$6\sqrt{N}\%^{-1} \approx 2$；在 $\Delta N \sim \sqrt{N} - N \sim 50$ 范围内，这表明静电尺寸对 100], 不敏感。从物理上说，降低 N 会扩大横向片层，并放宽实现 10% 薄片纵横比（$B\,/\gamma v_0 \tau_b$.1）所需的均方根阿秒束团持续时间要求，使其达到 $a_{\mathrm{eq}} = 0$、140 和 300 as；同时，拉莫尔系空间电荷重排时间尺度 $\tau_b \simeq 100$ $\tau_C = /\sqrt{\gamma m a_{\mathrm{eq}}^3}$ 从 14 ps 延长至 23 ps 和 70 ps（对应的实验室传播长度为 C

2.9、4.8 和 15 毫米，这一物理动力学尺度不同于式 (S10) 中的数值淬火步骤；无约束轴向膨胀会使 $\gamma\Delta z$ 在 $\sqrt{0.1}\,\tau_C \simeq 0.32\,\tau_C$ 内从 $0.1\,a_{\mathrm{eq}}$ 增至两倍，且与 N 和 B 无关，因此需要在峰值压缩前进行空间预调控）。

采用经典强耦合目标 $\Gamma = E_C/(k_B T_\perp) \geq 100$ 后，模型在拉莫尔参考系中的横向温度预算设为 $T_\perp \lesssim 0$。当磁场为 $B = 0.5$、0.3 和 0.1 T 时，温度分别为 0.41、0.29 和 0.14 K，对应的本征归一化热横向发射度预算为 $\varepsilon_n = \sigma_x\sqrt{\gamma k_B T_\perp/(mc^2)} \lesssim 11$、13 和 18 pm rad（这与旋转参考系中去除的相干刚体拉莫尔旋转 [S11]不同；达到结晶阈值 $\Gamma_m \simeq 130$–140[S6] 会使 $T_\perp$ 收紧 $\sim 30\%$，并使 ε_n 收紧 $\sim 15\%$）。在阴极层面，若 $\varepsilon_{n,\,\mathrm{src}} = \sigma_{x,\,\mathrm{src}}\sqrt{\mathrm{MTE}/(mc^2)}$，则平均横向能量 MTE $\simeq 5$ meV [S12] 、有效发射半径为 $\sigma_{x,\,\mathrm{src}} \sim 110$–180 nm 的低温单晶 Cu(100) 光阴极，在束线传输之前可提供相容的源热发射度尺度。因此，要在传播束流中实现有序态，就需要将低发射度阴极制备与空间预调控相结合，以减轻无序诱导加热 [S13], ，并采用同步纵向压缩和受控焦点传输。

通信请联系 Y.P.（†yiming.pan@shanghaitech.edu.cn）和 H.G.（†† genghao@nuaa.edu.cn）。

参考文献

[S1] A. Feist、K. E. Echternkamp、J. Schauss、S. V. Yalunin、S. Schäfer 和 C. Ropers, 《超快透射电子显微镜中的量子相干光学相位调制》, 《自然》521，200（2015）。

[S2] K. E. Priebe、C. Rathje、S. V. Yalunin、T. Hohage、A. Feist、S. Schäfer 和 C. Ropers, 《阿秒电子脉冲串与超快透射电子显微术中的量子态重构》, 《自然·光子学》11, 793（2017）。

[S3] J. D. Jackson, 《经典电动力学》, 第 3 版（Wiley，纽约，1999年）。

[S4] L. Bonsall 和 A. A. Maradudin, 《二维维格纳晶体的一些静态和动力学性质》, 《物理评论 B》15，1959（1977）。

[S5] A. V. Filinov、M. Bonitz 和 Yu. E. Lozovik, 《介观二维电子系统中的维格纳结晶化》, 《物理评论快报》86，3851（2001年）。

[S6] D. H. E. Dubin 和 T. M. O'Neil, 《受限非中性等离子体、液体和晶体》（《热平衡态》）, 《现代物理评论》71，87（1999年）。

[S7] W. M. C. Foulkes、L. Mitas、R. J. Needs 和 G. Rajagopal, 《固体的量子蒙特卡罗模拟》, 《现代物理评论》73，33（2001年）。

[S8] J. Casulleras 和 J. Boronat，《量子蒙特卡罗方法中的无偏估计量：液态氦-4的应用》，《物理评论 B》52，3654（1995）。[S9] C. Yannouleas 和 U. Landman，《人工原子中电子分子的形成与调控：杂质和磁场效应》，《物理评论 B》61，15895（2000）。[S10] S. M. Reimann、M. Koskinen 和 M. Manninen，《小型量子点中维格纳分子的形成》，《物理评论 B》62，8108（2000）。[S11] M. Reiser，《带电粒子束理论与设计》，第2版（Wiley-VCH，魏因海姆，2008）。[S12] S. Karkare、G. Adhikari、W. A. Schroeder、J. K. Nangoi、T. Arias、J. Maxson 和 H. Padmore，《通过单晶 Cu(100) 的近阈值光电子发射产生超冷电子》，《物理评论快报》125，054801（2020）。[S13] J. M. Maxson、I. V. Bazarov、W. Wan、H. A. Padmore 和 C. E. Coleman-Smith，《无序诱导加热导致的光电子发射基本亮度极限》，《新物理学杂志》15，103024（2013）。