arXiv:2611.32178v1 [math.CA] 24 Nov 2026

带有伯努利卷积的加性测度的谱性

YI-QIU MAO 和 ZHI-YI WU

摘要。勒贝格型加性测度的谱性质目前已经得到完全解决 [37, 1, 35, 42]。本文继续研究康托型加性测度的谱性。对于$0 < r < 1$，令 μ_r 表示由映射 $x \mapsto rx$ 和 $x \mapsto r\ (x + 2)$ 以等权重生成的伯努利卷积，并考虑伯努利型加性测度

$$\mu_{r,s} = \tfrac{1}{2}(\mu_r \times \delta_0 + \delta_0 \times \mu_s).$$

对于每个偶整数 $R = 2k$ ，我们构造了一维测度$\mu_{1/R}$的显式谱，并由此构造出$\mu^{1/R}$ 的显式谱：$= \mu_{1/R,\ 1/R}$ 位于反对角线上。结合最近确立的结论——当 $N \geq 3$ [16, 29]为奇整数时，伯努利卷积$\mu_{1/N}$ 不存在傅里叶框架——可得到奇偶二分： $\mu^{1/R}$ 是谱的，当且仅当 R 为偶数。对于不相等的压缩比，我们证明$\mu_{1/2,\ 1/4}$ 不是谱的。文中还讨论了若干未解决问题和未来方向。

1. 引言

若紧支撑的博雷尔概率测度 σ 定义在 $\mathbb{R}^d$ 上，且存在可数集 $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^d$ ，使得 $E(\Lambda) = \{e_\lambda(x) = e^{2\pi i\langle \lambda,\ x\rangle} : \lambda \in \Lambda\}$ 构成 $L^2(\sigma)$的正交归一基，则称该测度为谱测度。这样的集合 Λ称为 σ的谱。

谱测度的研究源于 Fuglede 于 1974 年提出的著名谱集猜想。该猜想断言，将归一化的勒贝格测度限制在有界可测集 Ω 上所得的测度是谱的，当且仅当 Ω 能通过平移 [30]铺砌 $\mathbb{R}^d$ 。尽管该猜想如今已被证明一般情况下不成立 [49], ，但它促成了许多新的研究问题。在这些问题中，Jorgensen 和 Pedersen [34] 于 1998 年发现了第一个无原子奇异谱测度的例子，即当 $r = 1/(2k)$ 时的 Bernoulli卷积 μ_r ，其中 $k \geq 2$ 为整数；它的一个谱如下：

$$\Lambda(2k, C) = \left\{ \sum_{j=0}^{m} (2k)^j c_j : c_j \in \{0, k/2\},\ m \geq 0 \right\}$$

此后，Bernoulli卷积的谱性得到了广泛研究。在Dutkay和Jorgensen早期工作的基础上， [26], Hu

2020 数学主题分类。42C05；28A80；42A65；46B15。关键词和短语。谱测度；Bernoulli卷积；加性Cantor测度；傅里叶框架；传递算子；反射；非谱性。

和Lau [33], Dai最终解决了Bernoulli卷积的谱性问题，证明了 μ_r 是谱的，当且仅当对某个整数 $k \geq 1$ [10]， $r = 1/(2k)$。与此同时，自相似测度 [7, 8, 15, 19, 36], 自仿射测度 [12, 25]和莫兰测度的谱性也得到了广泛研究 [3, 4, 5, 18, 40, 41, 44]。此外，还发现了各种不同于勒贝格测度谱理论中的新现象，主要包括：

- 谱特征值问题（高维中的谱特征矩阵问题）：对于奇异连续谱测度的给定谱 Λ，刻画使得标量 λ （或高维中的矩阵 A ）满足 $\lambda\Lambda$ （分别为 $A\Lambda$）仍为一个谱[2, 11, 24, 32]的条件。对于一维中的若干类自相似谱测度，这一谱特征值问题已有研究[46, 11, 32]。例如，Strichartz 首先发现 $5\Lambda(4, \{0, 1\})$ 是 $\mu_{1/4}$ [46] 的一个谱。该问题与数论问题 [24], 密切相关，其高维特征矩阵对应问题也已针对平面 Sierpinski测度进行研究 [2]。

- 谱的 Beurling 维数分布。Dutkay 等人[21] 以及 He 等人 [31] 证明，满足开集条件的一般自相似谱测度的谱的 Beurling 维数不大于其支撑的豪斯多夫维数，并且在某些温和条件下二者可以相等。后来，文献 [6, 14, 39, 43]为一些分形测度构造了 Beurling 维数为零的谱，以及具有任意中间 Beurling 维数的谱。

- 相关拟傅里叶级数的收敛性。Strichartz[47]开创了拟傅里叶级数的收敛理论：对于满足 $k \geq 2$ 的 Bernoulli卷积 $\mu_{1/(2k)}$，以及谱$\Lambda(2k, \{0, k/2\})$，他证明了每个$f \in C(\mathrm{supp}(\mu_{1/(2k)}))$ 的拟傅里叶级数都在 $\mathrm{supp}(\mu_{1/(2k)})$ 上一致收敛；在同一篇论文中，他还研究了 $k \geq 3$ 的情形，并在该情形下建立了逐点收敛结果。另一方面，Dutkay、Han 和 Sun [22]证明，对于其他谱，收敛性可能失效：存在 $f \in C([0, 1])$，其关于谱 $17\Lambda(4, \{0, 1\})$ 的拟傅里叶级数在 0 处发散。最近，Tang 和第二作者 [48] 证明，对于谱 $\Lambda(4, \{0,1\})$，每个 $f \in L^1(\mu_{1/4})$ 的拟傅里叶级数都在 $\mathrm{supp}(\mu_{1/4})$ 上几乎处处收敛到 f $\mu_{1/4}$；这一结果补充了 Strichartz 关于 $k \geq 3$ 的逐点收敛结果，涵盖了 $k = 2$的情形，并解决了 Strichartz 长期未解问题 [47, p. 341]。

关于这一主题在一维情形下的优秀综述，读者可参阅 [13]。

Lai、Liu 和 Prince [37] 系统研究了将两个测度置于坐标轴上所得到的加性测度。这推动了由 Lev [38] 发起的研究方向，从探讨奇异测度是否存在傅里叶框架（即框架谱性），发展到对这一特定加法模型的谱性进行精确刻画

。对于两个无原子博雷尔概率测度 μ和 ν，与之相关联的加性测度为

$$\frac{1}{2}(\mu \times \delta_0 + \delta_0 \times \nu).$$

由于 μ 和 ν 均无原子，因此该加性测度是连续的。此外，其支撑集中在两条坐标轴的并集上，而该并集的平面勒贝格测度为零；因此，相对于平面勒贝格测度，它是奇异的。对于这个勒贝格型族

$$\frac{1}{2}(\mathcal{L}_{[t_1,t_1+1]} \times \delta_0 + \delta_0 \times \mathcal{L}_{[t_2,t_2+1]}),$$

其中$\mathcal{L}_{[a,b]}$ 表示区间 $[a,b]$上的勒贝格测度，谱性问题 [37, 1, 35, 42]已得到彻底解决：它是谱的，当且仅当 $t_1 + t_2 \in \mathbb{Z}\setminus\{-1\}$ 或 $t_1 - t_2 \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$。本文考虑两个分量测度均为Bernoulli卷积的情形，其压缩比可以不同。

我们回顾Bernoulli卷积的定义。对于 $r \in (0,1)$，*Bernoulli*卷积 μ_r 是 $\mathbb{R}$ 上的概率测度，它是随机变量 $\sum_{j=1}^{\infty} \xi_j r^j$的分布，其中 ξ_i 是取值为0和2且概率相等的独立同分布随机变量。等价地， μ_r 是满足以下条件的唯一博雷尔概率测度

$$\mu_r(\cdot) = \frac{1}{2}\,\mu_r(\tau_1^{-1}(\cdot)) + \frac{1}{2}\,\mu_r(\tau_2^{-1}(\cdot)), \tag{1.1}$$

其中 $\tau_1(x) = rx$ 和 $\tau_2(x) = r(x+2)$（见 [27]）。该测度支撑在如下紧致的 T_r 上:

$$T_r = \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} c_j r^j : \; c_j \in \{0,2\} \text{ for all } j \right\}. \tag{1.2}$$

我们将相应的加性测度

$$\mu_{r,s} = \frac{1}{2}(\mu_r \times \delta_0 + \delta_0 \times \mu_s) \tag{1.3}$$

称为 Bernoulli型加性测度。

尽管 Bernoulli卷积的一维谱性已得到完整分类，但无法直接从平面加性测度 $\mu_{r,s}$ 各个分量的谱性推导出该测度的谱性。要在这个二维集合中构造指数正交归一基，不仅需要各个一维分量的谱，还需要精确协调它们的跨分量相位。另一方面，根据 Lai、Liu 和 Prince [37] [1] 的一项结果，$\mu_{r,s}$ 具有框架谱性，必然要求其一维分量也具有框架谱性。因此，任一分量不具备框架谱性，便立即意味着$\mu_{r,s}$不具备框架谱性。特别是，de Dios Pont、Liehr 和 Taylor [16] （Fu、Song 和 Wang [29]也独立证明）近期的研究表明，奇整数对应的 Bernoulli卷积 $\mu_{1/N}$

[1]对于一般的加性测度 $\eta = \frac{1}{2}(\mu \times \delta_0 + \delta_0 \times \nu)$，若 $E(\Lambda)$ 是 $L^2(\eta)$ 的傅里叶框架，则 $E(\pi_1(\Lambda))$ 和 $E(\pi_2(\Lambda))$ 分别是 $L^2(\mu)$ 和 $L^2(\nu)$ 的傅里叶框架，其中 π_1，π_2 表示到 x 轴和 y 轴的坐标投影（见 [37] 的第4节）。

$N \geq 3$ 甚至不具有傅里叶框架，这比不具备谱性构成更强的障碍。这引出了以下核心问题：

问题 1.1。 对于哪些数对 (r,s) ，$\mu_{r,s}$ 是谱测度？特别是，当 $r = 1/(2k_1)$ 和 $s = 1/(2k_2)$ 满足 $k_1 \neq k_2$ 时，情况会发生什么变化？

我们的首个主要结果聚焦于相等偶数倒数收缩的对称情形，即 $r = s = 1/(2k)$。对于偶整数 $R = 2k \geq 2$，我们的主要目标是构造平面测度 $\mu^{1/R}$ 的谱。为此，我们首先为一维分量 $\mu_{1/R}$ 建立一个新的谱，随后将其作为平面情形的基本构件。

我们从集合 Γ_R 开始，该集合由所有形如 $\sum_{j=0}^{N} \varepsilon_j R^j$ 的有限和组成，其中 $\varepsilon_j \in \{0,1\}$。接着，我们将 $\mu_{1/R}$ 的一个缩放副本及其平移反射作不交并，构造出一个谱。具体而言，令 $q_R = {}^{R}_{(R-1)\ 4}$ ，我们定义

$$S_R = (R-1)q_R\Gamma_R \ \cup \ (-q_R - (R-1)q_R\Gamma_R). \tag{1.4}$$

值得强调的是，该构造为 $\mu_{1/R}$产生了一个新的谱 [17, 20, 24, 28, 36]，无法直接从文献中任何已知的构造推导出来。

为了构造平面测度 $\mu^{1/R}$的一个谱，我们将这个在 **(1.4)** 中定义的一维谱 S_R 的一个平移副本与其自身合并，得到

$$T_R = S_R \ \cup \ (S_R + (R-1)/4).$$

然后，将 T_R 置于反对角线上，即可得到平面谱：

$$\Lambda_R = \{(t,-t) : t \in T_R\}.$$

有了这一明确构造，我们的第一个主要定理如下。

定理 1.2。 对于每个 $k \geq 1$，一维测度 $\mu_{1/(2k)}$ 都具有一个谱 S_{2k}，而平面测度 $\mu^{1/(2k)}$ 具有一个谱 Λ_{2k}。

结合定理 1.2 以及前述已确立的结论——当 R 为奇数时， $\mu^{1/R}$ 不存在傅里叶框架——我们得到对称加性测度的奇偶二分。

推论 1.3. 对于每个整数 $R \geq 2$, $\mu^{1/R}$ 是谱的，当且仅当 R 是偶数。

自然会有人问，如果对称性被打破，会发生什么。我们证明，对于不等收缩，谱性通常不会保持，以下反例便说明了这一点。

定理1.4. 加性测度

$$\mu_{1/2,1/4} = \frac{1}{2}(\mu_{1/2} \times \delta_0 + \delta_0 \times \mu_{1/4})$$

不是谱测度。

本文的组织如下。第2节介绍谱测度的一些基本定义和预备知识。第3节证明定理 1.2。第4节证明定理1.4。第5节证明推论 1.3。在最后一节中，我们给出一些例子并作总结性评论。

2. 预备知识

设 σ 是定义在 $\mathbb{R}^d$ 上且具有紧支撑的概率测度。σ 的傅里叶变换定义为

$$\hat{\sigma}(\xi)=\int e^{-2\pi i\langle \xi,x\rangle}\,\mathrm{d}\sigma(x),$$

容易看出，$E(\Lambda)$ 是 $L^2(\sigma)$ 中的正交集（此时，我们称 Λ 为 σ 的一个 正交集），当且仅当

$$(\Lambda-\Lambda)\setminus\{0\}\subset\mathcal{Z}(\hat{\sigma}),\tag{2.1}$$

其中，$\mathcal{Z}(f)$ 表示函数的零点集，即 $\mathcal{Z}(f)=\{\xi\in\mathbb{R}^d:\ f(\xi)=0\}$。

设 $R\geq 2$ 为偶整数。由方程 (1.1) 得

$$\widehat{\mu_{1/R}}(\xi)=m(\xi/R)\widehat{\mu_{1/R}}(\xi/R),\tag{2.2}$$

其中 $m(\xi):=\frac{1}{2}(1+e^{-4\pi i\xi})=e^{-2\pi i\xi}\cos(2\pi\xi)$。由于 $\widehat{\mu_{1/R}}(0)=1$，将 (2.2) 迭代至无穷远可得无穷乘积

$$\widehat{\mu_{1/R}}(\xi)=e^{-2\pi i\xi/(R-1)}\prod_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{2\pi\xi}{R^n}\right).\tag{2.3}$$

因此

$$\mathcal{Z}(\widehat{\mu_{1/R}})=\left\{\frac{R^k}{4}(2j+1):k\geq 1,\ j\in\mathbb{Z}\right\}.\tag{2.4}$$

若 $\eta=\frac{1}{2}(\mu\times\delta_0+\delta_0\times\nu)$ 对于定义在 $\mathbb{R}$ 上的博雷尔概率测度 μ,ν 成立，则

$$\widehat{\eta}(\xi,\ell)=\frac{1}{2}(\widehat{\mu}(\xi)+\widehat{\nu}(\ell)),\tag{2.5}$$

这由傅里叶变换的定义可直接得出。

下面的判据是检验集合 $\Lambda\subset\mathbb{R}^d$ 的通用方法，它是判定 Λ 是否为 σ 的正交集（或谱）的充要条件。定义

$$Q_\Lambda^\sigma(\xi)=\sum_{\lambda\in\Lambda}|\hat{\sigma}(\xi+\lambda)|^2,\tag{2.6}$$

它在该判据中起着关键作用。

定理 2.1 ([34])。设 σ 是 $\mathbb{R}^d$ 上具有紧支撑的博雷尔概率测度，且 $\Lambda\subset\mathbb{R}^d$ 是一个可数集。那么

(1) Λ 是 σ 的正交集，当且仅当对所有 $\xi\in\mathbb{R}^d$都有 $Q_\Lambda^\sigma(\xi)\leq 1$；(2) Λ 是 σ 的谱，当且仅当对所有 $\xi\in\mathbb{R}^d$都有 $Q_\Lambda^\sigma(\xi)=1$；(3) $Q_\Lambda^\sigma(\xi)$ 可整解析延拓至 $\mathbb{C}^n$，当 Λ 是 σ的正交集时。

3. 定理 1.2 的证明

在本节中，我们证明定理 1.2。我们首先证明定理 1.2 的第一个断言，即在 (1.4) 中定义的 S_R 是$\mu_{1/R}$的谱。根据定理 2.1，这归结为证明对所有 $\xi \in \mathbb{R}$都有 $Q_R(\xi) := Q_{S_R}^{\mu_{1/R}}(\xi) \equiv 1$ 。证明分为以下三个步骤:

(i) 自相似递归

$$S_R = RS_R \cup (RS_R + (R-1)q_R)$$

已在引理 3.1 中建立；结合 (2.4)，可得引理 3.2 中$\{e_s : s \in S_R\}$ 的正交性。

(ii) 利用这一递推关系和掩码关系 (2.2)，我们在 (3.6) 中推导出谱函数的双分支函数方程

$$Q_R(t) = \sum_{s\in S_R} |\widehat{\mu_{1/R}}(t+s)|^2,$$

即

$$Q_R(t) = \cos^2\Big(\frac{2\pi t}{R}\Big)Q_R\Big(\frac{t}{R}\Big) + \sin^2\Big(\frac{2\pi t}{R}\Big)Q_R\Big(\frac{t+\ell_R}{R}\Big).$$

(iii) 命题 3.3 中的最大值原理论证接着给出 $Q_R \equiv 1$，因此由定理 2.1，S_R 是$\mu_{1/R}$ 的一个谱。

为简化记号，定义 $\ell_R = {}^{R}_{(R-1)_4}\ \overset{2}{\circ}$

引理 3.1。 设 $R \geq 2$ 是一个偶整数。那么集合 S_R 满足

$$S_R = RS_R \cup (RS_R + \ell_R), \tag{3.1}$$

其中 $0, -q_R \in S_R$，且该并为不交并。

证明。 由 Γ_R 的定义可立即得到

$$\Gamma_R = R\Gamma_R \cup (R\Gamma_R + 1).$$

将此应用于 (1.4) 中 S_R 的两个分量，得到

$$\begin{aligned} \ell_R\Gamma_R &= R\ell_R\Gamma_R \ \cup\ (R\ell_R\Gamma_R + \ell_R), \\ -q_R - \ell_R\Gamma_R &= (-q_R - R\ell_R\Gamma_R) \ \cup\ (-Rq_R - R\ell_R\Gamma_R), \end{aligned}$$

其中第二行使用了 $-q_R - \ell_R = -Rq_R$。由于 $-Rq_R + \ell_R = -q_R$，上面显示的四项可重新组合为

$$\begin{aligned} S_R &= \big(R\ell_R\Gamma_R \cup (-Rq_R - R\ell_R\Gamma_R)\big) \cup \big((R\ell_R\Gamma_R + \ell_R) \cup (-q_R - R\ell_R\Gamma_R)\big) \\ &= RS_R \ \cup\ (RS_R + \ell_R), \end{aligned} \tag{3.2}$$

这就是 (3.1)。

要看出 (3.2) 中上述两个分支互不相交，注意 $\Gamma_R \subset \mathbb{Z}$ 和

$$\ell_R = \frac{R(R-1)^2}{4} \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}, \qquad q_R = \frac{R(R-1)}{4} \in \frac{1}{2}\mathbb{Z},$$

我们有 $S_R \subset \frac{1}{2}\mathbb{Z}$。如果对于某个 $s,\ t \in S_R$，$Rs = Rt + (R-1)q_R$，那么

$$s - t = \frac{(R-1)q_R}{R} = \frac{\ell_R}{R} = \frac{(R-1)^2}{4}.$$

由于 R 是偶数， $R-1$ 是奇数，因此 $(R-1)^2 \equiv 1$ （模 4），从而

$$\frac{(R-1)^2}{4} \in \mathbb{Z} + \frac{1}{4}.$$

这不是 $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ 的元素，与 $s-t \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ 矛盾。因此，这两个分支是不相交的。

最后，0 和 $-q_R$ 是 (1.4) 中两个分支的零位数字成员，即:

$$0 = \ell_R \cdot 0 \in \ell_R \Gamma_R, \qquad -q_R = -q_R - \ell_R \cdot 0 \in -q_R - \ell_R \Gamma_R.$$

因此 0， $-q_R \in S_R$，正如所断言的那样。 □

引理 3.2。 族 $\{e_s : s \in S_R\}$ 在 $L^2(\mu_{1/R})$ 中是正交归一的。

证明。 根据 (2.1)，只需证明

$$(S_R - S_R) \setminus \{0\} \subset \mathcal{Z}(\widehat{\mu_{1/R}}).$$

对于任意 s， t 属于 S_R 且满足 $s \neq t$。由引理 3.1，可写作 $s = Rs_1 + a$ 和$t = Rt_1 + b$，其中 a， $b \in \{0, \ell_R\}$ 且 s_1， $t_1 \in S_R$。

若 $a = b$，则 $s - t = R(s_1 - t_1)$且满足 $s_1 \neq t_1$。将 (s, t) 替换为 (s_1, t_1) 并不断迭代，最终会到达情形 $a \neq b$。事实上，否则 $s - t = R^n(s_n - t_n)$ 对每个 n 都成立，其中 $s_n \neq t_n$ 且 s_n， $t_n \in S_R \subset \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ （如引理 3.1 的证明所示）。因此 $|s_n - t_n| \geq \frac{1}{2}$，这将导致

$$|s - t| \geq \frac{R^n}{2} \to \infty,$$

矛盾。

因此我们可以假设 $a \neq b$，从而 $\{a, b\} = \{0, \ell_R\}$，进而 $a - b = \pm \ell_R$。由于 $s_1 - t_1 \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$，存在 $j \in \mathbb{Z}$ 使得 $s_1 - t_1 = j/2$。因此

$$s - t = R(s_1 - t_1) + (a - b) = R \cdot \frac{j}{2} \pm \ell_R = \frac{R}{4}(2j \pm (R-1)^2).$$

整数 $2j \pm (R-1)^2$ 是奇数，因此由 (2.4) 得 $s - t \in \mathcal{Z}(\widehat{\mu_{1/R}})$。至此，证明完成。□

由定理 2.1，只需证明 $Q_R \equiv 1$，其中

$$Q_R(t) := \sum_{s \in S_R} |\widehat{\mu_{1/R}}(t+s)|^2. \tag{3.3}$$

由于 S_R 由引理 3.2 可知是正交归一的，定理 2.1(1) 给出

$$0 \leq Q_R(t) \leq 1 \qquad (t \in \mathbb{R}). \tag{3.4}$$

由引理 3.1， 0， $-q_R \in S_R$。因此，在 $t = 0$ 处，求和项 $s = 0$；在$t = q_R$ 处，求和项 $s = -q_R$，贡献

$$|\widehat{\mu_{1/R}}(0)|^2 = 1.$$

由于所有求和项均为非负数且 $Q_R \leq 1$，这就必然意味着

$$Q_R(0) = Q_R(q_R) = 1. \tag{3.5}$$

关键要素是关于 Q_R 的自相似恒等式。将递推关系 (3.1) 代入 (3.3)，并应用掩码关系 (2.2)，我们得到

$$Q_R(t) = \cos^2\Big(\frac{2\pi t}{R}\Big)Q_R\Big(\frac{t}{R}\Big) + \sin^2\Big(\frac{2\pi t}{R}\Big)Q_R\Big(\frac{t+\ell_R}{R}\Big). \tag{3.6}$$

事实上，对于 $s = Rs'$，我们有

$$\widehat{\mu_{1/R}}(t + Rs') = m(t/R + s')\widehat{\mu_{1/R}}(t/R + s').$$

由于 $|m|^2 = \cos^2(2\pi\,\cdot)$ 是 1 2-周期的，且 $S_R \subset \frac{1}{2}\mathbb{Z}$，因此得到

$$|m(t/R + s')|^2 = \cos^2\Big(\frac{2\pi t}{R}\Big).$$

对于 $s = Rs' + \ell_R$，m 的自变量为 $t/R + s' + \ell_R/R$。由于

$$\frac{\ell_R}{R} = \frac{(R-1)^2}{4} \in \mathbb{Z} + \frac{1}{4}$$

（因为 R 是偶函数）且 $S_R \subset \frac{1}{2}\mathbb{Z}$，这使 $\cos^2$ 变为 $\sin^2$，，而 $\widehat{\mu_{1/R}}$ 在 $t + \ell_R)/R + s'$ 处取值。对 $s' \in S_R$ 求和可得 (3.6)。

记

$$\sigma_0(t) = \frac{t}{R}, \qquad \sigma_1(t) = \frac{t+\ell_R}{R}, \qquad w_0(t) = \cos^2\Big(\frac{2\pi t}{R}\Big), \qquad w_1(t) = \sin^2\Big(\frac{2\pi t}{R}\Big). \tag{3.7}$$

于是 $w_0,\ w_1 \geq 0$ 且 $w_0 + w_1 = 1$。因此，从 1 中减去 (3.6)，非负函数 $1 - Q_R$ 满足相同的凸性恒等式：

$$1 - Q_R(t) = w_0(t)(1 - Q_R(\sigma_0(t))) + w_1(t)(1 - Q_R(\sigma_1(t))). \tag{3.8}$$

命题 3.3。对于每个偶数 $R \geq 2$，$Q_R(t) = 1$ 对所有 $t \in \mathbb{R}$成立；因此 S_R是 $\mu_{1/R}$的一个谱。

证明。我们证明 $Q_R \equiv 1$。由于 S_R 是正交的，定理 2.1(3)表明，Q_R，从而 $1 - Q_R$，具有整解析延拓；特别地，$1 - Q_R$ 是连续的。

置 $I_R = [0, q_R]$。(3.7) 中的两个映射都保持 I_R：

$$\sigma_0(I_R) = \Big[0, \frac{q_R}{R}\Big] \subset I_R, \qquad \sigma_1(0) = \frac{\ell_R}{R} \in [0, q_R], \qquad \sigma_1(q_R) = q_R,$$

其中 $\sigma_1(q_R) = q_R$ 使用了 $\ell_R = (R-1)q_R$。

Let

$$M_* = \max_{t \in I_R}(1 - Q_R(t)),$$

并设 $M_* > 0$。选择 $t_0 \in I_R$ 使得

$$1 - Q_R(t_0) = M_*.$$

由 (3.5)，$Q_R(0) = Q_R(q_R) = 1$，因此 $t_0 \in (0, q_R)$。

情形 *1*：$w_0(t_0) > 0$。由 (3.8)，

$$1 - Q_R(t_0) = w_0(t_0)(1 - Q_R(\sigma_0(t_0))) + w_1(t_0)(1 - Q_R(\sigma_1(t_0))).$$

左边等于 M_*，而括号中的两项都至多为M_*。由于 $w_0(t_0) > 0$，因此必有

$$1 - Q_R(\sigma_0(t_0)) = M_*,$$

即 $1-Q_R(t_0/R)=M_*$。现在

$$0<\frac{t_0}{R}<\frac{q_R}{R}=\frac{R-1}{4}<\frac{R}{4},$$

且 $R/4$ 是 w_0的最小正零点，因此对每个 $n\ge 1$，$w_0(t_0/R^n)>0$。重复相同的论证可得

$$1-Q_R(t_0/R^n)=M_* \qquad (n\ge 1).$$

令 $n\to\infty$，并利用在 0 处的连续性，我们得到

$$1-Q_R(0)=M_*>0,$$

这与 $Q_R(0)=1$ 矛盾。

情形 *2*：$w_0(t_0)=0$。那么 $w_1(t_0)=1$ 并且

$$t_0=\frac{R}{4}j, \qquad j \text{ odd}, \quad 1\le j\le R-3 \tag{3.9}$$

（当 $R=2$ 时，此范围为空）。恒等式 (3.8) 强制

$$1-Q_R(\sigma_1(t_0))=M_*,$$

and

$$\sigma_1(t_0)=\frac{j+(R-1)^2}{4}. \tag{3.10}$$

我们断言 $w_0(\sigma_1(t_0))>0$。如果 $w_0(\sigma_1(t_0))=0$，那么对于某个奇整数 j'，有 $\sigma_1(t_0)=Rj'/4$，因此

$$j+(R-1)^2=Rj'.$$

模 R 化简得到 $j+1\equiv 0$ (模 R)，这是不可能的，因为 $2\le j+1\le R-2$。因此 $w_0(\sigma_1(t_0))>0$，而将情形 1 应用于 $\sigma_1(t_0)\in I_R$ 会得到矛盾。

两种情形都不可能，因此 $M_*=0$，从而

$$Q_R(t)=1 \qquad (t\in I_R). \tag{3.11}$$

因此，整个函数 $1-Q_R$ 在区间 I_R 上恒为零。根据恒等定理，$1-Q_R\equiv 0$ 在 $\mathbb{R}$ 上成立，即 $Q_R\equiv 1$。定理 2.1 随后表明，S_R 是 $\mu_{1/R}$ 的一个谱。□

注 3.4（为何参数 ℓ_R 并非任意）。 这三个恒等式

$$\ell_R=(R-1)q_R, \qquad \ell_R/R\in\mathbb{Z}+\tfrac14, \qquad S_R\subset D_R\mathbb{Z}$$

它们发挥三种不同的作用：给出精确的双分支递归、互补掩码权重，以及一个与反射相容的格点集。若不加这些限制，直接取自 Dai 定理的典范一维谱，将无法证明下一节的平面断言。

现在我们证明定理 1.2 的第二个断言。回顾一下，

$$T_R=S_R\cup\left(S_R+\frac{R-1}{4}\right), \qquad \Lambda_R=\{(t,-t):t\in T_R\}.$$

我们计算 Λ_R 的 Jorgensen–Pedersen 谱函数，并证明它处处等于 1；根据定理 2.1，这证明 Λ_R 是 $\mu^{1/R}$ 的一个谱。

由于

$$\widehat{\mu^{1/R}}(\xi,\eta)=\tfrac12\big(\widehat{\mu_{1/R}}(\xi)+\widehat{\mu_{1/R}}(\eta)\big), \tag{3.12}$$

我们有

$$Q_{\Lambda_R}^{\mu^{1/R}}(\xi,\eta)=\frac{1}{4}\sum_{t\in T_R}\left|\widehat{\mu_{1/R}}(\xi+t)+\widehat{\mu_{1/R}}(\eta-t)\right|^2. \tag{3.13}$$

根据命题 3.3， $Q_R\equiv 1$。因此，这两个投影和为

$$\sum_{t\in T_R}\left|\widehat{\mu_{1/R}}(\xi+t)\right|^2=Q_R(\xi)+Q_R\left(\xi+\frac{R-1}{4}\right)=2, \tag{3.14}$$

类似地

$$\sum_{t\in T_R}\left|\widehat{\mu_{1/R}}(\eta-t)\right|^2=2. \tag{3.15}$$

接下来，我们要证明交叉项相互抵消。先记录这一计算所依据的帕塞瓦尔恒等式。由于 $\{e_s : s\in S_R\}$ 是 $L^2(\mu_{1/R})$ 的正交归一基，对任意 $\xi,\eta\in\mathbb{R}$,

$$\sum_{s\in S_R}\widehat{\mu_{1/R}}(\xi+s)\,\widehat{\mu_{1/R}}(\eta-s)=\widehat{\mu_{1/R}}(\xi+\eta). \tag{3.16}$$

事实上， $\widehat{\mu_{1/R}}(\xi+s)=\langle e_{-\xi},e_s\rangle$ 且 $\widehat{\mu_{1/R}}(\eta-s)=\langle e_s,e_\eta\rangle$，因此由帕塞瓦尔等式

$$\sum_{s\in S_R}\widehat{\mu_{1/R}}(\xi+s)\,\widehat{\mu_{1/R}}(\eta-s)=\sum_{s\in S_R}\langle e_{-\xi},e_s\rangle\langle e_s,e_\eta\rangle=\langle e_{-\xi},e_\eta\rangle=\widehat{\mu_{1/R}}(\xi+\eta).$$

接下来，写作

$$\Phi(u)=\prod_{n=1}^{\infty}\cos\Big(\frac{2\pi u}{R^n}\Big),$$

因此， Φ为实偶函数，并且由（2.3）可得,

$$\widehat{\mu_{1/R}}(u)=e^{-2\pi iu/(R-1)}\Phi(u). \tag{3.17}$$

我们还利用了 $S_R\subset\frac{R-1}{2}\mathbb{Z}$。事实上， $\ell_R=\frac{R-1}{2}\cdot\frac{R}{(R-1)\,2}$ 以及 $q_R=\frac{R-1}{2}\cdot\frac{R}{2}$，其中 $\frac{R}{(R-1)\,2}$， $\frac{R}{2}\in\mathbb{Z}$ 因为 R 是偶函数；因此， $S_R=\ell_R\Gamma_R\cup(-q_R-\ell_R\Gamma_R)\subset\frac{R-1}{2}\mathbb{Z}$。

定义

$$K_0(\xi,\eta)=\sum_{s\in S_R}\widehat{\mu_{1/R}}(\xi+s)\overline{\widehat{\mu_{1/R}}(\eta-s)}. \tag{3.18}$$

由柯西–施瓦茨不等式和Parseval等式，该级数绝对收敛:

$$\sum_{s\in S_R}\left|\widehat{\mu_{1/R}}(\xi+s)\widehat{\mu_{1/R}}(\eta-s)\right|\le 1.$$

由（3.17），由于 Φ 为实函数且当 $s\in\frac{R-1}{2}\mathbb{Z}$时 $e^{-4\pi is/(R-1)}=1$，我们得到

$$K_0(\xi,\eta)=e^{-2\pi i(\xi-\eta)/(R-1)}\sum_{s\in S_R}\Phi(\xi+s)\,\Phi(\eta-s).$$

将（3.17）代入（3.16）并约去公共相位因子$e^{-2\pi i(\xi+\eta)/(R-1)}$，得到

$$\sum_{s\in S_R}\Phi(\xi+s)\,\Phi(\eta-s)=\Phi(\xi+\eta).$$

因此

$$K_0(\xi,\eta)=e^{-2\pi i(\xi-\eta)/(R-1)}\Phi(\xi+\eta)=e^{4\pi i\eta/(R-1)}\widehat{\mu_{1/R}}(\xi+\eta). \tag{3.19}$$

平移后的分支给出

$$\begin{aligned} K_1(\xi,\eta) &= \sum_{s\in S_R} \widehat{\mu_{1/R}}\left(\xi+s+\frac{R-1}{4}\right)\overline{\widehat{\mu_{1/R}}\left(\eta-s-\frac{R-1}{4}\right)} \\ &= K_0\left(\xi+\frac{R-1}{4},\eta-\frac{R-1}{4}\right) \\ &= e^{4\pi i(\eta-(R-1)/4)/(R-1)}\widehat{\mu_{1/R}}(\xi+\eta) = -K_0(\xi,\eta), \end{aligned} \tag{3.20}$$

因为

$$e^{-4\pi i(R-1)/(4(R-1))} = e^{-\pi i} = -1.$$

因此，交叉项恰好抵消：

$$\sum_{t\in T_R} \widehat{\mu_{1/R}}(\xi+t)\overline{\widehat{\mu_{1/R}}(\eta-t)} = K_0(\xi,\eta)+K_1(\xi,\eta) = 0. \tag{3.21}$$

结合 (3.13)、(3.14)、(3.15) 和 (3.21) 得到

$$Q^{\mu^{1/R}}_{\Lambda_R}(\xi,\eta) = \frac{1}{4}\left(2+2+2\,\mathrm{Re}\,0\right) = 1 \qquad ((\xi,\eta)\in\mathbb{R}^2). \tag{3.22}$$

根据定理 2.1， Λ_R 是 $\mu^{1/R}$的一个谱。这就证明了定理 1.2。

4. 定理1.4的证明

本节证明定理1.4，即加性测度$\mu_{1/2,\ 1/4}$ 不是谱的。两个分量具有不同的解析类型：$\mu_{1/2}$ 是定义在 $[0,2]$, 上的归一化勒贝格测度，而 $\mu_{1/4}$ 是奇异连续的。关键的是，下面的论证不对假设的谱 Λ的几何施加任何限制；特别是，它从不假设 Λ位于一条直线上或分裂成有限条分支。

我们使用傅里叶恒等式

$$\widehat{\mu_{1/2}}(a) = e^{-2\pi i a}\frac{\sin(2\pi a)}{2\pi a}, \tag{4.1}$$

$$\widehat{\mu_{1/4}}(b) = \prod_{j=1}^{\infty} e^{-2\pi i b/4^j}\cos(2\pi b/4^j). \tag{4.2}$$

在 $a=0$ 处的商约定为 1。和之前一样，加性测度的傅里叶变换为

$$\widehat{\mu_{1/2,1/4}}(\xi,\eta) = \tfrac{1}{2}\left(\widehat{\mu_{1/2}}(\xi)+\widehat{\mu_{1/4}}(\eta)\right). \tag{4.3}$$

我们的主要解析工具是对 $\widehat{\mu_{1/4}}$的值域中位于闭左半平面部分的一个尖锐界。其证明是自洽的，不依赖数值证据，也不依赖对频率集的任何分类。

命题 4.1。对每个 $b\in\mathbb{R}$,

$$\mathrm{Re}\,\widehat{\mu_{1/4}}(b)\le 0 \quad\Longrightarrow\quad \left|\widehat{\mu_{1/4}}(b)\right| < \frac{2}{\pi}. \tag{4.4}$$

为证明命题 4.1，我们需要以下两个初等引理。

引理 4.2。 对于每个 $j \geq 1$，选取一个整数 N_j，使得

$$r_j = \frac{2b}{4^j} - N_j \in \left[-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right].$$

于是，对所有充分大的 j，都有 $N_j = 0$，并且

$$\widehat{\mu_{1/4}}(b) = e^{-\pi i \sum_{j\geq 1} r_j} \prod_{j\geq 1} \cos(\pi r_j). \tag{4.5}$$

该级数绝对收敛。此外，

$$k_j := 4r_{j+1} - r_j = N_j - 4N_{j+1} \in \mathbb{Z}, \tag{4.6}$$

且仅有有限多个 k_j 非零。

证明。 由于 $2b/4^j \to 0$，其最近整数最终为零。对于任意整数N，

$$e^{-\pi i(N+r)} \cos(\pi(N+r)) = e^{-\pi i r} \cos(\pi r).$$

将此应用于 (4.2) 的每个因子，便得到 (4.5)。最终 $r_j = 2b/4^j$，因此尾项构成几何级数，所有所述极限和恒等式均随之成立。在最近整数平局处，有一个因子为零；这样的点不可能满足 $|\widehat{\mu_{1/4}}(b)| \geq 2/\pi$。□

引理 4.3。 若 $|\widehat{\mu_{1/4}}(b)| \geq 2/\pi$，则对每个 j 都有 $|r_j| < 1/3$，且序列(k_j)要么恒为零，要么恰有一项非零，该项为 $+1$ 或 -1。

证明。 非负乘积 (4.5) 中的每个因子都不大于一。因此

$$\cos(\pi r_j) \geq |\widehat{\mu_{1/4}}(b)| \geq 2/\pi > 1/2,$$

由此得到 $|r_j| < 1/3$。因此 $|k_j| < 5/3$，所以 $k_j \in \{-1, 0, 1\}$。

对于 $|u| < \pi/2$，不等式 $\log\cos u \leq -u^2/2$ 可通过在 $[0, |u|]$ 上对 $\tan u \geq u$ 积分得到。因此

$$|\widehat{\mu_{1/4}}(b)| \leq \exp\left(-\frac{\pi^2}{2} \sum_{j\geq 1} r_j^2\right). \tag{4.7}$$

假设有两个非零进位，其指标为 $j < \ell$。若 $\ell \geq j+2$，由柯西–施瓦茨不等式可得

$$1 = (4r_{j+1} - r_j)^2 \leq 17(r_j^2 + r_{j+1}^2),$$

对 ℓ 也有同样的估计，其中涉及互不相交的变量。因此 $\sum r_i^2 \geq 2/17$。

若 $\ell = j+1$，则令 $v = (r_j, r_{j+1}, r_{j+2})^T$ 且

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

$AA^T = \begin{pmatrix} 17 & -4 \\ -4 & 17 \end{pmatrix}$ 的特征值为 13 和 21。由于 $Av = (k_j, k_{j+1})^T$的范数平方为二，

$$2 \leq 21\|v\|^2, \qquad \sum_{i\geq 1} r_i^2 \geq \frac{2}{21}.$$

在这两种情况下，(4.7) 得出

$$|\widehat{\mu_{1/4}}(b)| \le e^{-\pi^2/21} < 2/\pi, \tag{4.8}$$

矛盾。最后一个严格不等式是初等的，并不依赖于小数计算： $\pi^2 > 49/5$ 且 $\pi < 22/7$ 蕴含

$$e^{\pi^2/21} > 1 + \frac{7}{15} + \frac{1}{2}\left(\frac{7}{15}\right)^2 = \frac{709}{450} > \frac{11}{7} > \frac{\pi}{2}.$$

因此至多有一个非零进位。 □

命题 *4.1* 的证明。 反设

$$\operatorname{Re}\widehat{\mu_{1/4}}(b) \le 0 \quad \text{and} \quad |\widehat{\mu_{1/4}}(b)| \ge \frac{2}{\pi}.$$

根据引理 4.3，令 $r = r_1$。

没有非零进位。在这种情况下 $r_j = r/4^{j-1}$，因此

$$\sum_{j\ge1} r_j = \frac{4r}{3} \in \left(-\frac{4}{9}, \frac{4}{9}\right).$$

由于 (4.5) 中的余弦乘积严格为正， $\widehat{\mu_{1/4}}(b)$ 的实部为正，矛盾。

一个非零进位。将 b 替换为 $-b$ 会对 $\widehat{\mu_{1/4}}(b)$ 取共轭，并改变所有剩余符号。因此，我们可以假设在某个$m \ge 1$处，进位为 $k_m = 1$ 。递推关系 (4.6) 给出

$$\begin{aligned} r_j &= r/4^{j-1} && (1 \le j \le m), \\ r_{m+1} &= \tfrac{1}{4} + r/4^m, && \\ r_{m+1+q} &= 4^{-q} r_{m+1} && (q \ge 0). \end{aligned} \tag{4.9}$$

求和得,

$$\sum_{j\ge1} r_j = \frac{4r+1}{3} \in \left(-\frac{1}{9}, \frac{7}{9}\right).$$

在此区间上，$\cos(\pi s) \le 0$ 意味着 $s \ge 1/2$。因此，$\operatorname{Re}\widehat{\mu_{1/4}}(b) \le 0$ 迫使

$$r \ge \tfrac{1}{8}. \tag{4.10}$$

定义正乘积

$$C(x) = \prod_{q=0}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi x}{4^q}\right) \qquad \left(0 \le x < \frac{1}{2}\right). \tag{4.11}$$

它在此区间上单调不增。令 $h = r/4^m > 0$。由 (4.9),

$$|\widehat{\mu_{1/4}}(b)| = \frac{C(r)}{C(h)} C\left(\tfrac{1}{4} + h\right). \tag{4.12}$$

这里有 $r < 1/3$、 $m \ge 1$，因此 $0 < h < 1/12$。对于每个 $q \ge 0$，下面的两个角及其和都小于 $\pi/2$，并且

$$\cos\left(\frac{\pi}{4^{q+1}} + \frac{\pi h}{4^q}\right) < \cos\left(\frac{\pi}{4^{q+1}}\right)\cos\left(\frac{\pi h}{4^q}\right).$$

相乘得到

$$C\left(\tfrac{1}{4} + h\right) < C\left(\tfrac{1}{4}\right) C(h). \tag{4.13}$$

对于无穷乘积，严格不等式仍然成立：首项之比严格小于一，后续各项之比均不大于一；这三个乘积都为正。方程（4.10）–（4.13）推出

$$|\widehat{\mu_{1/4}}(b)| < C(r)C\left(\tfrac{1}{4}\right) \le C\left(\tfrac{1}{8}\right)C\left(\tfrac{1}{4}\right).$$

最后，将这两个乘积交错排列，并反复使用角度加倍，

$$C\left(\tfrac{1}{8}\right)C\left(\tfrac{1}{4}\right) = \prod_{n=2}^{\infty}\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \frac{\sin(\pi/2)}{\pi/2} = \frac{2}{\pi}. \tag{4.14}$$

这与假设的下界矛盾，从而证明了该命题。 □

注 4.4（该常数作为上确界是最佳的）。令 $b_M = 2\cdot 4^M + 1/4$满足 $M \ge 0$。其余数具有 $r_1 = 1/8$，且在 $m = M+1$ 处有一次进位。因此 $\widehat{\mu_{1/4}}(b_M)$ 是负的虚数，而当 $h_M = 1/(8\cdot 4^{M+1})$ 时，

$$|\widehat{\mu_{1/4}}(b_M)| = \frac{C(1/8)}{C(h_M)}C(1/4+h_M) < \frac{2}{\pi}, \qquad |\widehat{\mu_{1/4}}(b_M)| \to \frac{2}{\pi}.$$

因此，每个有限频率处的严格界都是必不可少的；若将该常数替换为一个一致更小的常数，结论便不成立。

命题4.1的一个直接推论是，$\mu_{1/2,1/4}$ 的傅里叶变换存在一个无零点垂直带。

推论4.5。对所有 $a,\ b \in \mathbb{R}$,

$$|a| \le \tfrac{1}{4} \quad\Longrightarrow\quad \widehat{\mu_{1/2}}(a) + \widehat{\mu_{1/4}}(b) \ne 0. \tag{4.15}$$

因此，任意关于$\mu_{1/2,\ 1/4}$ 的正交指数集都满足

$$|a-a'| > \tfrac{1}{4} \quad \textit{for distinct } (a,b),(a',b') \in \Lambda. \tag{4.16}$$

证明。对于 $|a| \le 1/4$，公式（4.1）表明

$$\operatorname{Re}\widehat{\mu_{1/2}}(a) \ge 0, \qquad |\widehat{\mu_{1/2}}(a)| \ge \frac{2}{\pi}.$$

例如，后一个不等式可由 $[0,\pi/2]$上的弦线下界 $\sin u \ge 2u/\pi$得到。如果 $\widehat{\mu_{1/4}}(b) = -\widehat{\mu_{1/2}}(a)$，则其实部非正，且其模至少为 $2/\pi$，这与命题 4.1矛盾。将其应用于两个正交频率之差，并使用（4.3），即可得到（4.16）。特别地，水平投影是单射的。□

我们还需要以下关于区间上紧框架的初等装填引理。

引理 4.6。设 $\mu_L = L^{-1}\mathbf{1}_{[0,L]}\mathrm{d}x$，其中 $L>0$。假设频率属于 $A \subset \mathbb{R}$ 的指数函数构成关于 $L^2(\mu_L)$、框架界为 $c>0$ 的紧框架，且每个指数函数的范数均为 *1*。若 A 中的不同点之间的间距至少为 $\delta = 1/(cL)$，则对于某个 $a_0 \in \mathbb{R}$，有 $A = a_0 + \delta\mathbb{Z}$。

证明。令 $K(t) = |\widehat{\mu_L}(t)|^2$。将紧框架恒等式应用于一个指数函数，得到

$$\sum_{a\in A} K(t-a) = c \qquad (t \in \mathbb{R}). \tag{4.17}$$

sinc公式或Plancherel定理给出 $\int_{\mathbb{R}} K(t)\mathrm{d}t = 1/L$。此外，$K \geq 0$ 和 $K > 0$ ，但离散集上的点除外。

设 $I = [-\delta/2, \delta/2]$ 和 $h = \sum_{a\in A} \mathbf{1}_{a+I}$。间距假设意味着 $0 \leq h \leq 1$ 几乎处处成立。由 Tonelli定理 和（4.17）可知，对于每个 t,

$$(h * K)(t) = \int_I \sum_{a\in A} K(t-u-a)\,\mathrm{d}u = c\delta = \frac{1}{L} = (1*K)(t).$$

因此（$1-h$）$* K = 0$。两个因子均非负，且 K 几乎处处为正。在任意一个 t 处计算该卷积，便可推出 $1-h=0$ 几乎处处成立。

由此可知，以 A 为中心、长度为 δ 的区间几乎处处覆盖整条直线，且内部互不相交。一致间距使得 A 局部有限；覆盖性则迫使其在两个方向上均无界。相邻中心之间的距离必恰好为 δ，因为更大的间隙会留下一个未被覆盖的开区间。因此， A 就是所声称的格点集。□

定理*1.4*的证明。 假设 Λ 是 $\mu_{1/2,1/4}$ 的谱。由于两个分量在零点均无原子，两个坐标轴的交集是一个 $\mu_{1/2,1/4}$-零测集，而函数 $h \in L^2(\mu_{1/2,1/4})$ 可由其在两条坐标轴上的限制$f = h(\cdot,0) \in L^2(\mu_{1/2})$ 和 $g = h(0,\cdot) \in L^2(\mu_{1/4})$ 以及范数确定,

$$\|h\|^2_{L^2(\mu_{1/2,1/4})} = \tfrac{1}{2}\|f\|^2_{L^2(\mu_{1/2})} + \tfrac{1}{2}\|g\|^2_{L^2(\mu_{1/4})}.$$

对于 $f \in L^2(\mu_{1/2})$，将 Parseval等式 应用于 $(f,\ 0)$ 可得

$$\frac{1}{2}\|f\|^2_{L^2(\mu_{1/2})} = \sum_{(a,b)\in\Lambda} \left|\frac{1}{2}\langle f, e_a\rangle_{L^2(\mu_{1/2})}\right|^2.$$

由推论4.5，水平投影是单射。因此 $A = \{a : (a,\ b) \in \Lambda\}$ 是一个不含重数的集合，并满足

$$\sum_{a\in A} \left|\langle f, e_a\rangle_{L^2(\mu_{1/2})}\right|^2 = 2\|f\|^2_{L^2(\mu_{1/2})}. \tag{4.18}$$

它是在长度为 $L = 2$ 的区间上的界为 $c = 2$ 的紧框架。推论4.5给出了大于 $1/4$ 的严格两两分离。但引理 4.6 配合 $\delta = 1/(cL) = 1/4$，迫使 $A = a_0 + \frac{1}{4}\mathbb{Z}$ 包含距离恰好为 $1/4$ 的点对。这就是所需的矛盾。□

5. 奇偶二分

现在我们将偶基构造与外部 障碍结合起来，以证明推论 1.3 中所宣布的奇偶二分。偶基部分是定理 1.2；奇基部分则依赖于近期的一项结果，即奇基 Cantor测度不允许存在指数傅里叶框架 [16, 29]。这一依赖关系是明确的，本文不重新证明奇基情形的不存在性定理。

回想引言中的内容，根据 Lai–Liu–Prince [37], ，加性测度的傅里叶框架投影到其各分量上后仍是傅里叶框架。下一个引理给出了我们所用的对称且自成一体的加强版：对于一个谱，各投影还具有单射性，且投影后的族恰好是 2-紧的。

引理 5.1。 设 μ 是 $\mathbb{R}$ 上的一个连续的博雷尔概率测度，满足$0 \in$ 支撑μ，并设

$$\frac{1}{2}(\mu \times \delta_0 + \delta_0 \times \mu)$$

为相应的加性测度。若它具有谱 $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$，则 Λ 的两个坐标投影都是单射，并且每个投影指数族都是 $L^2(\mu)$ 的一个精确 2-紧傅里叶框架。

证明。 若不同的 (a,b),$(a,d) \in \Lambda$ 具有相同的第一坐标，则正交性给出

$$\widehat{\mu}(d-b) = -1$$

（共轭情形不影响结论）。但是当 $0 \in \operatorname{supp}\mu$ 时， $\widehat{\mu}(u) = -1$ 不可能成立：模为 1 的量 $e^{-2\pi iux}$ 的平均值只有在这些量 -1 μ-几乎处处取相同值时才可能等于 -1，而连续性随后迫使它们在每个支撑点都取相同的值，包括 $x = 0$，在那里该值为 1。因此，第一个投影是单射的；对第二个投影也可应用同样的论证。

对于 $f \in L^2(\mu)$，在 $L^2\big(\frac{1}{2}(\mu \times \delta_0 + \delta_0 \times \mu)\big) \cong L^2(\mu) \oplus L^2(\mu)$ 中对向量 $(f,0)$ 应用 Parseval 等式。由于加性测度在每条坐标轴上的权重为 $\frac{1}{2}$，

$$\big\langle (f,0), e_{(a,b)} \big\rangle = \tfrac{1}{2}\langle f, e_a\rangle_{L^2(\mu)},$$

由 Parseval等式可得

$$\|f\|^2 = \frac{1}{2}\sum_{(a,b)\in\Lambda} \big|\langle f, e_a\rangle_{L^2(\mu)}\big|^2.$$

单射性使右侧变为对第一坐标投影的无权求和。这是一个精确 2-紧傅里叶框架。第二坐标的论证完全相同。□

推论 5.2. 对于具有整数 $R \geq 2$ 的测度 (1.3)，

$$\mu^{1/R} \textit{ is spectral} \quad \Longleftrightarrow \quad R \textit{ is even.} \tag{5.1}$$

证明。 若 R 为偶数，则应用定理 1.2。若 $R \geq 3$ 为奇数，则 [16] 中的无傅里叶框架定理适用于 $\mu_{1/R}$；对两个等权重数字进行缩放不会改变傅里叶框架的存在性。根据引理 5.1， $\mu^{1/R}$ 的谱会给出 $\mu_{1/R}$ 的一个傅里叶框架，这与该定理矛盾。□

推论 5.3. 设 R、$S \geq 2$ 为整数。若 R、S 中至少一个为奇数，则$\mu_{1/R,\ 1/S}$ 不是谱的。

证明。 假设 $\mu_{1/R,\ 1/S}$ 有一个谱 Λ。与引理 5.1 中相同的论证表明， Λ 的每个坐标投影都是单射：若两个频率具有相同的第一（分别为第二）坐标，正交性将迫使

$$\widehat{\mu_{1/S}}(t) = -1 \qquad (\text{respectively } \widehat{\mu_{1/R}}(t) = -1),$$

这是不可能的，因为 0 属于两个分量测度的支撑。对支撑在一条坐标轴上的函数应用 Parseval等式，其投影视集对于该分量构成一个框架界为 2 的紧傅里叶框架。对于任意奇数底数，这与 [16]的无傅里叶框架定理相矛盾。□

注 5.4。 Dai的刻画仅凭其对一维谱性 的描述，并不能推出（5.1）的奇数底数部分：不存在正交归一指数基，比不存在傅里叶框架的限制更弱。正是后者使投影论证具有决定性。

6. 总结性说明

6.1. 例子与开放问题。

例 6.1. 在定理 *1.2* 中取 $k = 2$ ，我们得到标准四分之一康托测度 $\mu_{1/4}$ 的谱为

$$S_4 = 9\Gamma_4 \cup (-3 - 9\Gamma_4),$$

其中 $\Gamma_4 = \left\{ \sum_{j=0}^{m-1} \varepsilon_j 4^j : \quad m \geq 1, \quad \varepsilon_j \in \{0, 1\} \right\}$，而平面测度 $\mu^{1/4}$的谱为

$$\Lambda_4 = \{(t, -t) : t \in S_4 \cup (S_4 + 3/4)\}.$$

全文中我们使用的是由数字集 {0，2}生成的非中心化伯努利卷积（1.3）。在 [10],伯努利卷积的中心化约定下，它是由迭代函数系统$\{x \mapsto r(x-1) \quad x \mapsto r(x+1)\}$ 生成的、具有等权重的自相似测度。用平移 $x \mapsto x + \frac{r}{1-r}$ 对该迭代函数系统进行共轭，得到 (1.1) 的迭代函数系统 $\{x \mapsto rx, \quad x \mapsto r(x+2)\}$；因此，经过整体缩放后， μ_r 是中心化伯努利卷积的一个平移。平移对一维谱性不可见——如果 $\tau_t\sigma$ 表示概率测度 σ 在 $\mathbb{R}^d$ 上的平移 t，那么 $\widehat{\tau_t\sigma}(\xi) = e^{-2\pi i\langle t,\ \xi\rangle}\hat{\sigma}(\xi)$，因此傅里叶变换的零点集和 Jorgensen–Pedersen 谱函数（2.6）均保持不变，并且 Λ是 σ 的谱，当且仅当它是 $\tau_t\sigma$的谱。因此，我们的一维结论与 Dai 的中心化设定相一致。

然而，对于加法模型（1.3），平移并非不可见。对整个平面测度进行共同平移会使两条坐标轴一起移动，这仍然没有影响；但分别将两个分量居中并不是对加性测度进行一次单独的平移，而是对两条坐标轴进行真正的相对形变。这种相对平移正是引言中Lebesgue型族的控制参数，其谱性显著取决于 t_1、 t_2 [37]。因此，自然要问，对于哪些 t_1、 t_2 平移的加性测度

$$\tfrac{1}{2}\big((\tau_{t_1}\mu_r) \times \delta_0 + \delta_0 \times (\tau_{t_2}\mu_s)\big)$$

是谱的。我们的结果仅涉及未居中的情形 $t_1 = t_2 = 0$；Bernoulli型分量的谱性对平移的依赖关系仍然是一个开放问题。

定理1.4给出了一个具有两个不同偶数基数的无条件非谱例子。一维康托测度的非标准谱也已在 [20, 23] 中得到研究。这并不意味着所有$\mu_{1/(2k_1)}$ $_{1/\ (2k_2)}$ 且满足 $k_1 \neq k_2$ 的对象都是非谱的。两个不同奇异分量的算术结构和酉拼接结构还需要进一步研究。

这里讨论的 Bernoulli卷积属于一大类自相似谱测度中的二位数情形：这类测度由 Hadamard

三元组生成。设 $q \geq 2$ 是一个整数，设 D，$C \subset \mathbb{Z}$ 是有限集，且 $\#D = \#C$。若矩阵

$$\frac{1}{\sqrt{\#D}}\big(e^{2\pi idc/q}\big)_{d\in D,\, c\in C}$$

若为酉矩阵，则 $(q,\ D,\ C)$ 称为 ***Hadamard*** 三元组。对于这样的三元组，由映射 $x \mapsto q^{-1}(x+d)$、$d \in D$ 生成的自相似测度 $\mu_{q,\ D}$ 在等权重下是谱的 [36]。令 $r \in \mathbb{R}$。容易证明

$$\Lambda \text{ is a spectrum of } \mu_{q,D} \text{ if and only if } r\Lambda \text{ is a spectrum of } \mu_{q,r^{-1}D}. \quad (6.1)$$

我们的分量测度 $\mu_{1/R} = \mu_{R,\ \{0,2\}}$ 由 $\mu_{R,\ \{0,1\}}$ 经伸缩 $x \mapsto 2x$得到，因此它是上述整数 Hadamard 三元组模型 $(R,\ \{0,\ 1\},\ \{0,\ R/2\})$ 的缩放。

自然会问，对于哪些 Hadamard 三元组 $(q_1,\ D_1,\ C_1)$ 和 $(q_2,\ D_2,\ C_2)$，加性测度

$$\tfrac{1}{2}\big(\mu_{q_1,D_1} \times \delta_0 + \delta_0 \times \mu_{q_2,D_2}\big)$$

是谱的。我们的结果通过奇偶二分解决了对称双数字情形 $(q_1 = q_2 = R,\ D_1 = D_2 = \{0,\ 2\})$，并给出了压缩比 $1/q_1 \neq 1/q_2$ 不相等时的非谱例子 $\mu_{1/2,\ 1/4}$。包括情形 $D_1 \neq D_2$、$\#D_1 = \#D_2 > 2$ 和高维在内的一般问题仍未解决。

6.2. 未来方向。 本文的结果为加法模型 (1.3) 的谱理论打开了一扇窗。对于 Cantor 型谱测度，围绕引言中提到的三个主题，已经构建出相当完整的结构图景：谱特征矩阵问题（一维情形下的谱特征值问题）、谱的 Beurling 维数分布，以及相关傅里叶级数的收敛性。对于加法测度 $\mu_{r,s}$，此前甚至无法提出这些问题，因为底层平面测度是否具有谱性尚不明确。如今，定理 1.2 和推论 1.3 恰好补上了这一缺失的起点，从而使以下问题得以明确提出。

(i) 谱特征值问题。给定 $\mu_{r,s}$ 的一个谱 Λ，刻画使膨胀后的集合 $A\Lambda$ 也是 $\mu_{r,s}$ 的一个谱的矩阵 $A \in M_2(\mathbb{R})$ 的集合。这个问题完全悬而未决；首先需要解决的情形是定理 1.2 中 $\mu^{1/R}$ 的显式谱 Λ_R。

(ii) 谱的 Beurling 维数分布。回顾一下，对于可数集 $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$，$\Lambda$ 的上 ***Beurling*** 维数（或简称***Beurling*** 维数）定义为

$$\dim_{\mathrm{Be}}(\Lambda) = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log N_\Lambda(r)}{\log r},$$

其中 $N_\Lambda(r) := \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \#\big(\Lambda \cap B(x,r)\big)$

对于 $\mu^{1/4}$ 的显式谱 Λ_4，直接计数可得 $\dim_{\mathrm{Be}}(\Lambda_4) = \frac{1}{2}$，这与 $\mu^{1/4}$ 的熵维数一致。根据 [45],中的定理 1.2，谱测度的任意谱的 Beurling 维数都不超过该测度的熵维数；因此，Λ_4 已经达到了可能的最大 Beurling 维数。这使人们将注意力集中于

相反的极端情形： $\mu^{1/4}$ 是否存在 Beurling 维数为 0 的谱？下面的命题对此给出了肯定的回答。

命题 6.2。 测度 $\mu^{1/4}$ 有一个谱 Λ_{s}，其维数 $\dim_{\mathrm{Be}}(\Lambda_{\mathrm{s}}) = 0$。

我们先回顾一个引理。

引理 6.3 ([9])。 设 Λ_1、$\Lambda_2 \subseteq \mathbb{R}^d$ 为可数集。那么

$$\dim_{\mathrm{Be}}(\Lambda_1 \cup \Lambda_2) = \max\bigl(\dim_{\mathrm{Be}}(\Lambda_1), \dim_{\mathrm{Be}}(\Lambda_2)\bigr).$$

命题 *6.2* 的证明。 考虑自相似测度 $\mu_{4,\ \{0,6\}}$。根据 [6,定理 1.6]， $\mu_{4,\ \{0,6\}}$ 有一个谱 $\Theta \subset \mathbb{Z}$，其维数为 $\dim_{\mathrm{Be}}(\Theta) = 0$。由 (6.1)，$3\Theta$是$\mu_{1/4}$的一个谱。

Set

$$T = (3\Theta) \cup \left(3\Theta + \frac{3}{4}\right), \qquad \Lambda_{\mathrm{s}} = \{(t, -t) : t \in T\}.$$

我们断言， Λ_{s} 是 $\mu^{1/4}$的一个谱。定理 1.2 证明中的平面计算只用到以下事实：集合 S 是$\mu_{1/4}$的一个谱， $S \subset \frac{3}{2}\mathbb{Z}$，且 $2 \cdot (3/4) \cdot 1/3 \equiv 1/2$ (模 1)。集合 3Θ 满足这些性质：它是$\mu_{1/4}$的一个谱，包含于 $3\mathbb{Z} \subset \frac{3}{2}\mathbb{Z}$中，且 $2 \cdot (3/4) = 3/2 \equiv 1/2$ (模 1)。因此，(3.14)–(3.21) 可直接套用，得到

$$Q^{\mu^{1/4}}_{\Lambda_{\mathrm{s}}}(\xi, \eta) = \frac{1}{4}\left(2 + 2 + 2\,\mathrm{Re}\,0\right) = 1 \qquad ((\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2).$$

由定理 2.1， Λ_{s} 是 $\mu^{1/4}$的谱。

剩下的工作是计算 Beurling 维数。根据定义，$\dim_{\mathrm{Be}}$ 在缩放和平移下保持不变。因此，利用 $\dim_{\mathrm{Be}}(\Theta) = 0$,

$$\dim_{\mathrm{Be}}(3\Theta) = 0, \qquad \dim_{\mathrm{Be}}\left(3\Theta + \frac{3}{4}\right) = 0.$$

由引理 6.3,

$$\dim_{\mathrm{Be}}(T) = \max\left\{\dim_{\mathrm{Be}}(3\Theta), \dim_{\mathrm{Be}}\left(3\Theta + \frac{3}{4}\right)\right\} = 0.$$

为了估计 $\dim_{\mathrm{Be}}(\Lambda_{\mathrm{s}})$，令 π: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\pi(x,\ y) = x$为第一坐标投影。则 π 是 1-利普希茨映射，且其在 $\Lambda_{\mathrm{s}} = \{(t,\ -t) :\ t \in T\}$上的限制是到 T的双射。此外,

$$\pi\bigl(B_{\mathbb{R}^2}(z, r)\bigr) = \{x \in \mathbb{R} :\ |x - \pi(z)| < r\} = B_{\mathbb{R}}\bigl(\pi(z), r\bigr).$$

将此与 $\pi|_{\Lambda_{\mathrm{s}}}$的双射性结合起来，我们得到

$$\#\bigl(\Lambda_{\mathrm{s}} \cap B_{\mathbb{R}^2}(z, r)\bigr) \le \#\bigl(T \cap B_{\mathbb{R}}(\pi(z), r)\bigr) \le N_T(r).$$

对 $z \in \mathbb{R}^2$ 取上确界可得 $N_{\Lambda_{\mathrm{s}}}(r) \le N_T(r)$，因此

$$\dim_{\mathrm{Be}}(\Lambda_{\mathrm{s}}) \le \dim_{\mathrm{Be}}(T) = 0.$$

由于 $\dim_{\mathrm{Be}}(\Lambda_{\mathrm{s}}) \ge 0$，我们得到 $\dim_{\mathrm{Be}}(\Lambda_{\mathrm{s}}) = 0$。证明完成。 □

更一般地说，介值性质是否成立？也就是说， $\mu^{1/4}$的某个谱的 Beurling 维数是否可以取到 $[0, \frac{1}{2}]$ 中的每一个值?

（iii）傅里叶级数的收敛性。对于 Λ μ_r的谱，s，每个 $f \in L^2(\mu_{r,\ s})$都有形式展开 $f \sim \sum_{\lambda\in\Lambda}\langle f,\ e_\lambda\rangle e_\lambda$；其收敛性是一个

在这一背景下的新问题。即使是关于 $\Lambda_R\ \ \mu^{1/R}$ 的谱的 Carleson定理类比，也远未得到充分理解。

致谢

作者感谢 Ruxi Shi 在“分形谱测度理论及相关主题学术研讨会”（湖南师范大学，2026年5月15日至18日）的报告中提出加性测度与 Bernoulli卷积的谱性问题，使我们再次关注这一问题。我们还感谢研讨会的组织者。在论文准备过程中，使用了人工智能工具来协助完善部分证明细节、检查计算并改进表述。所有数学陈述和证明均已由作者核实。作者对本文承担全部责任。

参考文献

[1] W.-H. Ai, Z.-Y. Lu, T. Zhou, 《对称加性测度的谱性》, 《数学汇刊》, 361(G4):783–793, 2023。[2] L.-X. An, X.-H. Dong, X.-G. He, 《平面Sierpinski测度的谱与谱特征矩阵问题》, 《印第安纳大学数学杂志》71 (2022), 913–952。[3] L.-X. An, X.-Y. Fu, C.-K. Lai, 《谱Cantor-Moran测度与Bourgain正弦和问题的一个变体》, 《数学进展》349 (2019), 84–124。[4] L.-X. An, X.-G. He, 《一类谱Moran测度》, 《泛函分析杂志》266 (2014), 343–354。[5] L.-X. An, X.-G. He, K.-S. Lau, 《一类无限卷积的谱性》, 《数学进展》283 (2015), 362–376。[6] L. X. An and C. K. Lai, 《自仿射谱测度的任意稀疏谱》, 《数学分析》49 (2023), 19–42。[7] L.-X. An, C.-K. Lai, 《乘积形式Hadamard三元组及其谱自相似测度》, 《数学进展》431 (2023), 论文编号109257, 共41页。[8] L. X. An, C. Wang, 《自相似谱测度》, 《泛函分析杂志》280 (2021), 108821。[9] W. Czaja, G. Kutyniok, D. Speegle, 《仿射子空间上Gabor伪框架的Beurling 维数》, 《傅里叶分析及其应用》14 (2008), 514–537。[10] X.-R. Dai, 《Bernoulli卷积何时存在谱？》, 《数学进展》231 (2012), 1681–1693。[11] X.-R. Dai, 《Cantor测度的谱》, 《数学年刊》366 (2016), 1621–1647。[12] X.-R. Dai, X. Y. Fu, Z. H. Yan, 《$\mathbb{R}^n$上的Sierpinski测度的谱性质》, 《构造与逼近》60 (2024), 165–196。[13] X. R. Dai, Y. S. Fu, X. G. He, 《一维谱测度理论》, 《中国科学：数学》56 (2026), 1577–1602。[14] X.-R. Dai, X.-G. He, C.-K. Lai, 《具有连续数字的Cantor测度的谱性质》, 《数学进展》242 (2013), 187–208。[15] X.-R. Dai, X.-G. He, K.-S. Lau, 《关于谱N-Bernoulli测度》, 《数学进展》259 (2014), 511–531。[16] J. de Dios Pont, L. Liehr, M. A. Taylor, 《奇底数Cantor测度不具有傅里叶框架》, https://arxiv.org/abs/2607.08656。[17] G.-T. Deng, Y.-S. Fu, Q.-C. Kang, 《Cantor测度的谱特征子空间与树结构》, https://arxiv.org/abs/2407.13075。[18] Q.-R. Deng, X.-G. He, M.-T. Li, Y.-L. Ye, 《基于Moran-Sierpinski测度的指数函数正交基》, 《数学学报（英文版）》40 (2024), 1804–1824。[19] Q.-R. Deng, K.-S. Lau, 《Sierpinski型谱自相似测度》, 《泛函分析杂志》269 (2015), 1310–1326。

[20] *D. E. Dutkay, D. G. Han, Q. Y. Sun*，《关于*Cantor*测度的谱》，《数学进展》*221 (2009)，251–276*。[21] *D. E. Dutkay, D. G. Han, Q. Y. Sun, E. Weber*，《关于指数框架的 *Beurling* 维数》，《数学进展》*226 (2011)，285–297*。[22] *D. Dutkay, D. Han, Q. Sun*，《分形测度上拟傅里叶级数与扰乱傅里叶级数的发散性》，《美国数学会汇刊》*366 (2014)，2191–2208*。[23] *D. E. Dutkay, J. Haussermann*，《测度的谱的铺砌性质》，《数学杂志》*280 (2015)，525–549*。[24] *D. Dutkay, J. Haussermann*，《源于分形调和分析的数论问题》，《数论杂志》*159 (2016)，7–26*。[25] *D. Dutkay, J. Haussermann, C.-K. Lai*，《*Hadamard*三元组生成自仿射谱测度》，《美国数学会汇刊》*371 (2019)，1439–1481*。[26] *D. E. Dutkay, P. Jorgensen*，《仿射迭代函数系统中的正交性与轨道分析》，《数学杂志》*256 (2007)，801–823*。[27] *K. J. Falconer*，《分形几何：数学基础与应用》，第*3*版，*John Wiley & Sons*有限公司，奇切斯特，*2014*。[28] *Y.-S. Fu, X.-G. He, Z.-X. Wen*，《*Bernoulli*卷积与随机卷积的谱》，《纯粹与应用数学杂志》*116 (2018)，105–131*。[29] *X.-Y. Fu, Z.-J. Song, W.-J. Wang*，《奇数倒数幂*Bernoulli*卷积上傅里叶框架的 *Walsh*商障碍》，*https://arxiv.org/abs/2607.10547*。[30] *B. Fuglede*，《交换的自伴偏微分算子与一个群论问题》，《泛函分析杂志》*16 (1974)，101–121*。[31] *X. G. He* 等，《*Beurling* 维数与自相似测度》，《泛函分析杂志》*274 (2018)，2245–2264*。[32] *X. G. He, M. W. Tang, Z. Y. Wu*，《一类自相似谱测度的谱结构与谱特征值问题》，《泛函分析杂志》*277 (2019)，3688–3722*。[33] *T. Y. Hu, K. S. Lau*，《*Bernoulli*卷积的谱性质》，《数学进展》*219 (2008)，554–567*。[34] *P. E. T. Jorgensen, S. Pedersen*，《分形 L^2-空间中的稠密解析子空间》，《分析数学杂志》*75 (1998)，185–228*。[35] *M. N. Kolountzakis, S. Wu*，《由两条线段构成的测度的谱性》，《傅里叶分析及其应用杂志》*32，4 (2026)*。[36] *I. Łaba and Y. Wang*，《关于谱*Cantor*测度》，《泛函分析杂志》*193 (2002)，409–420*。[37] *C.-K. Lai, B. Liu, H. Prince*，《若干线性空间并集的谱性质》，《泛函分析杂志》*280 (2021)，108985*。[38] *N. Lev*，《奇异测度的傅里叶框架与纯型现象》，《美国数学会会刊》*146 (2018)，2883–2896*。[39] *J.-J. Li, Z.-Y. Wu*，《一类谱*Moran*测度的谱的介值性质》，《应用与计算调和分析》*68 (2024)，101606*。[40] *W.-X. Li, J.-J. Miao, Z.-Q. Wang*，《无限卷积与随机卷积的谱性》，《泛函分析杂志》*287 (2024)*，论文编号*110539*，共*35*页。[41] *J.-S. Liu, Z.-Y. Lu, T. Zhou*，《*Cantor-Moran*测度的谱性与 *Fuglede*猜想》，《应用与计算调和分析》*83 (2026)*，论文编号*101853*，共*23*页。[42] *Z.-Y. Lu*，《框架界、谱隙与*Plus*空间》，*https://arxiv.org/pdf/2505.22136*。[43] *Z. Y. Lu*，《自相似测度的谱特征值集与*Beurling* 维数》，《纯粹与应用数学杂志》*205 (2026), 103809*。[44] *R. X. Shi*，《一类*Cantor-Moran*测度的谱性》，《泛函分析杂志》*276 (2019)，3767–3794*。[45] *R. X. Shi*，《关于框架谱测度的维数及其框架谱》，《芬兰数学年刊》*46 (2021)，483–493*。[46] *R. Strichartz*，《与某些*Cantor*测度相关的拟傅里叶级数与变换》，《分析数学杂志》*81 (2000)，209–238*。[47] *R. Strichartz*，《拟傅里叶级数的收敛性》，《分析数学杂志》*99 (2006)，333–353*。[48] *M.-W. Tang, Z.-Y. Wu*，《中四分之一*Cantor*测度的拟傅里叶级数几乎处处收敛》，*https://arxiv.org/pdf/2607.27796*。

[49] T. Tao, 《style id='2'>Fuglede猜想在5维及更高维中是错误的, 《数学研究快报》**11**（2004）, 251–258。Y.-Q. Mao, 数学与信息科学学院, 广州大学, 广州, 510006, 中华人民共和国电子邮件地址: yqmao@gzhu.edu.cnZ.-Y. Wu, 数学与信息科学学院, 广州大学, 广州, 510006, 中华人民共和国电子邮件地址: zhiyi_wu2021@163.com