arXiv:2611.32179v1 [math.AP] 24 Nov 2026

黎曼流形上 Winfree 振子的弛豫动力学

SEUNG-YEAL HA、Chaejoo Lee、Eunjun Lee、Jaemoon Lee 和 Seung-Yeon Ryo O

ABSTRACT. 我们研究黎曼流形上 Winfree 型模型向平衡态的指数弛豫。对于具有牵入点 p 和典范影响函数的球面模型，只要没有振子初始于对跖点$-p$，我们便推导出系统收敛至平衡态。对于 U(d) 上相应的典范模型，只要没有初始矩阵具有特征值 -1，便可得到相同的收敛结果。这两项结果均在耦合强度超过明确阈值时成立，该阈值取决于初始构型和频率矩阵。对于更广泛的一类酉影响函数，只要耦合强度足够大，相同的谱条件即可保证指数收敛。有限时间进入正向不变稳定区域，以及收缩估计，可导出指数收敛速率，并保证这些区域内平衡态的唯一性。通过李群上的有限对称性构造，可将酉模型和特殊酉类比模型实现为不变的 Kuramoto–Lohe 子系统，从而得到局部弛豫结果。最后，我们在黎曼流形上建立一个抽象 Winfree 模型，并在定量吸引性和正则性假设下，证明其在固定坐标邻域内局部指数弛豫。

1. INTRODUCTION

同步大致可以定义为相互作用的相位振子群体中的一种集体行为，其中相位或频率形成一致。它广泛存在于各种物理和生物复杂系统中，从神经元网络 [Erm94、BHD10] 和心脏起搏细胞 [dBYVM83，YVMD82] 到约瑟夫森结阵列 [Wie96，WCS98]以及闪烁萤火虫 [Smi35，Buc38，Buc88], 近年来还应用于信号恢复、数据科学中的对齐问题 [Ban15a、Ban15b] 和机器学习 [ZLD+20]等领域。一个核心的数学挑战，是建立严格的定性和定量框架，以理解自发同步何时发生，以及它以多快的速度形成。

同步的数学研究一直主要围绕两种相位模型展开：一种由 Arthur Winfree 于 1967 [Win67]提出，并在下文（1.1）中作形式化表述；另一种由 Yoshiki Kuramoto 于1975年提出 [Kur75], ，其中振子位于圆上

通过基于相位差的正弦耦合相互作用。以下是不完全的参考文献选列： [EK90、AS01、OKT17、OTK19]前者包括 [Str00、ABV+05、DB14] 后者包括。一个核心区别在于，Kuramoto 模型在共同相位平移下保持不变，而 Winfree模型通常不具备这种 U（1）对称性。

Date：2026年11月25日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 34C40、34C15、34D06。
Key words and phrases. Winfree模型、同步、黎曼流形、酉群、相位锁定、指数收敛。**致谢**。S.-Y. Ha 的工作得到 NRF资助（RS-2025-00514472）的支持。最后一位作者感谢 Otte Hein¨avaara 对引理4.1的证明。

高维流形上的同步是近年来备受关注的主题。这一推广受到两个因素的推动。首先，许多受到关注的物理系统，包括耦合量子振子的模型 [HKPZ16]，多维生物节律[Win80]，以及变压器动力学 [Rig26]，，其相位取值天然位于高维空间，而非单位圆 $\mathbb{S}^1$。其次，同步模型往往与相空间的几何和拓扑产生丰富的相互作用；例如，相空间的拓扑可能导致多稳态 [Mar20]。Kuramoto 模型及其高维对应模型正受到学界的积极研究。其中一些研究致力于研究球面或希尔伯特空间上的 Kuramoto 模型类比模型 [OS06、Loh10、CH14、ZZQ18、CGO19、GLPR25]，李群[Loh09、HR16、HKR17、DeV19、Ryo25]，双曲几何 [CEM17、LMS21]，以及矩阵/张量空间 [Loh19、HP20]上的模型。然而，据作者所知，在黎曼流形上的少数一致模型中，纳入 Winfree 型相互作用的模型并不多；我们仅了解到[HKM21、Par22、HLL$^+$26]。因此，本文针对 Winfree模型的某些高维推广提出了另一种观点 $\mathbb{S}^1$。为作铺垫，我们先从 Winfree模型开始。

设 $\theta_i = \theta_i(t)$ 为具有实值自然频率 ν_i 的第 i 个 Winfree 振子的时变相位。为明确起见，我们选取实值影响函数$I = I(\theta)$和敏感度函数 $S = S(\theta)$：

$$I(\theta) = 1 + \cos\theta, \quad S(\theta) = -\sin\theta.$$

在此设定下， θ_i 的时间动力学由以下（经典）Winfree 模型的柯西问题支配：

$$\begin{cases} \dot{\theta}_i = \nu_i - \dfrac{\kappa}{N}\displaystyle\sum_{j=1}^{N}(1+\cos\theta_j)\sin\theta_i, \quad t > 0, \\ \theta_i\Big|_{t=0+} = \theta_i^0, \quad i \in [N] := \{1, \cdots, N\}, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $\kappa \in \mathbb{R}$ 为非负耦合强度， $\{\theta_i^0\}_{i=1}^N$ 为初始相位构型。影响函数 $1+\cos\theta_j$ 有时会被狄拉克 δ 函数的光滑近似所取代。由标准的柯西–利普希茨理论可知，(1.1) 的整体适定性成立。

Ha、Park 和 Ryoo [HPR15]为 (1.1) 中的系综在强耦合区域收敛到平衡构型建立了充分条件。他们的结果在定理 2.1中重述，给出了以 $\max_{i\in[N]}|\nu_i|$ 表示的显式耦合阈值以及定量的指数收敛速率。相关结果还涉及局部耦合网络[HKPR16] 和部分锁相 [HKPR17、OKT17、OTK19]；在后一类研究中，同步是通过控制相位差来表述的，应与收敛到稳态平衡区分开来。本文将探讨以下问题：

- “经典 $\mathbb{S}^1$-Winfree模型（1.1）的自然高维对应模型是什么？”
- “对于这类模型，在系统参数和初始数据满足什么条件时，它们会在指定的捕获区域内具有唯一平衡态，且弛豫动力学呈现何种形式？”

文献中已经探讨过这些问题。Park 最先研究了单位欧氏球面上的高维 Winfree 模型 $\mathbb{S}^{d-1} \subset \mathbb{R}^d$

[Park22], ，并建立了弛豫动力学的充分理论框架。受此启发，本文作者进一步将 Park 的球面 Winfree 模型推广至特殊正交群 SO(d)，不仅证明了类似的收敛现象，还提出了领导者–跟随者机制 [HLL+26]。

早期关于球面和特殊正交群的分析 [Par22、HLL+26] 采用局部化影响函数，并纳入领导者–跟随者条件，要求某个振子初始时位于牵入点附近。其允许的初始构型可以已经包含位于半球之外的跟随者，或旋转角超过 $\pi/2$的跟随者。对于本文研究的典型影响函数，我们则证明，即使不要求存在邻近领导者，也能实现弛豫：每个避开对跖点或谱值 -1的初始构型，分别都会在耦合充分大时收敛，而所需耦合大小取决于该构型。此外，我们还需要一种灵活的流形上 Winfree 型相互作用理论，以允许多种类型的影响函数和敏感度函数。值得注意的是，这一结果已在一维 $\mathbb{S}^1$情形下由 [HPR15]建立。

本文的主要结果。主要结果有三方面。首先，对于带有 $I(x) = 1 + \langle x,\ p\rangle$ 的 Winfree 球面模型，我们证明，满足 $x_i^0 \neq -p$（对所有 $i \in [N]$ ）的每个初始构型，在耦合充分大时都会收敛到一个平衡态。其次，我们在 U(d) 上引入具有典型影响函数 $I(U) = 1 + d^{-1}$ Re tr U 的 Winfree 矩阵模型，并验证只要对每个 $i \in [N]$ 都有 $-1 \notin \mathrm{spec}(U_i^0)$，相应的结论也成立。在这两种情形下，对于每个固定的初始构型和频率元组，都存在一个阈值 κ_0 ，使得对所有 $\kappa > \kappa_0$，收敛性均成立。极限平衡态通常取决于κ ，并且在指定的稳定区域内唯一；本文不声称其全局唯一。第三，我们研究酉群上的一般影响函数，并在黎曼流形上构建抽象 Winfree 模型，证明其在固定坐标邻域内满足局部弛豫定理。我们还通过对 Kuramoto–Lohe 系综进行有限对称性约化，导出 Winfree–Lohe 子系统；这既恢复了酉模型，也为抽象框架提供了一个特殊酉的实例。

在第3–5节中，证明分为三个步骤：先在有限时间内进入一个正向不变稳定区域，再证明该区域内轨迹之间具有压缩性，最后与时间平移进行比较，从而得到一个平衡态及指数收敛。在第7节中，初始数据已位于一个不变坐标邻域内，因此从时间零开始便有压缩性。在所有情形下，假设条件和收敛速率都是定量的。

本文其余部分的安排。本文其余部分安排如下。在介绍记号之后，我们将在第2 节回顾 [HPR15、Par22、HLL+26]中的模型和结果。

在第3节中，我们研究单位球面上的Winfree模型 $\mathbb{S}^{d-1}$，其中每个振子的状态都是一个单位向量 $x_i \in \mathbb{S}^{d-1}$ ，而牵入点是一个固定的 $p \in \mathbb{S}^{d-1}$。相关的耦合阈值涉及限制算子半范数 $\|\mathfrak{A}p\|_\infty$，其定义见第2.2节，用于度量频率矩阵 A_i 中作用于角动力学的部分相对于 p 的大小。我们的主要结果定理3.1是定理2.1的高维对应版本，它证明系统会在有限时间内进入稳定区域，并以明确的速率指数收敛到该区域内唯一的平衡态。

在第 4 节中，我们研究酉群 U(d) 上的 Winfree模型，它可视为式（1.1）的“量子”推广。此处，相位是酉矩阵 $U_i \in$U(d)，自然的影响函数涉及迹的归一化实部。我们证明了定理 4.1，它是定理 2.1 在 U(d) 上的对应版本，其中相位 θ_i 由以下对象取代：

的特征值 U_i，并以 Schatten–von Neumann 范数衡量收敛性。一个关键的技术要点是引理 4.1，它通过谱分离论证，利用 Schatten 1-范数控制差$U - V$的迹的实部。

在第 5节中，我们将酉群分析推广到允许一般影响函数的情形I：$\mathrm{U}(d) \to \mathbb{R}$ 满足自然的正性、单调性和正则性条件。规范选择 $I(U) = 1 + \frac{1}{d}\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\,U$恢复了第 4节的框架。一般结果——定理 5.1——给出了相关稳定区域上由 I 的 Lipschitz 常数决定的显式指数速率。

在第 6节中，我们从 [MERT26] 的 Winfree 到 Kuramoto 的嵌入出发，并在 [Ryo 25]的李群框架中发展对称性约化。我们确定了一个使约化相互作用可分离的平均条件，并验证了该条件对酉群和特殊酉群成立。 [Ryo25] 的收敛理论再次适用，并给出约化系统以指数弛豫收敛至唯一局部平衡态的结论。

在第7节中，我们在一般黎曼流形上建立了一个 Winfree 模型 $\mathcal{M}$ 并证明了定理7.1，给出了漂移向量场 F_i、影响函数 I和牵引向量场 S 满足何种条件时，系统能够在指定坐标邻域内实现全局适定性，并指数收敛到唯一平衡态。球面、酉模型和特殊酉模型都是第7节所讨论抽象方程的特殊情形。定理7.1中的定量假设是局部的，并依赖于坐标图。

符号表：对于笛卡尔向量分量，上标表示分量指标，下标表示粒子指标；上标 0 和 ∞ 分别表示初始状态和极限状态。因此，x_i^k 表示第 i 个粒子的第 k 个笛卡尔分量：

$$x_i = (x_i^1, \dots, x_i^d) \in \mathbb{R}^d, \quad X \coloneqq (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^{dN}.$$

对于 $x = (x^1, \cdots, x^d) \in \mathbb{R}^d$和 $Y = (y_1, \cdots, y_N) \in (\mathbb{R}^d)^N$，我们引入标准$\ell^p$-范数和混合范数：

$$\|x\|_p \coloneqq \begin{cases} \left(\sum_{k=1}^{d} |x^k|^p\right)^{1/p}, & 1 \le p < \infty, \\ \max_{1\le k\le d} |x^k|, & p = \infty, \end{cases} \qquad \|Y\|_{q,p} \coloneqq \begin{cases} \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \|y_i\|_p^q\right)^{1/q}, & 1 \le q < \infty, \\ \max_{i\in[N]} \|y_i\|_p, & q = \infty. \end{cases} \tag{1.2}$$

为简化记号，我们设 $\|x\| \coloneqq \|x\|_2$。对于实值函数 f，我们用以下符号表示其右上 Dini 导数：

$$D^+ f(t) \coloneqq \limsup_{h \searrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}.$$

每当通常的右导数

$$f'_+(t) \coloneqq \lim_{h \searrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

存在时，它与 $D^+f(t)$ 重合。

2. Previous models and relaxation results

本节将简要回顾 Winfree 模型的弛豫动力学及其在单位球面和特殊正交群上的高维推广。

2.1. **Winfree圆模型**。本小节中，我们考虑完全网络上的 Winfree 振子系综，其中每一对振子都以相同的归一化耦合强度相互作用。更确切地说，我们考虑柯西问题（1.1）。

对于 $\alpha \in (0,\pi)$，令 $\alpha^\infty \in (0, \frac{\pi}{3}]$ 为下列三角方程的唯一解：

$$\sin\alpha^\infty(1+\cos\alpha^\infty) = \sin\alpha(1+\cos\alpha). \tag{2.1}$$

注意，对于 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{3}]$，有

$$\alpha^\infty = \alpha.$$

在全文中，我们设

$$\Theta := (\theta_1,\dots,\theta_N), \quad \mathcal{V} := (\nu_1,\dots,\nu_N), \quad \|\mathcal{V}\|_\infty := \max_{i\in[N]}|\nu_i|.$$

定理2.1。 [HPR15] 假设系统参数和初始数据满足

$$\alpha \in (0,\pi)\setminus\left\{\frac{\pi}{3}\right\}, \quad \kappa > \frac{\|\mathcal{V}\|_\infty}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}, \quad \theta_i^0 \in [-\alpha,\alpha], \quad i\in[N],$$

并令 Θ 为方程 (1.1)的全局解。则以下断言成立。

(1)（平衡态的存在性与唯一性）：存在唯一平衡态 $\Theta^\infty \in (-\alpha^\infty,\alpha^\infty)^N$。

(2)（有限时间进入）：存在 $T \geq 0$ 使得

$$T \leq \frac{\pi}{\kappa\sin\alpha(1+\cos\alpha) - \|\mathcal{V}\|_\infty}, \quad \Theta(t) \in (-\alpha^\infty,\alpha^\infty)^N, \quad t \geq T.$$

(3)（指数弛豫）：令

$$\mu_{\alpha^\infty} := (2\cos\alpha^\infty - 1)(1+\cos\alpha^\infty) > 0.$$

则解 Θ 以 Θ^∞ 指数速度弛豫：

$$\|\Theta(t) - \Theta^\infty\|_1 \leq e^{-\kappa\mu_{\alpha^\infty}(t-T)}\|\Theta(T) - \Theta^\infty\|_1, \quad t \geq T.$$

注 2.1。我们对前面的定理作出两点观察。

(1) 若 $\Theta^0 \in (-\alpha^\infty、\alpha^\infty)^N$，则可取 $T = 0$。*(2)* 若 $\kappa > \frac{4}{3\sqrt{3}}\|\mathcal{V}\|_\infty$，则可找到 $\alpha \in (\frac{\pi}{3}、\pi)$ 使得

$$\kappa > \frac{\|\mathcal{V}\|_\infty}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)},$$

以及定理 *2.1* 告诉我们，系统 (1.1) 在 $(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3})^N$ 中具有一个稳定平衡点 $- - \ .$

2.2. **Winfree 球面模型。** 在本小节中，我们考虑单位球面 [Par22]上的 Winfree模型。设 $d \geq 2$，并设 $x_i = x_i(t) \in \mathbb{S}^{d-1} \subset \mathbb{R}^d$ 为第 i 个 Winfree 振子在时刻 t 的状态。于是，x_i 的动力学由 $\mathbb{S}^{d-1}$上的 Winfree 球面模型的柯西问题支配：

$$\begin{cases} \dot{x}_i = A_i x_i + \dfrac{\kappa}{N} \displaystyle\sum_{j=1}^{N} I(x_j)(p - \langle x_i, p\rangle x_i), \quad t > 0, \\ x_i\Big|_{t=0+} = x_i^0, \quad i \in [N], \end{cases} \tag{2.2}$$

其中，每个 A_i 都是一个 $d \times d$ 斜对称矩阵，$p \in \mathbb{S}^{d-1}$ 是一个固定单位向量，且$I\colon \mathbb{S}^{d-1} \to \mathbb{R}$ 是影响函数。记

$$\mathfrak{A} \coloneqq (A_1, \ldots, A_N), \quad X \coloneqq (x_1, \ldots, x_N).$$

我们定义相对于固定向量 p 的限制算子半范数为

$$\|\mathfrak{A}p\|_\infty \coloneqq \max_{i\in[N]} \|A_i p\|,$$

并注意到，对于线性映射 $L\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$，

$$\|Lp\| \leq \|L\|_{\mathrm{op}}.$$

此外，如果 L是斜对称的，则有单位元

$$\|Lp\| = \sup_{\substack{V \leq \mathbb{R}^d \\ \dim V = 2,\ p\in V}} \sup_{\substack{x,y\in V \\ \|x\|,\|y\|\leq 1}} |\langle Lx, y\rangle|. \tag{2.3}$$

事实上，将 L 压缩[1] 到 $\mathrm{span}\{p, v\}$上，其中 $v \perp p$ 和 $\|v\| = 1$，所得的是一个二阶斜对称算子，其算子范数为 $|\langle Lp,\ v\rangle|$。对 v 取上确界即可得到该单位元，因为 $Lp \perp p$。接下来，我们引入用于衡量系综平均影响的序参量：

$$R \coloneqq \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} I(x_j).$$

采用此记号，系统（2.2）可写成平均场形式：

$$\dot{x}_i = A_i x_i + \kappa R(p - \langle x_i, p\rangle x_i), \quad i \in [N].$$

请注意，球面模型（2.2）的弛豫结果已在 [Par22第 4]节中得到证明，其假设涉及局部化影响函数和邻近领导者。在3节中，我们研究典型影响函数 I（x）$= 1 + \langle x,\ p\rangle$ 并对每个避开 $-p$的初始构型证明定理2.1的对应结论，前提是耦合充分大。

[1]线性算子 L 到子空间 V的 *compression* 是算子 $P_V \circ L|_V\colon V \to V$，其中 P_V表示到 V上的正交投影。

2.3. **定义在$\mathrm{SO}(n)$上的 Winfree 矩阵模型。** 在本小节中，我们回顾特殊正交群上的 Winfree 矩阵模型及其在[HLL+26]中建立的弛豫动力学。

设 $R_i = R_i(t) \in \mathrm{SO}(n)$ 表示第 i 个振子在时刻 t 的状态，且 $\Omega_i \in \mathfrak{so}(n)$ 为其自然频率矩阵。于是，相应的柯西问题如下所示。

$$\begin{cases} \dot{R}_i = \Omega_i R_i + \dfrac{\kappa}{2N} \displaystyle\sum_{j=1}^{N} I(R_j)(I_n - R_i^2), \quad t > 0, \\ R_i\big|_{t=0} = R_i^0 \in \mathrm{SO}(n), \quad i \in [N], \end{cases} \tag{2.4}$$

其中，I_n 是 $n \times n$ 单位矩阵，$I\colon \mathrm{SO}(n) \to [0,\infty)$ 是影响函数。对于A，$B \in \mathbb{R}^{n\times n}$，令

$$\langle A, B\rangle := \frac{1}{2}\operatorname{tr}(A^\top B), \quad \|A\| := \sqrt{\langle A, A\rangle},$$

并设 d 为 $\mathrm{SO}(n)$ 上的诱导测地距离。记

$$B_r := \{R \in \mathrm{SO}(n) : d(I_n, R) < r\}.$$

假设影响函数是径向的，即

$$I(R) = \widetilde{I}\big(d(I_n, R)\big),$$

~其中，I 是非负、递减且全局Lipschitz连续的函数，满足

$$\lim_{r\to 0+} \widetilde{I}(r) = 1,$$

且其支集为 $[0,\beta]$，其中 $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$。对于$\mathcal{R} = (R_1, \ldots, R_N)$，我们定义

$$\|\mathcal{R}\|_{\ell^1} := \sum_{i=1}^{N} \|R_i\|, \quad \mathrm{Lip}^*(I) := \sup_{\substack{R,S\in\mathrm{SO}(n)\\ R\neq S}} \frac{|I(R) - I(S)|}{\|R - S\|}.$$

设 γ_0 和 γ 满足

$$0 < \gamma_0 < 2\sin\frac{\beta}{2}, \quad \gamma := 2\arcsin\frac{\gamma_0}{2} < \beta,$$

并令

$$\lambda_1 := \kappa\big(\cos\gamma\, \widetilde{I}(\gamma) - \gamma\,\mathrm{Lip}^*(I)\big), \quad \Gamma_i(\gamma) := \left(2 + 2\sqrt{1 - \frac{N^2\|\Omega_i\|^2}{\kappa^2 \widetilde{I}(\gamma)^2}}\right)^{1/2},$$

$$\kappa_c(\gamma, 1) := \frac{N \max_{j\in[N]} \|\Omega_j\|}{\sin\big(2\sin(\gamma/2)\big)\widetilde{I}(\gamma)}.$$

于是，(2.4) 的涌现动力学可概括如下。

定理2.2。 [HLL+26、推论 3.1、定理 3.1 和定理 4。1] 假设存在 $i_* \in [N]$ 使得

$$R_{i_*}^0 \in B_{\gamma_0}, \quad R_i^0 \in B_{\Gamma_i(\gamma)}, \quad i \in [N], \quad \kappa > \kappa_c(\gamma, 1), \quad \lambda_1 > 0,$$

并设 $\mathcal{R}$ 是方程 (2.4)的一个全局解。那么，以下断言成立。

(1)（有限时间进入）：存在 $t_0 \geq 0$，使得 $\mathcal{R}(t) \in (B_\gamma)^N$ 对所有 $t \geq t_0$均成立。

(2)（平衡态的存在性与唯一性）：存在唯一平衡态 $\mathcal{R}^\infty \in (B_\gamma)^N$。

(3)（指数弛豫）：解以指数速度趋于 $\mathcal{R}^\infty$ ：

$$\|\mathcal{R}(t)-\mathcal{R}^\infty\|_{\ell^1}\le e^{-\lambda_1(t-t_0)}\|\mathcal{R}(t_0)-\mathcal{R}^\infty\|_{\ell^1},\quad t\ge t_0.$$

注 2.2. 对于同频系综Ω_i =Ω，同一项工作还验证了指数完全状态同步，并通过平均影响的不动点方程刻画了平衡态构型。

3. Winfree oscillators on the unit spheres

本节针对显式影响函数 $I(x)=1+\langle x,\ p\rangle$建立 Winfree 球面模型（2.2）的定量弛豫结果。为此，我们首先建立一个捕获区域，然后证明该区域内的指数稳定性，最后将解与其时间平移进行比较，从而得到平衡态的存在性和唯一性，以及向该平衡态的指数弛豫。

3.1. 捕获与有限时间进入。

考虑 Winfree 球面模型的柯西问题：

$$\begin{cases}\dot{x}_i=A_ix_i+\dfrac{\kappa}{N}\displaystyle\sum_{j=1}^N\Big(1+\langle x_j,p\rangle\Big)(p-\langle x_i,p\rangle x_i),\quad t>0,\\ x_i\Big|_{t=0}=x_i^0,\quad \|x_i^0\|=1,\quad i\in[N].\end{cases}\tag{3.1}$$

（3.1）的适定性源于局部存在性结果以及下述引理所确立的范数保持性质。这确保轨迹始终留在一个紧致流形上，因此解在整个时间范围内存在。

引理 3.1. 令 $X=(x_1,\dots,x_N)$ 为 (3.1) 在其最大存在区间 $[0,T_{\max})$上的解。则下列恒等式成立。对于 $i\in[N]$,

$$\langle A_ix_i,x_i\rangle=0,\quad \|x_i(t)\|=1,\quad \|p-\langle p,x_i\rangle x_i\|^2=1-\langle p,x_i\rangle^2,\quad 0\le t<T_{\max}.\tag{3.2}$$

证明。 接下来，我们将给出每个估计的证明。

(i) 我们使用 $A_i^T=-A_i$ 得到

$$\langle A_ix_i,x_i\rangle=\langle x_i,A_i^Tx_i\rangle=-\langle x_i,A_ix_i\rangle=-\langle A_ix_i,x_i\rangle,$$

这意味着

$$\langle A_ix_i,x_i\rangle=0.\tag{3.3}$$

(ii) 令

$$R=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N\Big(1+\langle x_j,p\rangle\Big),\tag{3.4}$$

并将 $(3.1)_1$ 改写为

$$\dot{x}_i=A_ix_i+\kappa R(p-\langle x_i,p\rangle x_i).\tag{3.5}$$

然后，我们利用（3.3）和（3.5）得到

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|x_i\|^2&=2\langle\dot{x}_i,x_i\rangle=2\langle A_ix_i+\kappa R(p-\langle x_i,p\rangle x_i),x_i\rangle\\&=2\langle A_ix_i,x_i\rangle+2\kappa R\langle p,x_i\rangle\Big(1-\langle x_i,x_i\rangle\Big)=2\kappa R\langle p,x_i\rangle\Big(1-\|x_i\|^2\Big).\end{aligned}$$

由此得到

$$\frac{d}{dt}\Big(1-\|x_i\|^2\Big) = -2\kappa R\langle p, x_i\rangle\Big(1-\|x_i\|^2\Big).$$

利用 Gronwall 引理和初始条件 $1-\|x_i^0\|^2 = 0$，我们得到所需的单位元:

$$1-\|x_i(t)\|^2 = (1-\|x_i^0\|^2)\exp\Big(-2\kappa\int_0^t R(s)\langle p, x_i(s)\rangle\,\mathrm{d}s\Big) = 0, \quad 0 \le t < T_{\max}.$$

(iii) 我们利用 $\|p\| = \|x_i\|^2 = 1$ 来看出

$$\begin{aligned}\|p-\langle p, x_i\rangle x_i\|^2 &= \langle p-\langle p, x_i\rangle x_i, p-\langle p, x_i\rangle x_i\rangle \\ &= \langle p, p\rangle - \langle p, x_i\rangle\langle p, x_i\rangle - \langle p, x_i\rangle\langle x_i, p\rangle + \langle p, x_i\rangle^2\langle x_i, x_i\rangle = 1-\langle p, x_i\rangle^2.\end{aligned}$$

因此 $X(t)$ 在其整个最大存在区间内始终位于紧集 $(\mathbb{S}^{d-1})^N$ 中。由于 (3.1) 中的向量场在 $(\mathbb{R}^d)^N$上光滑，延拓定理给出 $T_{\max} = \infty$。 □

引理 3 .2. 设 x 是 $[-1,1]$ 中的一个值。则下列三角恒等式成立 .

$$\sin\Big(\cos^{-1}x\Big) = \sqrt{1-x^2}.$$

证明。令

$$\theta := \cos^{-1}x \in [0,\pi], \quad X := \sin(\cos^{-1}x) = \sin\theta \in [0,1].$$

于是我们有

$$X^2 = \sin^2\theta = 1-\cos^2\theta = 1-x^2, \quad \text{and hence} \quad X = \sqrt{1-x^2}.$$

□

对于 $\alpha \in (0,\pi)$，令 $\alpha^\infty \in \big(0, \frac{\pi}{3}\big]$ 为 (2.1) 中出现的常数，并令

$$O(\mathbb{S}^{d-1})_\alpha := \Big\{x \in \mathbb{S}^{d-1} : \langle x, p\rangle > \cos\alpha\Big\}.$$

在下一个命题中，我们证明集合 $O(\mathbb{S}^{d-1})_\alpha^N$ 在动力学 (3.1) 下是正向不变的。

命题 3.1。 假设系统参数和初始数据满足

$$\alpha \in (0,\pi), \quad \kappa > \frac{\|\mathfrak{A}p\|_\infty}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}, \quad x_i^0 \in O(\mathbb{S}^{d-1})_\alpha, \quad \forall\ i \in [N],$$

并令 $X = \{x_i\}_{i=1}^N$ 为方程 (3.1)的一个全局解。那么，流 $X(t)$ 被限制在$O(\mathbb{S}^{d-1})_\alpha^N$内。

$$X(t) \in O(\mathbb{S}^{d-1})_\alpha^N \quad t > 0.$$

证明。 下面，我们分两步给出证明。首先，我们推导出关于 $\langle x_i, p\rangle$ 的微分不等式，然后使用首次退出论证来证明正向不变性。

• **步骤 A**（关于 $\langle x_i, p\rangle$ 的微分不等式）：我们使用（3.2）和（3.3）得到

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle x_i,p\rangle &= \Big\langle A_i x_i + \kappa R(p-\langle x_i,p\rangle x_i), p\Big\rangle \\ &= \langle A_i x_i, p\rangle + \kappa R(1-\langle x_i,p\rangle^2) \\ &= \langle A_i x_i, p-\langle p,x_i\rangle x_i\rangle + \kappa R(1-\langle x_i,p\rangle^2) \\ &\overset{(*)}{\geq} -\|A_i p\|\sqrt{1-\langle x_i,p\rangle^2} + \kappa R(1-\langle x_i,p\rangle^2) \\ &\geq -\|\mathfrak{A}p\|_\infty\sqrt{1-\langle x_i,p\rangle^2} + \kappa R(1-\langle x_i,p\rangle^2).\end{aligned} \tag{3.6}$$

在（$*$）中，我们使用（2.3）和（3.2）可得

$$\Big|\langle A_i x_i, p-\langle p,x_i\rangle x_i\rangle\Big| \leq \|A_i p\|\|x_i\|\cdot\|p-\langle p,x_i\rangle x_i\| \leq \|A_i p\|\sqrt{1-\langle x_i,p\rangle^2}.$$

• **步骤 B**（$O(\mathbb{S}^{d-1})^N_\alpha$ 的正向不变性）：我们定义集合 $\mathcal{T}$ 及其上确界 τ_1^* 如下：

$$\mathcal{T} := \Big\{\tau>0 : \langle x_i(t),p\rangle > \cos\alpha, \quad t\in[0,\tau),\ \forall\, i\in[N]\Big\}, \quad \tau_1^* := \sup\mathcal{T}.$$

由映射 $t\mapsto\langle x_i(t)\ p\rangle$ 的连续性以及初始条件可知，集合 $\mathcal{T}$ 非空。因此

$$\tau_1^*\in(0,\infty].$$

我们断言

$$\tau_1^* = \infty. \tag{3.7}$$

反设不成立，即

$$\tau_1^*<\infty \quad\text{and}\quad \langle x_i(t),p\rangle>\cos\alpha, \quad t\in[0,\tau_1^*),\ \forall\, i\in[N].$$

因此，存在 $i_0\in[N]$ 使得

$$\begin{aligned}&\langle x_{i_0}(t),p\rangle>\cos\alpha, \quad t\in(0,\tau_1^*), \quad \langle x_{i_0}(\tau_1^*),p\rangle=\cos\alpha,\\ &\langle x_j(t),p\rangle\geq\cos\alpha, \quad t\in[0,\tau_1^*],\ \forall\, j\in[N]-\{i_0\}.\end{aligned} \tag{3.8}$$

由此可得

$$R(t)=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N\big(1+\langle x_j(t),p\rangle\big)\geq 1+\cos\alpha, \quad t\in[0,\tau_1^*]. \tag{3.9}$$

由（3.6）、（3.8）、（3.9）以及关于 κ 的假设可知

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle x_{i_0},p\rangle\Big|_{t=\tau_1^*} &\geq -\|\mathfrak{A}p\|_\infty\sqrt{1-\langle x_{i_0}(\tau_1^*),p\rangle^2}+\kappa R(\tau_1^*)(1-\langle x_{i_0}(\tau_1^*),p\rangle^2)\\ &\geq \sin\alpha\Big(-\|\mathfrak{A}p\|_\infty+\kappa(1+\cos\alpha)\sin\alpha\Big)>0.\end{aligned}$$

因此，$\langle x_{i_0},\ p\rangle$ 在 $t=\tau_1^*$ 的某个邻域内严格递增。此外，由于$\langle x_{i_0}(\tau_1^*)\ p\rangle=\cos\alpha$，对于某个 $\varepsilon\ll 1$,

$$\langle x_{i_0}(t),p\rangle<\cos\alpha, \quad t\in(\tau_1^*-\varepsilon,\tau_1^*),$$

这与（3.8）1相矛盾。因此，我们验证了命题（3.7），并且

$$X(t)\in O(\mathbb{S}^{d-1})^N_\alpha, \quad t>0.$$

□

假设 $y:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ 连续且满足

$$\begin{cases} D^+y(t)\le \|\mathfrak{A}p\|_\infty-\kappa(1+\cos y(t))\sin y(t), & t\ge 0,\\ y(0)\in[\alpha^\infty,\alpha], & \alpha\in(\pi/3,\pi). \end{cases} \tag{3.10}$$

其中我们定义 $\alpha^\infty\in(0,\ \pi/3)$ 如 (2.1) 中所示。

接下来，我们引入一个辅助引理，以证明在有限时间内进入 $O(\mathbb{S}^{d-1})^N_{\alpha^\infty}$。

引理 3.3。 假设 κ满足命题 *3.1*中的相同条件:

$$\kappa>\frac{\|\mathfrak{A}p\|_\infty}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)},$$

并设 $y:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ 是满足 (3.10) 的连续函数。那么，存在一个常数 $T>0$ 使得

$$y(T)<\alpha^\infty \quad and \quad T<T_1^*:=\frac{\pi}{\kappa(1+\cos\alpha)\sin\alpha-\|\mathfrak{A}p\|_\infty}. \tag{3.11}$$

*Pr*证明。 反设：对于所有 $t\in[0,T_1^*,\ \ y(t)$ 都有下界 α^∞].

$$y(t)\ge\alpha^\infty,\quad \forall\, t\in[0,T_1^*]. \tag{3.12}$$

首先，关于 κ 的条件意味着

$$D^+y\Big|_{y=\alpha}\le\|\mathfrak{A}p\|_\infty-\kappa(1+\cos\alpha)\sin\alpha<0,$$

且微分不等式（3.10）$_1$ 的右端根据连续性在 α 的某个邻域内仍严格为负。因此，对右上 Dini 导数进行标量比较可防止 y 从下方达到 α。因此，

$$y(t)<\alpha,\quad \forall\, t>0. \tag{3.13}$$

结合（3.12）和（3.13）可得

$$\alpha^\infty\le y(t)\le\alpha,\quad \forall\, t\in[0,T_1^*]. \tag{3.14}$$

接下来，由于映射 $x\mapsto\sin\ x(1+\cos\ x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{3}]$ 上递增，在 $[\frac{\pi}{3},\pi)$ 上递减，并且在 α^∞ 和 α 处取相同的值，因此有

$$\begin{aligned} &\sin y(1+\cos y)\ge\sin\alpha(1+\cos\alpha)\quad \text{whenever } y\in[\alpha^\infty,\alpha]\\ &\qquad\Longrightarrow \|\mathfrak{A}p\|_\infty-\kappa(1+\cos y)\sin y\le\|\mathfrak{A}p\|_\infty-\kappa(1+\cos\alpha)\sin\alpha<0. \end{aligned} \tag{3.15}$$

设 $z=z(t)$ 是下列柯西问题的一个解:

$$\begin{cases} \dot z=\|\mathfrak{A}p\|_\infty-\kappa(1+\cos\alpha)\sin\alpha, & t>0,\\ z\Big|_{t=0+}=\alpha. \end{cases}$$

由（3.14）和（3.15），可得

$$y(0)\le z(0),\quad D^+y(t)\le\dot z(t),\quad \forall\, t\in(0,T_1^*],$$

因此我们有

$$D^+(y-z)=D^+y-\dot z\le 0.$$

右上 Dini 导数的标量比较原理表明，$y - z$ 在 $(0, T_1^*)$ 上是非递增的；端点处的连续性因此给出

$$y(t) \le z(t) = \alpha + \Big(\|\mathfrak{A}p\|_\infty - \kappa(1+\cos\alpha)\sin\alpha \Big) t.$$

特别地，由（3.11）可得

$$y(T_1^*) \le z(T_1^*) = \alpha + \Big(\|\mathfrak{A}p\|_\infty - \kappa(1+\cos\alpha)\sin\alpha \Big) T_1^* = \alpha - \pi < \alpha^\infty.$$

这与（3.12）矛盾。因此存在 $T < T_1^*$ 使得

$$y(T) < \alpha^\infty.$$

□

结合命题 3.1 与引理 3.3，我们证明了流在有限时间内进入 $O(\mathbb{S}^{d-1})^N_{\alpha^\infty}$。由此得到以下推论。

推论 3.1。 假设系统参数和初始数据满足

$$\alpha \in (0,\pi), \quad \kappa > \frac{\|\mathfrak{A}p\|_\infty}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}, \quad x_i^0 \in O(\mathbb{S}^{d-1})_\alpha, \quad \forall\, i \in [N],$$

并设 $X = \{x_i\}_{i=1}^N$ 是（(3.1)）的一个全局解。那么，存在一个时刻 $T \le T_1^*$ 使得

$$X(t) \in O(\mathbb{S}^{d-1})^N_{\alpha^\infty} \quad \textit{for } t \ge T,$$

其中 T_1^* 定义于 (3.11)。

证明。 我们断言，存在一个有限时间 T 使得

$$X(T) \in O(\mathbb{S}^{d-1})^N_{\alpha^\infty}. \tag{3.16}$$

于是，由于集合 $O(\mathbb{S}^{d-1})^N_{\alpha^\infty}$ 根据命题 3.1是正向不变的，我们得到所需结果:

$$X(t) \in O(\mathbb{S}^{d-1})^N_{\alpha^\infty} \quad \text{for } t \ge T.$$

(3.16）的证明：对于 $\alpha \in (0, \pi/3]$，我们有 $\alpha^\infty = \alpha$，并且可以选择

$$T = 0, \quad X^0 \in O(\mathbb{S}^{d-1})^N_{\alpha^\infty}.$$

因此，我们可以假设 $\alpha \in (\pi/3, \pi)$。 利用（3.6）中的计算，可得 $\langle x_i, p\rangle$ 的微分不等式:

$$\frac{d}{dt}\langle x_i, p\rangle \ge -\|\mathfrak{A}p\|_\infty \sqrt{1-\langle x_i,p\rangle^2} + \kappa R(1-\langle x_i,p\rangle^2).$$

由此 s，我们推导出 $\cos^{-1}\langle x_i, p\rangle$ 的微分不等式。我们分为两种情形 :

$$\text{Case 1: } \langle x_i,p\rangle \ne 1 \quad \text{or} \quad \text{Case 2: } \langle x_i,p\rangle = 1.$$

• **情形 1** ($\langle x_i, p\rangle \neq 1$)：在此情形下，不等式（3.6）推出关于$t \in [0, T_1^*)$：

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\cos^{-1}\langle x_i,p\rangle &= -\frac{1}{\sqrt{1-\langle x_i,p\rangle^2}}\frac{d}{dt}\langle x_i,p\rangle \le \|A_ip\| - \kappa R\sqrt{1-\langle x_i,p\rangle^2}\\ &\le \|\mathfrak{A}p\|_\infty - \frac{\kappa}{N}\sum_{j=1}^N\Big(1+\langle x_j,p\rangle\Big)\sin\big(\cos^{-1}\langle x_i,p\rangle\big),\\ &\le \|\mathfrak{A}p\|_\infty - \frac{\kappa}{N}\sum_{j=1}^N\Big(1+\cos(\cos^{-1}\langle x_j,p\rangle)\Big)\sin\big(\cos^{-1}\langle x_i,p\rangle\big),\end{aligned} \tag{3.17}$$

其中我们使用（3.4）来表示

$$R = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N\Big(1+\langle x_j,p\rangle\Big) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N\Big(1+\cos\big(\cos^{-1}\langle x_j,p\rangle\big)\Big).$$

• **情形 2** ($\langle x_i,\ p\rangle = 1$)：在这样的时刻，$x_i = p$ 且耦合项消失，因此一般而言有 $\dot{x}_i = A_ip$。球面上可微曲线在 p 处的局部展开给出

$$D^+\cos^{-1}\langle x_i,p\rangle = \|A_ip\| \le \|\mathfrak{A}p\|_\infty.$$

由于 $\sin(\cos^{-1}\langle x_i,\ p\rangle) = 0$，我们有

$$D^+\cos^{-1}\langle x_i,p\rangle \le \|\mathfrak{A}p\|_\infty - \frac{\kappa}{N}\sum_{j=1}^N\Big(1+\cos(\cos^{-1}\langle x_j,p\rangle)\Big)\sin\big(\cos^{-1}\langle x_i,p\rangle\big). \tag{3.18}$$

令

$$\vartheta_i(t) := \cos^{-1}\langle x_i(t),p\rangle.$$

由（3.17）和（3.18），对于任意 $i \in [N]$，我们得到

$$D^+\vartheta_i(t) \le \|\mathfrak{A}p\|_\infty - \frac{\kappa}{N}\sum_{j=1}^N\big(1+\cos\vartheta_j(t)\big)\sin\vartheta_i(t). \tag{3.19}$$

现在令 $\mathcal{I}(t)$为极大指标的集合：

$$\mathcal{I}(t) := \big\{j\in[N] : \vartheta_j(t) = \max_{i\in[N]}\vartheta_i(t)\big\}.$$

对每个 $i_0 \in \mathcal{I}(t)$，式3.19给出

$$D^+\vartheta_{i_0}(t) \le \|\mathfrak{A}p\|_\infty - \kappa\left(1+\cos\Big(\max_{i\in[N]}\vartheta_i(t)\Big)\right)\sin\Big(\max_{i\in[N]}\vartheta_i(t)\Big).$$

利用有限最大值的上 Dini 导数法则，可得

$$\begin{aligned}D^+\max_{i\in[N]}\vartheta_i(t) &\le \max_{i_0\in\mathcal{I}(t)} D^+\vartheta_{i_0}(t)\\ &\le \|\mathfrak{A}p\|_\infty - \kappa\left(1+\cos\Big(\max_{i\in[N]}\vartheta_i(t)\Big)\right)\sin\Big(\max_{i\in[N]}\vartheta_i(t)\Big), \quad t\in[0,T_1^*).\end{aligned}$$

如果 $\max_{i\in[N]}\vartheta_i(0) < \alpha^\infty$，那么

$$X^0 \in O(\mathbb{S}^{d-1})^N_{\alpha^\infty}.$$

根据命题 3.1，该集合是正向不变的。因此我们可以取 $T = 0$。否则，引理 3.3 给出一个时刻 $T < T_1^*$ 使得

$$\max_{i\in[N]} \vartheta_i(T) < \alpha^\infty, \quad \text{i.e.,} \quad \cos^{-1}\langle x_i(T), p\rangle < \alpha^\infty, \quad \forall\, i \in [N].$$

这意味着

$$\langle x_i(T), p\rangle > \cos\alpha^\infty, \quad \forall\, i \in [N],$$

或者等价地，

$$X(T) \in O(\mathbb{S}^{d-1})^N_{\alpha^\infty}.$$

这验证了断言（3.16）。 □

3.2. **指数稳定性**。 在本小节中，我们研究 $O(\mathbb{S}^{d-1})^N_{\alpha^\infty}$中两个解的指数稳定性。在整个本小节中，参数 $\alpha \in (\frac{\pi}{3}, \pi)$ 和$\alpha^\infty \in (0, \frac{\pi}{3})$ 满足关系式（2.1），因此由以下定义的系数 μ_{α^∞}

$$\mu_{\alpha^\infty} := (2\cos\alpha^\infty - 1)(1 + \cos\alpha^\infty)$$

为正。

回顾一下，混合范数$\|\cdot\|_{q,2}, 1 \le q \le \infty$在（1.2）中定义。设 $X = (x_1, \cdots, x_N)$~和 $\widetilde{X} = (\widetilde{x}_1, \cdots, \widetilde{x}_N)$ 是方程（3.1）的两个全局解，且具有相同的自然频率矩阵组 $\mathfrak{A}$。在改写它们的方程之前，我们先定义相应的序参量：

$$R(X) := \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N (1 + \langle x_j, p\rangle), \quad R(\widetilde{X}) := \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N (1 + \langle \widetilde{x}_j, p\rangle). \tag{3.20}$$

~然后， X 和 $\widetilde{X}$ 满足

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= A_i x_i + \kappa R(X)(p - \langle x_i, p\rangle x_i), \quad i \in [N]. \\ \dot{\widetilde{x}}_i &= A_i \widetilde{x}_i + \kappa R(\widetilde{X})(p - \langle \widetilde{x}_i, p\rangle \widetilde{x}_i). \end{aligned} \tag{3.21}$$

我们将3.21中的两个方程相减，得到

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(x_i - \widetilde{x}_i) = {} & A_i(x_i - \widetilde{x}_i) + \kappa R(X)(\langle \widetilde{x}_i, p\rangle \widetilde{x}_i - \langle x_i, p\rangle x_i) \\ & + \kappa(R(X) - R(\widetilde{X}))(p - \langle \widetilde{x}_i, p\rangle \widetilde{x}_i). \end{aligned} \tag{3.22}$$

将式 (3.22) 与 $2(x_i - \widetilde{x}_i)$ 取内积，得到

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\|x_i - \widetilde{x}_i\|^2 = {} & 2\langle A_i(x_i - \widetilde{x}_i), x_i - \widetilde{x}_i\rangle \\ & + 2\kappa R(X)\langle \langle \widetilde{x}_i, p\rangle \widetilde{x}_i - \langle x_i, p\rangle x_i, x_i - \widetilde{x}_i\rangle \\ & + 2\kappa(R(X) - R(\widetilde{X}))\langle p - \langle \widetilde{x}_i, p\rangle \widetilde{x}_i, x_i - \widetilde{x}_i\rangle \\ =: {} & \mathcal{I}_{11} + \mathcal{I}_{12} + \mathcal{I}_{13}. \end{aligned} \tag{3.23}$$

在下面的引理中，我们逐一估计三项 $\mathcal{I}_{1i}$， $i = 1, 2, 3$。

引理 3.4. 假设 $X, \widetilde{X} \in O(\mathbb{S}^{d-1})^N_{\alpha^\infty}$。那么，对于每个 $i \in [N]$,

$$\begin{aligned} &(i)\ \mathcal{I}_{11} = 0, \quad \mathcal{I}_{12} \le -2\kappa\cos\alpha^\infty(1 + \cos\alpha^\infty)\|x_i - \widetilde{x}_i\|^2, \\ &(ii)\ |\mathcal{I}_{13}| \le 2\kappa\sin^2\alpha^\infty \|X - \widetilde{X}\|_{1,2}\|x_i - \widetilde{x}_i\|. \end{aligned}$$

证明。 (i) 由于 $A_i^T = -A_i$，我们有

$$\mathcal{I}_{11} = 2\langle A_i(x_i - \widetilde{x}_i), x_i - \widetilde{x}_i\rangle = 0.$$

由于 $\|x_i\| = \|\widetilde{x}_i\| = 1$，直接计算可得

$$\begin{aligned}\langle\langle\widetilde{x}_i, p\rangle\widetilde{x}_i - \langle x_i, p\rangle x_i, x_i - \widetilde{x}_i\rangle &= \langle\widetilde{x}_i, p\rangle(\langle\widetilde{x}_i, x_i\rangle - 1) - \langle x_i, p\rangle(1 - \langle x_i, \widetilde{x}_i\rangle)\\ &= -(\langle x_i, p\rangle + \langle\widetilde{x}_i, p\rangle)(1 - \langle x_i, \widetilde{x}_i\rangle) = -\frac{1}{2}(\langle x_i, p\rangle + \langle\widetilde{x}_i, p\rangle)\|x_i - \widetilde{x}_i\|^2.\end{aligned}$$

因此，我们有

$$\mathcal{I}_{12} = -\kappa R(X)(\langle x_i, p\rangle + \langle\widetilde{x}_i, p\rangle)\|x_i - \widetilde{x}_i\|^2.$$

条件 $X,\ \widetilde{X} \in O(\mathbb{S}^{d-1})^N_{\alpha^\infty}$ 意味着

$$R(X) \geq 1 + \cos\alpha^\infty, \quad \langle x_i, p\rangle + \langle\widetilde{x}_i, p\rangle \geq 2\cos\alpha^\infty,$$

因此我们有

$$\mathcal{I}_{12} \leq -2\kappa\cos\alpha^\infty(1 + \cos\alpha^\infty)\|x_i - \widetilde{x}_i\|^2.$$

（ii）由引理 3.1和（3.2），

$$\begin{aligned}|\mathcal{I}_{13}| &\leq 2\kappa|R(X) - R(\widetilde{X})|\|p - \langle\widetilde{x}_i, p\rangle\widetilde{x}_i\|\|x_i - \widetilde{x}_i\|\\ &= 2\kappa|R(X) - R(\widetilde{X})|\sqrt{1 - \langle\widetilde{x}_i, p\rangle^2}\|x_i - \widetilde{x}_i\| \qquad (3.24)\\ &\leq 2\kappa\sin\alpha^\infty|R(X) - R(\widetilde{X})|\|x_i - \widetilde{x}_i\|.\end{aligned}$$

接下来我们估计序参量之差。对于 $x_j,\ \widetilde{x}_j \in O(\mathbb{S}^{d-1})_{\alpha^\infty}$，我们采用正交分解

$$x_j = \langle x_j, p\rangle p + (x_j - \langle x_j, p\rangle p)$$

并利用柯西–施瓦茨不等式得到

$$\begin{aligned}\langle x_j, \widetilde{x}_j\rangle &= \langle x_j, p\rangle\langle\widetilde{x}_j, p\rangle + \langle x_j - \langle x_j, p\rangle p, \widetilde{x}_j - \langle\widetilde{x}_j, p\rangle p\rangle\\ &\leq \langle x_j, p\rangle\langle\widetilde{x}_j, p\rangle + \sqrt{1 - \langle x_j, p\rangle^2}\sqrt{1 - \langle\widetilde{x}_j, p\rangle^2}\\ &= \cos\left(\cos^{-1}\langle x_j, p\rangle - \cos^{-1}\langle\widetilde{x}_j, p\rangle\right).\end{aligned}$$

因此，我们有

$$\|x_j - \widetilde{x}_j\|^2 = 2(1 - \langle x_j, \widetilde{x}_j\rangle) \geq 4\sin^2\left(\frac{\cos^{-1}\langle x_j, p\rangle - \cos^{-1}\langle\widetilde{x}_j, p\rangle}{2}\right).$$

由于 $0 \leq \cos^{-1}\langle x_j,\ p\rangle,\ \cos^{-1}\langle\widetilde{x}_j,\ p\rangle < \alpha^\infty \prec \frac{\pi}{2}$，我们还有

$$\begin{aligned}|\langle x_j - \widetilde{x}_j, p\rangle| &= \left|\cos\left(\cos^{-1}\langle x_j, p\rangle\right) - \cos\left(\cos^{-1}\langle\widetilde{x}_j, p\rangle\right)\right|\\ &= 2\sin\left(\frac{\cos^{-1}\langle x_j, p\rangle + \cos^{-1}\langle\widetilde{x}_j, p\rangle}{2}\right)\left|\sin\left(\frac{\cos^{-1}\langle x_j, p\rangle - \cos^{-1}\langle\widetilde{x}_j, p\rangle}{2}\right)\right|\\ &\leq \sin\alpha^\infty\|x_j - \widetilde{x}_j\|.\end{aligned}$$

利用（3.20）和 $\|\cdot\|_{1,\ 2}$ 的定义，我们得到

$$|R(X) - R(\widetilde{X})| \leq \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N|\langle x_j - \widetilde{x}_j, p\rangle| \leq \sin\alpha^\infty\|X - \widetilde{X}\|_{1,2}. \qquad (3.25)$$

最后，我们结合（3.24）和（3.25）来验证关于 $\mathcal{I}_{13}$ 的估计。 □

接下来，我们研究柯西问题（3.1）关于初始数据的指数稳定性。

命题 3.2。 假设系统参数和初始数据满足

$$\alpha \in \left(\frac{\pi}{3}, \pi\right), \quad \kappa > \frac{\|\mathfrak{D}p\|_\infty}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}, \quad X^0, \widetilde{X}^0 \in O(\mathbb{S}^{d-1})^N_{\alpha^\infty}, \quad 1 \le q \le \infty,$$

并令 X 和 $\widetilde{X}$ 分别为对应于初始数据 (3.1) 的全局解 X^0 和 $\widetilde{X}^0$。则有指数稳定性：

$$\|X(t) - \widetilde{X}(t)\|_{q,2} \le e^{-\kappa\mu_{\alpha^\infty} t}\|X^0 - \widetilde{X}^0\|_{q,2}, \quad t \ge 0. \tag{3.26}$$

证明。 由（2.1）可得

$$\sin\alpha(1+\cos\alpha) = \sin\alpha^\infty(1+\cos\alpha^\infty).$$

因此，将命题 3.1应用于以 α^∞ 代替 α，得到

$$X(t), \widetilde{X}(t) \in O(\mathbb{S}^{d-1})^N_{\alpha^\infty}, \quad t \ge 0. \tag{3.27}$$

由（3.23）、引理3.4和（3.27），

$$\frac{d}{dt}\|x_i - \widetilde{x}_i\|^2 \le -2\kappa\cos\alpha^\infty(1+\cos\alpha^\infty)\|x_i - \widetilde{x}_i\|^2 + 2\kappa\sin^2\alpha^\infty\|X - \widetilde{X}\|_{1,2}\|x_i - \widetilde{x}_i\|.$$

• **情形 1**：若 $x_i \neq \widetilde{x}_i$，我们将上述关系除以 $2\|x_i - \widetilde{x}_i\|$，得到

$$\frac{d}{dt}\|x_i - \widetilde{x}_i\| \le -\kappa\cos\alpha^\infty(1+\cos\alpha^\infty)\|x_i - \widetilde{x}_i\| + \kappa\sin^2\alpha^\infty\|X - \widetilde{X}\|_{1,2}.$$

• **情形 2**：若 $x_i = \widetilde{x}_i$，我们使用（3.22）、引理 3.1 以及（3.25）推导出上 Dini 导数的相同估计。因此，对每个 $i \in [N]$,

$$D^+\|x_i - \widetilde{x}_i\| \le -\kappa\cos\alpha^\infty(1+\cos\alpha^\infty)\|x_i - \widetilde{x}_i\| + \kappa\sin^2\alpha^\infty\|X - \widetilde{X}\|_{1,2}. \tag{3.28}$$

现在，我们将分析分为三种情形：

$$\text{Case A: } q = 1, \quad \text{Case B: } 1 < q < \infty, \quad \text{Case C: } q = \infty.$$

◇ **情形 2.1** （$q = 1$）：我们对（3.28）在 $i \in [N]$ 上取平均，得到

$$\begin{aligned} D^+\|X - \widetilde{X}\|_{1,2} &\le -\kappa\cos\alpha^\infty(1+\cos\alpha^\infty)\|X - \widetilde{X}\|_{1,2} + \kappa\sin^2\alpha^\infty\|X - \widetilde{X}\|_{1,2} \\ &= -\kappa\mu_{\alpha^\infty}\|X - \widetilde{X}\|_{1,2}. \end{aligned}$$

∼◇ **情形 2.2** $(1 < q < \infty)$：若 $\|X - X\|_{q,\,2} = 0$，由方程 (3.1) 的解的唯一性可知∼X 和 X 从该时刻起重合。否则，由链式法则和 (3.28) 可得

$$\begin{aligned} D^+\|X - \widetilde{X}\|_{q,2} &\le \|X - \widetilde{X}\|_{q,2}^{1-q}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \|x_i - \widetilde{x}_i\|^{q-1} D^+\|x_i - \widetilde{x}_i\| \\ &\le -\kappa\cos\alpha^\infty(1+\cos\alpha^\infty)\|X - \widetilde{X}\|_{q,2} \\ &\quad + \kappa\sin^2\alpha^\infty\|X - \widetilde{X}\|_{q,2}^{1-q}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \|x_i - \widetilde{x}_i\|^{q-1}\right)\|X - \widetilde{X}\|_{1,2}. \end{aligned}$$

由 H¨older 不等式可得

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\|x_i-\widetilde{x}_i\|^{q-1}\le\|X-\widetilde{X}\|_{q,2}^{q-1},\quad \|X-\widetilde{X}\|_{1,2}\le\|X-\widetilde{X}\|_{q,2}.$$

因此，我们有

$$D^+\|X-\widetilde{X}\|_{q,2}\le-\kappa\mu_{\alpha^\infty}\|X-\widetilde{X}\|_{q,2}.$$

◇ **情形 2.3** ($q=\infty$)：我们对有限最大值使用右上 Dini 导数法则，并利用（3.28）得到

$$\begin{aligned}D^+\|X-\widetilde{X}\|_{\infty,2}\le&\max_{\substack{i\in[N]\\ \|x_i-\widetilde{x}_i\|=\|X-\widetilde{X}\|_{\infty,2}}}D^+\|x_i-\widetilde{x}_i\|\\ &\le-\kappa\cos\alpha^\infty(1+\cos\alpha^\infty)\|X-\widetilde{X}\|_{\infty,2}+\kappa\sin^2\alpha^\infty\|X-\widetilde{X}\|_{1,2}\\ &\le-\kappa\mu_{\alpha^\infty}\|X-\widetilde{X}\|_{\infty,2}.\end{aligned}$$

现在，我们结合情形 A、情形 B 和情形 C，可以看出，对于每个 $1\le q\le\infty$,

$$D^+\|X-\widetilde{X}\|_{q,2}\le-\kappa\mu_{\alpha^\infty}\|X-\widetilde{X}\|_{q,2}. \tag{3.29}$$

最后，我们对（3.29）应用 Gronwall 引理，得到（3.26）。 □

3.3. **弛豫动力学**。 在本小节中，我们使用命题 3.2 中的指数稳定性估计，并将一个解与其时间平移进行比较，以证明在 $O(\mathbb{S}^{d-1})^N_{\alpha^\infty}$ 中存在唯一的平衡态，并证明其向该平衡态的指数弛豫。

命题 3.3. 假设系统参数满足

$$\alpha\in\left(\frac{\pi}{3},\pi\right),\quad \kappa>\frac{\|\mathfrak{A}p\|_\infty}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}.$$

那么，系统 (3.1) 存在唯一平衡态 $X^\infty\in O(\mathbb{S}^{d-1})^N_{\alpha^\infty}$。

证明. 对于 $X^0\in O(\mathbb{S}^{d-1})^N_{\alpha^\infty}$，令 $X=X(t)$ 为系统 (3.1) 的对应全局解。由 (2.1)，耦合假设对 α^∞ 也成立，而非 α。因此，命题 3.1给出

$$X(t)\in O(\mathbb{S}^{d-1})^N_{\alpha^\infty},\quad t\ge0. \tag{3.30}$$

对于 $s\ge0$，我们定义

$$\widetilde{X}(t):=X(t+s).$$

˜由于 (3.1) 是自治的， X 是稳定区域内的另一个解。命题 3.2取 $q=2$ 得出

$$\|X(t+s)-X(t)\|_{2,2}\le e^{-\kappa\mu_{\alpha^\infty}t}\|X(s)-X(0)\|_{2,2},\quad t,s\ge0. \tag{3.31}$$

由于 $(\mathbb{S}^{d-1})^N$ 是紧致的，存在 $C>0$ 使得

$$\|X(s)-X(0)\|_{2,2}\le C,\quad s\ge0.$$

取 $t_2\ge t_1\ge0$，令 $t=t_1$ 以及 $s=t_2-t_1$ 代入（3.31）可得

$$\|X(t_2)-X(t_1)\|_{2,2}\le e^{-\kappa\mu_{\alpha^\infty}t_1}\|X(t_2-t_1)-X(0)\|_{2,2}\le Ce^{-\kappa\mu_{\alpha^\infty}t_1}.$$

因此，当 $t \to \infty$ 时， $X(t)$ 是柯西序列。由于 $(\mathbb{S}^{d-1})^N$ 是完备的，存在 $X^\infty \in (\mathbb{S}^{d-1})^N$ 使得

$$\lim_{t\to\infty} \|X(t) - X^\infty\|_{2,2} = 0. \tag{3.32}$$

由（3.30），该极限满足 $X^\infty \in O(\mathbb{S}^{d-1})^N_{\alpha^\infty}$。令 Φ_s 表示（3.1）的流。对于每个$s \geq 0$, 由流的连续性和（3.32）可得

$$\Phi_s(X^\infty) = \lim_{t\to\infty} \Phi_s(X(t)) = \lim_{t\to\infty} X(t+s) = X^\infty,$$

因此 X^∞ 是一个平衡态。若某个分量 $x^\infty_{i_0}$ 位于边界上，则

$$R(X^\infty) \geq 1 + \cos\alpha^\infty$$

由关系式（3.6）可得

$$0 = \frac{d}{dt}\langle x^\infty_{i_0}, p\rangle \geq \sin\alpha^\infty \Big(- \|\mathfrak{A}p\|_\infty + \kappa(1+\cos\alpha^\infty)\sin\alpha^\infty \Big) > 0,$$

最后一个不等式由（2.1）以及关于 κ的假设推出。这个矛盾表明

$$X^\infty \in O(\mathbb{S}^{d-1})^N_{\alpha^\infty}.$$

为证明唯一性，设 X^∞ 和 $\widetilde{X}^\infty$ 是 $O(\mathbb{S}^{d-1})^N_{\alpha^\infty}$中的两个平衡态。将命题 3.2 应用于相应的、满足 $q = \infty$的平稳解，可得

$$\|X^\infty - \widetilde{X}^\infty\|_{\infty,2} \leq e^{-\kappa\mu_{\alpha^\infty} t}\|X^\infty - \widetilde{X}^\infty\|_{\infty,2}, \quad t \geq 0.$$

令 $t \to \infty$，可得 $X^\infty = X^\infty$。 □

接下来，结合推论3.1、命题3.2和命题3.3，得到指数松弛结果。

定理 3.1。假设系统参数和初始数据满足

$$\alpha \in \Big(\frac{\pi}{3}, \pi\Big), \quad \kappa > \frac{\|\mathfrak{A}p\|_\infty}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}, \quad X^0 \in O(\mathbb{S}^{d-1})^N_\alpha,$$

并令 $X = X(t)$ 和 $X^\infty \in O(\mathbb{S}^{d-1})^N_{\alpha^\infty}$ 分别为具有初始数据X^0(3.1) 的全局解，以及由命题*3.3*给出的唯一平衡态。那么，存在$T \leq T_1^*$ 使得对每个 $1 \leq q \leq \infty$,

$$\|X(t) - X^\infty\|_{q,2} \leq e^{-\kappa\mu_{\alpha^\infty}(t-T)}\|X(T) - X^\infty\|_{q,2}, \quad t \geq T, \tag{3.33}$$

其中 T_1^* 定义于(3.11)。

证明。根据推论3.1，存在 $T \leq T_1^*$ 使得

$$X(t) \in O(\mathbb{S}^{d-1})^N_{\alpha^\infty}, \quad t \geq T.$$

时间平移曲线 $t \mapsto X(t+T)$与常值平衡曲线 $t \mapsto X^\infty$ 是方程(3.1的两个解，其初始数据位于 $O(\mathbb{S}^{d-1})^N_{\alpha^\infty}$。因此命题3.2 给出

$$\|X(t+T) - X^\infty\|_{q,2} \leq e^{-\kappa\mu_{\alpha^\infty} t}\|X(T) - X^\infty\|_{q,2}, \quad t \geq 0.$$

将 t 替换为 $t - T$ 即可验证(3.33)。若 $X^0 \in O(\mathbb{S}^{d-1})^N_{\alpha^\infty}$，命题3.1 表明该轨道对所有 $t \geq 0$都保持在此集合中，因此 $T = 0$ 是可行的。□

注 3.1. 我们对定理 *3.1*作如下评论：*(1)* 若 $X^0 \in O(\mathbb{S}^{d-1})^N_{\alpha^\infty}$, 则可取 $T = 0$。

(2) 如引言中所述，定理 *3.1* 表明，只要耦合强度足够大，任何避开对跖点 $-p$ 的初始构型都会指数地收敛到一个平衡态，其阈值取决于初始构型和自然频率矩阵。

(3) 也可以考虑球面模型 (2.2) 采用一般的影响函数$I:\ \mathbb{S}^{d-1}\to[0,\infty)$ 来替代 $1+\langle x_j, p\rangle$。选择 *7* 节（定理 *7.1*）中 p附近的坐标图后，这种模型在局部与该节的抽象框架兼容。不过，要应用定理 *7.1*，向量场的坐标表示

$$S(x)=p-\langle x,p\rangle x$$

以及 I 必须满足局部假设$(\mathcal{F}_B1)$–$(\mathcal{F}_B4)$，尤其是强耗散条件 (7.4)。

4. Winfree oscillators on unitary groups I

本节提出 U(d) 上的典范 Winfree 模型，并研究进入稳定谱区域的有限时间进入、该区域内的指数稳定性、唯一平衡态的存在性以及指数弛豫，沿用上一节的论述方式。我们首先重新表述 $\mathrm{U}(1)=\mathbb{S}^1$ 上的 Winfree 模型。对于 $z_i=e^{\mathrm{i}\theta_i}$，有

$$\dot\theta_i=-\mathrm{i}\dot z_i\overline{z_i},\quad 1+\cos\theta_i=1+\mathrm{Re}z_i,\quad \sin\theta_i=\frac{z_i-\overline{z_i}}{2\mathrm{i}},\tag{4.1}$$

其中，$\bar{}z$ 是 z的复共轭。于是，我们有

$$\begin{aligned}
&\dot\theta_i=\nu_i-\kappa\Big(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N(1+\cos\theta_j)\Big)\sin\theta_i,\\
\iff\quad &-\mathrm{i}\dot z_i\overline{z_i}=\nu_i+\frac{\kappa\mathrm{i}}{N}\sum_{j=1}^N\frac{(1+\mathrm{Re}z_j)}{2}(z_i-\overline{z_i})\quad\text{by (4.1)}\\
\iff\quad &\dot z_i\overline{z_i}=\mathrm{i}\nu_i+\frac{\kappa}{N}\sum_{j=1}^N\frac{(1+\mathrm{Re}z_j)}{2}(\overline{z_i}-z_i)\quad\text{by multiplying by i,}
\end{aligned}$$

即，Winfree模型的复数对应形式变为

$$\dot z_i\overline{z_i}=\mathrm{i}\nu_i+\frac{\kappa}{N}\sum_{j=1}^N\frac{(1+\mathrm{Re}z_j)}{2}(\overline{z_i}-z_i),\quad i\in[N].$$

对于满足 $d\geq 2$的酉群U(d)，我们采用以下对应关系 :

$$(z_i,\bar z_i,\mathrm{i}\nu_i,\mathrm{Re}z_j)\quad\iff\quad\Big(U_i,U_i^\dagger,\Omega_i,\frac{\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\,U_j}{d}\Big),$$

其中 $U^\dagger$是 U的厄米伴随。在上述对应关系下，U(d) 对应于 (1.1) 的方程如下。

$$\dot U_iU_i^\dagger=\Omega_i+\frac{\kappa}{N}\sum_{j=1}^N\frac{d+\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\,U_j(t)}{2d}\Big(U_i^\dagger(t)-U_i(t)\Big),\quad i\in[N],\tag{4.2}$$

其中 $\Omega_1, \cdots, \Omega_N \in \mathbb{C}^{d\times d}$ 是反厄米矩阵：

$$\Omega_i^\dagger = -\Omega_i, \quad i \in [N].$$

下面我们研究酉群上 Winfree 矩阵模型的弛豫动力学，该模型可视为（1.1）的“量子”对应物：

$$\begin{cases} \dot{U}_i U_i^\dagger = \Omega_i + \dfrac{\kappa}{2N}\displaystyle\sum_{j=1}^{N} \frac{d + \operatorname{Re}\operatorname{tr} U_j(t)}{d}\left(U_i{}^\dagger(t) - U_i(t)\right), \quad t > 0, \\ U_i\Big|_{t=0} = U_i^0 \in \mathrm{U}(d), \quad i \in [N], \end{cases} \tag{4.3}$$

其中 $\Omega_1, \ldots, \Omega_N \in \mathbb{C}^{d\times d}$ 为反厄米矩阵，$\dagger$ 表示厄米伴随。记

$$\mathfrak{V} := (\Omega_1, \ldots, \Omega_N), \quad \mathcal{U} := (U_1, \ldots, U_N),$$

并赋予频率元组最大算子范数

$$\|\mathfrak{V}\|_\infty := \max_{i\in[N]} \|\Omega_i\|_{\mathrm{op}}.$$

这里，$\|\cdot\|_{\mathrm{op}}$ 表示由 $\mathbb{C}^d$ 上的欧几里得范数诱导的 $\mathbb{C}^{d\times d}$ 上的算子范数。我们将使用 Schatten–von Neumann范数来度量 U(d) 上的距离。对于复$d \times d$矩阵 U，设 $s_1 \geq \cdots \geq s_d \geq 0$ 为其奇异值，等价地，它们是 $UU^\dagger$的特征值的非负平方根。那么对于 $p \in [1, \infty]$，Schatten–von Neumann$p$-范数定义为

$$\|U\|_{S_p^d} = \begin{cases} \left(\sum_{k=1}^d s_k^p\right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty, \\ \max_{k=1,\cdots,d} s_k, & p = \infty. \end{cases}$$

若对每个固定的 i，$U_i{}^0$ 和Ω_i 同时对角化，例如Ω_i是 I_d的常数倍，则不失一般性，我们可以取

$$U_i(t) = \operatorname{diag}(e^{\mathrm{i}\theta_{i1}}, \cdots, e^{\mathrm{i}\theta_{id}}), \quad \Omega_i = \operatorname{diag}(\mathrm{i}\omega_{i1}, \cdots, \mathrm{i}\omega_{id}),$$

且（4.2）变为

$$\dot{\theta}_{ij} = \omega_{ij} - \frac{\kappa}{Nd}\sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{d}(1 + \cos\theta_{kl})\sin\theta_{ij}, \quad i \in [N], \quad j \in [d],$$

也就是说，它变成了特征值上的 Winfree模型（1.1），其中这些特征值属于 U_1（t） $\cdots$，U_N（t）。反过来，我们也可以将（1.1）视为单个矩阵的特征值演化U_1，该矩阵出现在（4.2）中，且 $N = 1$。我们将看到，一般而言，U_1（t） $\cdots$，U_N（t）的特征值满足与（*1.1*）相同的微分不等式。本节中，我们用 $\succeq$作为矩阵之间的比较算子：

$$A \succeq B \quad \Longleftrightarrow \quad A - B \text{ is positive semidefinite.}$$

类似地，我们记

$$A \succ B \quad \Longleftrightarrow \quad A - B \text{ is positive definite.}$$

4.1. 有限时间进入稳定区域。对于 U(d) 模型，可以引入序参量：

$$R \coloneqq \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{d+\operatorname{Re}\operatorname{tr}U_j}{d}, \tag{4.4}$$

它用于衡量矩阵 U_i 与 I_d 的接近程度，以及它们与 $-I_d$的距离。在此情形下，(4.2)变为

$$\dot{U}_iU_i^{\dagger} = \Omega_i + \frac{\kappa R}{2}(U_i^{\dagger} - U_i). \tag{4.5}$$

同样，整体适定性可由第3节中的相同论证得出。对于$\alpha \in \left(\frac{\pi}{3},\ \pi\right)$，令 $\alpha^{\infty} \in \left(0,\ \frac{\pi}{3}\right)$ 为下列方程的唯一解

$$\sin\alpha^{\infty}(1+\cos\alpha^{\infty}) = \sin\alpha(1+\cos\alpha).$$

我们定义

$$\begin{aligned} &T_2^{*} \coloneqq \frac{\pi}{\kappa\sin\alpha(1+\cos\alpha) - \|\mathfrak{V}\|_{\infty}}, \quad \beta \in (0,\pi], \\ &O(\mathrm{U}(d))_{\beta} \coloneqq \{U \in \mathrm{U}(d) : \operatorname{Re}\lambda > \cos\beta \text{ for every eigenvalue } \lambda \text{ of } U\}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

接下来，我们给出若干初等引理，以供后文使用。

引理 4.1。对于 $U, V \in O(\mathrm{U}(d))_{\alpha^{\infty}}$，有

$$\operatorname{Re}\operatorname{tr}(U-V) \le \sin\alpha^{\infty}\|U-V\|_{S_1^d}.$$

证明。 其证明见附录A。 □

接下来，我们为 $U_j(t)$ 的特征值的实部推导一个微分不等式。为此，我们回顾勾股定理的一个实例。

引理 4.2。 对于酉矩阵 U，设 H 和 K 分别为其厄米部分和反厄米部分：

$$H \coloneqq \frac{U+U^{\dagger}}{2}, \quad K \coloneqq \frac{U-U^{\dagger}}{2}.$$

那么，对于任意向量 $x \in \mathbb{C}^d$，有

$$\|x\|^2 = \|Hx\|^2 + \|Kx\|^2.$$

证明。 尽管在基础线性代数教材中很容易找到该证明，我们仍在附录 B 中给出完整证明。 □

引理 4.3。 设 $\{U_i(t)\}$ 是 (4.3) 的一个全局解，并将 $U_i(t)$的特征值记为 $\lambda_{ik}(t)$、 $k \in [d]$，按实部递减排列：

$$\operatorname{Re}\lambda_{i1}(t) \ge \cdots \ge \operatorname{Re}\lambda_{ik}(t) \ge \cdots \ge \operatorname{Re}\lambda_{id}(t).$$

那么，以下结论成立。

(1) 对于每个 k，实值函数 $t \mapsto$ 实部 $\lambda_{ik}(t)$ 右可微。*(2)* 特征值 λ_{ik} 的实部满足以下微分不等式 性：

$$D^{+}(\operatorname{Re}\lambda_{ik}(t)) \ge -\|\Omega_i\|_{\mathrm{op}}\sqrt{1-(\operatorname{Re}\lambda_{ik}(t))^2} + \kappa R(1-(\operatorname{Re}\lambda_{ik}(t))^2).$$

证明。 (1) 首先，我们定义

$$H_i(t) := \frac{1}{2}(U_i(t) + U_i(t)^\dagger).$$

由于 U_i 是酉矩阵，因此 k大的第 k 个特征值 H_i 等于 Re λ_{ik}。根据 [HUL99，定理 3。3],有序特征值函数具有单侧方向导数；对厄米矩阵，通过实化可得相同的压缩公式，而实化会使每个特征值重复两次。由于 $H_i(t+h) = H_i(t) + hH_i(t) + o(h)$，且有序厄米特征值关于矩阵论证是 Lipschitz 连续的，因此每个时刻（包括特征值交叉时）都存在通常的右导数。因此，它与右上 Dini 导数一致，由此得到

$$D^+\mathrm{Re}\lambda_{ik}(t) = (k - \hat{k} + 1)\text{-th largest eigenvalue of } V_{i,k}^\dagger \dot{H}_i V_{i,k},$$

其中

$$\hat{k} = \min\{l : \mathrm{Re}\,\lambda_{il} = \mathrm{Re}\,\lambda_{ik}\}, \quad \bar{k} = \max\{l : \mathrm{Re}\,\lambda_{il} = \mathrm{Re}\,\lambda_{ik}\},$$

并且 V_i 是一个将 H_i对角化的酉矩阵：

$$V_i^\dagger H_i V_i = \mathrm{diag}(\mathrm{Re}\,\lambda_{i1}, \cdots, \mathrm{Re}\,\lambda_{id}),$$

an ˆ ˆ d $V_{i,\ k}$是 V_i的子矩阵，由索引为 k，$k+1$，$\cdots$，的列组成 $\bar{k}$.

(2) 接下来，我们需要分析 $V_i^\dagger{}_{,\ k}\dot{H}_i V_{i,\ k}$的特征值。设 $(\eta,\ y)$ 是$V_i^\dagger{}_{,\ k}\dot{H}_i V_{i,\ k}$ 的任意一个特征对，其中 $\|y\| = 1$，于是

$$(V_{i,k}^\dagger \dot{H}_i V_{i,k})y = \eta y, \quad \|y\| = 1.$$

因此，我们有

$$(V_{i,k}y)^\dagger \dot{H}_i (V_{i,k}y) = \eta.$$

因此，只需在 $x^\dagger \dot{H}_i x$ 上建立一个不等式，其中 $x \in \mathbb{C}^d$ 是 V_i 的列向量的线性组合$_{,\ k}$。此外，由于$V_{i,\ k}$ 满足

$$V_{i,k}^\dagger V_{i,k} = I_{\bar{k}-\hat{k}+1},$$

我们可以假设 x 是一个单位向量。相应地，令 x_k 为V_i列空间中的任意单位向量。我们将在下文估计 $x_k^\dagger \dot{H}_i x_k$ 。注意，根据$V_{i,\ k}$、ˆk和 $\bar{k}$ 的定义，我们还有

$$H_i x_k = (\mathrm{Re}\lambda_{ik})x_k. \tag{4.7}$$

接下来，我们推导 H_i的动力学。由（4.3），我们有

$$\dot{U}_i = \Omega_i U_i + \frac{\kappa R}{2}(I_d - U_i^2).$$

因此，我们得到以下关于 H_i的微分方程：

$$\begin{aligned}
\dot{H}_i &= \frac{1}{2}(\dot{U}_i + \dot{U}_i^\dagger) \\
&= \frac{1}{2}\big(\Omega_i U_i + U_i^\dagger \Omega_i^\dagger\big) + \frac{\kappa R}{2}\left(I_d - \frac{U_i^2 + (U_i^\dagger)^2}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\big(\Omega_i U_i + U_i^\dagger \Omega_i^\dagger\big) + \kappa R\big(I_d - H_i^2\big).
\end{aligned} \tag{4.8}$$

在最后一个等式中，我们使用了以下单位元：

$$H_i^2 = \frac{1}{4}(U_i^2 + (U_i^\dagger)^2 + 2I_d) \quad \Longleftrightarrow \quad I_d - H_i^2 = \frac{1}{2}\left(I_d - \frac{U_i^2 + (U_i^\dagger)^2}{2}\right).$$

结合（4.7）和（4.8）可得

$$\begin{aligned} x_k^\dagger \dot{H}_i x_k &= \frac{1}{2} x_k^\dagger (\Omega_i U_i + U_i^\dagger \Omega_i^\dagger) x_k + \kappa R(1 - (\mathrm{Re}\lambda_{ik})^2) \\ &= \mathrm{Re}(x_k^\dagger \Omega_i U_i x_k) + \kappa R(1 - (\mathrm{Re}\lambda_{ik})^2). \end{aligned} \tag{4.9}$$

最后，我们对（4.9）中的第一项作如下估计。为此，我们定义

$$K_i := \frac{1}{2}(U_i - U_i^\dagger).$$

于是，由于 Ω_i 是反厄米的，我们有

$$\mathrm{Re}(x_k^\dagger \Omega_i H_i x_k) = \mathrm{Re}\lambda_{ik} \mathrm{Re}(x_k^\dagger \Omega_i x_k) = 0. \tag{4.10}$$

由（4.10）、引理 4.2、柯西–施瓦茨不等式以及 x_k的定义可得

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(x_k^\dagger \Omega_i U_i x_k) &= \mathrm{Re}(x_k^\dagger \Omega_i H_i x_k) + \mathrm{Re}(x_k^\dagger \Omega_i K_i x_k) \\ &= \mathrm{Re}\big((x_k^\dagger \Omega_i) \cdot (K_i x_k)\big) \\ &\geq -\|x_k^\dagger \Omega_i\| \cdot \|K_i x_k\| \\ &\geq -\|\Omega_i\|_{\mathrm{op}} \sqrt{1 - (\mathrm{Re}\lambda_{ik})^2}. \end{aligned} \tag{4.11}$$

最后，结合（4.9）和（4.11）可得所需结果：

$$D^+(\mathrm{Re}\lambda_{ik}) \geq -\|\Omega_i\|_{\mathrm{op}} \sqrt{1 - (\mathrm{Re}\lambda_{ik})^2} + \kappa R(1 - (\mathrm{Re}\lambda_{ik})^2).$$

□

接下来，我们证明有限时间进入不变集 $O(\mathrm{U}(d))_{\alpha^\infty}^N$。

引理 4.4. 假设参数和初始数据满足

$$\alpha \in \left(\frac{\pi}{3}, \pi\right), \quad \kappa > \frac{\|\mathfrak{V}\|_\infty}{\sin\alpha(1 + \cos\alpha)}, \quad U_i^0 \in \overline{O(\mathrm{U}(d))_\alpha}, \quad i \in [N],$$

且令 $\mathcal{U}(t) = \{U_i(t)\}_{i=1}^N$ 为方程 (4.3)的全局解。那么存在 $T < T_2^*$ 使得

$$\mathcal{U}(t) \in O(\mathrm{U}(d))_{\alpha^\infty}^N, \quad t \geq T,$$

其中 T_2^* 是由 (4.6)定义的正常数。

证明。 证明分为两步。首先，我们推导最大谱角的一个微分不等式。其次，我们利用 $(1 + \cos\theta)\sin\theta$ 的单峰性来证明有限时间进入。

• **步骤 A**（最大谱角的微分不等式）：对于每个 $i \in [N]$，将 $U_i(t)$ 的特征值记为 $\lambda_{ik}(t)$、$k \in [d]$，并按实部递减排列：

$$\mathrm{Re}\lambda_{i1}(t) \geq \cdots \geq \mathrm{Re}\lambda_{ik}(t) \geq \cdots \geq \mathrm{Re}\lambda_{id}(t).$$

现在我们定义

$$\rho_i(t) = \cos^{-1}\big(\mathrm{Re}\lambda_{id}(t)\big), \quad \rho(t) := \max_{i \in [N]} \rho_i(t).$$

根据此定义，对于每个 $\beta \in (0, \pi)$，有

$$U_i(t) \in O(\mathrm{U}(d))_\beta \quad \Longleftrightarrow \quad \rho_i(t) < \beta,$$

and

$$\mathcal{U}(t) \in O(\mathrm{U}(d))_\beta^N \quad \Longleftrightarrow \quad \rho(t) < \beta.$$

我们应用引理 4.3 以及 $k = d$ 得到

$$D^+ \mathrm{Re}\lambda_{id}(t) \geq -\|\Omega_i\|_{\mathrm{op}} \sqrt{1 - (\mathrm{Re}\lambda_{id})^2} + \kappa R(1 - (\mathrm{Re}\lambda_{id})^2). \tag{4.12}$$

For $\rho_i(t) \in (0, \pi)$，引理 4.3 以及普通右导数的链式法则给出 e

$$D^+ \rho_i(t) \leq \|\Omega_i\|_{\mathrm{op}} - \kappa R(t) \sin \rho_i(t). \tag{4.13}$$

若 $\rho_i(t) = 0$，则 $U_i(t) = I_d$，且（4.5）给出 $U_i(t) = \Omega_{i\circ}$ 现在，我们使用

$$\|U_i(t+h) - I_d\|_{\mathrm{op}} = 2 \sin \frac{\rho_i(t+h)}{2} \quad \text{and} \quad U_i(t+h) = I_d + h\Omega_i + o(h)$$

得到

$$D^+ \rho_i(t) = \|\Omega_i\|_{\mathrm{op}}.$$

因此，关系式（4.13）在 $\rho_i(t) = 0$时也成立。另一方面，在 $\rho_i(t) = \pi$处，有界$\rho_i \leq \pi$ 得到

$$D^+ \rho_i(t) \leq 0 \leq \|\Omega_i\|_{\mathrm{op}}.$$

因此，关系式（4.13）在两个端点处均成立，在特征值重数处及发生交叉时也成立。根据 $\rho(t)$ 的定义，可得

$$\mathrm{Re}\lambda_{ik}(t) \geq \cos \rho(t), \quad \forall\, i \in [N],\ k \in [d].$$

因此，我们有

$$R(t) = 1 + \frac{1}{Nd} \sum_{j=1}^N \mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\, U_j(t) = 1 + \frac{1}{Nd} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^d \mathrm{Re}\lambda_{jk}(t) \geq 1 + \cos \rho(t).$$

利用 （4.13）以及有限最大值的右上 Dini 导数法则，可得 in

$$D^+ \rho(t) \leq \|\mathfrak{V}\|_\infty - \kappa(1 + \cos \rho(t)) \sin \rho(t). \tag{4.14}$$

• **步骤 B**（进入 $O(\mathrm{U}(d))_{\alpha\infty}^N$）：令

$$g(\theta) := (1 + \cos\theta) \sin\theta.$$

函数 g 在 $(0, \pi/3]$ 上递增，在 $[\pi/3, \pi)$ 上递减，并且 $g(\alpha^\infty) = g(\alpha)$。因此，我们有

$$g(\theta) \geq g(\alpha) \quad \text{for } \theta \in [\alpha^\infty, \alpha].$$

由（4.14）可知，只要 $\rho(t) \in [\alpha^\infty, \alpha]$,

$$D^+ \rho(t) \leq -(\kappa \sin\alpha(1 + \cos\alpha) - \|\mathfrak{V}\|_\infty) < 0. \tag{4.15}$$

由于 $U_i(0) \in O(\overline{\mathrm{U}(d)})_\alpha$，因此我们有

$$\rho(0) \leq \alpha.$$

(4.15) 中的严格不等式在 $\rho = \alpha$ 处阻止了向外穿越。如果 $\rho(0) < \alpha^\infty$，我们取 $T = 0$；否则，我们设为

$$\tau := \inf\{t \geq 0 : \rho(t) \leq \alpha^\infty\}.$$

虽然 $\rho(t) \in [\alpha^\infty, \alpha]$，但关系式 (4.15) 给出

$$\tau \le \frac{\rho(0) - \alpha^\infty}{\kappa \sin\alpha(1+\cos\alpha) - \|\mathfrak{V}\|_\infty} \le \frac{\alpha - \alpha^\infty}{\kappa \sin\alpha(1+\cos\alpha) - \|\mathfrak{V}\|_\infty} < T_2^*.$$

在 $\rho = \alpha^\infty$处，严格不等式（4.15）仍然成立，因为 g（α^∞） $= g$（α）。因此，由连续性和 D^+ 的定义可得 $\varepsilon > 0$ ，使得

$$\rho(t) < \alpha^\infty, \quad t \in (\tau, \tau+\varepsilon].$$

由于 $\tau < T_2^*$，取

$$T \in \big(\tau, \min\{\tau+\varepsilon, T_2^*\}\big).$$

于是，我们有

$$\rho(T) < \alpha^\infty.$$

边界处（4.15）中的同一严格不等式排除了首次离开，因此

$$\rho(t) < \alpha^\infty, \quad t \ge T.$$

等价地，我们有

$$\mathcal{U}(t) \in O(\mathrm{U}(d))_{\alpha^\infty}^N \quad \text{for every } t \ge T.$$

□

注 4.1。 如果 $\mathcal{U}^0 \in O(\mathrm{U}(d))_{\alpha^\infty}^N$，则可以取 $T = 0$。

4.2. **指数稳定性**。 在本小节中，我们针对初始数据建立（4.3）的指数稳定性。为此，我们为一个 N-元组 $\mathcal{C} = (C_1, \dots, C_N)$ $d \times d$ 复矩阵定义一个混合范数：

$$\|\mathcal{C}\|_{\ell_q^N(S_p^d)} := \begin{cases} \left(\dfrac{1}{N} \displaystyle\sum_{i=1}^N \|C_i\|_{S_p^d}^q \right)^{1/q}, & 1 \le q < \infty, \\ \max\limits_{i\in[N]} \|C_i\|_{S_p^d}, & q = \infty. \end{cases}$$

回顾第 μ_{α^∞} 3.2节中使用的正系数：

$$\mu_{\alpha^\infty} = (2\cos\alpha^\infty - 1)(1 + \cos\alpha^\infty).$$

引理 4.5。 设参数和初始数据满足

$$1 \le p \le \infty, \quad 1 \le q \le \infty, \quad \alpha \in \left(\frac{\pi}{3}, \pi\right), \quad \kappa > \frac{\|\mathfrak{V}\|_\infty}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)},$$

~并设 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{U}$ 分别是方程 (4.3) 满足初始数据条件的全局解

$$U_i^0, \ \widetilde{U}_i^0 \in \overline{O(\mathrm{U}(d))_\alpha}, \quad \forall\, i \in [N].$$

则存在 $T < T_2^*$ 使得

$$\|\mathcal{U}(t) - \widetilde{\mathcal{U}}(t)\|_{\ell_q^N(S_p^d)} \le e^{-\kappa\mu_{\alpha^\infty}(t-T)} \|\mathcal{U}(T) - \widetilde{\mathcal{U}}(T)\|_{\ell_q^N(S_p^d)}, \quad t \ge T.$$

证明。 由引理 4.4，每个解都会在时刻 $O(\mathrm{U}(d))_{\alpha^\infty}^N$ 之前进入 T_2^*。令 T为两个进入时刻中较晚的一个，并对 $t \ge T$定义

$$W_i(t) := U_i(t) - \widetilde{U}_i(t), \quad \mathcal{W}(t) := (W_1(t), \dots, W_N(t)).$$

证明分为以下四步：推导差分方程，估计 Schatten 范数，控制序参量差，并转到混合范数。只需证明

$$D^+\|\mathcal{W}(t)\|_{\ell_q^N(S_p^d)} \le -\kappa\mu_{\alpha^\infty}\|\mathcal{W}(t)\|_{\ell_q^N(S_p^d)}, \quad t \ge T. \tag{4.16}$$

• **步骤 A**（差分方程和稳定区域界）：关键的非交换恒等式为

$$U_i^2 - \widetilde{U}_i^2 = U_i W_i + W_i \widetilde{U}_i,$$

其中 W_i 已在上文定义。令 R 和 R 分别为与 $\mathcal{U}$ 和 $\widetilde{\mathcal{U}}$ 相关联的序参量，如（4.4）所示。将（U_i 和 U_i 的方程在（4.3）中相减，得到

$$\dot{W}_i = \Omega_i W_i - \frac{\kappa R}{2}\big(U_i W_i + W_i \widetilde{U}_i\big) + \frac{\kappa(R-\widetilde{R})}{2}\big(I_d - \widetilde{U}_i^2\big). \tag{4.17}$$

对于 $t \ge T$，我们有

$$\frac{U_i + U_i^\dagger}{2} \succeq \cos\alpha^\infty I_d, \quad \frac{\widetilde{U}_i + \widetilde{U}_i^\dagger}{2} \succeq \cos\alpha^\infty I_d, \quad R \ge 1 + \cos\alpha^\infty. \tag{4.18}$$

此外，我们有

$$\|I_d - \widetilde{U}_i^2\|_{\mathrm{op}} \le 2\sin\alpha^\infty.$$

• **步骤 B**（Schatten 范数估计）：固定 $t \ge T$，令 $a = \alpha^\infty$，并计算所有系数在 t处的值，然后将（4.17）改写为 $W_i = A_i W_i + W_i B_i + F_i$，其中

$$A_i = \Omega_i - \tfrac{\kappa R}{2} U_i, \qquad B_i = -\tfrac{\kappa R}{2}\widetilde{U}_i, \qquad F_i = \tfrac{\kappa(R-\widetilde{R})}{2}(I_d - \widetilde{U}_i^2).$$

令 $\gamma = \kappa R\cos(a)/2$。由 (4.18) 以及 Ω_i的反厄米特性，A_i和 B_i 的厄米部分均有上界 $-\gamma I_d$。对 $\|e^{sA_i}v\|^2$ 和 $\|e^{sB_i}v\|^2$ 求导可得

$$\|e^{hA_i}\|_{\mathrm{op}},\ \|e^{hB_i}\|_{\mathrm{op}} \le e^{-\gamma h}, \qquad h \ge 0. \tag{4.19}$$

当 $h \downarrow 0$ 时，取一阶近似，

$$W_i(t+h) = e^{hA_i} W_i(t) e^{hB_i} + hF_i + o(h).$$

对于 $1 \le p \le \infty$，由 Schatten 理想不等式可得

$$\|PWQ\|_{S_p^d} \le \|P\|_{\mathrm{op}}\|W\|_{S_p^d}\|Q\|_{\mathrm{op}}.$$

由于$\|I_d - \widetilde{U}_i^2\|_{S_p^d} \le 2d^{1/p}\sin\ a$，取右上差商可得

$$D^+\|W_i\|_{S_p^d} \le -\kappa R\cos(a)\|W_i\|_{S_p^d} + \kappa d^{1/p}\sin(a)|R-\widetilde{R}|, \tag{4.20}$$

采用约定 $1/\infty = 0$。当 $W_i(t) = 0$ 时，此结论同样成立。

• **步骤 C** (序参数之差)：由 (4.4) 以及引理 4.1分别沿两个方向应用，可得

$$|R-\widetilde{R}| \le \frac{\sin\alpha^\infty}{Nd}\sum_{j=1}^N \|W_j\|_{S_1^d} \le \sin\alpha^\infty d^{-1/p}\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N\|W_j\|_{S_p^d} = \sin\alpha^\infty d^{-1/p}\|\mathcal{W}\|_{\ell_1^N(S_p^d)}. \tag{4.21}$$

结合（4.18）、（4.20）和（4.21），可得

$$D^+\|W_i\|_{S_p^d} \le -\kappa\cos\alpha^\infty(1+\cos\alpha^\infty)\|W_i\|_{S_p^d} + \frac{\kappa\sin^2\alpha^\infty}{N}\sum_{j=1}^N\|W_j\|_{S_p^d}. \tag{4.22}$$

• **步骤 D**（混合范数估计）：对于 $q=1$，对 i 上的（4.22）取平均，并利用右上 Dini 导数的次可加性可得

$$D^+\left(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\|W_j\|_{S_p^d}\right)\le -\kappa\mu_{\alpha^\infty}\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\|W_j\|_{S_p^d}.$$

对于 $1\le q<\infty$，我们设

$$Y_q(t):=\left(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\|W_j(t)\|_{S_p^d}^q\right)^{1/q}.$$

因此，上述不等式可写为

$$D^+Y_1\le -\kappa\mu_{\alpha^\infty}Y_1.$$

对于 $1<q<\infty$，在满足 $Y_q(t)>0$ 时，(4.22)、H¨older 不等式以及 $Y_1\le Y_q$ 意味着

$$\begin{aligned}D^+Y_q&\le -\kappa\cos\alpha^\infty(1+\cos\alpha^\infty)Y_q+\kappa\sin^2\alpha^\infty Y_1Y_q^{1-q}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\|W_i\|_{S_p^d}^{q-1}\\&\le -\kappa\big(\cos\alpha^\infty(1+\cos\alpha^\infty)-\sin^2\alpha^\infty\big)Y_q=-\kappa\mu_{\alpha^\infty}Y_q.\end{aligned}$$

当 $Y_q(t)=0$ 时，两个完整状态在时间 t 达成一致。由解的唯一性可得

$$\mathcal{W}(s)=0\quad\text{for all } s\ge t,$$

因此我们有

$$D^+Y_q(t)=0.$$

对于 $q=\infty$，我们设 $Y_\infty(t)=$最大值$_i\,\|W_i(t)\|_{S_p^d}$。在达到最大值的指标处，(4.22)和 $Y_1\le Y_\infty$ 将该分量的右上 Dini 导数限制为 $-\kappa\mu_{\alpha^\infty}Y_\infty$。令$\mathcal{I}(t)=\{i:\ \|W_i(t)\|_{S_p^d}=Y_\infty(t)\}$。由于分量范数连续且 N 有限，

$$D^+Y_\infty(t)=\max_{i\in\mathcal{I}(t)}D^+\|W_i(t)\|_{S_p^d}\le -\kappa\mu_{\alpha^\infty}Y_\infty(t),$$

其中该不等式由（4.22）和 $Y_1\le Y_\infty$ 得出。由 Gronwall 引理可得，对所有 $1\le p,\ q\le\infty$，均有上述压缩结论。□

Re注记 4.2。 如果两个初始状态都属于 $O(\mathrm{U}(d))_{\alpha^\infty}^N$，那么可以取 $T=0$.

4.3. **弛豫动力学**。 在本小节中，我们使用引理4.5 并将一个解与其时间平移进行比较，以证明在 $O(\mathrm{U}(d))_{\alpha^\infty}^N$中平衡态的存在性与唯一性，以及向其指数弛豫。

命题 4.1。 假设系统参数满足

$$\alpha\in\left(\frac{\pi}{3},\pi\right),\quad \kappa>\frac{\|\mathfrak{V}\|_\infty}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}.$$

那么系统 (4.3) 存在唯一平衡态 $\mathcal{U}^\infty\in O(\mathrm{U}(d))_{\alpha^\infty}^N$。

证明。 我们选取 $\mathcal{U}^0\in O(\mathrm{U}(d))_{\alpha^\infty}^N$，并令 $\mathcal{U}(t)$ 为相应的全局解。现在，我们使用引理 4.4 和 $T=0$，可知该区域是正向不变的。对于 $s\ge 0$，我们定义

$$\widetilde{\mathcal{U}}(t):=\mathcal{U}(t+s).$$

~该系统是自治的，因此 $\mathcal{U}$ 是同一稳定区域内的另一个解。引理 4.5结合 $p=q=2$ 和 $T=0$ 可得

$$\|\mathcal{U}(t+s)-\mathcal{U}(t)\|_{\ell_2^N(S_2^d)} \le e^{-\kappa\mu_{\alpha^\infty} t}\|\mathcal{U}(s)-\mathcal{U}(0)\|_{\ell_2^N(S_2^d)}. \tag{4.23}$$

由于 $\mathrm{U}(d)^N$ 是紧致的，(4.23)中的最后一个因子关于 s一致有界。对于 $t_2 \ge t_1 \ge 0$，我们取

$$t = t_1 \quad \text{and} \quad s = t_2 - t_1 \quad \text{in (4.23)}$$

从而得到

$$\|\mathcal{U}(t_2)-\mathcal{U}(t_1)\|_{\ell_2^N(S_2^d)} \le Ce^{-\kappa\mu_{\alpha^\infty} t_1},$$

其中 C与 t_1和 t_2无关。因此 $\mathcal{U}(t)$ 是柯西序列，并收敛于某个 $\mathcal{U}^\infty \in \mathrm{U}(d)^N$。若 Φ_h 表示(4.3)的流，则对于每个 $h \ge 0$,

$$\Phi_h(\mathcal{U}^\infty) = \lim_{t\to\infty}\Phi_h(\mathcal{U}(t)) = \lim_{t\to\infty}\mathcal{U}(t+h) = \mathcal{U}^\infty.$$

因此， $\mathcal{U}^\infty$ 是一个平衡态。还需证明该极限平衡态属于开稳定区域。由连续性首先可得

$$\mathcal{U}^\infty \in \overline{O(\mathrm{U}(d))_{\alpha^\infty}}^N.$$

假设对于某个 $i \in [N]$，厄米特部分

$$H_i^\infty := \frac{U_i^\infty + U_i^{\infty\dagger}}{2}$$

具有最小特征值 $\cos\alpha^\infty$。我们在该特征子空间中选取一个单位向量 x 。于是$H_i^\infty x = \cos\alpha^\infty x$, 引理 4.2 给出精确的恒等式

$$\left\|\frac{U_i^\infty - U_i^{\infty\dagger}}{2}x\right\|^2 = 1 - \|H_i^\infty x\|^2 = \sin^2\alpha^\infty.$$

此外，Ω_i 的反厄米特性意味着

$$\mathrm{Re}(x^\dagger \Omega_i H_i^\infty x) = \cos\alpha^\infty \,\mathrm{Re}(x^\dagger\Omega_i x) = 0.$$

在平衡态处计算（4.8），并利用这些恒等式，可得

$$\begin{aligned} 0 = x^\dagger \dot{H}_i x &= \mathrm{Re}(x^\dagger\Omega_i\frac{U_i^\infty - U_i^{\infty\dagger}}{2}x) + \kappa R(\mathcal{U}^\infty)\sin^2\alpha^\infty \\ &\ge -\|\Omega_i\|_{\mathrm{op}}\sin\alpha^\infty + \kappa(1+\cos\alpha^\infty)\sin^2\alpha^\infty \\ &\ge \sin\alpha^\infty\left[\kappa\sin\alpha(1+\cos\alpha) - \|\mathfrak{V}\|_\infty\right] > 0. \end{aligned}$$

第一个不等式由柯西–施瓦茨不等式和 $R(\mathcal{U}^\infty) \ge 1+\cos\alpha^\infty$得到；第二个不等式则利用了（2.1）。这一矛盾表明 $\mathcal{U}^\infty \in O(\mathrm{U}(d))^N_{\alpha^\infty}$。

最后，设 $\mathcal{U}^\infty$ 和 $\mathcal{V}^\infty$ 是 $O(\mathrm{U}(d))^N_{\alpha^\infty}$中的两个平衡态。引理 4.5 结合 $p=q=2$ 和$T=0$ 应用于两个常值解，得到

$$\|\mathcal{U}^\infty - \mathcal{V}^\infty\|_{\ell_2^N(S_2^d)} \le e^{-\kappa\mu_{\alpha^\infty} t}\|\mathcal{U}^\infty - \mathcal{V}^\infty\|_{\ell_2^N(S_2^d)}, \quad t \ge 0.$$

令 $t\to\infty$ 可得

$$\mathcal{U}^\infty = \mathcal{V}^\infty.$$

□

注 4.3。 请注意，唯一性断言仅限于 $O(\mathrm{U}(d))_{\alpha\infty}^{N}$。一般而言，全局唯一性并不成立：当所有$\Omega_i = 0$时，任意酉对合配置 $U_i^2 = I_d$都是一个平衡态。压缩论证恰好给出了弛豫定理所需的唯一性。

接下来，我们证明趋于由命题4.1保证存在的平衡态的指数收敛性。

定理4.1。 假设参数和初始数据满足

$$1 \le p \le \infty, \quad 1 \le q \le \infty, \quad \alpha \in \left(\frac{\pi}{3}, \pi\right),$$
$$\kappa > \frac{\|\mathfrak{V}\|_\infty}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}, \quad U_i^0 \in \overline{O(\mathrm{U}(d))_\alpha}, \quad i \in [N],$$

并令 $\mathcal{U}(t)$和 $\mathcal{U}^\infty \in O(\mathrm{U}(d))_{\alpha\infty}^{N}$分别为方程 (4.3) 的全局解以及命题 *4.1*中的唯一平衡态。则存在 $T < T_2^*$ 使得

$$\|\mathcal{U}(t) - \mathcal{U}^\infty\|_{\ell_q^N(S_p^d)} \le e^{-\kappa\mu_{\alpha\infty}(t-T)}\|\mathcal{U}(T) - \mathcal{U}^\infty\|_{\ell_q^N(S_p^d)}, \quad t \ge T. \tag{4.24}$$

证明。 注意，引理 4.4 给出了 $T < T_2^*$ 使得

$$\mathcal{U}(t) \in O(\mathrm{U}(d))_{\alpha\infty}^{N} \quad \text{for all } t \ge T.$$

平衡态 $\mathcal{U}^\infty$ 在同一区域内生成一个常值解。将引理 4.5应用于平移后的解 $\mathcal{U}(T+\cdot)$ 和常值平衡态，可得（4.24）。如果初始状态已经处于稳定区域内，则引理 4.4 允许 $T = 0$。 □

注记 4.4. 关于定理 *4.1*，我们作如下说明：

(1) 若 $\mathcal{U}^0 \in O(U(d))_{\alpha\infty}^{N}$，则可以取 $T = 0$。*(2)* 如引言中所述，定理*4.1*表明，只要耦合强度足够大，任何组成矩阵的特征值均不等于 -1 的初始构型都会指数地收敛到一个平衡态，其阈值取决于初始构型和自然频率矩阵。*(3)* 还可以考虑影响函数为一般形式 $I\colon U(d) \to [0,\infty)$ 的酉模型 *(4.3)*，以取代 $1 + (\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\,U_j)/d$。第 *5* 节研究了这种推广，并在框架 $(\mathcal{F}_A1)$–$(\mathcal{F}_A3)$ 及耦合强度和影响函数满足适当条件时，证明了指数弛豫（定理 *5.1*）。此外，在围绕 I_d 选取坐标图后，该模型与第 *7* 节的抽象框架局部相容（定理 *7.1*）。然而，要应用定理 *7.1*，向量场的坐标表示

$$S(U) = \frac{1}{2}(I_d - U^2)$$

以及 I 必须满足局部假设（$\mathcal{F}_B1$）–（$\mathcal{F}_B4$），尤其是强耗散条件（7.4）。

注 4.5 （酉平衡态存在的临界耦合）。 设 $\mathrm{i}\omega_{i1}, \ldots, \mathrm{i}\omega_{id}$ 为 Ω_i的特征值，按代数重数计。在典范酉模型的平衡态下，关系式 (4.5) 给出

$$\Omega_i = \frac{\kappa R}{2}(U_i - U_i^\dagger).$$

因此 U_i 与 Ω_i对易。由于这两个矩阵都是正规矩阵，对于每个 i ，我们都可以选取一个共同的标准正交特征基，并将 表示为与对应的iω_{ik}的特征值。在这些基下，平衡方程和序参量 (4.4) 变为

$$\omega_{ik} = \kappa R \sin\theta_{ik}, \qquad R = 1 + \frac{1}{Nd}\sum_{j=1}^{N}\sum_{\ell=1}^{d}\cos\theta_{j\ell}.$$

这恰好是含有 Nd 个振子、频率元组为 $(\omega_{ik})_{i,\ k}$ 的标量 *Winfree* 模型的平衡方程 (1.1) 。反过来，取 U_i 为对角矩阵，其对角元素为 $e^{\mathrm{i}\theta_{ik}}$ ，并以 Ω_i 的一组正交归一特征基为基底，则这些标量方程的任意一个解都给出一个酉平衡态。

因此，对于 $\mathfrak{V} \neq 0$ 和 $\kappa > 0$，酉模型存在平衡态，当且仅当 $\kappa \geq \kappa_{\mathrm{c}}$，其中 [Ryo26，命题 63] 给出

$$\kappa_{\mathrm{c}} = \min_{u \geq \|\mathfrak{V}\|_\infty} \frac{u}{1 + \frac{1}{Nd}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{d}\sqrt{1-\omega_{ik}^2/u^2}}.$$

若 $\mathfrak{V} = 0$，则对任意 $\kappa \geq 0$，单位配置都是平衡态，因此 $\kappa_{\mathrm{c}} = 0$.

5. Winfree oscillators on unitary groups II

本节将第 4 节的分析推广到具有一般影响函数的 Winfree 矩阵模型。考虑以下柯西问题:

$$\begin{cases} \dot{U}_i U_i^\dagger = \Omega_i + \dfrac{\kappa}{2N}\displaystyle\sum_{j=1}^{N} I(U_j)\left(U_i^\dagger - U_i\right), \quad t > 0, \\ U_i\big|_{t=0} = U_i^0 \in \mathrm{U}(d), \quad i \in [N], \end{cases} \tag{5.1}$$

其中 Ω_1、……、$\Omega_N \in \mathbb{C}^{d\times d}$ 为反厄米矩阵， $I\colon \mathrm{U}(d) \to \mathbb{R}$ 为影响函数。对于 $\beta \in (0,\ \pi]$, 我们回顾稳定区域

$$O(\mathrm{U}(d))_\beta \coloneqq \{U \in \mathrm{U}(d) : \mathrm{Re}\,\lambda > \cos\beta \text{ for every eigenvalue } \lambda \text{ of } U\}.$$

接下来，我们对影响函数 I施加以下结构条件。

- ($\mathcal{F}_A$1)：对于每个 $\beta \in (0,\ \pi)$，函数 I 在 $O(\mathrm{U}(d))_\beta$上关于 Schatten–von Neumann 1-范数是 Lipschitz 连续的:

$$|I(U) - I(\widetilde{U})| \leq \mathrm{Lip}_{O(\mathrm{U}(d))_\beta}(I)\|U - \widetilde{U}\|_{S_1^d}.$$

- ($\mathcal{F}_A$2)：设 λ_1、……、$\lambda_d \in \mathbb{S}^1$ 为 $U \in \mathrm{U}(d)$ 的特征值，并按如下方式排序:

$$\mathrm{Re}\,\lambda_1 \geq \cdots \geq \mathrm{Re}\,\lambda_d.$$

对于满足 $\theta_k \in (-\pi,\ \pi]$ 的 $\lambda_k = e^{\mathrm{i}\theta_k}$，我们假设存在一个单调不增连续函数 $J\colon [0,\pi] \to [0,\infty)$，使得

$$I(U) \geq J(|\theta_d|).$$

由于 $|\theta_d| = \max_{k\in[d]}|\theta_k|$，这给出了一个以最大谱角表示的下界。

- $(\mathcal{F}_A3)$：函数

$$F(\theta) \coloneqq J(\theta)\sin\theta \quad \text{is unimodal on } (0,\pi].$$

更确切地说，存在唯一的 $\theta_* \in (0,\ \pi)$，使得 F 在 $(0,\ \theta_*]$ 上严格递增，并在 $[\theta_*,\pi]$ 上严格递减。因此，对于每个 $\alpha\in(\theta_*,\ \pi)$，都存在唯一的 $\alpha^\infty \in (0,\ \theta_*)$ 满足

$$J(\alpha)\sin\alpha = J(\alpha^\infty)\sin\alpha^\infty, \quad J(\theta)\sin\theta \geq J(\alpha)\sin\alpha, \quad \theta\in[\alpha^\infty,\alpha]. \tag{5.2}$$

注 5.1。 第 4 节中的典范影响函数，

$$I(U) = 1 + \frac{1}{d}\operatorname{Re}\operatorname{tr} U,$$

满足 $(\mathcal{F}_A1)$–$(\mathcal{F}_A3)$，其中 $J(\theta) = 1+\cos\theta$，且 $\theta_* = \pi/3$。此外，对于 $0<a<\pi/3$，交换 U 和 V 后应用引理 4.1，同样可得

$$\operatorname{Lip}_{O(\mathrm{U}(d))_a}(I) = \frac{\sin a}{d}.$$

取仅有一个元素不同的对角矩阵，且使相应的两个角趋近于 a，即可得到反向不等式。因此，(5.5) 中的系数满足，对于$a=\alpha^\infty$,

$$\mu_I = \cos a(1+\cos a) - \sin^2 a = \cos a + \cos(2a) = \mu_a > 0,$$

因此，一般定理得出了第4节的收缩率。

如第4节所述，我们引入序参量：

$$R \coloneqq \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} I(U_j). \tag{5.3}$$

于是，方程（5.1）$_1$ 可以写成

$$\dot U_i U_i^\dagger = \Omega_i + \frac{\kappa}{2} R\left(U_i^\dagger - U_i\right), \quad i\in[N]. \tag{5.4}$$

对于 $\alpha\in$ （θ_*，π），令 α^∞ 由（5.2）确定，并设

$$T_3^* \coloneqq \frac{\pi}{\kappa J(\alpha)\sin\alpha - \|\mathfrak{V}\|_\infty}, \quad \mu_I \coloneqq \cos\alpha^\infty J(\alpha^\infty) - d\sin\alpha^\infty \operatorname{Lip}_{O(\mathrm{U}(d))_{\alpha^\infty}}(I). \tag{5.5}$$

5.1. **有限时间进入稳定区域**。 在本小节中，我们证明一个与第4.1节结果平行的结论。

引理5.1。 假设（$\mathcal{F}_A1$）–（$\mathcal{F}_A3$）成立，并且

$$\alpha\in(\theta_*,\pi), \quad \kappa > \frac{\|\mathfrak{V}\|_\infty}{J(\alpha)\sin\alpha}, \quad U_i^0 \in \overline{O(\mathrm{U}(d))_\alpha}, \quad i\in[N],$$

并令 $\mathcal{U}(t)$ 为方程(5.1)的全局解。那么存在 $T<T_3^*$使得

$$\mathcal{U}(t)\in O(\mathrm{U}(d))_{\alpha^\infty}^N, \quad t\geq T.$$

证明。 由（$\mathcal{F}_A1$），向量场在 $O(\mathrm{U}(d))_\pi^N$ 上局部利普希茨连续，因此初始数据存在唯一的极大解。我们首先推导最大谱角的标量微分不等式，然后利用（$\mathcal{F}_A3$）证明解被限制在 $O(\mathrm{U}(d))_\alpha{}^N$ 中，并给出进入时间的估计。由于该闭区域对每个 $\beta\in(\alpha,\pi)$ 都紧包含于 $O(\mathrm{U}(d))_\beta^N$ 中，

这种限制也保证了解对所有 $t \geq 0$ 都可以延拓。

• **步骤 A**（最大谱角的微分不等式）：对于每个 $i \in [N]$，我们定义

$$\rho_i(t) \coloneqq \cos^{-1}\left(\lambda_{\min}\left(\frac{U_i(t)+U_i(t)^\dagger}{2}\right)\right), \quad \rho(t) \coloneqq \max_{i\in[N]} \rho_i(t).$$

(4.12)–(4.14) 中的谱计算适用于 (5.4)，其中 R 的下界作如下修-改。根据 $(\mathcal{F}_A 2)$ 以及 J的单调性，我们有

$$R(t) \geq \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} J(\rho_j(t)) \geq J(\rho(t)).$$

因此，最大角估计给出

$$D^+\rho(t) \leq \|\mathfrak{V}\|_\infty - \kappa R(t)\sin\rho(t) \leq \|\mathfrak{V}\|_\infty - \kappa J(\rho(t))\sin\rho(t). \tag{5.6}$$

• **步骤 B**（进入 $O(\mathrm{U}(d))_{\alpha^\infty}^N$）：当 $\rho(t) \in [\alpha^\infty, \alpha]$ 时，$(\mathcal{F}_A 3)$ 和（5.6）意味着

$$D^+\rho(t) \leq \|\mathfrak{V}\|_\infty - \kappa J(\alpha)\sin\alpha < 0.$$

因此 ρ 无法向外越过 α，并且不迟于.....到达 α^∞

$$\frac{\alpha-\alpha^\infty}{\kappa J(\alpha)\sin\alpha - \|\mathfrak{V}\|_\infty} < \frac{\pi}{\kappa J(\alpha)\sin\alpha - \|\mathfrak{V}\|_\infty} = T_3^*.$$

如果 $\rho(0) < \alpha^\infty$，则同一个严格边界不等式表明正向不变性成立，因此我们可以取 $T = 0$。否则，令 τ 为满足 $\rho \leq \alpha^\infty$ 的第一个时刻；此前的界给出$\tau < T_3^*$。

如果 $\rho(\tau) = \alpha^\infty$，(5.2) 和 (5.6) 给出 $D^+\rho(\tau) < 0$。因此存在 $\varepsilon > 0$ 使得

$$\rho(t) < \alpha^\infty \quad \text{for } t \in (\tau, \tau+\varepsilon].$$

取 $T \in (\tau, \min\{\tau+\varepsilon, T_3^*\})$。严格边界不等式阻止了之后的离开，因此对于所有 $t \geq T$，$\rho(t) < \alpha^\infty$，如所要求。□

注 5.2。 如果 $\mathcal{U}^0 \in O(\mathrm{U}(d))_{\alpha^\infty}^N$，则可以取 $T = 0$。

5.2。 **指数稳定性**。 接下来，我们在稳定区域内建立指数稳定性。在本小节中，我们始终假设 μ_I（定义见（5.5））为正。

引理 5.2。 假设$(\mathcal{F}_A 1)$–$(\mathcal{F}_A 3)$ 成立，且参数满足

$$\kappa > 0, \quad \mu_I > 0, \quad 1 \leq p \leq \infty \quad \textit{and} \quad 1 \leq q \leq \infty,$$

~并设 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{U}$ 是方程 (5.1) 的两个全局解，满足

$$\mathcal{U}(t),\ \widetilde{\mathcal{U}}(t) \in O(\mathrm{U}(d))_{\alpha^\infty}^N, \quad t \geq 0.$$

于是，我们有

$$\|\mathcal{U}(t) - \widetilde{\mathcal{U}}(t)\|_{\ell_q^N(S_p^d)} \leq e^{-\kappa\mu_I t}\|\mathcal{U}(0) - \widetilde{\mathcal{U}}(0)\|_{\ell_q^N(S_p^d)}, \quad t \geq 0. \tag{5.7}$$

证明。 证明分为四个步骤。首先，我们推导差分方程，并记录稳定区域界。其次，我们估计 Schatten 范数。第三，我们控制序参量之差。最后，我们转至混合范数。

• **步骤 A** （差分方程和稳定区域界）： 我们设

$$W_i := U_i - \widetilde{U}_i, \quad \mathcal{W} := (W_1, \dots, W_N).$$

条件 $\mu_I > 0$ 意味着 cos $\alpha^\infty J(\alpha^\infty) > 0$，因此有 $\alpha^\infty < \pi/2$。由于两个解都位于 $O(\mathrm{U}(d))^N_{\alpha^\infty}$ 中，我们得到

$$R, \widetilde{R} \geq J(\alpha^\infty), \quad \frac{U_i + U_i^\dagger}{2}, \frac{\widetilde{U}_i + \widetilde{U}_i^\dagger}{2} \succeq \cos\alpha^\infty I_d, \quad \|I_d - \widetilde{U}_i^2\|_{\mathrm{op}} \leq 2\sin\alpha^\infty.$$

利用 $U_i^2 - \widetilde{U}_i^2 = U_i W_i + W_i \widetilde{U}_i$，我们得到

$$\dot{W}_i = \Omega_i W_i - \frac{\kappa R}{2}\big(U_i W_i + W_i \widetilde{U}_i\big) + \frac{\kappa(R - \widetilde{R})}{2}\big(I_d - \widetilde{U}_i^2\big).$$

• **步骤 B**（Schatten 范数估计）： 将（4.20）中的论证应用于步骤 A 中的差分方程，并利用 $R \geq J$（α^∞）和 cos $\alpha^\infty > 0$，对于任意 $1 \leq p \leq \infty$，我们得到

$$D^+\|W_i\|_{S_p^d} \leq -\kappa\cos\alpha^\infty J(\alpha^\infty)\|W_i\|_{S_p^d} + \kappa d^{1/p}\sin\alpha^\infty |R - \widetilde{R}|. \tag{5.8}$$

• **步骤 C** （序参量之差）： 由（5.3）和（$\mathcal{F}_A$1），

$$|R - \widetilde{R}| \leq \mathrm{Lip}_{O(\mathrm{U}(d))_{\alpha^\infty}}(I)\|\mathcal{W}\|_{\ell_1^N(S_1^d)} \leq d^{1-1/p}\,\mathrm{Lip}_{O(\mathrm{U}(d))_{\alpha^\infty}}(I)\|\mathcal{W}\|_{\ell_1^N(S_p^d)}. \tag{5.9}$$

结合（5.8）和（5.9），得到

$$D^+\|W_i\|_{S_p^d} \leq -\kappa\cos\alpha^\infty J(\alpha^\infty)\|W_i\|_{S_p^d} + \kappa d\sin\alpha^\infty\,\mathrm{Lip}_{O(\mathrm{U}(d))_{\alpha^\infty}}(I)\|\mathcal{W}\|_{\ell_1^N(S_p^d)}.$$

• **步骤 D** （混合范数估计）： 对于 $1 \leq q \leq \infty$，令

$$Y_q(t) := \|\mathcal{W}(t)\|_{\ell_q^N(S_p^d)}.$$

固定 $1 \leq p \leq \infty$。对于 $q = 1$，对步骤 C 中的分量估计取平均，并利用（5.5），得到

$$D^+Y_1(t) \leq \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N D^+\|W_i(t)\|_{S_p^d} \leq -\kappa\mu_I Y_1(t).$$

对于 $1 < q < \infty$ 和 $Y_q(t) > 0$，由链式法则、步骤 C 中的分量估计、H¨older 不等式以及 $Y_1(t) \leq Y_q(t)$，得到

$$D^+Y_q \leq -\kappa\cos\alpha^\infty J(\alpha^\infty)Y_q + \kappa d\sin\alpha^\infty\,\mathrm{Lip}_{O(\mathrm{U}(d))_{\alpha^\infty}}(I)Y_q = -\kappa\mu_I Y_q.$$

若 $Y_q(t) = 0$，则由唯一性可得 $\mathcal{W}(s) = 0$ 对所有 $s \geq t$均成立，从而 $D^+Y_q(t) = 0$。因此，对于$q < \infty$,

$$D^+Y_q(t) \leq -\kappa\mu_I Y_q(t), \quad t \geq 0.$$

对于 $q = \infty$，将引理 4.5 证明中步骤 D 的最大值公式应用于上述步骤 C 中的分量估计。由于 $Y_1(t) \leq Y_\infty(t)$，得到

$$D^+Y_\infty(t) \leq -\kappa\mu_I Y_\infty(t).$$

Gronwall 引理现在给出 (5.7)，对所有 $1 \leq p,\ q \leq \infty$。 □

5.3. **弛豫动力学**。 在本小节中，我们证明平衡态的存在性和唯一性，并证明每个满足所述假设的解都收敛。

Pr命题 5.1。 假设$(\mathcal{F}_A1)$–$(\mathcal{F}_A3)$ 成立，且系统参数满足

$$\alpha \in (\theta_*, \pi), \quad \kappa > \frac{\|\mathfrak{V}\|_\infty}{J(\alpha)\sin\alpha}, \quad \mu_I > 0.$$

那么，系统 (5.1) 存在唯一平衡态 $\mathcal{U}^\infty \in O(\mathrm{U}(d))^N_{\alpha^\infty}$。此外，这是 $O(\mathrm{U}(d))^N_\alpha$ 中唯一的平衡态。

证明。 我们将证明分为两个步骤。

• 步骤 A（稳定区域中的存在性）：我们固定 $O(\mathrm{U}(d))^N_{\alpha^\infty}$ 中的初始数据，并令 $\mathcal{U}(t)$ 为相应的解。于是，引理5.1 结合 $T = 0$ 表明，该区域是$\widetilde{\text{正向不变的}}$。对于 $s \geq 0$，时间平移 $\mathcal{U}(t) := \mathcal{U}(t+s)$ 是同一稳定区域中的另一个解。因此，引理 5.2 结合 $p = q = 2$,

$$\|\mathcal{U}(t+s) - \mathcal{U}(t)\|_{\ell^N_2(S^d_2)} \leq e^{-\kappa\mu_I t}\|\mathcal{U}(s) - \mathcal{U}(0)\|_{\ell^N_2(S^d_2)}. \tag{5.10}$$

由于 $\mathrm{U}(d)^N$ 是紧致的，(5.10) 中的最后一个因子关于 s一致有界。对于 $t_2 \geq t_1 \geq 0$，我们取

$$t = t_1 \quad \text{and} \quad s = t_2 - t_1 \quad \text{in (5.10)}.$$

于是，我们有

$$\|\mathcal{U}(t_2) - \mathcal{U}(t_1)\|_{\ell^N_2(S^d_2)} \leq Ce^{-\kappa\mu_I t_1},$$

其中 C与 t_1和 t_2无关。因此， $\mathcal{U}(t)$ 是柯西序列，并收敛到某个 $\mathcal{U}^\infty \in \mathrm{U}(d)^N$。正向不变性和连续性给出

$$\mathcal{U}^\infty \in \overline{O(\mathrm{U}(d))_{\alpha^\infty}}^N \subset O(\mathrm{U}(d))^N_\alpha.$$

因此，根据引理 5.1，流在极限状态处有定义。令 Φ_s 表示方程（5.1）的流。由该流的连续性，我们有

$$\Phi_s(\mathcal{U}^\infty) = \lim_{t\to\infty}\Phi_s(\mathcal{U}(t)) = \lim_{t\to\infty}\mathcal{U}(t+s) = \mathcal{U}^\infty, \quad s \geq 0,$$

因此 $\mathcal{U}^\infty$ 是一个平衡态。引理 5.1 中的严格向内估计排除了 $O(\mathrm{U}(d))^N_{\alpha^\infty}$的边界，因此该平衡态属于所述开集。

• 步骤 B（$O(\mathrm{U}(d))^N_\alpha$中的平衡态唯一性）：如果 $\mathcal{V}^\infty$ 是 $O(\mathrm{U}(d))^N_\alpha$中的另一个平衡态，则引理 5.1 将常值轨道 $\mathcal{V}^\infty$ 置于 $O(\mathrm{U}(d))^N_{\alpha^\infty}$中。将引理 5.2 应用于两个常值轨道，得到

$$\|\mathcal{U}^\infty - \mathcal{V}^\infty\|_{\ell^N_2(S^d_2)} \leq e^{-\kappa\mu_I t}\|\mathcal{U}^\infty - \mathcal{V}^\infty\|_{\ell^N_2(S^d_2)},$$

对每个 $t \geq 0$均成立。令 $t \to \infty$，即可得到唯一性。 □

接下来，我们证明其指数收敛到平衡态。

定理 5.1。 假设$(\mathcal{F}_A1)$–$(\mathcal{F}_A3)$ 成立，且参数满足

$$1 \leq p \leq \infty, \quad 1 \leq q \leq \infty, \ \alpha \in (\theta_*, \pi), \ \kappa > \frac{\|\mathfrak{V}\|_\infty}{J(\alpha)\sin\alpha}, \ \mu_I > 0, \quad U^0_i \in \overline{O(\mathrm{U}(d))_\alpha}, \quad i \in [N],$$

并设 $\mathcal{U}(t)$ 是 (5.1)的全局解。那么以下断言成立。

（*1*）系统（5.1）存在唯一平衡态 $\mathcal{U}^\infty \in O(\mathrm{U}(d))^N_{\alpha^\infty}$，且它是 $O(\mathrm{U}(d))^N_\alpha$中的唯一平衡态，正如命题*5.1*所证。

(2) 存在 $T < T_3^*$ 使得

$$\|\mathcal{U}(t) - \mathcal{U}^\infty\|_{\ell_q^N(S_p^d)} \le e^{-\kappa\mu_I(t-T)}\|\mathcal{U}(T) - \mathcal{U}^\infty\|_{\ell_q^N(S_p^d)}, \quad t \ge T. \tag{5.11}$$

如果 $\mathcal{U}^0 \in O(\mathrm{U}(d))_{\alpha\infty}^N$，则可以取 $T = 0$。

证明。引理 5.1 给出了进入时间 T。平移后的解 $\mathcal{U}(T + \cdot)$ 和常值解 $\mathcal{U}^\infty$ 都位于 $O(\mathrm{U}(d))_{\alpha\infty}^N$中。最后，我们应用引理 5.2 于这两个解，从而得到（5.11）。□

推论5.1。设 $(\mathcal{F}_A1)$–$(\mathcal{F}_A3)$ 成立。固定 $\mathfrak{V}$ 以及满足 $-1 \notin \mathrm{spec}(U_i^0)$的初始数据，对于每个 $i \in [N]$，存在 $\kappa_0 \ge 0$，使得对每个 $\kappa > \kappa_0$，方程 (5.1)的解在全局存在，并指数地收敛到一个平衡态。

证明。记 $F(\theta) = J(\theta)\sin\theta$。根据（$\mathcal{F}_A3$），$F$在 $(0,\pi)$ 上为正，因此由 J 的单调性，$J(0) > 0$。由于 $\alpha \uparrow \pi$，（5.2）给出 $F(\alpha^\infty) = F(\alpha) \to 0$。由于 F在 $(0,\theta_*]$ 上严格递增，我们有 $a = \alpha^\infty \to 0$。固定 $\beta \in (0,\pi)$，并令 L_β为根据（$\mathcal{F}_A1$）在$O(\mathrm{U}(d))_\beta$ 上的 I 的 Lipschitz 常数。对于 $a < \beta$，（5.5）给出

$$\mu_I \ge \cos(a)J(a) - d\sin(a)L_\beta \longrightarrow J(0) > 0.$$

选择 $\alpha \in (\theta_*, \pi)$ 足够接近 π，使得 $\mu_I > 0$并且 $U_i^0 \in O(\mathrm{U}(d))_\alpha$对所有 i都成立。定理 5.1现在适用，其中 $\kappa_0 = \|\mathfrak{V}\|_\infty/[J(\alpha)\sin\alpha]$。□

6. Winfree–Lohe models as Kuramoto–Lohe subsystems

在李群上构造 Winfree 型模型还有另一种途径：可以将其实现为更大的 Kuramoto–Lohe 系综的不变子系统。我们从 Moreno-Earle、Ryoo 和 To [MERT26，引理 3。3]，的圆构造开始，然后在 [Ryo25]的李群框架内给出一种对称性构造。由此得到的例子包括第 4 节的酉模型，以及特殊酉群上的一个模型。

6.1. **圆嵌入**。对于解 $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_N)$ of (1.1)，我们定义一个由 $4N$ 个相位及固有频率组成的系综，如下所示：

$$\Phi = (\Theta, -\Theta, 0^{2N}), \quad \widetilde{\mathcal{V}} = (\mathcal{V}, -\mathcal{V}, 0^{2N}), \tag{6.1}$$

其中 0^{2N} 表示 $2N$ 零项。于是 Φ 满足 Kuramoto 模型

$$\dot{\varphi}_a = \widetilde{\nu}_a + \frac{2\kappa}{4N}\sum_{b=1}^{4N}\sin(\varphi_b - \varphi_a), \quad a \in [4N].$$

事实上，相位方程中的相互作用 θ_i 给出为

$$\frac{\kappa}{2N}\left[\sum_{j=1}^{N}\big(\sin(\theta_j - \theta_i) + \sin(-\theta_j - \theta_i)\big) - 2N\sin\theta_i\right] = -\frac{\kappa}{N}\sum_{j=1}^{N}(1 + \cos\theta_j)\sin\theta_i.$$

奇性给出反射方程，并使所有 $2N$ 零相位的速度均为零。因此，状态（6.1）描述了一个不变子系统，而前 N 个坐标恢复了 Winfree 动力学。环境中的 Kuramoto 耦合强度为 2κ。在 [MERT26] 中进行相同的构造同样适用于惯性方程。这里只采用其一阶版本。

6.2. **李群上的对称性构造。** 设 G 为一个李群，其单位元为 e，李代数为 $\mathfrak{g}$。对于 $x \in G$，记 $R_x(y) = yx$。于是，[Ryo25] 的广义 Kuramoto–Lohe 模型如下所示。

$$\dot{Z}_a = (dR_{Z_a})_e \left(B_a + \frac{K}{M} \sum_{b=1}^{M} \phi(Z_b Z_a^{-1}) \right), \quad a \in [M], \tag{6.2}$$

其中 $B_a \in \mathfrak{g}$ 且 $\phi\colon G \to \mathfrak{g}$ 为 C^1。柯西–利普希茨理论只能保证局部存在唯一性；在局部吸引假设 $\phi(e) = 0$ 以及 $(d\phi)_e$的特征值实部为正的条件下，如果初始状态彼此充分接近，且耦合强度 K 相对于 max 足够大$_{a\in[M]} |B_a|$ [Ryo25，定理 1.2(2)]。

在非阿贝尔群上，不能简单地用求逆代替标量反射。例如，矩阵群的漂移项 $X = HX$ 为

$$\frac{d}{dt} X^{-1} = -X^{-1} H,$$

而内禀频率为 $-H$ 的反射振子，其漂移项为 $-HX^{-1}$。两者不一定相同。因此，我们用真正的群自同构所生成的轨道来取代这两种标量对称性。

设有限群 Γ（阶为 m）通过自同构作用于 G；该作用不必是忠实的。我们用 $\sigma(x)$ 表示 $x \in G$ 在 $\sigma \in \Gamma$作用下的像，并用 $A_\sigma = (d\sigma)_e$ 表示该自同构的微分。我们假设

$$\phi(\sigma(x)) = A_\sigma \phi(x), \quad \frac{1}{m} \sum_{\sigma\in\Gamma} A_\sigma = 0, \quad \sigma \in \Gamma, \quad x \in G. \tag{6.3}$$

第二个条件尤其意味着，诱导作用 A_σ 在 $\mathfrak{g}$上没有非零的公共不动向量。定义平均相互作用：

$$\mathcal{K}_\Gamma(x, y) := \frac{1}{m} \sum_{\sigma\in\Gamma} \phi(\sigma(y) x^{-1}).$$

我们用 id 表示 Γ 的单位元。

命题 6.1. 设 $\phi(e) = 0$和 (6.3) 成立。固定 $H_1, \dots, H_N \in \mathfrak{g}$ 以及初始数据 $x_1^0, \dots, x_N^0 \in G$。我们用 mN标记振子 $(i, \sigma) \in [N] \times \Gamma$，其余 mN个振子用 (anc ℓ)标记。它们的固有频率和初始状态规定如下

$$\begin{aligned} B_{i,\sigma} &= A_\sigma H_i, & Z_{i,\sigma}(0) &= \sigma(x_i^0), & i &\in [N], \quad \sigma \in \Gamma, \\ B_{\mathrm{anc},\ell} &= 0, & Z_{\mathrm{anc},\ell}(0) &= e, & \ell &\in [mN]. \end{aligned}$$

每一对 (i, σ) 都标记一个独立的振子，即使 Γ 的作用并非忠实。令$Z_{i,\sigma}(t)$ 和 $Z_{\mathrm{anc},\ell}(t)$ 分别表示满足 (6.2) 且 $M = 2mN$ 和 $K = 2\kappa$的解。

那么，对于 $x_i(t) := Z_{i,\mathrm{id}}(t)$，以下断言成立：

（*1*）该解保持这些关系

$$\begin{aligned} Z_{i,\sigma}(t) &= \sigma(x_i(t)), & i &\in [N], \quad \sigma \in \Gamma, \\ Z_{\mathrm{anc},\ell}(t) &= e, & \ell &\in [mN]. \end{aligned} \tag{6.4}$$

(2) 变量 x_1、……、x_N 求解约化柯西问题

$$\begin{cases} \dot{x}_i = (dR_{x_i})_e \left[H_i + \kappa\phi(x_i^{-1}) + \dfrac{\kappa}{N}\displaystyle\sum_{j=1}^{N} \mathcal{K}_\Gamma(x_i, x_j) \right], \\ x_i(0) = x_i^0, \quad i \in [N]. \end{cases} \tag{6.5}$$

证明。由于方程（6.5）中的向量场是 C^1，约化柯西问题（6.5）在区间 $[0, T)$ 上有唯一的极大解 $X = (x_1, \ldots, x_N$。我们根据（6.4）定义曲线 $Z_{i,\sigma}$和$Z_{\mathrm{anc},\ell}$，并验证它们满足给定初始数据的环境方程（6.2）。

- **步骤 A**（辅助振子）：对于辅助振子，其内禀频率为零。在 $Z_{\text{辅助 }\ell} = e$ 处，其相互作用项为

$$\frac{\kappa}{mN}\left[\sum_{j=1}^{N}\sum_{\sigma\in\Gamma}\phi(\sigma(x_j)) + mN\phi(e)\right] = \frac{\kappa}{mN}\sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{\sigma\in\Gamma}A_\sigma\right)\phi(x_j) = 0.$$

这里，我们用到了 $\phi(e) = 0$ 以及（6.3）中的两个恒等式。因此，常值曲线 $Z_{\mathrm{anc},\ell}(t) = e$满足（6.2）。

- **步骤 B**（$Z_{i,\text{恒等}}$ 的动力学）：对于由（i,恒等）标记的振子，有 $Z_{i,\text{恒等}} = x_i$ 和$B_{i,\text{恒等}} = H_i$。轨道振子和恒等振子的贡献分别为

$$\frac{\kappa}{mN}\sum_{j=1}^{N}\sum_{\sigma\in\Gamma}\phi(\sigma(x_j)x_i^{-1}) = \frac{\kappa}{N}\sum_{j=1}^{N}\mathcal{K}_\Gamma(x_i, x_j), \quad \frac{\kappa}{mN}\sum_{\ell=1}^{mN}\phi(ex_i^{-1}) = \kappa\phi(x_i^{-1}).$$

将这些表达式代入（6.2）即可得到（6.5）。因此，曲线$Z_{i,\ \mathrm{id}}$ 满足其环境方程。

- **步骤 C**（$Z_{i,\ \tau}$的动力学）：固定 $\tau \in \Gamma$。由于 τ 是群自同构，我们有

$$\tau \circ R_x = R_{\tau(x)} \circ \tau, \quad \tau(x^{-1}) = \tau(x)^{-1}.$$

对第一个恒等式在 e处求导，得到

$$(d\tau)_x \circ (dR_x)_e = (dR_{\tau(x)})_e \circ A_\tau.$$

接下来比较 x_i 和 τ（x_i）处的相互作用项。对每个 $j \in [N]$，换指标 $\sigma = \tau\rho$ 并结合（6.3）可得

$$\sum_{\sigma\in\Gamma}\phi\big(\sigma(x_j)\tau(x_i)^{-1}\big) = \sum_{\rho\in\Gamma}\phi\big(\tau(\rho(x_j)x_i^{-1})\big) = A_\tau\sum_{\rho\in\Gamma}\phi\big(\rho(x_j)x_i^{-1}\big).$$

恒等振子的贡献以相同的方式变换：

$$\phi\big(\tau(x_i)^{-1}\big) = \phi\big(\tau(x_i^{-1})\big) = A_\tau\phi(x_i^{-1}).$$

将这些恒等式与（6.5）结合，得到

$$\dot{Z}_{i,\tau} = (d\tau)_{x_i}\dot{x}_i = (dR_{Z_{i,\tau}})_e\left(A_\tau H_i + \frac{K}{M}\sum_{b=1}^{M}\phi(Z_b Z_{i,\tau}^{-1})\right).$$

这里，对 b 的求和同时包括轨道振子和恒等振子。因此，每条曲线$Z_{i,\ \tau}$ 都满足（6.2）。

因此，所构造的曲线（6.4）是（6.2）的解，并具有给定的初始数据。根据唯一性，它们在 $[0,T)$ 上与环境解重合。接下来需要比较最大的存在区间。

该构造已在整个区间 $[0,T$ 上给出了一个环境解。若 $T<\infty$且该环境解延伸至 T 之后，那么 $x_i(t)=Z_{i,\ \mathrm{id}}(t)$ 将在 G 中有一个极限，当 $t\uparrow T$ 时，对每个 i 都成立。在该极限构型处，方程 (6.5) 的局部存在性将使X 延伸至 T 之后，这与其极大性矛盾。因此，极大区间一致，且 (6.4) 在整个该区间上成立。 □

利用命题 6.1 中的嵌入，我们将 [Ryo25，定理 1。2] 应用于环境系统 (6.2)，从而得到约化系统 (6.5) 的以下松弛结果。[2]

在 $\mathfrak{g}$ 上固定一个内积，令 $|\cdot|$ 表示其范数，并令 d_G 表示由此诱导的 G上的右不变黎曼距离。记

$$\mathfrak{H}=(H_1,\dots,H_N),\quad X=(x_1,\dots,x_N),\quad \|\mathfrak{H}\|_\Gamma:=\max_{i\in[N],\,\sigma\in\Gamma}|A_\sigma H_i|,$$

并令

$$B_G(e,r):=\{x\in G:d_G(x,e)<r\}.$$

定理 6.1 (Winfree–Lohe 模型 (6.5) 的松弛)。 假设 $\phi(e)=0$ 以及(6.3) 成立，并假设 $(d\phi)_e$ 的每个特征值都具有正实部。那么，存在常数

$$0<r_1<r_2,\quad C>0,\quad c>0,$$

仅取决于李群结构、 ϕ、度量以及 Γ的固定作用，而不取决于 N，使得以下断言成立。

If

$$\kappa>C\|\mathfrak{H}\|_\Gamma,\quad \max_{i\in[N]}d_G(x_i^0,e)<r_1,$$

则：

(*1*) （6.5）的解对所有 $t\ge0$ 均唯一存在，并且满足

$$\max_{i\in[N]}d_G(x_i(t),e)<r_2,\quad t\ge0.$$

(*2*) 存在唯一平衡态 X^∞，它是（6.5）在 $B_G(e,\ r_1)^N$中的平衡态，并且

$$\max_{i\in[N]}d_G(x_i^\infty,e)\le C\frac{\|\mathfrak{H}\|_\Gamma}{\kappa}.$$

(*3*) 所有初始数据位于 $B_G(e,\ r_1)^N$ 中的解都指数地收敛于同一个平衡态 X^∞，其速度也指数地收敛于零。更确切地说，

$$\max_{i\in[N]}d_G(x_i(t),x_i^\infty)+\kappa^{-1}\max_{i\in[N]}\left|(dR_{x_i(t)^{-1}})_{x_i(t)}\dot{x}_i(t)\right|\le Ce^{-c\kappa t},\quad t\ge0.$$

证明。 只需证明对于适配于 $A=(d\phi)_e$的内积，定理成立。 事实上，由于 A 的每个特征值都有正实部，因此存在一个内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle_*$ 使得$\langle Av,v\rangle_*\ge\lambda|v|_*^2$ 对于某个 $\lambda>0$ 以及所有 $v\in\mathfrak{g}$ [Ryo25第2节, (2.1)]。对该内积进行重新缩放后，可假设 $|v|\le|v|_*\le b|v|$ 对于某个 $b\ge1$。比较曲线长度可得 $d_G\le d_*\le bd_G$ 对应的右不变距离满足。

[2]该定理编号指的是arXiv:2109.14761v3。

假设定理对于 d_* 成立，其常数为 $r_{1,*}, r_{2,*}, C_*, c_*$。对于 d_G，我们取

$$r_1 = r_{1,*}/b, \qquad r_2 = r_{2,*}, \qquad c = c_*, \qquad C = bC_* \max\{1, r_1^{-1}\}.$$

于是 $B_G(e,\ r_1) \subset B_*(e,\ r_{1,\ *})$，且 $\|\mathfrak{H}\|_{\Gamma,\ *} \le b\|\mathfrak{H}\|_\Gamma$。因此，适配度量定理适用，其平衡态满足

$$\max_i d_G(x_i^\infty, e) \le bC_*\|\mathfrak{H}\|_\Gamma/\kappa < r_1.$$

$B_G(e,\ r_1)^N$ 中的唯一性由上述球包含关系推出。轨道和速度界由 $d_G \le d_*$ 和 $|\cdot| \le |\cdot|_*$ 推出。因此，在证明的其余部分中，我们可以假设所选内积适配于 A。

我们首先验证 [Ryo25定理 12] 对于环境系统的假设。然后，我们利用静止的恒等振子，得到约化系统的相应结论。

- 步骤 A（环境系统的初始集中）：我们令

$$L_\Gamma := \max_{\sigma\in\Gamma} \|A_\sigma\|_{\mathrm{op}}.$$

由于 $\mathrm{id} \in \Gamma$，我们有 $L_\Gamma \ge 1$。单位元

$$(d\sigma)_x \circ (dR_x)_e = (dR_{\sigma(x)})_e \circ A_\sigma$$

度量的右不变性通过比较曲线长度可推出 t

$$d_G(\sigma(x), \sigma(y)) \le L_\Gamma d_G(x, y).$$

特别地，由于 $\sigma(e) = e$,

$$d_G(\sigma(x), e) \le L_\Gamma d_G(x, e).$$

我们固定 C_{R}、$c_{1、\mathrm{R}}$、 c_{R}、$c_{2、\mathrm{R}} > 0$ 中出现的常数，这些常数见于 [Ryo25 的定理 1.2], ，并应用于环境耦合 K。其中，$c_{1、\mathrm{R}}$ 是初始及传播过程中两两距离的阈值， c_{R} 是耦合条件 $K > c_{\mathrm{R}} \max_a |B_a|$, C_{R} 中的系数， C_{R}是渐近距离界 $_a |B_a|/K$max中的系数，而 $c_{2、\mathrm{R}}$ 是第（3）部分中的指数速率。我们还用 $D_{\mathrm{R}} > 0$ 表示该部分 $O_G(e^{-c_{2、\mathrm{R}}Kt})$ 估计中隐含的一个常数。这些常数仅依赖于环境李群结构、 ϕ以及所选度量。

我们选取

$$r_2 = c_{1,\mathrm{R}}, \quad r_1 = \frac{c_{1,\mathrm{R}}}{4L_\Gamma},$$

并将陈述中的常数 C 取足够大，使得

$$C \ge \max\left\{c_{\mathrm{R}}, \frac{C_{\mathrm{R}}}{r_1}\right\}.$$

我们在证明结束时进一步增大 C 。

在（6.2）中，取

$$M = 2mN, \quad K = 2\kappa,$$

并规定

$$Z_{i,\sigma}(0) = \sigma(x_i^0), \qquad B_{i,\sigma} = A_\sigma H_i, \quad i \in [N], \quad \sigma \in \Gamma,$$
$$Z_{\mathrm{anc},\ell}(0) = e, \qquad B_{\mathrm{anc},\ell} = 0, \qquad \ell \in [mN].$$

这一选择以及关于 κ的假设意味着

$$\max_{a\in[M]} |B_a| = \|\mathfrak{H}\|_\Gamma, \quad K = 2\kappa > c_{\mathrm{R}} \max_{a\in[M]} |B_a|.$$

此外，初始浓度条件给出

$$d_G(Z_{i,\sigma}(0), Z_{j,\tau}(0)) \le d_G(\sigma(x_i^0), e) + d_G(\tau(x_j^0), e) \le L_\Gamma\big(d_G(x_i^0, e) + d_G(x_j^0, e)\big) < 2L_\Gamma r_1,$$

and

$$d_G(Z_{i,\sigma}(0), Z_{\mathrm{anc},\ell}(0)) \le L_\Gamma d_G(x_i^0, e) < L_\Gamma r_1.$$

辅助振子之间的距离为零。因此，

$$\max_{a,b\in[M]} d_G(Z_a(0), Z_b(0)) < 2L_\Gamma r_1 = \frac{c_{1,\mathrm{R}}}{2} < c_{1,\mathrm{R}}.$$

因此，环境初始数据和参数满足 [Ryo25，定理 12]中的所有假设。

• 步骤 B（约化解的全局存在性与有界性）：根据 [Ryo25，定理 1.2(2)]，，环境柯西问题具有唯一的全局解 Z，满足

$$\max_{a,b\in[M]} d_G(Z_a(t), Z_b(t)) < c_{1,\mathrm{R}}, \quad t \ge 0.$$

设 X 为方程（6.5）在初始数据 X^0下的唯一极大解，定义于 $[0, T_{\max})$。根据命题 6.1，其嵌入（6.4）满足方程（6.2），其初始数据由步骤 A 给出。因此，由环境解的唯一性可得

$$Z_{i,\sigma}(t) = \sigma(x_i(t)), \quad Z_{\mathrm{anc},\ell}(t) = e, \quad 0 \le t < T_{\max}.$$

如果 $T_{\max} < \infty$，则全局环境解给出

$$\lim_{t\uparrow T_{\max}} x_i(t) = Z_{i,\mathrm{id}}(T_{\max}) \in G, \quad i \in [N].$$

由于约化向量场是 C^1，在此极限构型处的局部存在性可将 X 延伸至 $T_{\max}$ 之外，这与极大性矛盾。因此 $T_{\max} = \infty$，且嵌入关系对所有 $t \ge 0$ 均成立。固定辅助指标 $a_0 = (\mathrm{anc},1)$。利用 $Z_{a_0}(t) = e$ 和 $Z_{i,\ \mathrm{id}}(t) = x_i(t)$，我们得到

$$\max_{i\in[N]} d_G(x_i(t), e) = \max_{i\in[N]} d_G(Z_{i,\mathrm{id}}(t), Z_{a_0}(t)) < c_{1,\mathrm{R}} = r_2, \quad t \ge 0.$$

这就证明了断言 (1)。

• 步骤 C（收敛到唯一平衡态）：根据 [Ryo25，定理 1.2(3)]，，存在环境系统的锁相解的相位代表元 $W_a \in G$，$a \in [M]$，使得

$$\max_{a,b\in[M]} d_G\big(Z_a(t)Z_b(t)^{-1}, W_aW_b^{-1}\big) \le D_{\mathrm{R}} e^{-c_{2,\mathrm{R}}Kt}, \quad t \ge 0.$$

我们设

$$x_i^\infty := W_{i,\mathrm{id}} W_{a_0}^{-1}, \quad i \in [N].$$

由于

$$Z_{i,\mathrm{id}}(t) Z_{a_0}(t)^{-1} = x_i(t),$$

前面的估计给出

$$\max_{i\in[N]} d_G(x_i(t), x_i^\infty) \le D_{\mathrm{R}} e^{-2c_{2,\mathrm{R}}\kappa t}, \quad t \ge 0.$$

因此，环境相对相位的收敛意味着约化态本身也收敛。

接下来我们确定极限构型。Ryo25 中定理 1.2(2) 的距离估计 [Ryo25，定理 1.2(2)] 给出

$$d_G(x_i^\infty, e) = \lim_{t\to\infty} d_G(Z_{i,\mathrm{id}}(t), Z_{a_0}(t)) \le C_{\mathrm{R}} \frac{\max_{a\in[M]} |B_a|}{K} = \frac{C_{\mathrm{R}} \|\mathfrak{H}\|_\Gamma}{2\kappa} < \frac{r_1}{2}.$$

最后一个不等式由 C 的选取推出；当 $\|\mathfrak{H}\|_\Gamma = 0$ 时，前面的上界为零。因此

$$X^\infty \in B_G(e, r_1)^N.$$

为验证 X^∞ 是（6.5）的一个平衡态，令 Φ_s 表示其局部流。对于充分小的 $s \ge 0$，由流的连续性可得

$$\Phi_s(X^\infty) = \lim_{t\to\infty} \Phi_s(X(t)) = \lim_{t\to\infty} X(t+s) = X^\infty.$$

因此， X^∞ 是一个平衡态。

剩下需要证明它在 B_G（e， r_1）^{N}中的唯一性。设 Y =（y_1，……， y_N）是该集合中的另一个平衡态。由命题 6.1，数组

$$Z^\infty_{i,\sigma} = \sigma(x_i^\infty), \quad Z^\infty_{\mathrm{anc},\ell} = e,$$
$$\widetilde{Z}^\infty_{i,\sigma} = \sigma(y_i), \quad \widetilde{Z}^\infty_{\mathrm{anc},\ell} = e$$

是具有相同固有频率 B_a的同一环境方程的平稳解。步骤 A 中的估计表明，这两个数组的直径都小于 $2L_\Gamma r_1 < c_{1,\ \mathrm{R}}$。因此 [Ryo25，定理 1.2(1)] 给出 $g \in G$ 使得

$$\widetilde{Z}^\infty_a = Z^\infty_a g, \quad a \in [M].$$

在辅助坐标 a_0 下，这变为 $e = eg$，因此 $g = e$。取 $a = (i,\mathrm{id})$ 得到$y_i = x_i^\infty$对每个 $i \in [N]$ 都成立。这证明了断言（2）。这还表明，对于固定的 $\mathfrak{H}$ 和 κ， $B_G(e,r_1)^N$ 中的所有初始数据都会导向同一个极限。

- 步骤 D（速度的指数衰减）：我们将右平凡化约化向量场定义为

$$V_i(X) := H_i + \kappa\phi(x_i^{-1}) + \frac{\kappa}{N}\sum_{j=1}^N \mathcal{K}_\Gamma(x_i, x_j).$$

Then

$$(dR_{x_i(t)^{-1}})_{x_i(t)} \dot{x}_i(t) = V_i(X(t)), \quad V_i(X^\infty) = 0.$$

由于 ϕ 是 C^1 且 Γ 有限，映射 $x \mapsto \phi(x^{-1})$ 和 $(x,y) \mapsto \mathcal{K}_\Gamma(x,y)$ 都是 C^1。由于李群上的右不变黎曼度量是完备的，闭度量球是紧致的。连接 $B_G(e,r_2)$ 中两点的任意极小测地线长度都小于 $2r_2$，因此位于 $B_G(e,3r_2)$ 内。 $x \mapsto \phi(x^{-1})$ 和 $(x,y) \mapsto \mathcal{K}_\Gamma(x,y)$ 的导数分别在紧集 $B_G(e,3r_2)$ 和 $B_G(e,3r_2)^2$，~~上有界~~。沿着~~这些~~测地线逐个变量地对 $\mathcal{K}_\Gamma$ 积分，可得一个常数 $L_0 > 0$ ，使得

$$|\phi(x^{-1}) - \phi(y^{-1})| \le L_0 d_G(x,y), \quad |\mathcal{K}_\Gamma(x,z) - \mathcal{K}_\Gamma(y,w)| \le L_0\big(d_G(x,y) + d_G(z,w)\big)$$

对于 x， y， z， $w \in B_G(e,\ r_2)$。因此，对于 X， $Y \in B_G(e,\ r_2)^N$，

$$|V_i(X) - V_i(Y)| \le \kappa L_0 d_G(x_i,y_i) + \frac{\kappa L_0}{N}\sum_{j=1}^N \big(d_G(x_i,y_i) + d_G(x_j,y_j)\big) \le 3\kappa L_0 \max_{j\in[N]} d_G(x_j,y_j).$$

根据步骤 B，$X(t) \in B_G(e, r_2)^N$ 对所有 $t \geq 0$ 均成立，而步骤 C 得出 $X^\infty \in B_G(e, r_1)^N$。将前述估计应用于 $Y = X^\infty$，我们得到

$$\kappa^{-1} \max_{i\in[N]} \left|(dR_{x_i(t)^{-1}})_{x_i(t)}\dot{x}_i(t)\right| \leq 3L_0 \max_{j\in[N]} d_G(x_j(t), x_j^\infty) \leq 3L_0 D_{\mathrm{R}} e^{-2c_{2,\mathrm{R}}\kappa t}.$$

取 $c = 2c_{2,\mathrm{R}}$ 并扩大 C，使得 $C \geq (1 + 3L_0)D_{\mathrm{R}}$，即可得到断言 (3)。 □

推论 6.1 (相同的内禀频率). 假设 $\phi(e) = 0$ 和 (6.3) 成立，并假设 $(d\phi)_e$ 的每个特征值都有正实部。令 $0 < r_1 < r_2$, $C > 0$, 和$c > 0$ 如定理 *6.1*所述。令 $H_i = H$ 对每个 $i \in [N]$ 取一个固定的 $H \in \mathfrak{g}$。若

$$\kappa > C\|\mathfrak{H}\|_\Gamma, \quad X^0 \in B_G(e, r_1)^N,$$

则下列断言成立。

(1) 方程 *(6.5)* 的解对所有 $t \geq 0$ 都唯一存在，且始终处于 $B_G(e, r_2)^N$ 中。*(2)* 存在 $x_*^\infty \in B_G(e, r_1)$，使得 $X^\infty = (x_*^\infty, \ldots, x_*^\infty)$ 是 *(6.5)* 在 $B_G(e, r_1)^N$ 中的唯一平衡态，并且

$$d_G(x_*^\infty, e) \leq C\frac{\|\mathfrak{H}\|_\Gamma}{\kappa}.$$

(3) 若 $X(t)$ 是方程(6.5) 在初始数据 $X^0 \in B_G(e, r_1)^N$下的一个解，则

$$\max_i d_G(x_i(t), x_*^\infty) + \kappa^{-1} \max_i \left|(dR_{x_i(t)^{-1}})_{x_i(t)}\dot{x}_i(t)\right| \leq Ce^{-c\kappa t}, \quad t \geq 0.$$

(4) 此外，若 $H = 0$，则 $x_*^\infty = e$。

证明。 当 $H_i = H$ 对所有 i都成立时，方程（6.5）在振子指标的置换下保持不变。因此，X^∞ 的任意置换也是 $B_G(e, r_1)^N$中的一个平衡态。根据定理6.1的唯一性，每个换位都保持 X^∞不变，因此它的所有分量都相等。由同一定理可得所述界限。若 $H = 0$，则 $\phi(e) = 0$ 推出（$e, \ldots, e$）是一个平衡态，而由唯一性可得 $x_*^\infty = e$。 □

为得到本文所用的可分离的 Winfree 相互作用，我们施加额外的单位元条件

$$\mathcal{K}_\Gamma(x, y) = a(y)\phi(x^{-1}), \quad a \in C^1(G; \mathbb{R}). \tag{6.6}$$

于是，系统（6.5）变为

$$\dot{x}_i = F_i(x_i) + \frac{\kappa}{N}\sum_{j=1}^N I(x_j)S(x_i), \tag{6.7}$$

with

$$F_i(x) = (dR_x)_e H_i, \quad I(x) = 1 + a(x), \quad S(x) = (dR_x)_e\phi(x^{-1}). \tag{6.8}$$

因式分解（6.6）是一个额外的结构性质：它并非仅由 ϕ 上的局部吸引假设推导而来。对于 $G = \mathbb{S}^1$，两个自同构分别为 $z \mapsto z$和 $z \mapsto z$，正弦加法公式给出 $a(e^{\mathrm{i}\theta}) =$ 余弦 θ。因此，该构造恢复了（6.1）。

6.3. 酉和特殊酉示例。 上述恒等式可以在不对内禀频率矩阵施加限制的情况下实现。

令 $G = \mathrm{U}(d)$、$d \geq 1$ 或 $G = \mathrm{SU}(d)$、$d \geq 2$，并令

$$\phi_G(U) = P_{\mathfrak{g}}\left(\frac{U - U^{\dagger}}{2}\right), \quad P_{\mathfrak{u}(d)}(A) = A, \quad P_{\mathfrak{su}(d)}(A) = A - \frac{\operatorname{tr} A}{d} I_d. \tag{6.9}$$

它们分别是标准酉相互作用及其无迹投影；二者都出现在李群框架中 [Ryo25]。它们满足

$$\phi_G(I_d) = 0 \quad \text{and} \quad (d\phi_G)_{I_d} = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}.$$

为完整起见，我们给出一个显式的有限对称性族，它可推出（6.6）。令$e_1, \ldots, e_d$为 $\mathbb{C}^d$ 的标准正交基。我们将指标按周期延拓：$e_{k+d} = e_k$。令 $\omega = e^{2\pi \mathrm{i}/d}$，并定义对角矩阵 D 和循环移位矩阵 P如下：

$$De_k = \omega^k e_k, \quad Pe_k = e_{k+1}, \quad k \in [d],$$

并定义混合移位矩阵

$$W_{rs} = D^r P^s, \quad 0 \leq r, s < d.$$

注意，D和 P都是酉矩阵，并且满足 $D^d = P^d = I_d$和 $DP = \omega PD$。

引理 6.1。设

$$\Gamma = \left((\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^2\right) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},$$

其中，$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 中的非平凡元素将(r, s) 映射为$(-r, s)$。对于 $0 \leq r, s < d$，定义

$$\sigma_{rs,0}(U) = W_{rs} U W_{rs}^{\dagger}, \quad \sigma_{rs,1}(U) = W_{rs} \overline{U} W_{rs}^{\dagger}, \tag{6.10}$$

其中，$\overline{U}$表示 U的逐项复共轭。于是，$(r, s, \varepsilon) \cdot U = \sigma_{rs,\,\varepsilon}(U)$ 定义了 Γ 在 G 上的一个李群自同构作用。

证明。由于 W_{rs} 是酉的，酉共轭 W_{rs} 和逐项复共轭是 $\mathrm{U}(d)$ 的光滑群自同构。它们也保持 $\mathrm{SU}(d)$，因为酉共轭保持行列式，且 $\det \overline{U} = \det U$。因此，(6.10)中的每个映射都是 G 的李群自同构。

将 Γ 中的元素写成 (r, s, ε)，我们得到乘法律

$$(r, s, \varepsilon)(r', s', \varepsilon') = \left(r + (-1)^{\varepsilon} r', s + s', \varepsilon + \varepsilon'\right),$$

其中，前两个分量分别模 d，最后一个分量模 2。关系$DP = \omega PD$、$D = D^{-1}$和 $P = P$给出

$$W_{rs} W_{r's'} = \omega^{-sr'} W_{r+r', s+s'}, \quad \overline{W_{rs}} = W_{-r,s}.$$

由于标量因子在共轭下会消失，我们得到

$$\sigma_{rs,\varepsilon} \circ \sigma_{r's',\varepsilon'} = \sigma_{r+(-1)^{\varepsilon} r', s+s', \varepsilon+\varepsilon'}.$$

结合 $\sigma_{00,\,0} = \mathrm{id}_G$，这就证明了作用律。 □

该作用可能是非忠实的。所有对 Γ求和均遍历其 $2d^2$ 群元素；当不同元素诱导出相同的自同构时，重数也计入其中。在单位元处对 (6.10) 求导可得

$$A_{\sigma_{rs,0}} H = W_{rs} H W_{rs}^{\dagger}, \quad A_{\sigma_{rs,1}} H = W_{rs} \overline{H} W_{rs}^{\dagger}, \quad H \in \mathfrak{g}.$$

对于下面的矩阵计算，我们也对任意$Y \in \mathbb{C}^{d\times d}$使用公式（ $Y=(Y_{k\ell}) \in \mathbb{C}^{d\times d}$，其中行索引和列索引均按模 d解释。于是我们有

$$(W_{rs}YW_{rs}^{\dagger})_{k\ell} = (D^r P^s Y (P^s)^{\dagger}(D^r)^{\dagger})_{k\ell} = \omega^{r(k-\ell)}(P^s Y (P^s)^{\dagger})_{k\ell} = \omega^{r(k-\ell)} Y_{k-s,\ell-s},$$

and

$$\frac{1}{d}\sum_{r=0}^{d-1} \omega^{r(k-\ell)} = \delta_{k\ell} \coloneqq \begin{cases} 1, & k=\ell, \\ 0, & k\neq \ell. \end{cases}$$

因此，由于 s遍历所有对角位置，

$$\left(\frac{1}{d^2}\sum_{r,s=0}^{d-1} W_{rs}YW_{rs}^{\dagger}\right)_{k\ell} = \frac{1}{d^2}\sum_{r,s=0}^{d-1} \omega^{r(k-\ell)} Y_{k-s,\ell-s} = \frac{\delta_{k\ell}}{d}\sum_{s=0}^{d-1} Y_{k-s,\ell-s} = \frac{\operatorname{tr} Y}{d}\delta_{k\ell}.$$

将同一恒等式应用于 Y，并对这两个恒等式取平均，我们得到

$$\frac{1}{d^2}\sum_{r,s=0}^{d-1} \sigma_{rs,0}(Y) = \frac{\operatorname{tr} Y}{d} I_d, \quad \frac{1}{2d^2}\sum_{\sigma\in\Gamma} \sigma(Y) = \frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{tr} Y}{d} + \frac{\operatorname{tr}\overline{Y}}{d}\right) I_d = \frac{\operatorname{Re}\operatorname{tr} Y}{d} I_d. \tag{6.11}$$

因此，对于反厄米 H，我们有

$$\frac{1}{2d^2}\sum_{\sigma\in\Gamma} A_\sigma H = \frac{\operatorname{Re}\operatorname{tr} H}{d} I_d = 0.$$

映射 ϕ_G 在（6.10）中的所有对称性作用下均为等变，因此（6.3）成立。事实上，反厄米部分及其无迹投影都与酉共轭和逐项复共轭可交换。定义 ϕ_G 的表达式可实线性地扩展到所有复矩阵。因此，关系（6.11）蕴含

$$\frac{1}{2d^2}\sum_{\sigma\in\Gamma} \phi_G(\sigma(V)U^{-1}) = \phi_G\left(\frac{\operatorname{Re}\operatorname{tr} V}{d} U^{-1}\right) = \frac{\operatorname{Re}\operatorname{tr} V}{d}\phi_G(U^{-1}).$$

因此，我们有

$$a(U) = d^{-1}\operatorname{Re}\operatorname{tr} U \in [-1,1],$$

和命题 6.1 将相应的 Winfree模型实现为一个 $4d^2N$- 粒子 Kuramoto–Lohe 系统的子系统，其耦合为 2κ。对于 G =U(d，(6.8) 中的场为

$$F_i(U) = H_i U, \quad I(U) = 1 + \frac{\operatorname{Re}\operatorname{tr} U}{d}, \quad S(U) = \frac{1}{2}(I_d - U^2),$$

因此，约化方程恰好是(4.3)，其中 H_i =Ω$_i$。对于 $G = \mathrm{SU}(d)$ 和 $H_i \in \mathfrak{su}(d)$，则变为

$$\begin{cases} \dot{U}_i = H_i U_i + \dfrac{\kappa}{N}\displaystyle\sum_{j=1}^{N}\left(1 + \frac{\operatorname{Re}\operatorname{tr} U_j}{d}\right) S_{\mathrm{SU}}(U_i), \\ S_{\mathrm{SU}}(U) = \dfrac{1}{2}(I_d - U^2) + \dfrac{\operatorname{tr}(U - U^{\dagger})}{2d} U. \end{cases} \tag{6.12}$$

注 6.1。 迹修正确保 $S_{\mathrm{SU}}(U)U^{-1} \in \mathfrak{su}(d)$，从而保持约束 行列式$U = 1$。普通的酉 *Winfree* 向量场不一定保持这一约束。当 $d = 2$ 时，迹修正为零，因为每个 $U \in$ S U(2) 的迹都是实数；对于更高的 d ，该修正通常不为零。

对于这两个矩阵群，Frobenius 内积在（6.10）中的对称性作用下保持不变，因此 $\|\mathfrak{H}\|_\Gamma = \max_i \|H_i\|_{S_2^d}$，且 $(d\phi_G)_{I_d} = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$ 满足局部吸引假设。定理 6.1 因此表明，对于模型（4.3）和（6.12），在 I_d 附近存在唯一平衡态；对于足够集中的初始数据和 $\kappa > C \max_i \|H_i\|_{S_2^d}$，状态和速度均指数收敛。常数和邻域可能依赖于 d，但不依赖于 N。对于典范酉模型，定理4.1 还处理了更大一类初始数据，其谱避开 -1，且耦合阈值取决于这些数据。

7. Winfree oscillators on general manifolds

本节受前文球面、酉模型及李群构造的启发，建立一个抽象 Winfree 模型。

设 $(\mathcal{M},\ g)$ 是一个 m维黎曼流形。受球面模型（2.2）、SO（n）模型（2.4）、U（d）模型（4.3）和（5.1）、抽象李群模型（6.5）以及 SU（d）模型（6.12）的启发，我们考虑抽象 Winfree 流形模型的柯西问题：

$$\begin{cases} \dot{x}_i = F_i(x_i) + \dfrac{\kappa}{N}\displaystyle\sum_{j=1}^{N} I(x_j)S(x_i), \quad t>0, \\ x_i\big|_{t=0} = x_i^0, \quad i \in [N], \end{cases} \tag{7.1}$$

其中 F_1，……，F_N和 S是定义在 $\mathcal{M}$上的 Lipschitz 向量场，且 $I\colon\ \mathcal{M} \to [0,\infty)$ 是一个取实值的利普希茨影响函数。我们指定一个点 $p \in \mathcal{M}$，相互作用场 S 以该点为吸引目标。上述球面、酉和特殊酉模型都是（7.1）在对 F_i、I和 S作出特定选择时的特例：

- 例 A（球面模型）：对于 $\mathcal{M} = \mathbb{S}^{d-1}$ 和固定的 $p \in \mathbb{S}^{d-1}$，我们设

  $$F_i(x) = A_i x, \quad I(x) = 1 + \langle x, p\rangle, \quad S(x) = p - \langle x, p\rangle x.$$

  于是系统（7.1）$_1$ 化为 Winfree 球面模型（2.2）：

  $$\dot{x}_i = A_i x_i + \frac{\kappa}{N}\sum_{j=1}^{N}(1+\langle x_j, p\rangle)(p - \langle x_i, p\rangle x_i).$$

- 例 B（酉模型）：对于 $\mathcal{M} = \mathrm{U}(d)$，我们取 $p = I_d$ 并设

  $$F_i(U) = \Omega_i U, \quad I(U) = \frac{d + \mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\,U}{d}, \quad S(U) = \frac{1}{2}(I_d - U^2).$$

  事实上，我们将（4.5）右乘 U_i 得到

  $$\dot{U}_i = F_i(U_i) + \kappa R S(U_i),$$

  因此系统（7.1）$_1$ 恢复为 Winfree 矩阵模型的平均场形式。

- 例 C（特殊酉模型）：对于 $\mathcal{M} = \mathrm{SU}(d)$、$p = I_d$ 和 $H_i \in \mathfrak{su}(d)$，取

  $$F_i(U) = H_i U, \quad I(U) = 1 + \frac{\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\,U}{d}, \quad S(U) = S_{\mathrm{SU}}(U),$$

  其中 S_{SU} 由式（6.12）给出。于是，式（7.1）就是第 6节构造的 Winfree–Lohe 子系统。

• 例 D（李群模型）：在因子分解假设（6.6）下，约化李群模型（6.5）具有式（7.1）的形式，其中 $p = e$， $I = 1 + a$，且向量场由式（6.8）给出。对于 $\phi \neq 0$，将 6.6）代入 $y = e$ 可得 $a\,(e) = 1$。因此，在 e附近足够小的坐标球上，影响 I 为正，并且 F_i、 S和 I 的坐标表示是利普希茨连续的。

对于 $r > 0$，我们设

$$B_r^m := \{x \in \mathbb{R}^m : \|x\| < r\}.$$

为了在一个固定坐标系中得到定量局部弛豫定理，我们固定一个坐标图

$$\varphi : \mathcal{N} \longrightarrow B_1^m \subset \mathbb{R}^m, \quad \varphi(p) = 0.$$

从此处起，我们用 x_i 表示坐标变量，并用 F_i、 S 和 I 表示相应的坐标表示。以下所有内积、范数和 Lipschitz 常数均为该固定坐标图中的欧几里得量；因此，所得定理是 $\mathcal{M}$ 上的局部定理，并且依赖于坐标图。此后，

$$F_1, \dots, F_N, S : B_1^m \to \mathbb{R}^m, \quad I : B_1^m \to [0, \infty) \quad \text{are Lipschitz functions.}$$

我们引入序参量：

$$R := \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} I(x_j), \tag{7.2}$$

从而（7.1）$_1$ 变为

$$\dot{x}_i = F_i(x_i) + \kappa R S(x_i), \quad i \in [N]. \tag{7.3}$$

我们还设定

$$\mathfrak{F} := (F_1, \dots, F_N), \quad X := (x_1, \dots, x_N),$$

and

$$\|\mathfrak{F}\|_\infty := \max_{i \in [N]} \|F_i\|_{L^\infty(B_1^m)}, \quad \|\operatorname{Lip} \mathfrak{F}\|_\infty := \max_{i \in [N]} \operatorname{Lip} F_i, \quad \|S\|_\infty := \|S\|_{L^\infty(B_1^m; \mathbb{R}^m)}.$$

接下来，我们针对以 F_i、 S 和 I 表示的弛豫动力学提出以下框架：

• ($\mathcal{F}_B 1$)：向量场 F_1、.....、 F_N和 S，以及影响函数 I，在 B_1^m上是 Lipschitz 连续的。

• ($\mathcal{F}_B 2$)：相互作用场 S 严格地吸引向原点：存在$c > 0$ 使得

$$S(0) = 0, \quad \langle S(x) - S(y), x - y \rangle \leq -c\|x - y\|^2, \quad x, y \in B_1^m. \tag{7.4}$$

• ($\mathcal{F}_B 3$)：影响函数严格为正：存在 $I_0 > 0$ 使得

$$I(x) \geq I_0, \quad x \in B_1^m. \tag{7.5}$$

• ($\mathcal{F}_B 4$)：吸引力超过了影响函数的变化，且耦合强度足够大：

$$cI_0 > \|S\|_\infty \operatorname{Lip} I, \quad \kappa > \max\left\{ \frac{\|\mathfrak{F}\|_\infty}{cI_0}, \frac{\|\operatorname{Lip} \mathfrak{F}\|_\infty}{cI_0 - \|S\|_\infty \operatorname{Lip} I} \right\}.$$

7.1. **整体适定性**。 在本小节中，我们讨论柯西问题（7.1）的整体适定性。

引理 7。 **1.** 假设条件$(\mathcal{F}_B1)$–$(\mathcal{F}_B4)$ 成立，且初始数据满足 y

$$x_i^0 \in B_1^m, \quad i \in [N].$$

则柯西问题 (7.1) 存在唯一的全局解，且关于时间是 *Lipschitz* 连续的。

证明。 证明分为两个步骤。首先，我们选取一个包含初始数据的较小球，然后证明没有任何分量能够离开该球。

- **步骤 A** （不变球的选取）： 我们将 $r \in (0,1)$ 选取得足够接近 1，使得

$$x_i^0 \in B_r^m, \quad i \in [N], \quad \kappa > \frac{\|\mathfrak{F}\|_\infty}{crI_0}.$$

柯 奇–利普希茨定理保证，只要 $X(t) \in (B_1^m)^N$，就存在唯一的局部解。

- **步骤 B** （首次退出反证法）： 假设 $T < \infty$ 是某个分量首次达到 ∂B_r^m的时刻。那么，我们有

$$\|x_i(T)\| = r \quad \text{for some } i \in [N].$$

由（7.3）、（7.4）和（7.5），可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|x_i(t)\|^2\Big|_{t=T} &= \langle F_i(x_i(T)), x_i(T)\rangle + \kappa R(T)\langle S(x_i(T)), x_i(T)\rangle \\ &\le \|\mathfrak{F}\|_\infty r - \kappa c I_0 r^2 \\ &= r\left(\|\mathfrak{F}\|_\infty - \kappa c r I_0\right) < 0,\end{aligned}$$

其中，在吸引估计中用到了 $S(0) = 0$。然而，在首次退出时刻， $\|x_i(t)\|^2$ 的左导数不可能为负。这个矛盾表明，每个分量始终保持在 B_r^m内。由于B_r^m紧包含于 B_1^m中，局部解可以延拓至所有$t \ge 0$。此外，有界球上的 Lipschitz假设意味着向量场和影响函数均有界，并且

$$\|\dot{x}_i(t)\| \le \|\mathfrak{F}\|_\infty + \kappa \|I\|_{L^\infty(B_1^m)} \|S\|_\infty, \quad t \ge 0, \quad i \in [N].$$

因此，该解关于时间是 Lipschitz 连续的，正如所断言的那样。 □

7.2. **指数稳定性**。 在本小节中，我们讨论（7.1）的指数稳定性。对于一个 N元组 $Y = (y_1, \dots, y_N) \in (\mathbb{R}^m)^N$，我们使用混合范数$\|Y\|_{q,\,2}$定义见（1.2）。我们还设

$$\mu_{\mathcal{M}} := \kappa\left(cI_0 - \|S\|_\infty \operatorname{Lip} I\right) - \|\operatorname{Lip}\mathfrak{F}\|_\infty.$$

于是，由（$\mathcal{F}_B4$）可得

$$\mu_{\mathcal{M}} > 0.$$

~引理 *7.2.* 假设（$\mathcal{F}_B1$）–（$\mathcal{F}_B4$）成立。设 $X = (x_1, \dots, x_N)$ 和 $\widetilde{X} = (\widetilde{x}_1, \dots, \widetilde{x}_N)$ 是方程（*7.1*）的两个全局解，且 $X(0), \widetilde{X}(0) \in (B_1^m)^N$。那么，对于每个 $1 \le q \le \infty$,

$$\|X(t) - \widetilde{X}(t)\|_{q,2} \le e^{-\mu_{\mathcal{M}} t}\|X(0) - \widetilde{X}(0)\|_{q,2}, \quad t \ge 0. \tag{7.6}$$

证明。 证明分为两个步骤。首先，我们对 $X - X$ 推导出一个逐点微分不等式~，然后将其推广到混合范数。

• **步骤 A**（逐点估计）：令 R 和 R 分别为与~ X~和 X相关联的序参量。从（7.3）中的两个方程相减，得到

$$\dot{x}_i - \dot{\widetilde{x}}_i = F_i(x_i) - F_i(\widetilde{x}_i) + \kappa R\big(S(x_i) - S(\widetilde{x}_i)\big) + \kappa(R - \widetilde{R})S(\widetilde{x}_i). \tag{7.7}$$

此外，利用（7.2）可得

$$|R - \widetilde{R}| \le \frac{\operatorname{Lip} I}{N} \sum_{j=1}^{N} \|x_j - \widetilde{x}_j\| = (\operatorname{Lip} I)\|X - \widetilde{X}\|_{1,2}. \tag{7.8}$$

现在，我们取（7.7）与 $x_i - \widetilde{x}_i$的内积，并利用（7.4）、（7.5）和（7.8）来求 d

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|x_i - \widetilde{x}_i\|^2 \le (\|\operatorname{Lip} \mathfrak{F}\|_\infty - \kappa c I_0)\,\|x_i - \widetilde{x}_i\|^2 + \kappa\|S\|_\infty(\operatorname{Lip} I)\|X - \widetilde{X}\|_{1,2}\|x_i - \widetilde{x}_i\|.$$

对于 $x_i \neq \widetilde{x}_i$，我们将平方距离估计除以 $\|x_i - \widetilde{x}_i\|$。当 $x_i = \widetilde{x}_i$时，关系式（7.7）给出

$$D^+\|x_i - \widetilde{x}_i\| = \|\dot{x}_i - \dot{\widetilde{x}}_i\| \le \kappa\|S\|_\infty(\operatorname{Lip} I)\|X - \widetilde{X}\|_{1,2}.$$

因此，在任意时刻，

$$D^+\|x_i - \widetilde{x}_i\| \le (\|\operatorname{Lip} \mathfrak{F}\|_\infty - \kappa c I_0)\,\|x_i - \widetilde{x}_i\| + \kappa\|S\|_\infty(\operatorname{Lip} I)\|X - \widetilde{X}\|_{1,2}. \tag{7.9}$$

• **步骤 B**（混合范数估计）：对于 $q = 1$，我们对（7.9）取平均。对于 $1 < q < \infty$，在满足$\|X - \widetilde{X}\|_{q,\ 2} > 0$ 的时刻，我们将（7.9）乘以 $\|x_i - \widetilde{x}_i\|^{q-1}$，对所得关系关于 i 取平均，再乘以$\|X - \widetilde{X}\|_{q\ 2}^{1-q}$，。利用 H¨older 不等式以及

$$\|X - \widetilde{X}\|_{1,2} \le \|X - \widetilde{X}\|_{q,2},$$

我们得到

$$D^+\|X - \widetilde{X}\|_{q,2} \le (\|\operatorname{Lip} \mathfrak{F}\|_\infty - \kappa c I_0 + \kappa\|S\|_\infty \operatorname{Lip} I)\,\|X - \widetilde{X}\|_{q,2} = -\mu_{\mathcal{M}}\|X - \widetilde{X}\|_{q,2}.$$

~如果$\|X - X\|_{q,\ 2} = 0$，则解的唯一性保证 $X = X$从该时刻起成立，因此同一不等式仍然成立。情形 $q = \infty$ 则由分量距离有限最大值的右上 Dini 导数法则得出。Gronwall 引理给出（7.6）。□

7.3. **弛豫动力学**。在本小节中，我们利用引理 7.1 和引理 7.1 以及引理 7.2，研究（7.1）的弛豫动力学。

命题 7.1。 假设 $(\mathcal{F}_B1)$–$(\mathcal{F}_B4)$ 成立。那么，系统 (7.1) 具有唯一平衡态

$$X^\infty \in (B_1^m)^N.$$

证明。 任取初始数据 $X^0 = (x_1^0, \ldots, x_N^0) \in (B_1^m)^N$，令 $X(t)$ 为引理 7.1给出的相应唯一全局解。根据其证明，存在 $r \in (0,1)$，使得

$$X(t) \in (B_r^m)^N \quad \text{for all } t \ge 0.$$

~对于 $s \ge 0$，时间平移 $X(t) := X(t+s)$是另一个全局解。引理 7.2 结合$q = 2$ 可得

$$\|X(t+s) - X(t)\|_{2,2} \le e^{-\mu_{\mathcal{M}} t}\|X(s) - X(0)\|_{2,2}. \tag{7.10}$$

由于 $X(t) \in (B_r^m)^N$ 且 $\overline{B_r^m}$是紧致的，（7.10）中的最后一个因子关于 s一致有界。对于 $t_2 \geq t_1 \geq 0$，我们在（ $t = t_1$ 和 $s = t_2 - t_1$ ）中取7.10。于是，我们有

$$\|X(t_2) - X(t_1)\|_{2,2} \leq Ce^{-\mu_{\mathcal{M}} t_1},$$

其中 C 与 t_1 和 t_2无关。因此， $X(t)$是柯西的，并收敛到某个$X^\infty \in (B_r^m)^N$。

令 Φ_s 表示由（7.1）生成的流。由流的连续性可知，

$$\Phi_s(X^\infty) = \lim_{t\to\infty} \Phi_s(X(t)) = \lim_{t\to\infty} X(t+s) = X^\infty, \quad s \geq 0.$$

因此 X^∞ 是一个平衡态。证明引理 7.1 时给出的边界估计中的严格不等式排除了 $\|x_i^\infty\| = r$，因此

$$X^\infty \in (B_r^m)^N \subset (B_1^m)^N.$$

若 Y^∞ 是另一个平衡态，则将引理 7.2 应用于这两个常值解可得

$$\|X^\infty - Y^\infty\|_{2,2} \leq e^{-\mu_{\mathcal{M}} t}\|X^\infty - Y^\infty\|_{2,2}, \quad t \geq 0.$$

令 $t \to \infty$ ，得到

$$X^\infty = Y^\infty.$$

□

定理 7.1. 假设$(\mathcal{F}_B 1)$–$(\mathcal{F}_B 4)$ 成立，并令 $X(t)$为以下方程的全局解：(7.1)，其初始数据为

$$x_i^0 \in B_1^m, \quad i \in [N].$$

那么 $X(t)$ 指数收敛到命题 X^∞ 中的唯一平衡态（命题 7.1）。更准确地说，对于任意 $1 \leq q \leq \infty$,

$$\|X(t) - X^\infty\|_{q,2} \leq e^{-\mu_{\mathcal{M}} t}\|X(0) - X^\infty\|_{q,2}, \quad t \geq 0. \tag{7.11}$$

~证明。 平衡态 X^∞ 生成常值解 $X(t) \equiv X^\infty$，我们应用~引理 7.2 于 X 并应用 X ，从而得到所需的估计（7.11）。 □

8. Concluding remarks

本文为单位球面上的 Winfree模型 [HPR15] 的相位锁定结果提出了高维推广，研究对象包括 $\mathbb{S}^{d-1}$酉群和特殊酉群、李群以及一般黎曼流形。在第 3节至第 5节中，轨道会在有限时间内进入一个正不变区域。该区域内的压缩使我们能够将每条轨道与其时间平移进行比较，并证明其指数收敛到某个平衡态。在第 7节中，由于初始数据已处于不变坐标邻域内，同样的压缩论证从时刻零起便适用。在第 6节中，我们将约化系统嵌入一个 Kuramoto–Lohe系综，其中一个振子固定在单位元处。每个原始振子相对于这个固定振子的相对相位就是其自身的状态，因此环境相对相位的收敛意味着约化态收敛到平衡态。

仍有一些自然问题尚待解决。首先，定理 3.1 和4.1中关于收敛的充分耦合界有多精确？对于给定的固有频率和初始数据，将逐路径临界耦合定义为所有满足以下条件的 $k \geq 0$ 的下确界：对每个$\kappa > k$，相应的解都收敛到一个平衡态，参见 [Ryo26，定义 8]。对于典范酉模型，注释4.5 给出了平衡态存在的精确阈值。逐路径临界耦合何时与该阈值一致，

尤其是当某个 U_i^0 与 Ω 不对易时$_i$? 对于典范球面模型（3.1），同样可以探讨平衡存在阈值及其与逐路径临界耦合的关系。其次，自然会问，本文的结果是否具有 $N \to \infty$的平均场极限，从而为相应的 Vlasov 型动力学方程建立收敛定理，这些方程定义在 $\mathbb{S}^{d-1}$、U(d)、SU(d)、李群以及一般流形上。

AppendixA. Proof of Lemma 4.1

在本附录中，我们验证引理 4.1。感谢 Otte Hein¨avaara 提供以下证明。注意，若 A 是一个具有特征值 $\lambda_1, \cdots, \lambda_d$ 的 $d \times d$ 矩阵

$$\sum_{i=1}^{d} |\lambda_i| \le \|A\|_{S_1^d}.$$

证明如下。[3] 我们假设通过舒尔分解，A是上三角矩阵，其对角线上为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_d$。然后，我们写出

$$\lambda_i = |\lambda_i|\alpha_i \quad \text{with } |\alpha_i| = 1$$

并定义

$$D = \operatorname{diag}(\alpha_1, \cdots, \alpha_d) \in \mathrm{U}(d) \quad \text{and} \quad B = D^{-1}A.$$

于是，我们有

$$\operatorname{tr} B = \sum_{i=1}^{d} |\lambda_i|.$$

另一方面，B与 A具有相同的奇异值 σ_1，$\cdots$，σ_d，并且

$$B = U \operatorname{diag}(\sigma_1, \cdots, \sigma_d)V \quad \text{for some } U, V \in \mathrm{U}(d).$$

Now

$$\sum_{i=1}^{d} |\lambda_i| = \operatorname{tr} B = \operatorname{tr}(U \operatorname{diag}(\sigma_1, \cdots, \sigma_d)V) = \operatorname{tr}(\operatorname{diag}(\sigma_1, \cdots, \sigma_d)VU)$$

$$= |\sum_{i=1}^{d} \sigma_i [VU]_{ii}| \le \sum_{i=1}^{d} \sigma_i |[VU]_{ii}| \le \sum_{i=1}^{d} \sigma_i = \|B\|_{S_1^d} = \|A\|_{S_1^d},$$

其中，$[\cdot]_{ij}$ 表示（i，j）分量。

因此，只需证明

$$\operatorname{Re}\lambda \le \sin\alpha^{\infty}|\lambda|,$$

对 $U - V$的每个特征值 λ 都成立。等价地，我们证明：若复数 λ 满足

$$\operatorname{Re}\lambda > \sin\alpha^{\infty}|\lambda|,$$

那么 λ 不是 $U - V$的特征值。根据 [Wie55，引理 2], 若将 U的特征值记为 α_1，$\cdots$，α_d将 V的特征值记为 β_1，$\cdots$，β_d，只需证明存在一个圆，将 α_1，$\cdots$，α_d与 $\beta_1 + \lambda$，$\cdots$，$\beta_d + \lambda$分隔开。我们设

$$\Gamma := \{e^{i\theta} : -\alpha^{\infty} < \theta < \alpha^{\infty}\}.$$

[3]此论证源自 https://math.stackexchange.com/questions/381808/sum-of-eigenvalues-and-singular-values。

由于 $\alpha_i,\ \beta_i \in \Gamma$，只需证明存在一个圆将 Γ 与 $\Gamma+\lambda$分隔开。但对于任意 $e^{i\theta} \in \Gamma$，显然 Re($\lambda e^{-i\theta}$) > 0，因此

$$|e^{i\theta}+\lambda|^2 > 1+|\lambda|^2.$$

因此 圆 $|z| = \sqrt{1+|\lambda|^2}$ 是一条将 Γ 与 $\Gamma+\lambda$ 分隔开的圆，从而完成了证明 of.

Appendix B. Proof of Lemma 4.2

在本附录中，我们验证引理4.2。由于 U 是酉的， K 与 H 可交换:

$$HK = \frac{1}{4}(U+U^\dagger)(U-U^\dagger) = \frac{1}{4}(U^2-(U^\dagger)^2) = \frac{1}{4}(U-U^\dagger)(U+U^\dagger) = KH.$$

于是，对于每个 $x \in \mathbb{C}^d$，我们有

$$\|x\|^2 = \|Ux\|^2 = \|(H+K)x\|^2 = \|Hx\|^2 + \|Kx\|^2 + x^\dagger(K^\dagger H + H^\dagger K)x.$$

由于 H 和 K 分别是厄米的和反厄米的，因此我们有

$$K^\dagger H + H^\dagger K = -KH + HK = 0.$$

由此可得所需结果:

$$\|x\|^2 = \|Hx\|^2 + \|Kx\|^2.$$

References

[ABV+05] J. A. Acebr´on、L. L. Bonilla、C. J. P. Vicente、F. Ritort 和 R. Spigler。《Kuramoto模型：同步现象的简单范式》。 *Reviews of Modern Physics* 77 1 137, , ( ): 。[AS 2005 01] J. T. Ariaratnam 和 S. H. Strogatz。《耦合非线性振子的Winfree模型相图》。 *Physical Review Letters*, 86(19):4278，2001年。[Ban15a] A. S. Bandeira。《 *Convex relaxations for certain inverse problems on graphs*》。博士论文，普林斯顿大学，2015年。[Ban15b] A. S. Bandeira。《数据科学数学：十讲与四十二个开放问题》。*Lecture notes*，2015年。[BHD10] M. Breakspear、S. Heitmann 和 A. Daffertshofer。《皮层振荡的生成模型：Kuramoto模型的神经生物学意义》。 *Frontiers in Human Neuroscience* 4 190, , ： 。[Buc38] J. B. Buck。《萤火虫同步的节律性闪烁》。 *The Quarterly Review of Biology*，13 3 301( ): – 2010 314，1938年。[Buc88] J. Buck。《萤火虫同步的节律性闪烁。II》。 *The Quarterly Review of Biology*，63 3 265 289，1988年 ( ): – 。[CEM17] B. Chen、J. R. Engelbrecht 和 R. Mirollo。《Kuramoto振荡器网络的双曲几何》。 *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*，50(35):355101，2017年。[CGO19] S. Chandra、M. Girvan 和 E. Ott。《 *D*维广义Kuramoto模型中的连续相变与不连续相变：奇数 *D* *Physical Review X* 9 1 011002, 有所不同》。 2019 , ( ): 。[CH14] S.-H. Choi 和 S.-Y. Ha。《吸引与排斥耦合作用下 Lohe 振子的完全锁定》。 *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*，13(4):1417–1441，2014年。[DB14] F. D¨orfler 和 F. Bullo。《相位振子复杂网络中的同步：综述》。*Automatica*，50(6):1539–1564，2014年。[dBYVM83] G. de Bruin、D. L. Ypey 和 W. P. Van Meerwijk。《通过相位重置动作电位效应实现起搏细胞链同步》。 *Biological Cybernetics*，48(3):175–186，1983年。[DeV19] L. DeVille。《量子Kuramoto的同步与稳定性》。 *Journal of Statistical Physics*，174 1 160 187，2019年 ( ): – 。[EK90] G. Ermentrout 和 N. Kopell。《耦合神经振荡器系统中的振子死亡》。 *SIAM Journal on Applied Mathematics* 50 1 125 146, 1990 , ( ): – 。

[Erm94] B. Ermentrout。《神经振荡器导论》。载于 *Neural modeling and neural networks*，第79–110页。爱思唯尔，1994年。[GLPR25] B. Geshkovski、C. Letrouit、Y. Polyanskiy 和 P. Rigollet。《关于Transformer的数学视角》。 *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society*，62(3):427，2025年。[HKM21] S.-Y. Ha、M. Kang 和 B. Moon。《无限圆柱面上的Winfree系综集体行为》。 *Discrete & Continuous Dynamical Systems-B*，26(5):2749，2021年。[HKPR16] S.-Y. Ha、D. Ko、J. Park 和 S.-Y. Ryoo。《局部耦合网络上Winfree振子的涌现动力学》。 *Journal of Differential Equations*，260(5):4203–4236，2016年。[HKPR17] S.-Y. Ha、D. Ko、J. Park 和 S.-Y. Ryoo。《Winfree振子系综中部分锁定态的涌现》。 *Quarterly of Applied Mathematics*，75(1):39–68，2017年。[HKPZ16] S.-Y. Ha、D. Ko、J. Park 和 X. Zhang。《经典与量子振子的集体同步》。 *EMS Surveys in Mathematical Sciences*，3(2):209–267，2016年。[HKR17] S.-Y. Ha、D. Ko 和 S.-Y. Ryoo。《某类李群上广义Lohe模型的涌现动力学》。 *Journal of Statistical Physics*，168(1):171–207，2017年。[HLL+26] S.-Y. Ha、C. Lee、E. Lee、J. Lee 和 S.-Y. Ryoo。《特殊正交群上的Winfree振子涌现行为》。 *arXiv preprint arXiv:2604.24229*，2026年。[HP20] S.-Y. Ha 和 H. Park。《从Lohe张量模型到Lohe厄米球面模型及其涌现动力学》。 *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*，19(2):1312–1342，2020年。[HPR15] S.-Y. Ha、J. Park 和 S.-Y. Ryoo。《大耦合区域中Winfree模型相位锁定态的涌现》。 *Discrete & Continuous Dynamical Systems-A*，35(8):3417–3436，2015年。[HR16] S.-Y. Ha 和 S.-Y. Ryoo。《Lohe模型中相位锁定态的涌现与轨道稳定性》。 *Journal of Statistical Physics*，163(2):411–439，2016年。[HUL99] J.-B. Hiriart-Urruty 和 A. Lewis。《对称矩阵特征值的Clarke次微分与Michel-Penot次微分》。 *Computational Optimization and Applications*，13(1):13–23，1999年。[Kur75] Y. Kuramoto。《耦合非线性振子群体的自锁定》。*in Physics* 39 420 422, 1975 *Lecture Notes* ，：–。[LMS21] M. Lipton 、 R. Mirollo 和 S. H. Strogatz。《球面上的 Kuramoto 模型：用群论和双曲几何解释其低维动力学》。*Journal of Nonlinear Science* 31 9 2021 *Chaos: An Interdisciplinary* ，( )，。

[Loh09] M. Lohe。《非阿贝尔Kuramoto模型与同步》。*Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 42 39 395101, 2009 ，( )：。[Loh10] M. Lohe。《量子网络上的量子同步》。*Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 43 46 465301, 2010 ，( )：。[Loh19] M. Lohe。《矩阵Riccati方程组、线性分式变换、部分可积性与同步》。 *Journal of Mathematical Physics*，60(7)，2019年。[Mar20] J. Markdahl。《黎曼流形上的同步：多连通意味着多稳态》。 *IEEE Transactions on Automatic Control*，66(9):4311–4318，2020年。[MERT26] C. Moreno-Earle、S.-Y. Ryoo 和 G. To。《惯性Winfree模型的弛豫动力学》。*arXiv preprint arXiv:2605.01695*，2026年。[OKT17] W. Oukil、A. Kessi 和 P. Thieullen。《Winfree模型中的同步假设》。*Dynamical Systems* 32 3 326 339, 2017 ，( )：–。[OS06] R. Olfati-Saber。《球面上的群集：具有振荡器网络式同步行为的可编程群集》。载于 *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*，第5060–5066页。IEEE，2006年。[OTK19] W. Oukil、P. Thieullen 和 A. Kessi。《平均场模型的不变锥与同步态稳定性》。 *Dynamical Systems*，34(3):422–433，2019年。[Par22] H. Park。《Winfree模型向高维球面的推广及其涌现动力学》。 *Discrete and Continuous Dynamical Systems: Series A*，42(2):707–735，2022年。[Rig26] P. Rigollet。《Transformer的平均场动力学》。载于 *International Congress of Mathematicians 2026* 389 404 2026 ，第–页。SIAM，。[Ryo25] S.-Y. Ryoo。《李群上Kuramoto–Lohe型同步模型中相位锁定态的渐近形成与轨道稳定性》。 *Communications in Mathematical Sciences*，23 5 1221 1239，2025年 ( )：–。[Ryo26] S.-Y. Ryoo。《Winfree模型中的振子死亡》。 *arXiv preprint arXiv:2601.01203*，2026年。[Smi35] H. M. Smith。《萤火虫的同步闪烁》。 *Science*，82(2120):151–152，1935年。

[Str00] S. H. Strogatz. 从 Kuramoto 到 Crawford：探索耦合振子群体中同步的出现。 *Physica D: Nonlinear Phenomena*，143(1–4):1–20，2000。[WCS98] K. Wiesenfeld、P. Colet 和 S. H. Strogatz。约瑟夫森阵列中的频率锁定：与 Kuramoto 模型的联系。 *Physical Review E*，57(2):1563，1998。[Wie55] H. Wielandt。关于正规矩阵之和的特征值。 *Pacific J. Math*，5(4):633–638，1955。[Wie96] K. Wiesenfeld。无序约瑟夫森阵列频率锁定动力学的新结果。*Physica B: Condensed Matter*，222(4):315–319，1996。[Win67] A. T. Winfree。生物节律与耦合振子群体的行为。 *Journal of Theoretical Biology* 16 1 15 42, 1967 ，( ): – 。[Win80] A. T. Winfree。 *The geometry of biological time*，第 2 卷。Springer，1980。[YVMD82] D. L. Ypey、W. P. Van Meerwijk 和 R. L. DeHaan。通过电耦合同步心脏起搏细胞：对胚胎心脏细胞聚集体和起搏细胞模型的研究。载于 *Cardiac Rate and Rhythm: Physiological, Morphological and Developmental Aspects*，第 363–395 页。Springer，1982。[ZLD+20] H. Zhang、Y. Li、Z. Deng、X. Liang、L. Carin 和 E. Xing。Autosync：学习为数据并行分布式深度学习实现同步。 *Advances in Neural Information Processing Systems*，33 906: –917，2020年。[ZZQ18] J. Zhang、J. Zhu 和 C. Qian。相同振子的 Lohe 模型的平衡态与一致性。 *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*，17(2):1716–1741，2018。

(Seung-Yeal Ha)
Department of Mathematical Sciences and Research Institute of Mathematics
Seoul National University, Seoul 08826, Republic of Korea*Email address*:
syha@snu.ac.kr (Chaejoo Lee)Department of Mathematical Sciences
Seoul National University, Seoul 08826, Republic of Korea*Email address*:
leechaeju@snu.ac.kr (Eunjun Lee)Department of Mathematical Sciences
Seoul National University, Seoul 08826, Republic of Korea*Email address*:
eunjun.lee@snu.ac.kr (Jaemoon Lee)Department of Mathematical Sciences
Seoul National University, Seoul 08826, Republic of Korea*Email address*:
dlwoans0001@snu.ac.kr (Seung-Yeon Ryoo) Hausdorff Center for Mathematics,
University of Bonn Endenicher Allee 60 53115 Bonn, Germany*Email address*:
sryoo@uni-bonn.de