arXiv:2611.32191v1 [math.FA] 24 Nov 2026

上三角算子矩阵交换算子组的 Taylor 可逆性与完备化问题

´CHAFIQ BENHIDA 和 HRANISLAV STANKOVIC

摘要。我们研究作用于巴拿赫空间直和上的上三角算子矩阵$\mathbf{M_C} = \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} \end{smallmatrix}\right)$交换元组。利用 Koszul 复形所诱导的上同调长正合列，我们证明，$\mathbf{M_C}$ 是 Taylor 可逆的，当且仅当每个次数上的连接同态 $H^k(\mathbf{B}) \to H^{k+1}(\mathbf{A})$ 都是线性双射；并且在对角元组满足自然的闭值域假设时，这些双射自动成为拓扑同构。我们确定了$\mathbf{M_C}$ 的 Taylor 可逆性所强制的对角元组闭值域性质，并通过一个例子说明其余性质一般并不成立。随后，我们研究多变量可逆补全问题，即是否存在一个耦合元组$\mathbf{C}$ 使$\mathbf{M_C}$ 成为 Taylor 可逆。我们将其归结为由单个耦合元组实现一族上同调同构的问题，并证明$\mathbf{B}$ 的上同调与$\mathbf{A}$ 的移位上同调必须作为外代数上的分次模同构；此外，我们给出对角元组的例子，它们在每个次数上的上同调空间都拓扑同构，却无法进行 Taylor 可逆补全。这种现象在一维对应情形中并不存在。

1. 引言

近年来，人们对 2×2 上三角算子矩阵进行了广泛研究。这项研究主要受以下事实推动：若 $A \in \mathfrak{B}(\mathcal{X})$ 且 $\mathcal{S}$是 $\mathcal{X}$中闭的、可补的 A-不变子空间，则 A 可表示为分块形式

$$A = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \mathcal{S} \\ \mathcal{P} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \mathcal{S} \\ \mathcal{P} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

其中 $\mathcal{X} = \mathcal{S} \oplus \mathcal{P}$，且 $\mathcal{P}$ 闭。因此，许多近期发表的论文都关注上三角算子矩阵的可逆性和正则性问题

$$M_C = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \mathcal{X} \\ \mathcal{Y} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \mathcal{X} \\ \mathcal{Y} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

以及 M_C的各种类型的谱。由这些研究引出的一项具体问题，是如何补全部分指定的算子矩阵$\begin{pmatrix} A & ? \\ 0 & B \end{pmatrix}$，以获得具有某种所需性质的算子。对于给定的 $A \in \mathfrak{B}(\mathcal{X})$ 和 $B \in \mathfrak{B}(\mathcal{Y})$，以下三个问题反复出现：

- **问题 1：** 是否存在一个算子 $C \in \mathfrak{B}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$，使得 M_C 属于某种类型（可逆、右可逆、左可逆、正则，.....）？

日期：2026年11月25日。2020 数学主题分类。47A13, 47A10, 47A53。

关键词和短语。Taylor 谱；Koszul 复形；算子矩阵；上同调；完备化问题。

• **问题 2：** 给定算子 A 和 B，能否计算 $\bigcap_C \sigma_*(M_C)$? 这里的交集取遍所有 $C \in \mathfrak{B}(\mathcal{Y},\mathcal{X})$，而 σ_* 可以是任何类型的谱（本质谱、左谱、右谱、韦尔谱、布劳德谱等）？

• **问题 3：** 是否存在一个算子 $C' \in \mathfrak{B}(\mathcal{Y},\mathcal{X})$，使得 $\sigma_*(M_{C'}) = \bigcap_C \sigma_*(M_C)$，其中交集取遍所有 $C \in \mathfrak{B}(\mathcal{Y},\mathcal{X})$?

一般而言，在单变量情形下回答这些问题的方法包括：为可逆补全的存在性找出必要且充分的条件 C，然后描述所有此类算子构成的集合。关于这些问题的全面研究，参见 [5]。可逆补全的核心结果总结于以下定理中，该定理见于 [4,6,8]。

定理 1.1。 设 $A \in \mathfrak{B}(\mathcal{X})$ 和 $B \in \mathfrak{B}(\mathcal{Y})$ 为给定算子。对于某个 $C \in \mathfrak{B}(\mathcal{Y},\mathcal{X})$，算子矩阵 M_C 可逆，当且仅当：

（i） A 是左可逆。（ii） B 是右可逆。

（iii） $\mathcal{N}(B) \cong \mathcal{X}/\mathcal{R}(A)$（作为巴拿赫空间）。

虽然单算子补全问题已得到充分理解，但将这些概念推广到多变量情形，即推广到由算子组成的交换 n 元组，会带来重大的代数和拓扑挑战。在这一背景下，Taylor 谱提供了恰当的联合可逆性概念，其特征是 Koszul 复形的正合性。

上三角交换元组的 Taylor 可逆性与其对角项的 Taylor 可逆性之间的关系是经典结果。Taylor [11] 利用上同调中的长正合序列证明，对于一个交换元组，其在闭不变子空间上的限制元组、诱导商元组和原元组这三者的 Taylor 谱中，任意两个的并集都包含第三个。在希尔伯特空间情形下，Curto [2] 证明，若一个由算子$\mathbf{A} = (A_1,\dots,A_n)$ 组成的 n 元组和一个$\mathbf{B} = (B_1,\dots,B_n)$ 组成的 n 元组均为 Taylor 可逆，且算子矩阵 $\mathbf{M_C} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} \end{pmatrix}$ 构成一个交换 n元组，那么$\mathbf{M_C}$ 本身也为 Taylor 可逆；并且，若 $\mathbf{A}$ 和$\mathbf{M_C}$ 均为 Taylor 可逆，则$\mathbf{B}$也为 Taylor 可逆（另请参见 [3]，该文利用 Koszul 复形系统研究了可逆和 Fredholm n 元组）。

贯穿全文的一个要点，是区分 Koszul上同调的代数性质与拓扑性质。$\mathbf{M_C}$ 的 Taylor 可逆性迫使其 Koszul 复形的边界映射具有闭值域，但对角元组未必继承这一性质：我们给出一个 Taylor 可逆的对$\mathbf{M_C}$，使得$\mathbf{A}$ 和$\mathbf{B}$ 的某些上同调空间不是巴拿赫空间。因此，上同调中的长正合列是在向量空间范畴中使用的；而每当论证需要上同调的巴拿赫空间结构，或涉及闭值域性质的传递时，便引入闭值域假设。这是该方法的一个特征，而非对完备化问题的障碍，因为在这种情况下仍然可能存在 Taylor可逆完备化。真正的障碍出现在代数层面：$\mathbf{B}$ 的上同调与$\mathbf{A}$的移位上同调必须作为外代数上的分次模同构；我们给出了一些对角元组，它们的上同调空间在每个次数上都同构，甚至在拓扑意义下也是如此，但其模结构并不同构，因此不存在 Taylor可逆完备化。

基于这一基础，本文旨在弥合单变量补全问题与多变量谱理论之间的差距。我们研究存在何种条件，使得存在一个 n-元组 $\mathbf{C} = (C_1,\dots,C_n)$，满足

可交换算子矩阵 $\mathbf{M_C}$ 是泰勒可逆的。本文采用的同调观点，是针对 2×2中所发展的可逆补全问题 [10]的一种多变量对应物。

本文的组织如下。第2节介绍有关 Koszul 复形和 Taylor 可逆性的必要背景。第3节确定由$\mathbf{M_C}$的 Taylor 可逆性所强制的对角元组的哪些闭值域性质（定理3.1），为其余次数中的对角值域的闭性给出充分条件（定理3.3 和3.5），并通过一个例子说明这种闭性一般并不成立（例3.8）。随后，我们建立与三角结构相关的长正合列，并用连接同态刻画$\mathbf{M_C}$ 的 Taylor 可逆性（定理3.13）。作为推论，在巴拿赫空间的情形下，我们得到 Taylor 和 Curto 的三者取二原理，以及相应的谱恒等式（推论3.16）。第4节专门讨论多变量可逆补全问题。定理4.1 将其归结为由单个耦合元组实现一族上同调同构；定理4.2表明，连接同态与外代数在 Koszul 上同调上的自然作用相容，由此利用分次模得到补全存在性的一个必要条件；例4.5 展示了这样一些对角元组：它们在每个次数上的上同调空间均在拓扑意义下同构，但却不具有 Taylor 可逆补全。

2. 预备知识：Koszul 复形与 Taylor 可逆性

在整篇论文中，$\mathcal{X}$和 $\mathcal{Y}$表示复巴拿赫空间，$\mathfrak{B}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ 表示从 $\mathcal{X}$到 $\mathcal{Y}$的有界线性算子空间，且 $\mathfrak{B}(\mathcal{X}) := \mathfrak{B}(\mathcal{X},\mathcal{X})$。对于 $T\in\mathfrak{B}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$，我们分别用 $\mathcal{N}(T)=\ker T$和 $\mathcal{R}(T)$ 表示 T的核与值域。

令$\mathbf{e}=\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$为不定元，并定义 $\Lambda_n[\mathbf{e}]$ 为生成元 e_1、e_2、……、e_n上的外代数 。这是复平面 $\mathbb{C}$ 上配备反交换外积 $e_i\wedge e_j=-e_j\wedge e_i$ $(1\leqslant i,j\leqslant n)$的线性空间。对于满足 $i_1<\cdots<i_p$的$F=\{i_1,\dots,i_p\}\subseteq\{1,\dots,n\}$，我们记 $e_F=e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_p}$。则 $\mathbb{C}$ 上的外代数由下式给出

$$\Lambda_n[\mathbf{e}]=\left\{\sum_F \alpha_F e_F : e_F=e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_p}\text{ and }\alpha_F\in\mathbb{C}\right\}.$$

我们用 $e_\emptyset$ 表示外积的单位元。若记 $\Lambda_n^k[\mathbf{e}]=\left\{\sum_{|F|=k}\alpha_F e_F:\alpha_F\in\mathbb{C}\right\}$，其中 $|F|$ 是 F 的基数，则显然，对于每个 $k\leqslant n$、$\Lambda_n^k[\mathbf{e}]\wedge\Lambda_n^l[\mathbf{e}]\subseteq\Lambda_n^{k+l}[\mathbf{e}]$ 以及 $\Lambda_n[\mathbf{e}]=\bigoplus_{k=0}^n\Lambda_n^k[\mathbf{e}]$，都有 $\dim\Lambda_n^k[\mathbf{e}]=\binom{n}{k}$。给定一个巴拿赫空间 $\mathcal{X}$，在 $\mathcal{X}$ 上的外代数定义如下：

$$\Lambda_n[\mathbf{e},\mathcal{X}]=\left\{\sum_F x_F\otimes e_F : e_F=e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_p}\text{ and }x_F\in\mathcal{X}\right\}.$$

子空间 $\Lambda_n^p[\mathbf{e}\ \mathcal{X}]=\left\{\sum_{|F|=p}x_F\otimes e_F : x_F\in\mathcal{X}\right\}$（$p\leqslant n$）的定义方式类似。自然地，$\Lambda_n^k[\mathbf{e}\ \mathcal{X}]$ 可与 $\mathcal{X}^{\binom{n}{k}}$ 等同，并赋予其范数

$$\left\|\sum_{|F|=k}x_F\otimes e_F\right\|:=\max_{|F|=k}\|x_F\|;$$

任何其他等价乘积范数的选择也同样适用。在直和 $\mathcal{X}\oplus\mathcal{Y}$ 上，我们使用范数 $\|(x,y)\| := \max\{\|x\|,\|y\|\}$。由于不会产生混淆，我们将省略对不定元 e_1、e_2、……、e_n 的提及，并用 $\Lambda^k[\mathcal{X}]$ 和 $\Lambda_n[\mathcal{X}]$ 分别表示 $\Lambda_n^k[\mathbf{e}\ \mathcal{X}]$ 和 $\Lambda_n[\mathbf{e}\ \mathcal{X}]$。若 $T\in\mathfrak{B}(\mathcal{X})$（或更一般地，$T\in\mathfrak{B}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$），我们用同一符号 T 表示定义在 $\Lambda_n[\mathcal{X}]$ 上的算子，其定义为

$$T\left(\sum_F x_F\otimes e_F\right)=\sum_F Tx_F\otimes e_F.$$

对于每个 $i\in\{1,2,\dots,n\}$，令 $E_i:\Lambda_n[\mathcal{X}]\to\Lambda_n[\mathcal{X}]$ 为由 e_i定义的左乘算子 $E_i(x_F\otimes e_F)=x_F\otimes(e_i\wedge e_F)$。这通常称为创建算子。对于任意可交换的 n-元组$\mathbf{T}=(T_1,\dots,T_n)$，我们关联一个定义在 $\Lambda_n[\mathcal{X}]$ 上的线性映射：

$$\delta_{\mathbf{T}}=\sum_{i=1}^n T_i\otimes E_i:\sum_F x_F\otimes e_F\mapsto\sum_F\sum_{i=1}^n T_ix_F\otimes(e_i\wedge e_F).$$

显然，

$$\begin{aligned}\delta_{\mathbf{T}}^2(x_F\otimes e_F)&=\sum_{i,j=1}^n T_jT_ix_F\otimes(e_j\wedge e_i\wedge e_F)\\&=\sum_{i<j}T_iT_jx_F\otimes((e_j\wedge e_i+e_i\wedge e_j)\wedge e_F)=0.\end{aligned}$$

由此可得 $\delta_{\mathbf{T}}^2=0$，进而有 $\mathcal{R}(\delta_{\mathbf{T}})\subseteq\ker(\delta_{\mathbf{T}})$。由于 $\delta_{\mathbf{T}}$将 $\Lambda^{k-1}[\mathcal{X}]$映射到 $\Lambda^k[\mathcal{X}]$，条件 $\delta_{\mathbf{T}}^2=0$ 等价于对每个 $k\leqslant n$都有 $\mathcal{R}(\delta_{\mathbf{T}}|_{\Lambda^{k-1}[\mathcal{X}]})\subseteq\ker(\delta_{\mathbf{T}}|_{\Lambda^k[\mathcal{X}]})$。令 $\delta_{\mathbf{T}}^k:=\delta_{\mathbf{T}}|_{\Lambda^k[\mathcal{X}]}$。我们构造一个上链复形 $\mathscr{K}(\mathbf{T})$，称为*Koszul* 复形，它与$\mathbf{T}$在 $\mathcal{X}$ 上的关联如下：

$$\mathscr{K}(\mathbf{T}):0\xrightarrow{\delta_{\mathbf{T}}^{-1}}\Lambda_n^0[\mathcal{X}]\xrightarrow{\delta_{\mathbf{T}}^0}\Lambda_n^1[\mathcal{X}]\xrightarrow{\delta_{\mathbf{T}}^1}\dots\xrightarrow{\delta_{\mathbf{T}}^{n-1}}\Lambda_n^n[\mathcal{X}]\xrightarrow{\delta_{\mathbf{T}}^n}0.$$

根据 Taylor [11], 算子元组$\mathbf{T}$ 称为非奇异或泰勒可逆，如果 $\ker\delta_{\mathbf{T}}^k=\mathcal{R}(\delta^{k-1}{}_{\mathbf{T}})$ 对于 $k=0,\dots,n$成立；这等价于相应的 Koszul 复形正合。于是，$\mathbf{T}$ 在 $\mathcal{X}$ 上的 *Taylor* 谱定义为集合

$$\sigma_T(\mathbf{T})=\{\lambda\in\mathbb{C}^n:\mathscr{K}(\mathbf{T}-\lambda)\text{ is not exact}\}.$$

关于 Taylor 谱以及可逆和 Fredholm n-元组的一般理论，读者可参阅 [3,7,9]。对于固定的 k，我们记

$$H^k(\mathbf{T})=\ker\delta_{\mathbf{T}}^k/\mathcal{R}(\delta_{\mathbf{T}}^{k-1})$$

Koszul 复形 $\mathscr{K}(\mathbf{T})$的第 k个上同调群。因此，当且仅当对所有 k都有 $H^k(\mathbf{T})=\{0\}$ 时，$\mathbf{T}$ 才是泰勒可逆；注意此时，每个值域 $\mathcal{R}(\delta^{k-1}{}_{\mathbf{T}})=\ker\delta_{\mathbf{T}}^k$自动是闭的。一般而言，只要值域 $\mathcal{R}(\delta^{k-1}{}_{\mathbf{T}})$ 是闭的，商空间$H^k(\mathbf{T})$ 关于商范数便是一个巴拿赫空间。如果 $\mathcal{R}(\delta^{k-1}{}_{\mathbf{T}})$ 不是闭的，那么 $H^k(\mathbf{T})$ 上的商拓扑就不是 Hausdorff 的，而 $H^k(\mathbf{T})$ 仅被视为一个向量空间。全文默认采用这种代数意义上的理解；只有在相关值域已知为闭的情况下，才会使用上同调空间的巴拿赫空间结构，并且总会对此明确说明。

通篇论文中，我们采用以下约定：$\Lambda^k[\mathcal{X}]=\{0\}$、$\delta_{\mathbf{T}}^k=0$，因此$H^k(\mathbf{T})=\{0\}$，对于 $k<0$ 和 $k>n$。相应地，对所有 $k\in\mathbb{Z}$作出的陈述只涉及有限个非平凡次数，而退化次数具有明确的内容：例如，$H^0(\mathbf{T})=$核 $\delta_{\mathbf{T}}^0$ 以及 $H^n(\mathbf{T})=\Lambda^n[\mathcal{X}]/\mathcal{R}(\delta^{n-1}{}_{\mathbf{T}})$。

3. 特征　算子矩阵元组的 Taylor 可逆性刻画 S

设 $\mathcal{X}\oplus\mathcal{Y}$ 为一个巴拿赫空间分解，并考虑作用于 $\mathcal{X}\oplus\mathcal{Y}$上的一个 n元算子组 $\mathbf{M}=(M_1,\dots,M_n)$，其中每个 M_i 均为如下形式的上三角算子矩阵

$$M_i=\begin{pmatrix} A_i & C_i \\ 0 & B_i \end{pmatrix}\in\mathfrak{B}(\mathcal{X}\oplus\mathcal{Y}). \tag{3}$$

M是一个可交换的 n元算子组这一基本假设等价于以下陈述：

- $\mathbf{A}=(A_1,\dots,A_n)$ 是 $\mathcal{X}$上的可交换 n元有界线性算子组；
- $\mathbf{B}=(B_1,\dots,B_n)$ 是 $\mathcal{Y}$上的可交换 n元有界线性算子组；
- 耦合算子$\mathbf{C}=(C_1,\dots,C_n)$ 必须对所有 i,j 满足以下关系：

$$A_iC_j-A_jC_i=C_jB_i-C_iB_j. \tag{4}$$

用 Koszul 复形的语言来说，关系（4）正是边界算子 $\delta_{\mathbf{M}}$ 满足 $\delta_{\mathbf{M}}^2=0$所需的条件。首先，对于每个 $k\in\{0,\dots,n\}$，我们自然地将空间 $\Lambda^k[\mathcal{X}\oplus\mathcal{Y}]$ 与直和 $\Lambda^k[\mathcal{X}]\oplus\Lambda^k[\mathcal{Y}]$ 通过等距同构

$$\left(\sum_{|F|=k}\begin{pmatrix}x_F\\ y_F\end{pmatrix}\otimes e_F\right)\cong\left(\sum_{|F|=k}x_F\otimes e_F,\sum_{|F|=k}y_F\otimes e_F\right) \tag{5}$$

（采用第2节中的范数约定）。在此识别下，元素 $\zeta\in\Lambda^k[\mathcal{X}\oplus\mathcal{Y}]$ 可表示为列向量 $\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}$，其中 $\xi\in\Lambda^k[\mathcal{X}]$ 且 $\eta\in\Lambda^k[\mathcal{Y}]$。将边界算子 $\delta_{\mathbf{M}}^k$ 相对于分解 $\Lambda^k[\mathcal{X}\oplus\mathcal{Y}]\cong\Lambda^k[\mathcal{X}]\oplus\Lambda^k[\mathcal{Y}]$ 表示为分块矩阵形式，我们写作

$$\delta_{\mathbf{M}}^k=\begin{pmatrix}\delta_{\mathbf{A}}^k & \delta_{\mathbf{C}}^k\\ 0 & \delta_{\mathbf{B}}^k\end{pmatrix}. \tag{6}$$

那么，恒等式 $\delta^{k+1}{}_{\mathbf{M}}\ \delta_{\mathbf{M}}^k=0$ 等价于以下方程组

$$\begin{cases}\delta_{\mathbf{A}}^{k+1}\delta_{\mathbf{A}}^k=0\\ \delta_{\mathbf{B}}^{k+1}\delta_{\mathbf{B}}^k=0\\ \delta_{\mathbf{A}}^{k+1}\delta_{\mathbf{C}}^k+\delta_{\mathbf{C}}^{k+1}\delta_{\mathbf{B}}^k=0\end{cases} \tag{7}$$

其中第三个方程是将式（4）提升到外代数 $\Lambda[\mathcal{X}\oplus\mathcal{Y}]$。

Taylor 可逆性由 Koszul 复形的纯代数正合性定义，但正合性迫使每个值域 $\mathcal{R}(\delta_{\mathbf{M}}^k)=\ker\delta^{k+1}{}_{\mathbf{M}}$ 都是闭的。下面的定理阐明了这种闭性在多大程度上可由对角边界映射继承。

定理3.1。 设 $\mathbf{M}=\begin{pmatrix}\mathbf{A}&\mathbf{C}\\ \mathbf{0}&\mathbf{B}\end{pmatrix}$ 为由 n-元组定义的交换 (3)。则：

(i) 如果 $\mathscr{K}(\mathbf{M})$ 在次数 0 处正合，即 $\ker\delta_{\mathbf{M}}^0=\{0\}$，那么 $\delta_{\mathbf{A}}^0$ 是单射。(ii) 如果 $\ker\delta_{\mathbf{M}}^0=\{0\}$ 且 $\mathcal{R}(\delta_{\mathbf{M}}^0)$ 是闭的（当 $\mathscr{K}(\mathbf{M})$ 在次数0 和1处正合时，情况即如此），那么 $\delta_{\mathbf{A}}^0$ 下有界。特别地，$\mathcal{R}(\delta_{\mathbf{A}}^0)$ 在 $\Lambda^1[\mathcal{X}]$ 中是闭的。(iii) 如果 $\mathscr{K}(\mathbf{M})$ 在次数 n 处正合，即 $\mathcal{R}(\delta^{n-1}{}_{\mathbf{M}})=\Lambda^n[\mathcal{X}\oplus\mathcal{Y}]$，那么 $\delta^{n-1}{}_{\mathbf{B}}$ 是满射。特别地，$\mathcal{R}(\delta^{n-1}{}_{\mathbf{B}})=\Lambda^n[\mathcal{Y}]$ 是闭的。

因此，如果 $\mathbf{M}$ 是泰勒可逆的，那么 $\delta_{\mathbf{A}}^0$ 下有界，且 $\delta^{n-1}{}_{\mathbf{B}}$ 是满射。证明。(i) 令 $x \in \ker \delta_{\mathbf{A}}^0$。由于

$$\delta_{\mathbf{M}}^0 \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_{\mathbf{A}}^0 x \\ 0 \end{pmatrix} = 0,$$

向量 $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ 属于 $\ker \delta_{\mathbf{M}}^0 = \{0\}$，因此 $x = 0$。

(ii) 根据假设，$\delta_{\mathbf{M}}^0$ 是单射且值域闭，因此由有界逆定理可知它下有界，也就是说，存在常数 $c > 0$，使得$\|\delta_{\mathbf{M}}^0 \zeta\| \geq c\|\zeta\|$ 对所有 $\zeta \in \Lambda^0[\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}]$均成立。令 $x \in \mathcal{X} \cong \Lambda^0[\mathcal{X}]$。将此应用于 $\zeta = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ 并利用 (i) 中给出的恒等式，我们得到

$$\|\delta_{\mathbf{A}}^0 x\| = \left\| \begin{pmatrix} \delta_{\mathbf{A}}^0 x \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \delta_{\mathbf{M}}^0 \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \right\| \geq c \left\| \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = c\|x\|.$$

这意味着 $\delta_{\mathbf{A}}^0$ 下有界，因此，$\mathcal{R}(\delta_{\mathbf{A}}^0)$ 在 $\Lambda^1[\mathcal{X}]$中是闭的.

(iii) 任取 $\eta \in \Lambda^n[\mathcal{Y}]$。根据假设，元素 $\begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix} \in \Lambda^n[\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}]$ 在$\mathbf{M}$ 下有一个原像。令 $\begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix} \in \Lambda^{n-1}[\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}]$ 满足

$$\delta_{\mathbf{M}}^{n-1} \begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_{\mathbf{A}}^{n-1} \xi' + \delta_{\mathbf{C}}^{n-1} \eta' \\ \delta_{\mathbf{B}}^{n-1} \eta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix}.$$

由第二个分量可得 $\delta^{n-1}{}_{\mathbf{B}}\, \eta' = \eta$。由于 η 是任意的，因此 $\delta^{n-1}{}_{\mathbf{B}}$ 是满射，这意味着 $\mathcal{R}(\delta^{n-1}{}_{\mathbf{B}}) = \Lambda^n[\mathcal{Y}]$ 是闭的。

最后，若 $\mathbf{M}$ 是 Taylor 可逆的，则 $\mathscr{K}(\mathbf{M})$ 在每个次数上都是正合的，因此（ii）和（iii）的假设均得到满足。□

注3.2. 对于 $n = 1$，M_C 的可逆性迫使 A 下有界且 B为满射，因此两个对角项的值域都自动是闭值域。定理3.1表明，在多变量情形下，M 的 Taylor 可逆性仍控制着两个极端位置：$\delta_{\mathbf{A}}$ 的底部值域和 $\delta_{\mathbf{B}}$的顶部值域。证明依赖于复形 $\mathscr{K}(M)$底部的 $\delta_{\mathbf{M}}$ 单射性以及顶部的满射性，而无法推广到其余次数。这并非方法本身的缺陷。下文的例 3.8 给出了一个形如（3）的 Taylor 可逆交换对，其中$\mathcal{R}(\delta_{\mathbf{B}}^0)$ 和 $\mathcal{R}(\delta_{\mathbf{A}}^1)$ 的值域都不是闭的。需要强调的是，这种失败纯粹是拓扑性的。由下文引理 3.12(i)的长正合列的代数部分可知，M 的 Taylor 可逆性总能在每个次数上给出线性同构$\partial_k \colon H^k(B) \to H^{k+1}(A)$，但仅凭这一点无法控制各个值域是否闭。这一观察在定理 3.13 中得到提升，形成了一个完整的刻画。

现在转向其余的次数。鉴于注记 3.2，我们寻找耦合元组 $\mathbf{C}$ 所满足的充分条件，使得 $\delta_{\mathbf{M}}$ 正合性或值域的闭性能够传递到对角边界映射。下面的结果是对定理 3.1的补充。

定理 3.3。设$\mathbf{M}$是由(3)定义的交换 n-元组。固定 $0 \leq k < n-1$并假设 $\mathcal{R}(\delta_{\mathbf{M}}^k) = \ker(\delta^{k+1}{}_{\mathbf{M}})$。如果存在一个常数 $L \geq 0$使得

$$\|\delta_{\mathbf{C}}^k \eta\| \leq L\, \|\delta_{\mathbf{B}}^k \eta\| \qquad \textit{for all } \eta \in \Lambda^k[\mathcal{Y}], \tag{8}$$

then $\mathcal{R}(\delta_{\mathbf{B}}^k)$是闭的。

注意到（8）成立当且仅当存在一个有界算子 T 从 $\mathcal{R}(\delta_B^k)$ 的闭包映射到 $\Lambda^{k+1}[\mathcal{X}]$，使得 $\delta_C^k = T\delta_B^k$。事实上，在（8）条件下，赋值$\delta_B^k\eta \mapsto \delta_C^k\eta$ 在 $\mathcal{R}(\delta_B^k)$ 上定义良好且有界，并可通过连续性延拓到其闭包；反之则显然。

证明。设 η 属于 $\mathcal{R}(\delta_B^k)$的闭包。存在一个序列 $(\eta_m)_{m\geq 1}$ 属于 $\Lambda^k[\mathcal{Y}]$，使得$\delta_B^k\eta_m \to \eta$。特别地，$(\delta_B^k\eta_m)_{m\geq 1}$ 是一个柯西序列，并且由（8），

$$\|\delta_C^k\eta_m - \delta_C^k\eta_l\| = \|\delta_C^k(\eta_m - \eta_l)\| \leq L\,\|\delta_B^k(\eta_m - \eta_l)\| \longrightarrow 0 \quad (m, l \to \infty).$$

因此，$(\delta_C^k\eta_m)_{m\geq 1}$ 是巴拿赫空间 $\Lambda^{k+1}[\mathcal{X}]$中的柯西序列，故收敛到某个 $\xi \in \Lambda^{k+1}[\mathcal{X}]$。

利用（7）中的第三个关系式，我们计算得：

$$\delta_A^{k+1}\xi + \delta_C^{k+1}\eta = \lim_{m\to\infty}\left(\delta_A^{k+1}\delta_C^k\eta_m + \delta_C^{k+1}\delta_B^k\eta_m\right) = \lim_{m\to\infty} 0 = 0,$$

并且 $\delta^{k+1}{}_B\ \ \eta = \lim_{m\to\infty}\delta^{k+1}{}_B\,\delta_B^k\eta_m = 0$。因此，

$$\delta_M^{k+1}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\delta_A^{k+1}\xi + \delta_C^{k+1}\eta\\ \delta_B^{k+1}\eta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix},$$

所以 $\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} \in \ker(\delta^{k+1}{}_M\ ) = \mathcal{R}(\delta_M^k)$。因此，存在 $\begin{pmatrix}\tilde\xi\\ \tilde\eta\end{pmatrix}$，使得 $\delta_M^k\begin{pmatrix}\tilde\xi\\ \tilde\eta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}$。取出第二个分量可得，$\eta = \delta_B^k\tilde\eta \in \mathcal{R}(\delta_B^k)$。□

推论 3.4. 设 M 为由 (3) 定义的交换 n-元组。固定 $0 \leq k < n-1$，并假设 $\mathcal{R}(\delta_M^k) = \ker(\delta^{k+1}{}_M\ )$。那么 $\mathcal{R}(\delta_B^k)$ 在以下任一条件成立时都是闭的：

(i) 存在 $D \in \mathfrak{B}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$，使得对所有 $1 \leq i \leq n$，均有 $C_i = DB_i$。(ii) $k = 0$，并且存在常数 $M \geq 0$，使得对所有$y \in \mathcal{Y}$ 和所有 i，均有 $\|C_i y\| \leq M\max_{1\leq j\leq n}\|B_j y\|$。

证明。(i将 D 按照第 2 节中的方法对角扩张到外代数上，我们有 $\delta_C^k = D \circ \delta_B^k$；事实上，对于 $\eta = \sum_{|F|=k} y_F \otimes e_F$,

$$\delta_C^k\eta = \sum_F\sum_{i=1}^n C_i y_F \otimes (e_i \wedge e_F) = \sum_F\sum_{i=1}^n DB_i y_F \otimes (e_i \wedge e_F) = D\left(\delta_B^k\eta\right).$$

Hence $\|\delta_C^k\eta\| \leq \|D\|\,\|\delta_B^k\eta\|$，即是带有 8 的 ($L = \|D\|$，因此定理 3.3 适用。

(ii) 对于 $k = 0$ 和 $\eta = y \in \Lambda^0[\mathcal{Y}] \cong \mathcal{Y}$，第 2 节中的范数约定$\|\delta_B^0 y\| = $给出$_j\,\|B_j y\|$ 以及 $\|\delta_C^0 y\| = \max_i\|C_i y\| \leq M\max_j\|B_j y\| = M\|\delta_B^0 y\|$，这就是 (8)，其中 $L = M$，定理 3.3 再次适用。□

定理 3.5。设 M 是由 n-元交换组，定义如下：(3)。取定 $1 \leq k \leq n-1$ 并假设 $\mathcal{R}(\delta_M^k)$ 是闭的，且$\ker(\delta_B^k) \subseteq \ker(\delta_C^k)$。那么 $\mathcal{R}(\delta_A^k)$ 是闭的。

证明。设 ξ属于 $\mathcal{R}(\delta_A^k)$的闭包。那么 $\begin{pmatrix}\xi\\ 0\end{pmatrix}$ 属于 $\mathcal{R}(\delta_M^k)$的闭包。由于$\mathcal{R}(\delta_M^k)$ 根据假设是闭的，因此存在 $\begin{pmatrix}\tilde\xi\\ \tilde\eta\end{pmatrix}$ 使得

$$\delta_M^k\begin{pmatrix}\tilde\xi\\ \tilde\eta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\delta_A^k\tilde\xi + \delta_C^k\tilde\eta\\ \delta_B^k\tilde\eta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\xi\\ 0\end{pmatrix}.$$

第二个分量给出 $\delta_B^k\tilde\eta = 0$，即 $\tilde\eta \in \ker(\delta_B^k)$。根据假设，$\ker(\delta_B^k) \subseteq \ker(\delta_C^k)$，因此 $\delta_C^k\tilde\eta = 0$。于是第一个分量给出 $\xi = \delta_A^k\tilde\xi \in \mathcal{R}(\delta_A^k)$。□

推论 3.6. 设 $\mathbf{M}$ 为由 n 定义的交换 (3) 元组，固定 $1 \le k \le n-1$，并假设 $\mathcal{R}(\delta_{\mathbf{M}}^k)$ 是闭的。若 (8) 对某个常数 $L \ge 0$成立，特别是若 $C_i = DB_i$ 对所有$1 \le i \le n$ 以及某个 $D \in \mathfrak{B}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$成立，则 $\mathcal{R}(\delta_{\mathbf{A}}^k)$ 是闭的。

证明。 由定理3.5，只需验证包含关系 $\ker(\delta_{\mathbf{B}}^k) \subseteq \ker(\delta_{\mathbf{C}}^k)$，这可由（8）直接得到。若 $C_i = DB_i$ 对所有 i都成立，则（8）在 $L = \|D\|$时成立，正如推论3.4的证明所示。 □

注 3.7. 推论 3.4（ii）中对 $k = 0$ 的限制不能去掉：当 $k \ge 1$时，$\mathbf{C}$ 被 $\mathbf{B}$ 逐分量控制不再能控制 $\delta_{\mathbf{C}}^k$ 被 $\delta_{\mathbf{B}}^k$，这是由于外幂中的相消所致。例如，令 $n = 2$、 $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$，取一个满足 $B^2 = 0$ 的非零算子 $B \in \mathfrak{B}(\mathcal{Y})$，并设 $B_1 = B_2 = B$、 $C_1 = B$、 $C_2 = -B$、 $A_1 = A_2 = 0$。那么（4）成立，$\mathbf{M}$ 是一个交换对，并且对所有 $y \in \mathcal{Y}$， $\|C_i y\| \le \max_j \|B_j y\|$ ； 而当 $\eta = y \otimes e_1 + y \otimes e_2$ 时，我们有

$$\delta_{\mathbf{B}}^1 \eta = 0 \qquad \text{and} \qquad \delta_{\mathbf{C}}^1 \eta = 2By \otimes (e_1 \wedge e_2) \neq 0$$

每当 $y \notin \mathcal{N}(B)$。特别地，$\ker \delta_{\mathbf{B}}^1 \not\subseteq \ker \delta_{\mathbf{C}}^1$，因此（8）在次数 $k = 1$ 对每个 $L \ge 0$都不成立。

下面的例子表明，上述得到的充分条件不可省略：$\mathbf{M}$ 的 Taylor 可逆性本身并不能保证中间次数的对角值域是闭的。

例 3.8。 设 $\mathcal{H}$ 是一个无限维希尔伯特空间，并设 $K \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$是一个值域不闭的算子，例如相对于可分 $\mathcal{H}$的一个正交归一基，取 $K = \operatorname{diag}(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots)$。设 $\mathcal{Z} = \ell^2(\mathbb{Z}; \mathcal{H})$ 是所有平方可和序列 $z = (z_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ 组成的希尔伯特空间，其中 $z_i \in \mathcal{H}$，并定义 M_1、 $M_2 \in \mathfrak{B}(\mathcal{Z})$ 如下：

$$(M_1 z)_i = z_{i+1} \qquad \text{and} \qquad (M_2 z)_i = K z_i \qquad (i \in \mathbb{Z}).$$

则 M_1 是酉算子， M_1 与 M_2 可交换，并且闭子空间

$$\mathcal{X} = \{z \in \mathcal{Z} : z_i = 0 \text{ for all } i \ge 0\}$$

在 M_1 和 M_2下均为不变子空间。令 $\mathcal{Y} = \mathcal{X}^\perp = \{z \in \mathcal{Z} : z_i = 0$ 对所有 $i < 0\}$成立，我们将其与 $\ell^2(\mathbb{N}_0; \mathcal{H})$等同。相对于 $\mathcal{Z} = \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$，交换对$\mathbf{M} = (M_1, M_2)$ 具有形式（3），其在 $\mathcal{Y}$ 上的压缩算子为

$$(B_1 y)_i = y_{i+1} \qquad \text{and} \qquad (B_2 y)_i = K y_i \qquad (i \in \mathbb{N}_0).$$

在 $\mathcal{Z}$ 上的希尔伯特空间范数与第 2节中的范数等价，而且涉及的概念均不受采用等价范数的影响。由于 M_1 可逆，$\mathbf{M}$是泰勒可逆的，因为只要一个交换元组的某个分量可逆，该元组就是泰勒可逆的（见 [11]）。

我们声称 $\mathcal{R}(\delta_{\mathbf{B}}^0)$ 不是闭集。令 $V \colon \mathcal{H} \to \mathcal{Y}$为等距映射 $Vh = (h, 0, 0, \dots)$。那么，对每个 $h \in \mathcal{H}$，都有 $B_1 Vh = 0$ 和 $B_2 Vh = VKh$，因此

$$\delta_{\mathbf{B}}^0(Vh) = VKh \otimes e_2 \qquad \text{and} \qquad \|\delta_{\mathbf{B}}^0(Vh)\| = \|Kh\|.$$

此外，$\ker B_1 = V(\mathcal{H})$ and $Vh \in \ker B_2$ 当且仅当 $h \in \ker K$，因此 $\ker \delta_{\mathbf{B}}^0 = \ker B_1 \cap \ker B_2 = V(\ker K)$ and $\operatorname{dist}(Vh, \ker \delta_{\mathbf{B}}^0) = \operatorname{dist}(h, \ker K)$。若 $\mathcal{R}(\delta_{\mathbf{B}}^0)$ 是闭的，则由 $\delta_{\mathbf{B}}^0$ 在 $\Lambda^0[\mathcal{Y}]/\ker \delta_{\mathbf{B}}^0$ 上诱导的算子将是到巴拿赫空间 $\mathcal{R}(\delta_{\mathbf{B}}^0)$上的有界双射，而有界逆定理将给出一个常数$c > 0$，使得

$$\|\delta_{\mathbf{B}}^0 \eta\| \ge c \operatorname{dist}(\eta, \ker \delta_{\mathbf{B}}^0) \qquad \text{for all } \eta \in \Lambda^0[\mathcal{Y}].$$

应用于 $\eta = Vh$，可得对于所有 $h \in \mathcal{H}$，都有 $\|Kh\| \geq c\operatorname{dist}(h, \ker K)$，这迫使 $\mathcal{R}(K)$ 闭合，产生矛盾。因此，$\mathcal{R}(\delta_{\mathbf{B}}^0)$ 不是闭的，尽管$\mathbf{M}$ 是泰勒可逆的。

值域 $\mathcal{R}(\delta_{\mathbf{A}}^1)$ 也不是闭的。通过 $x_j = z_{-1-j} (j \in \mathbb{N}_0)$将 $\mathcal{X}$ 与 $\ell^2(\mathbb{N}_0; \mathcal{H})$ 等同后，M_1 和 M_2 在 $\mathcal{X}$ 上的限制变为

$$(A_1 x)_0 = 0, \qquad (A_1 x)_j = x_{j-1} \quad (j \geq 1), \qquad (A_2 x)_j = K x_j \quad (j \in \mathbb{N}_0).$$

在等同关系 $\Lambda^2[\mathcal{X}] \cong \mathcal{X}$下，边界映射 $\delta_{\mathbf{A}}^1$ 的作用为 $(x^{(1)}, x^{(2)}) \mapsto A_1 x^{(2)} - A_2 x^{(1)}$，因此 $\mathcal{R}(\delta_{\mathbf{A}}^1) = \mathcal{R}(A_1) + \mathcal{R}(A_2)$。由于 $\mathcal{R}(A_1)$ 由首项为零的所有序列构成，我们得到

$$\mathcal{R}(\delta_{\mathbf{A}}^1) = \{x \in \ell^2(\mathbb{N}_0; \mathcal{H}) : x_0 \in \mathcal{R}(K)\},$$

其闭包为 $\{x \in \ell^2(\mathbb{N}_0; \mathcal{H}) : x_0 \in \overline{\mathcal{R}(K)}\}$。由于 $\mathcal{R}(K)$ 不是闭的，$\mathcal{R}(\delta_{\mathbf{A}}^1)$也不是闭的。

注 3.9. 例 3.8 表明，即使对于 $n = 2$，Taylor 可逆的 $\mathbf{M}$ 的 $\mathcal{R}(\delta_{\mathbf{B}}^0)$ 和 $\mathcal{R}(\delta_{\mathbf{A}}^1)$ 也可能不是闭的。添加零算子，也就是从 (M_1, M_2) 转到 $(M_1, M_2, 0, \ldots, 0)$，会得到 Taylor 可逆的交换 n-元组，并且在每个中间次数上都有相同的缺陷。事实上，扩充后元组的 Koszul 复形是 (M_1, M_2) 的 Koszul 复形与由额外的 $n-2$ 个生成元构成的外代数的张量积，并配备零微分，因此 $\mathcal{R}(\delta_{\mathbf{B}}^k)$ 是 $\mathcal{R}(\delta_{(B_1,B_2)}^0)$ 和 $\mathcal{R}(\delta_{(B_1,B_2)}^1)$的有限个副本的直和，$\mathbf{A}$ 也同样如此。因此，对于每个 $0 \leq k \leq n-2$，$\mathcal{R}(\delta_{\mathbf{B}}^k)$ 都不是闭的；对于每个 $1 \leq k \leq n-1$，$\mathcal{R}(\delta_{\mathbf{A}}^k)$ 也不是闭的。从这个意义上说，定理3.1是尖锐的，而其余值域的闭性必须作为假设，或通过定理 3.3 和定理 3.5 中的条件来保证。另请注意，在 [2] 中，对角元组先验地 Taylor 可逆，因此它们的所有边界映射都有闭值域，不会出现这种现象。

定理 3.10. 设 $\mathbf{M}$是由以下定义的交换 n元组 (3)。固定 $k \in \mathbb{Z}$，并假设边界映射 $\delta_{\mathbf{A}}^k$ 和 $\delta_{\mathbf{B}}^k$ 具有闭值域。那么，$\delta_{\mathbf{M}}^k$ 的值域在 $\Lambda^{k+1}[\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}]$中闭，当且仅当诱导线性映射

$$\partial_k \colon H^k(\mathbf{B}) \to H^{k+1}(\mathbf{A}), \qquad \partial_k([\eta]) = [\delta_{\mathbf{C}}^k \eta],$$

在 $H^{k+1}(\mathbf{A})$中具有闭值域。

请注意，正如证明中将会看到的，$\mathcal{R}(\partial_k)$ 的闭性等价于子空间 $\delta_{\mathbf{C}}^k\big(\ker \delta_{\mathbf{B}}^k\big) + \mathcal{R}(\delta_{\mathbf{A}}^k)$ 在 $\Lambda^{k+1}[\mathcal{X}]$中的闭性。

证明。 在着手证明闭性之前，我们首先必须确保诱导映射 ∂_k 定义良好。由 $\mathbf{M}$的交换性，具体而言，由（7）中的第三个关系可知，对于任意余循环 $\eta \in \ker \delta_{\mathbf{B}}^k$,

$$\delta_{\mathbf{A}}^{k+1}(\delta_{\mathbf{C}}^k \eta) = -\delta_{\mathbf{C}}^{k+1}(\delta_{\mathbf{B}}^k \eta) = 0,$$

这证实了 $\delta_{\mathbf{C}}^k \eta \in \ker \delta^{k+1}{}_{\mathbf{A}}$。因此，该赋值 $\partial_k([\eta]) = [\delta_{\mathbf{C}}^k \eta]$ 正确地定义了上同调群 $H^k(\mathbf{B})$ 与 $H^{k+1}(\mathbf{A})$之间的映射。接下来，我们证明该定义与代表元 $\eta \in [\eta]$的选取无关。设 $\eta_1, \eta_2 \in \ker \delta_{\mathbf{B}}^k$ 是同一个上同调类的两个代表元，且$[\eta_1] = [\eta_2]$。这意味着 $\eta_1 - \eta_2 \in \mathcal{R}(\delta^{k-1}{}_{\mathbf{B}})$，也就是说，存在某个 $\zeta \in \Lambda^{k-1}[\mathcal{Y}]$使得 $\eta_1 - \eta_2 = \delta^{k-1}{}_{\mathbf{B}}\, \zeta$。将耦合算子 $\delta_{\mathbf{C}}^k$ 作用于这个差，我们得到

$$\delta_{\mathbf{C}}^k(\eta_1 - \eta_2) = \delta_{\mathbf{C}}^k(\delta_{\mathbf{B}}^{k-1} \zeta) = -\delta_{\mathbf{A}}^k(\delta_{\mathbf{C}}^{k-1} \zeta).$$

由于 $\delta_{\mathbf{A}}^k(\delta^{k-1}{}_{\mathbf{C}}\,\zeta) \in \mathcal{R}(\delta_{\mathbf{A}}^k)$，可知 $\delta_{\mathbf{C}}^k\eta_1$ 和 $\delta_{\mathbf{C}}^k\eta_2$ 仅相差一个$\mathcal{R}(\delta_{\mathbf{A}}^k)$中的元素，因此

$$[\delta_{\mathbf{C}}^k\eta_1] = [\delta_{\mathbf{C}}^k\eta_2] \in H^{k+1}(\mathbf{A}).$$

这证实了映射 ∂_k 是良定义的。

接下来，我们固定拓扑框架。由于 $\mathcal{R}(\delta_{\mathbf{A}}^k)$ 是闭的，商空间

$$Q_{k+1} := \Lambda^{k+1}[\mathcal{X}]/\mathcal{R}(\delta_{\mathbf{A}}^k)$$

是巴拿赫空间；令 $\pi\colon \Lambda^{k+1}[\mathcal{X}] \to Q_{k+1}$ 表示典范的（有界）商投影。子空间 $\ker\delta^{k+1}{}_{\mathbf{A}}$ 是闭的，并且包含 $\mathcal{R}(\delta_{\mathbf{A}}^k)$，因此 $H^{k+1}(\mathbf{A}) = \pi(\ker\delta^{k+1}{}_{\mathbf{A}})$ 是 Q_{k+1}的闭子空间，且 $\mathcal{R}(\partial_k) \subseteq H^{k+1}(\mathbf{A})$。因此，$\mathcal{R}(\partial_k)$ 在$H^{k+1}(\mathbf{A})$ 中闭，当且仅当它在 Q_{k+1}中闭；而这又等价于 $\pi^{-1}(\mathcal{R}(\partial_k)) = \delta_{\mathbf{C}}^k(\ker\,\delta_{\mathbf{B}}^k)+\mathcal{R}(\delta_{\mathbf{A}}^k)$ 在 $\Lambda^{k+1}[\mathcal{X}]$中的闭性。这证明前文在证明之前所述的等价表述是合理的。

首先假设 $\mathcal{R}(\partial_k)$ 是闭的，并令 $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ 属于 $\mathcal{R}(\delta_{\mathbf{M}}^k)$的闭包。于是存在一个序列 $\begin{pmatrix} x_m \\ y_m \end{pmatrix}_{m\geq 1}$ 属于 $\Lambda^k[\mathcal{X}] \oplus \Lambda^k[\mathcal{Y}]$，使得

$$\delta_{\mathbf{A}}^k x_m + \delta_{\mathbf{C}}^k y_m \to u \tag{9}$$

and

$$\delta_{\mathbf{B}}^k y_m \to v. \tag{10}$$

根据假设，$\mathcal{R}(\delta_{\mathbf{B}}^k)$ 是闭的，因此由 (10) 可得 $v \in \mathcal{R}(\delta_{\mathbf{B}}^k)$，故存在某个 $y_0 \in \Lambda^k[\mathcal{Y}]$ 使得 $\delta_{\mathbf{B}}^k y_0 = v$。现在考虑算子 $\delta_{\mathbf{B}}^k$，它从 $\Lambda^k[\mathcal{Y}]_\curlywedge$作用到 $\mathcal{R}(\delta_{\mathbf{B}}^k)$。根据有界逆定理，诱导算子 $\delta_{\mathbf{B}}^k : \Lambda^k[\mathcal{Y}]/\ker\delta_{\mathbf{B}}^k \to \mathcal{R}(\delta_{\mathbf{B}}^k)$ 是一个拓扑同构。由于 $\delta_{\mathbf{B}}^k(y_m - y_0) \to 0$，余类序列 $[y_m - y_0]$ 在商空间 $\Lambda^k[\mathcal{Y}]/\ker\delta_{\mathbf{B}}^k$中收敛到零。根据商范数的定义，对于每个 m，我们都可以选取 $\theta_m \in \ker\delta_{\mathbf{B}}^k$，使得 $\|y_m - y_0 - \theta_m\| \leq \|[y_m - y_0]\| + 1/m$。令 $z_m = y_m - y_0 - \theta_m$，便得到分解 $y_m - y_0 = \theta_m + z_m$，其中 $\theta_m \in \ker\delta_{\mathbf{B}}^k$ 且 $z_m \to 0$ 属于 $\Lambda^k[\mathcal{Y}]$。将 $y_m = y_0 + \theta_m + z_m$ 代入 (9)，得到

$$\delta_{\mathbf{A}}^k x_m + \delta_{\mathbf{C}}^k(y_0 + \theta_m + z_m) \to u.$$

由于 $\delta_{\mathbf{C}}^k$ 有界且 $z_m \to 0$，项 $\delta_{\mathbf{C}}^k z_m$ 在极限中趋于零。定义 $w = u - \delta_{\mathbf{C}}^k y_0$，我们得到

$$\delta_{\mathbf{A}}^k x_m + \delta_{\mathbf{C}}^k \theta_m \to w. \tag{11}$$

应用（连续）投影 π到（11）并注意到 $\pi(\delta_{\mathbf{A}}^k x_m) = 0$，我们得到

$$\pi(\delta_{\mathbf{C}}^k \theta_m) = \partial_k([\theta_m]) \to \pi(w) \quad \text{in } Q_{k+1}.$$

根据我们的假设和上述讨论，$\mathcal{R}(\partial_k)$ 在 Q_{k+1}中是闭的，因此极限$\pi(w)$ 属于 $\mathcal{R}(\partial_k)$。这意味着存在某个 $[\kappa] \in H^k(\mathbf{B})$（表示为$\kappa \in \ker\,\delta_{\mathbf{B}}^k$），使得 $\partial_k([\kappa]) = \pi(w)$。这等价于说$w - \delta_{\mathbf{C}}^k\kappa \in \mathcal{R}(\delta_{\mathbf{A}}^k)$。因此，存在 $x \in \Lambda^k[\mathcal{X}]$ 使得 $\delta_{\mathbf{A}}^k x = w - \delta_{\mathbf{C}}^k\kappa$。最后，通过选择 $y = y_0 + \kappa \in \Lambda^k[\mathcal{Y}]$，我们验证：

$$\delta_{\mathbf{A}}^k x + \delta_{\mathbf{C}}^k y = (w - \delta_{\mathbf{C}}^k\kappa) + \delta_{\mathbf{C}}^k y_0 + \delta_{\mathbf{C}}^k\kappa = w + \delta_{\mathbf{C}}^k y_0 = u,$$

and

$$\delta_{\mathbf{B}}^k y = \delta_{\mathbf{B}}^k(y_0 + \kappa) = \delta_{\mathbf{B}}^k y_0 = v.$$

因此，$\delta_{\mathbf{M}}^k \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$，这证明了 $\mathcal{R}(\delta_{\mathbf{M}}^k)$ 是闭的。

反过来，假设 $\mathcal{R}(\delta_{\mathbf{M}}^k)$ 是闭的。一个元素

$$\delta_{\mathbf{M}}^k \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_{\mathbf{A}}^k \xi + \delta_{\mathbf{C}}^k \eta \\ \delta_{\mathbf{B}}^k \eta \end{pmatrix}$$

属于 $\mathcal{R}(\delta_{\mathbf{M}}^k)$ 的元素属于闭子空间 $\Lambda^{k+1}[\mathcal{X}] \oplus \{0\}$，当且仅当 $\eta \in \ker\ \delta_{\mathbf{B}}^k$。因此

$$\mathcal{R}(\delta_{\mathbf{M}}^k) \cap \left(\Lambda^{k+1}[\mathcal{X}] \oplus \{0\}\right) = \left(\mathcal{R}(\delta_{\mathbf{A}}^k) + \delta_{\mathbf{C}}^k(\ker \delta_{\mathbf{B}}^k)\right) \oplus \{0\}.$$

左侧是两个闭子空间的交，因此是闭的。由于映射$\xi \mapsto \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix}$是等距映射，子空间 $\mathcal{R}(\delta_{\mathbf{A}}^k) + \delta_{\mathbf{C}}^k(\ker\ \delta_{\mathbf{B}}^k)$ 在 $\Lambda^{k+1}[\mathcal{X}]$中是闭的，根据上文的讨论，$\mathcal{R}(\partial_k)$是闭的。□

我们定义自然嵌入 $i_k : \Lambda^k[\mathcal{X}] \to \Lambda^k[\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}]$ 和典范投影$p_k : \Lambda^k[\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}] \to \Lambda^k[\mathcal{Y}]$ 如下：

$$i_k(\xi) = \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad p_k \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \eta.$$

这些映射是有界线性算子，并满足 $\mathcal{R}(i_k) = \mathcal{N}(p_k)$，这保证了下图中的各行正合：

(12)

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \Lambda^{k-1}[\mathcal{X}] & \xrightarrow{i_{k-1}} & \Lambda^{k-1}[\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}] & \xrightarrow{p_{k-1}} & \Lambda^{k-1}[\mathcal{Y}] & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \delta_{\mathbf{A}}^{k-1}} & & \downarrow{\scriptstyle \delta_{\mathbf{M}}^{k-1}} & & \downarrow{\scriptstyle \delta_{\mathbf{B}}^{k-1}} & & \\
0 & \longrightarrow & \Lambda^{k}[\mathcal{X}] & \xrightarrow{i_{k}} & \Lambda^{k}[\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}] & \xrightarrow{p_{k}} & \Lambda^{k}[\mathcal{Y}] & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \delta_{\mathbf{A}}^{k}} & & \downarrow{\scriptstyle \delta_{\mathbf{M}}^{k}} & & \downarrow{\scriptstyle \delta_{\mathbf{B}}^{k}} & & \\
0 & \longrightarrow & \Lambda^{k+1}[\mathcal{X}] & \xrightarrow{i_{k+1}} & \Lambda^{k+1}[\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}] & \xrightarrow{p_{k+1}} & \Lambda^{k+1}[\mathcal{Y}] & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \delta_{\mathbf{A}}^{k+1}} & & \downarrow{\scriptstyle \delta_{\mathbf{M}}^{k+1}} & & \downarrow{\scriptstyle \delta_{\mathbf{B}}^{k+1}} & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

下面的引理证明边界算子与包含映射和投影映射相容，从而保证图表的交换性。

引理 3.11. *Koszul* 边界算子 $\delta_{\mathbf{A}}, \delta_{\mathbf{B}}$ 和 $\delta_{\mathbf{M}}$ 对每个 $k \in \{0, \dots, n-1\}$ 都满足以下交换关系：

(i) $\delta_{\mathbf{M}}^k \circ i_k = i_{k+1} \circ \delta_{\mathbf{A}}^k$,
(ii) $p_{k+1} \circ \delta_{\mathbf{M}}^k = \delta_{\mathbf{B}}^k \circ p_k$.

证明。 这两个等式都直接由分块表示（6）得到 . □

引理 3.12。令 $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} \\ 0 & \mathbf{B} \end{pmatrix}$ 为定义于 $\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$ 上的交换 n-元算子组，其定义见 (3).

（i）*Koszul* 复形的短正合列（12）诱导出由向量空间和线性映射组成的长正合列

(13)
$$\begin{array}{ccccc}
 & & \vdots & & \\
 & \nearrow & & \searrow & \\
H^k(\mathbf{A}) & \xrightarrow{\iota_k^*} & H^k(\mathbf{M}) & \xrightarrow{\pi_k^*} & H^k(\mathbf{B}) \\
 & \searrow^{\partial_k} & & \nearrow & \\
H^{k+1}(\mathbf{A}) & \xrightarrow{\iota_{k+1}^*} & H^{k+1}(\mathbf{M}) & \xrightarrow{\pi_{k+1}^*} & H^{k+1}(\mathbf{B}) \\
 & \searrow^{\partial_{k+1}} & & \nearrow & \\
H^{k+2}(\mathbf{A}) & \xrightarrow{\iota_{k+2}^*} & H^{k+2}(\mathbf{M}) & \xrightarrow{\pi_{k+2}^*} & H^{k+2}(\mathbf{B}) \\
 & \searrow & & \nearrow & \\
 & & \vdots & &
\end{array}$$

其中 ι_k^* 和 π_k^* 分别表示由典范单射 i_k 和投影 p_k诱导的自然映射，而连接同态 $H^k(\mathbf{B}) \to H^{k+1}(\mathbf{A})$ 由下式给出：$[\eta] \mapsto [\delta_{\mathbf{C}}^k \eta]$也就是说，它正是定理 ∂_k *3.10*中的映射。此部分不需要任何闭性假设。

（ii）此外，如果边界映射 $\delta_{\mathbf{A}}^k$、$\delta_{\mathbf{B}}^k$和 $\delta_{\mathbf{M}}^k$ 对所有 $k \in \mathbb{Z}$都具有闭值域，那么（13）中的所有上同调空间都是巴拿赫空间，且（13）中的所有映射都是有界的；特别地，

$$\|\partial_k[\eta]\| \leq \|\delta_{\mathbf{C}}^k\| \, \|[\eta]\| \qquad \textit{for every } [\eta] \in H^k(\mathbf{B}).$$

证明。（i）长正合列的存在性直接由同调代数中的 Zig-Zag 引理（例如参见 [12]）应用于 Koszul 复形的短正合列（12）得到；各行的正合性以及方形的交换性由 i_k、p_k 的构造和引理 3.11保证。为方便读者并阐明其 underlying structure，我们给出连接同态 $\partial_k \colon H^k(\mathbf{B}) \to H^{k+1}(\mathbf{A})$的显式描述。设 $[\eta] \in H^k(\mathbf{B})$由一个余循环 $\eta \in \ker \delta_{\mathbf{B}}^k$表示。为定义 $\partial_k([\eta])$，我们首先选取 η 在投影 p_k下最自然的原像，即 $\zeta = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix} \in \Lambda^k[\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}]$。将边界映射 $\delta_{\mathbf{M}}^k$ 应用于该向量，我们得到

$$\delta_{\mathbf{M}}^k \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_{\mathbf{A}}^k & \delta_{\mathbf{C}}^k \\ 0 & \delta_{\mathbf{B}}^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_{\mathbf{C}}^k \eta \\ \delta_{\mathbf{B}}^k \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_{\mathbf{C}}^k \eta \\ 0 \end{pmatrix},$$

其中第二个分量为零，这是因为 $\delta_B^k\eta = 0$。由于 $\begin{pmatrix}\delta_C^k\eta\\0\end{pmatrix} = i_{k+1}(\delta_C^k\eta)$，该向量对应于 $\delta_C^k\eta \in \Lambda^{k+1}[\mathcal{X}]$。随后，我们将上同调类 $[\eta]$ 映射到 $\delta_C^k\eta$的上同调类，从而定义连接同态：

$$\partial_k([\eta]) = [\delta_C^k\eta] \in H^{k+1}(\mathbf{A}). \tag{14}$$

这表明，连接同态恰好是映射 ∂_k 定理3.10中由耦合元组 $\mathbf{C}$ 在上同调层面诱导的映射。为验证该定义与原像的选择无关，设 $\zeta' = \begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}$ 是 η 在 p_k下的任意另一个原像，其中 $\xi \in \Lambda^k[\mathcal{X}]$。应用 δ_M^k 得到

$$\delta_M^k\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\delta_A^k\xi + \delta_C^k\eta\\\delta_B^k\eta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\delta_A^k\xi + \delta_C^k\eta\\0\end{pmatrix} = i_{k+1}(\delta_A^k\xi + \delta_C^k\eta).$$

取 $H^{k+1}(\mathbf{A})$ 中的上同调类，项 $\delta_A^k\xi$消失。因此，

$$[\delta_A^k\xi + \delta_C^k\eta] = [\delta_A^k\xi] + [\delta_C^k\eta] = 0 + [\delta_C^k\eta] = [\delta_C^k\eta],$$

这证实了 $\partial_k([\eta])$ 的定义与 ξ无关。事实是， ∂_k 与代表元的选择无关， η其中代表元 $[\eta]$ 属于类，这已在定理 3.10的证明中得到证明，因此映射 ∂_k 是良定义的。

(ii) 在闭性假设下，所有商空间 $H^k(\mathbf{A})$、 $H^k(\mathbf{M})$、 $H^k(\mathbf{B})$ 关于商范数都是巴拿赫空间。映射 ι_k^* 和 π_k^* 分别由相应子商空间上的有界算子 i_k 和 p_k 诱导，因此是有界的。至于连接同态，若 $\eta' = \eta + \delta^{k-1}{}_B\,\zeta$ 是类 $[\eta] \in H^k(\mathbf{B})$的任意代表元，则根据上述良定义性论证， $[\delta_C^k\eta] = [\delta_C^k\eta']$，从而

$$\|\partial_k[\eta]\| = \|[\delta_C^k\eta']\| \le \|\delta_C^k\eta'\| \le \|\delta_C^k\|\,\|\eta'\|.$$

对所有代表元取下确界，得到 $\|\partial_k[\eta]\| \le \|\delta_C^k\|\,\|[\eta]\|$。 □

现在我们转而用连接同态来刻画$\mathbf{M}$的 Taylor 可逆性。闭值域假设仅在第二部分中出现，这部分将线性双射提升为拓扑同构。

定理 3.13. 设 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 是巴拿赫空间，且 $\mathbf{M}$是一个作用于 $\mathcal{X}\oplus\mathcal{Y}$ 上的交换 n元上三角算子矩阵组，如 (3)中所定义。则 n元组 $\mathbf{M}$ 是 *Taylor* 可逆的，当且仅当映射

$$\partial_k : H^k(\mathbf{B}) \to H^{k+1}(\mathbf{A}), \qquad \partial_k([\eta]) = [\delta_C^k\eta], \quad \eta \in \ker\delta_B^k,$$

对每个 $k \in \mathbb{Z}$ 都是线性双射。

此外，若对每个 $k \in \mathbb{Z}$，值域 $\mathcal{R}(\delta_A^k)$ 和 $\mathcal{R}(\delta_B^k)$ 分别在 $\Lambda^{k+1}[\mathcal{X}]$ 和 $\Lambda^{k+1}[\mathcal{Y}]$ 中闭合，则$\mathbf{M}$ 是 *Taylor* 可逆的，当且仅当每个 ∂_k 都是巴拿赫空间之间的拓扑同构。

证明。 ($\Longrightarrow$) 假设交换的 n元组 $\mathbf{M}$ 是泰勒可逆的，因此$H^k(\mathbf{M}) = 0$ 对所有 $k \in \mathbb{Z}$。引理 13 的长正合列 3.12(i) 因而对每个 k都包含正合片段

$$0 = H^k(\mathbf{M}) \xrightarrow{\pi_k^*} H^k(\mathbf{B}) \xrightarrow{\partial_k} H^{k+1}(\mathbf{A}) \xrightarrow{\iota_{k+1}^*} H^{k+1}(\mathbf{M}) = 0.$$

在 $H^k(\mathbf{B})$ 处正合，得出 $\mathcal{N}(\partial_k) = \mathcal{R}(\pi_k^*) = \{0\}$，因此 ∂_k 是单射；在 $H^{k+1}(\mathbf{A})$ 处正合，得出 $\mathcal{R}(\partial_k) = \mathcal{N}(\iota_{k+1}^*) = H^{k+1}(\mathbf{A})$，因此 ∂_k 是满射。因此，每个 ∂_k 都是线性双射。

($\Longleftarrow$)反过来，假设 ∂_k 对每个 $k \in \mathbb{Z}$都是线性双射。要证明 $\mathbf{M}$ 的 Taylor 可逆性，只需证明其上同调群对所有 k 都消失。考虑 (13) 的以下一段：

$$H^{k-1}(\mathbf{B}) \xrightarrow{\partial_{k-1}} H^k(\mathbf{A}) \xrightarrow{\iota_k^*} H^k(\mathbf{M}) \xrightarrow{\pi_k^*} H^k(\mathbf{B}) \xrightarrow{\partial_k} H^{k+1}(\mathbf{A})$$

连接同态 $\partial_{k-1}\colon H^{k-1}(\mathbf{B}) \to H^k(\mathbf{A})$ 是双射。特别地，它是满射，因此根据序列在 $H^k(\mathbf{A})$ 处的正合性，我们有

$$\mathcal{N}(\iota_k^*) = \mathcal{R}(\partial_{k-1}) = H^k(\mathbf{A}).$$

这意味着 $\iota_k^* = 0$，从而 $\mathcal{R}(\iota_k^*) = \{0\}$。另一方面，由于 $\partial_k\colon H^k(\mathbf{B}) \to H^{k+1}(\mathbf{A})$ 也是双射，因此它是单射。根据序列在 $H^k(\mathbf{B})$ 处的正合性，我们得到

$$\mathcal{R}(\pi_k^*) = \mathcal{N}(\partial_k) = \{0\},$$

这意味着 $\pi_k^* = 0$，从而 $\mathcal{N}(\pi_k^*) = H^k(\mathbf{M})$。结合这些观察以及序列在 $H^k(\mathbf{M})$处的正合性，可得

$$H^k(\mathbf{M}) = \mathcal{N}(\pi_k^*) = \mathcal{R}(\iota_k^*) = \{0\}.$$

因此，我们得出结论：$\mathbf{M}$ 是 Taylor 可逆的。

最后，假设对每个 $\mathcal{R}(\delta_{\mathbf{A}}^k)$ 和 $\mathcal{R}(\delta_{\mathbf{B}}^k)$，其值域都是闭的 $k \in \mathbb{Z}$。若 $\mathbf{M}$ 是 Taylor 可逆的，则 $\mathcal{R}(\delta_{\mathbf{M}}^k) = \ker \delta^{k+1}{}_{\mathbf{M}}$ 的值域也都是闭的，因此由引理3.12(ii)可知，所有上同调空间都是巴拿赫空间，并且每个 ∂_k 都是有界的；根据第一部分，它是双射，因此由开映射定理可知 ∂_k 它是拓扑同构。反过来，若每个 ∂_k 都是拓扑同构，则特别地它是线性双射，而定理的第一部分推出 $\mathbf{M}$具有 Taylor 可逆性。□

备注 3.14. 按照第 2 节的约定，定理 3.13 中两个极端连接映射的双射性包含以下内容：$\partial_{-1}\colon H^{-1}(B) = \{0\} \to H^0(A)$ 是双射，当且仅当 $H^0(A) = \{0\}$，即 $\delta_{\mathbf{A}}^0$ 是单射；而 $\partial_n\colon H^n(B) \to H^{n+1}(A) = \{0\}$ 是双射，当且仅当 $H^n(B) = \{0\}$，即 δ^{n-1} B 是满射。因此，定理 3.13 包含了定理 3.1 的 (i) 和 (iii) 部分；后者的额外内容在于其拓扑部分 (ii)，即 $\delta_{\mathbf{A}}^0$ 下有界，而不仅仅是单射。

备注 3.15. 我们来说明定理 3.13 与定理 3.10之间的关系。一旦$\mathbf{M}$ 是泰勒可逆的，其值域 $\mathcal{R}(\delta_{\mathbf{M}}^k) = \ker \delta^{k+1}{}_{\mathbf{M}}$ 显然是闭的；定理 3.10 的意义在于，它只涉及单一次数 k，并且在 $\delta_{\mathbf{A}}^k$ 和 $\delta_{\mathbf{B}}^k$的值域闭的前提下，通过 $\mathcal{R}(\partial_k)$的闭性来刻画 $\mathcal{R}(\delta_{\mathbf{M}}^k)$ 的闭性，而不需要任何正合性或双射性假设。

长正合列还给出了三元组（$\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$、$\mathbf{M}$），以及相应的谱恒等式。该原理可追溯至 Taylor [11]，，他从长正合列推出：集合 $\sigma_T(\mathbf{M})$、$\sigma_T(\mathbf{A})$、$\sigma_T(\mathbf{B})$ 中任意两个的并包含第三个，且分别以$\mathbf{M}$和$\mathbf{B}$为结论的两个蕴含式也由 Curto [2] 在希尔伯特空间情形下得到。我们给出由（13）给出的简短推导，其中只用到引理 3.12（i）。

推论 3.16。设 $\mathbf{A} \in \mathfrak{B}(\mathcal{X})^n$、$\mathbf{B} \in \mathfrak{B}(\mathcal{Y})^n$、$\mathbf{C} \in \mathfrak{B}(\mathcal{Y},\mathcal{X})^n$ 满足 $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} \\ 0 & \mathbf{B} \end{pmatrix}$ 是一个交换的 n-元组。

(i) 如果元组 $\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$、$\mathbf{M}$ 中任意两个是泰勒可逆的，那么第三个也是泰勒可逆的。

(ii) 集合 $\sigma_T(\mathbf{A})$、$\sigma_T(\mathbf{B})$、$\sigma_T(\mathbf{M})$ 中的每一个都包含于另外两个集合的并集中。因此，

$$\sigma_T(\mathbf{A}) \cup \sigma_T(\mathbf{B}) = \sigma_T(\mathbf{M}) \cup \big(\sigma_T(\mathbf{A}) \cap \sigma_T(\mathbf{B})\big). \tag{15}$$

证明。 (i) 固定 $k \in \mathbb{Z}$ 并考虑正合片段

$$H^{k-1}(\mathbf{B}) \xrightarrow{\partial_{k-1}} H^k(\mathbf{A}) \xrightarrow{\iota_k^*} H^k(\mathbf{M}) \xrightarrow{\pi_k^*} H^k(\mathbf{B}) \xrightarrow{\partial_k} H^{k+1}(\mathbf{A})$$

引理 3.12(i)中的长正合列。如果 A 和 B 是泰勒可逆的，那么$H^k(A) = \{0\}$ 和 $H^k(B) = \{0\}$，因此由 $H^k(M)$ 处的正合性可得 $H^k(M) = \mathcal{N}(\pi_k^*) = \mathcal{R}(\iota_k^*) = \{0\}$。如果 A 和 M 是泰勒可逆的，那么由 $H^k(B)$ 处的正合性可得 $\mathcal{N}(\partial_k) = \mathcal{R}(\pi_k^*) = \{0\}$，且由于 ∂_k 映入 $H^{k+1}(A) = \{0\}$，我们得到 $H^k(B) = \mathcal{N}(\partial_k) = \{0\}$。如果 B 和 M 是泰勒可逆的，那么由 $H^k(A)$ 处的正合性可得 $\mathcal{N}(\iota_k^*) = \mathcal{R}(\partial_{k-1}) = \{0\}$，且由于 ι_k^*映入 $H^k(M) = \{0\}$，我们得到 $H^k(A) = \mathcal{N}(\iota_k^*) = \{0\}$。由于 k 是任意的，在每种情况下，第三个元组都是泰勒可逆的。

(ii) 对于每个 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$，平移后的元组 $M - \lambda$ 仍是一个形如 (3) 的交换n-元组，其对角元组为 $A - \lambda$ 和 $B - \lambda$，且耦合元组 C 保持不变；事实上，平移后，项 $-\lambda_i C_j + \lambda_j C_i$ 出现在 (4) 的两边。因此，这三个包含关系分别是将 (i) 的三种情形应用于 $M - \lambda$后得到的三个逆否命题。在 (15) 中，包含关系 $\supseteq$ 由 $\sigma_T(M) \subseteq \sigma_T(A) \cup \sigma_T(B)$ 以及显然的包含关系 $\sigma_T(A) \cap \sigma_T(B) \subseteq \sigma_T(A) \cup \sigma_T(B)$推出。对于 $\subseteq$，令 $\lambda \in \sigma_T(A) \setminus \sigma_T(M)$。由于 $\sigma_T(A) \subseteq \sigma_T(M) \cup \sigma_T(B)$，我们得到 $\lambda \in \sigma_T(B)$，从而有 $\lambda \in \sigma_T(A) \cap \sigma_T(B)$。情形$\lambda \in \sigma_T(B) \setminus \sigma_T(M)$ 是对称的。□

4. 多变量完备化问题

在定理 3.13 刻画了一个给定的交换矩阵元组的 Taylor 可逆性之后，我们现在转向完备化问题本身：从对角元组 $\mathbf{A}$ 和$\mathbf{B}$出发，我们要问，部分指定的元组 $\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \vdots & \mathbf{B} \end{pmatrix}$ 是否存在耦合$\mathbf{C}$使$\mathbf{M_C}$ 成为一个交换且 Taylor 可逆的 n-元组。由于耦合元组现在是变量，我们将 $\mathbf{M_C}$ 记为元组 (3)，并将 $\partial_k^{\mathbf{C}}$ 记为定理 3.13中的映射，以强调它们对 $\mathbf{C}$的依赖。这是定理1.1的多变量类比。与定理 3.13一样，只有在要用拓扑同构来表述判据时，才需要闭值域假设。

定理 4.1。 设 $\mathbf{A} \in \mathfrak{B}(\mathcal{X})^n$ 和 $\mathbf{B} \in \mathfrak{B}(\mathcal{Y})^n$ 是交换的 n-元组。那么以下陈述等价：

(i) 存在一个由有界线性算子组成的 n-元组 $\mathbf{C} = (C_1, \dots, C_n)$，使得 t

$$\mathbf{M_C} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} \end{pmatrix}$$

它是一个交换的且泰勒可逆的 n-元组。

(ii) 存在一个由有界线性算子组成的 n-元组 $\mathbf{C} = (C_1, \dots, C_n)$，满足交织关系

$$A_i C_j - A_j C_i = C_j B_i - C_i B_j \qquad \textit{for all } i, j, \tag{16}$$

其在上同调上的诱导映射

$$\partial_k^{\mathbf{C}} \colon H^k(\mathbf{B}) \to H^{k+1}(\mathbf{A}), \qquad \partial_k^{\mathbf{C}}([\eta]) = [\delta_{\mathbf{C}}^k \eta],$$

对每个 $k \in \mathbb{Z}$都是线性双射。

此外，当这些条件成立时，同一个耦合元组$\mathbf{C}$同时实现（i）和（ii）。此外，若对每个$k \in \mathbb{Z}$，值域$\mathcal{R}(\delta_{\mathbf{A}}^k)$和$\mathcal{R}(\delta_{\mathbf{B}}^k)$都是闭的，则（ii）中的映射$\partial_k^{\mathbf{C}}$也可等价地要求为巴拿赫空间之间的拓扑同构。

证明。如（4）中所述，元组$\mathbf{M}_{\mathbf{C}}$当且仅当$\mathbf{C}$满足（16）时才是交换的。对于每个这样的$\mathbf{C}$，定理3.13的第一部分表明，$\mathbf{M}_{\mathbf{C}}$是泰勒可逆的，当且仅当所有映射$\partial_k^{\mathbf{C}}$都是线性双射；在闭值域假设下，第二部分表明，当且仅当它们全都是巴拿赫空间之间的拓扑同构时，条件才成立。这证明了（i）与（ii）等价，其中两者采用相同的耦合元组$\mathbf{C}$，并证明了最后一个断言。□

连接同态具有超出普通线性映射的更多结构，而这种附加结构为Taylor可逆完备化的存在提供了更精细的必要条件。对于$1 \le i \le n$和一个交换的n元组$\mathbf{T}$，创建算子E_i将$\Lambda^k[\mathcal{X}]$映射到$\Lambda^{k+1}[\mathcal{X}]$，并与$\delta_{\mathbf{T}}$反交换，因为

$$\delta_{\mathbf{T}} E_i(x_F \otimes e_F) = \sum_{j=1}^{n} T_j x_F \otimes (e_j \wedge e_i \wedge e_F) = -\sum_{j=1}^{n} T_j x_F \otimes (e_i \wedge e_j \wedge e_F) = -E_i \delta_{\mathbf{T}}(x_F \otimes e_F).$$

因此，E_i将$\delta_{\mathbf{T}}^k$的核映到$_{\mathbf{T}}$的核，并将$\mathcal{R}(\delta^{k-1}{}_{\mathbf{T}})$映到$\mathcal{R}(\delta_{\mathbf{T}}^k)$，从而诱导出一个线性映射

$$\varepsilon_i^{\mathbf{T}} \colon H^k(\mathbf{T}) \to H^{k+1}(\mathbf{T}), \qquad \varepsilon_i^{\mathbf{T}}[\xi] = [E_i \xi].$$

由于对所有i、j，$E_i E_j = -E_j E_i$均成立，映射$\varepsilon_1^{\mathbf{T}}$、……、$\varepsilon_n^{\mathbf{T}}$使$H^\bullet(\mathbf{T}) = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} H^k(\mathbf{T})$成为外代数$\Lambda_n[\mathbf{e}]$上的分次模，其中生成元$e_i$的作用为$\varepsilon_i^{\mathbf{T}}$。我们保留上标，因为映射$\varepsilon_i^{\mathbf{A}}$和$\varepsilon_i^{\mathbf{B}}$作用于不同元组的上同调，并且会出现在同一个恒等式中。对于一个交换的n元组$\mathbf{A}$，记$H^{\bullet+1}(\mathbf{A})$为分次$\Lambda_n[\mathbf{e}]$模，其次数为$k$的分量是$H^{k+1}(\mathbf{A})$，生成元$e_i$的作用为$\varepsilon_i^{\mathbf{A}}$。同样的计算可原样应用于$\delta_{\mathbf{C}} = \sum_{j=1}^n C_j \otimes E_j$，得到

$$\delta_{\mathbf{C}}^{k+1} E_i = -E_i \delta_{\mathbf{C}}^k \quad \text{on } \Lambda^k[\mathcal{Y}],$$

其中E_i在左侧作用于$\Lambda^k[\mathcal{Y}]$，在右侧作用于$\Lambda^{k+1}[\mathcal{X}]$。

定理4.2。设$\mathbf{M}$为交换的n元组，定义为（3）。那么，对所有$k \in \mathbb{Z}$和$1 \le i \le n$，

$$\partial_{k+1} \circ \varepsilon_i^{\mathbf{B}} = -\varepsilon_i^{\mathbf{A}} \circ \partial_k$$

作为从$H^k(\mathbf{B})$到$H^{k+2}(\mathbf{A})$的线性映射。因此，如果$\mathbf{M}$是泰勒可逆的，那么映射$(-1)^k\partial_k$、$k \in \mathbb{Z}$构成从$H^\bullet(\mathbf{B})$到$H^{\bullet+1}(\mathbf{A})$的分次$\Lambda_n[\mathbf{e}]$-模同构。特别地，对于所有$k \in \mathbb{Z}$和$1 \le i \le n$，映射$\varepsilon_i^{\mathbf{B}} \colon H^k(\mathbf{B}) \to H^{k+1}(\mathbf{B})$分别为单射、满射、零映射，当且仅当映射$\varepsilon_i^{\mathbf{A}} \colon H^{k+1}(\mathbf{A}) \to H^{k+2}(\mathbf{A})$具有相同的性质。

证明。设$\eta \in \ker \delta_{\mathbf{B}}^k$。则$E_i\eta \in \ker \delta^{k+1}{}_{\mathbf{B}}$，并且$\delta_{\mathbf{C}}$的反交换关系给出

$$\partial_{k+1}(\varepsilon_i^{\mathbf{B}}[\eta]) = \partial_{k+1}[E_i\eta] = [\delta_{\mathbf{C}}^{k+1} E_i \eta] = [-E_i \delta_{\mathbf{C}}^k \eta] = -\varepsilon_i^{\mathbf{A}}[\delta_{\mathbf{C}}^k \eta] = -\varepsilon_i^{\mathbf{A}} \partial_k[\eta].$$

现在假设$\mathbf{M}$是泰勒可逆的，因此根据定理∂_k是线性双射3.13，并令$\partial'_k = (-1)^k\partial_k$。于是

$$\partial'_{k+1} \circ \varepsilon_i^{\mathbf{B}} = (-1)^{k+1}\partial_{k+1} \circ \varepsilon_i^{\mathbf{B}} = (-1)^{k+1}(-\varepsilon_i^{\mathbf{A}} \circ \partial_k) = \varepsilon_i^{\mathbf{A}} \circ \partial'_k,$$

因此，族$(\partial'_k)_{k\in\mathbb{Z}}$与每个生成元$e_i$的作用可交换，故是分次$\Lambda_n[\mathbf{e}]$-模从$H^\bullet(\mathbf{B})$到$H^{\bullet+1}(\mathbf{A})$的同态。它在每个次数上都是双射，因此是分次模同构，其逆映射自动

$\Lambda_n[\mathbf{e}]$-线性。最后，$\varepsilon_i^{\mathbf{B}} = (\partial'_{k+1})^{-1} \circ \varepsilon_i^{\mathbf{A}} \circ \partial'_k$ 在 $\mathrm{H}^k(\mathbf{B})$ 上的恒等映射表明，最后一个断言中的两个映射同时是单射、满射或零映射。□

定理 4.2纯属代数结果。在定理3.13第二部分的闭值域假设下，映射 $(-1)^k\partial_k$ 还是拓扑同构，而映射 $\varepsilon_i^{\mathbf{A}}$和 $\varepsilon_i^{\mathbf{B}}$是有界的，因为它们是由相应子商空间上的有界算子 E_i 诱导而来。

定理 3.1 和4.2给出了 Taylor 可逆完备化存在的必要条件，这些条件仅涉及对角元组。

推论 4.3. 设$\mathbf{A} \in \mathfrak{B}(\mathcal{X})^n$ 和$\mathbf{B} \in \mathfrak{B}(\mathcal{Y})^n$ 是交换的 n-元组，并假设存在一个耦合元组 $\mathbf{C}$，使得$\mathbf{M}_{\mathbf{C}}$ 是一个交换且 *Taylor* 可逆的 n-元组。那么：

(i) $\delta_{\mathbf{A}}^0$ 下有界；(ii) $\mathrm{H}^\bullet(\mathbf{B})$ 和 $\mathrm{H}^{\bullet+1}(\mathbf{A})$ 作为分次 $\Lambda_n[\mathbf{e}]$-模同构；特别地，对于每个 $k \in \mathbb{Z}$，$\mathrm{H}^k(\mathbf{B})$ 和$\mathrm{H}^{k+1}(\mathbf{A})$ 线性同构。

特别地，$\delta^{n-1}{}_{\mathbf{B}}$ 是满射的。

证明。 条件（i）由将定理 3.1 应用于 $\mathbf{M}_{\mathbf{C}}$得到，而（ii）则由定理 4.2得到。对于 $k = n$，条件（ii）给出 $\mathrm{H}^n(\mathbf{B}) \cong \mathrm{H}^{n+1}(\mathbf{A}) = \{0\}$，即 $\mathcal{R}(\delta^{n-1}{}_{\mathbf{B}}) = \Lambda^n[\mathcal{Y}]$。□

如注记 3.14所述，（ii）的 $k = -1$情形给出 $\mathrm{H}^0(\mathbf{A}) = \{0\}$，即$\delta_{\mathbf{A}}^0$的单射性。因此，（i）中超出（ii）的内容就是 $\mathcal{R}(\delta_{\mathbf{A}}^0)$的闭性。在最高次数处不需要这种附加条件，因为满射映射 $\delta^{n-1}{}_{\mathbf{B}}$ 的值域是闭的。

对于 $n = 1$，条件（ii）表明 $\mathcal{N}(A) = \mathrm{H}^0(A)$ 和 $\mathcal{Y}/\mathcal{R}(B) = \mathrm{H}^1(B)$ 为零，而 $\mathcal{N}(B) = \mathrm{H}^0(B)$和 $\mathcal{X}/\mathcal{R}(A) = \mathrm{H}^1(A)$线性同构，生成元$e_1$ 必然在这些空间上作用为零。结合（i），这意味着 A 下有界，B满射，且 $\mathcal{N}(B) \cong \mathcal{X}/\mathcal{R}(A)$作为向量空间成立。因此，推论 4.3 是定理 1.1 中三个条件的多变量对应物，而（ii）中的模结构则是真正的多变量特征。需要强调的是，（ii）中的同构是线性同构。定理 1.1 表明，对于 $n = 1$，当将 A 的下有界性和 B 的满射性分别加强为 A 的左可逆性和 B的右可逆性，并要求同构 $\mathcal{N}(B) \cong \mathcal{X}/\mathcal{R}(A)$是巴拿赫空间的同构时，这些条件就变得充分。这个区别至关重要：仅有值域的闭性并不能将抽象线性同构变为拓扑同构，尽管根据定理 3.13 的第二部分，由 Taylor可逆完备化产生的特定同构 $\partial_k^{\mathbf{C}}$ 在相关值域闭合时都是拓扑同构。下面的例 4.5 表明，对于 $n = 2$，这种加强条件也无法恢复充分性。在进一步比较这两种情形之前，我们先记录一下对耦合元组进行修改时所具有的自由度。

命题 4.4。 设 $\mathbf{A} \in \mathfrak{B}(\mathcal{X})^n$和 $\mathbf{B} \in \mathfrak{B}(\mathcal{Y})^n$ 是交换的 n-元组，设 $\mathbf{C} \in \mathfrak{B}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})^n$满足 (16)，并设 $D \in \mathfrak{B}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$。置 $\mathbf{C}' = (C'_1, \ldots, C'_n)$，其中 $C'_i = C_i + A_iD - DB_i$对$1 \le i \le n$。则：

(i) $\mathbf{C}'$ 满足(16)；(ii) $\mathbf{M}_{\mathbf{C}'} = S^{-1}\mathbf{M}_{\mathbf{C}}S$，其中 $S = \begin{pmatrix} I & D \\ 0 & I \end{pmatrix} \in \mathfrak{B}(\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y})$；(iii) $\partial_k^{\mathbf{C}'} = \partial_k^{\mathbf{C}}$对于每个 $k \in \mathbb{Z}$。

特别地，$\mathbf{M}_{\mathbf{C}'}$ 是泰勒可逆的，当且仅当$\mathbf{M}_{\mathbf{C}}$ 是泰勒可逆的。

证明。 (ii) 算子 S 是可逆的，且满足 $S^{-1}=\begin{pmatrix} I & -D \\ 0 & I \end{pmatrix}$；对每个 i，我们有

$$S^{-1}M_iS=\begin{pmatrix} I & -D \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_i & C_i \\ 0 & B_i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & D \\ 0 & I \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_i & C_i-DB_i \\ 0 & B_i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & D \\ 0 & I \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} A_i & A_iD+C_i-DB_i \\ 0 & B_i \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_i & C_i' \\ 0 & B_i \end{pmatrix}.$$

(i) 根据 (ii)，元组 $\mathbf{M}_{\mathbf{C}'}$ 与一个相容的 n-元组 $\mathbf{M}_{\mathbf{C}}$相似，因此它本身也是一个相容的 n-元组。正如 (4) 中所述，这意味着 $\mathbf{C}'$ 满足 (16)。

(iii) 按照第 D 2节中的方法，将 $\eta=\sum_{|F|=k} y_F\otimes e_F\in\Lambda^k[\mathcal{Y}]$对角地扩张到外代数上，我们有

$$\delta^k_{\mathbf{C}'}\eta=\sum_F\sum_{i=1}^n (C_i+A_iD-DB_i)y_F\otimes(e_i\wedge e_F)=\delta^k_{\mathbf{C}}\eta+\delta^k_{\mathbf{A}}(D\eta)-D(\delta^k_{\mathbf{B}}\eta).$$

若 $\eta\in\ker\,\delta^k_{\mathbf{B}}$，则可化简为 $\delta^k_{\mathbf{C}'}\eta=\delta^k_{\mathbf{C}}\eta+\delta^k_{\mathbf{A}}(D\eta)$；又由于 $\delta^k_{\mathbf{A}}(D\eta)\in\mathcal{R}(\delta^k_{\mathbf{A}})$，我们得到 $[\delta^k_{\mathbf{C}'}\eta]=[\delta^k_{\mathbf{C}}\eta]$ 属于 $H^{k+1}(\mathbf{A})$，即 $\partial^{\mathbf{C}'}_k([\eta])=\partial^{\mathbf{C}}_k([\eta])$。

最后一个断言由 (iii) 以及定理 3.13的第一部分得出。 □

换言之，$\mathbf{M}_{\mathbf{C}}$ 的 Taylor 可逆性和连接同态都只取决于 $\mathbf{C}$ 模去形如 $(A_iD-DB_i)_{i=1}^n$ 与 $D\in\mathfrak{B}(\mathcal{Y},\mathcal{X})$ 的耦合所得的等价类，我们称这种耦合为平凡耦合。由于对所有 k 都有 $\partial^0_k=0$，定理 3.13 表明，$\mathbf{M_0}=\mathbf{A}\oplus\mathbf{B}$ 因而对于每个平凡耦合 $\mathbf{C}$，$\mathbf{M}_{\mathbf{C}}$ 都是 Taylor 可逆的，当且仅当 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 都是 Taylor 可逆的。下面的例子表明，推论 4.3 的条件 (ii) 不能弱化为存在巴拿赫空间之间的同构 $H^k(\mathbf{B})\cong H^{k+1}(\mathbf{A})$；而且后者与条件 (i) 也不能保证存在 Taylor 可逆完备化。

例 4.5. 设 $n=2$，令 $\mathcal{X}=\mathcal{Y}=H^2(\mathbb{D})$ 为单位圆盘上的 Hardy 空间，令S 为单边移位，$(Sf)(z)=zf(z)$。回忆一下，S 是等距映射，S^* 是满射，且 $\ker S^*=\mathbb{C}1$，其中 1 表示常值函数，并且 $\mathcal{R}(S)=\{f\in H^2(\mathbb{D}):f(0)=0\}$ 的余维为一。考虑交换对

$$\mathbf{A}=(S,0)\qquad\text{and}\qquad\mathbf{B}=(0,S^*).$$

对于$\mathbf{A}$，我们有 $\delta^0_{\mathbf{A}}x=Sx\otimes e_1$ 和 $\delta^1_{\mathbf{A}}(x_1\otimes e_1+x_2\otimes e_2)=Sx_2\otimes(e_1\wedge e_2)$。因此，$\delta^0_{\mathbf{A}}$ 下有界，$\ker\,\delta^1_{\mathbf{A}}=\{x\otimes e_1:x\in\mathcal{X}\}$，并且

$$H^0(\mathbf{A})=\{0\},$$
$$H^1(\mathbf{A})=\{x\otimes e_1:x\in\mathcal{X}\}/\{Sx\otimes e_1:x\in\mathcal{X}\}\cong\mathcal{X}/\mathcal{R}(S),$$
$$H^2(\mathbf{A})=\Lambda^2[\mathcal{X}]/\mathcal{R}(\delta^1_{\mathbf{A}})\cong\mathcal{X}/\mathcal{R}(S),$$

最后两个空间分别是一维的，由 $1\otimes e_1$ 和$1\otimes(e_1\wedge e_2)$的等价类张成。对于$\mathbf{B}$，我们有 $\delta^0_{\mathbf{B}}y=S^*y\otimes e_2$ 和 $\delta^1_{\mathbf{B}}(y_1\otimes e_1+y_2\otimes e_2)=-S^*y_1\otimes(e_1\wedge e_2)$。因此，$\delta^1_{\mathbf{B}}$ 是满射，$\ker\delta^1_{\mathbf{B}}=\{y_1\otimes e_1+y_2\otimes e_2:y_1\in\ker\,S^*\}$，$\mathcal{R}(\delta^0_{\mathbf{B}})=\{y\otimes e_2:y\in\mathcal{Y}\}$，并且

$$H^0(\mathbf{B})=\ker S^*,\qquad H^1(\mathbf{B})\cong\ker S^*,\qquad H^2(\mathbf{B})=\{0\},$$

前两个空间均为一维的，分别由 1 和 $1\otimes e_1$的等价类张成。因此，推论 i的条件（4.3 ）成立，$\delta^1_{\mathbf{B}}$ 是满射，并且 $H^k(\mathbf{B})$与 $H^{k+1}(\mathbf{A})$ 对每个 $k\in\mathbb{Z}$都是线性同构。事实上，结论还更强：$\delta^0_{\mathbf{A}}$ 是左可逆的，其左逆为 $x_1\otimes e_1+x_2\otimes e_2\mapsto S^*x_1$；$\delta^1_{\mathbf{B}}$ 是右可逆的，其右逆为 $w\otimes(e_1\wedge e_2)\mapsto -Sw\otimes e_1$；并且由于所有上同调空间的维数至多为

一维，线性同构 $H^k(\mathbf{B}) \cong H^{k+1}(\mathbf{A})$ 都是拓扑的。因此，定理1.1 的三个假设的相应精确类比均成立。

然而，没有任何耦合元组 $\mathbf{C} = (C_1, C_2)$ 能使 $\mathbf{M_C}$ 成为一对可交换且 Taylor 可逆的算子。事实上，对于当前的$\mathbf{A}$ 和$\mathbf{B}$ ，交织关系（16）写作$SC_2 = -C_1S^*$。将其应用于常值函数 $1 \in \ker S^*$ 可得 $SC_21 = 0$，因此$C_21 = 0$，因为 S是单射。因此

$\partial_1^{\mathbf{C}}[1 \otimes e_1] = [\delta_{\mathbf{C}}^1(1 \otimes e_1)] = [C_11 \otimes (e_1 \wedge e_1) + C_21 \otimes (e_2 \wedge e_1)] = [-C_21 \otimes (e_1 \wedge e_2)] = 0$，尽管 $[1 \otimes e_1] \neq 0$ 在 $H^1(\mathbf{B})$中。因此 $\partial_1^{\mathbf{C}}$不是单射，而 $\mathbf{M_C}$ 根据定理 3.13 不具有 Taylor 可逆性。

该障碍由推论 4.3 的条件（ii）检测出来。映射 $\varepsilon_1^{\mathbf{B}}\colon H^0(B) \to H^1(B)$ 将 1 映射到 $1 \otimes e_1$ 的类，因此是双射；而 $\varepsilon_1^{\mathbf{A}}\colon H^1(A) \to H^2(A)$ 为零，这是因为 $E_1(x \otimes e_1) = x \otimes (e_1 \wedge e_1) = 0$ 对每个 $x \in \mathcal{X}$都成立。根据定理4.2， $H^\bullet(B)$ 和 $H^{\bullet+1}(A)$ 作为分次 $\Lambda_2[e]$-模并不同构，尽管它们作为分次向量空间甚至在拓扑意义下也是同构的。我们还要指出，当交换 B 中两个变量的角色时，该障碍便消失了。对于 $B' = (S^*, 0)$，耦合 $C = (I, 0)$ 满足（16），由此得到的对

$$\mathbf{M_C} = \left(\begin{pmatrix} S & I \\ 0 & S^* \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

是泰勒可逆的，因为其首项可逆，逆为 $(u, v) \mapsto (S^*u - v, Sv + u(0)1)$。

以下注记将多变量完备化问题与其一维对应情形进行比较，并指出示例所揭示的障碍4.5。

注 4.6。 定理4.1应与其一维对应情形——定理 1.1——进行比较，其中 M_C 存在可逆补全，当且仅当 A左可逆， B 右可逆，且 $\mathcal{N}(B) \cong \mathcal{X}/\mathcal{R}(A)$。一维情形中的关键简化在于，耦合仅由一个不受约束的算子 C构成：给定任意巴拿赫空间同构 $\psi\colon \mathcal{N}(B) \to \mathcal{X}/\mathcal{R}(A)$，即可构造一个有界算子 C，使得连接同态 ∂_0^C与ψ 相同（见[10]）。因此，该判据完全是内在的，只取决于附属于 $\mathcal{N}(B)$和 $\mathcal{X}/\mathcal{R}(A)$ 的空间 A 与 B。

在多变量情形中，这种自由度不复存在。耦合元组$\mathbf{C}$ 必须满足交织关系（16），且上同调上的诱导映射受限于必须由同一个 Koszul 态射 $\delta_{\mathbf{C}} = \sum_{i=1}^n C_i \otimes E_i$ 同时作用于所有次数而产生。例4.5 表明这一约束确实有效：$\mathbf{A}$ 和$\mathbf{B}$ 的上同调空间在每个次数上都可能拓扑同构，但不存在 Taylor 可逆补全。定理4.2 单独指出了这一约束的一部分，即连接同态与外代数作用的相容性，而这一部分本身已足以解释例4.5。剩余部分在于：给定的分次模同构，能否由同一个满足（16）的耦合元组的连接同态来实现；根据命题4.4，此处只需考虑$\mathbf{C}$ 模平凡耦合的等价类。换言之，问题在于，分次模之间的抽象同构 $H^\bullet(\mathbf{B}) \to H^{\bullet+1}(\mathbf{A})$ 能否提升为 Koszul 型的次数为一的上链态射，连接 $\mathscr{K}(\mathbf{B})$ 与 $\mathscr{K}(\mathbf{A})$。

注4.7。 完备化问题本质上是无限维的。事实上，如果 $\dim \mathcal{X} < \infty$ 且 $\dim \mathcal{Y} < \infty$，那么当且仅当 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$都是泰勒可逆的，才存在泰勒可逆完备化。充分性由推论 3.16(i)（其中$\mathbf{C} = \mathbf{0}$）给出。反之，如果 $\mathbf{M_C}$ 是泰勒可逆的，那么根据定理 3.1，$\ker \delta_{\mathbf{A}}^0 = \{0\}$ 为

即，0 不是**A**的联合特征值。由于交换矩阵组的 Taylor 谱与其联合特征值集合重合，[1]，**A** 是泰勒可逆的，并且推论 3.16(i) 表明**B** 也同样是泰勒可逆的。同样的论证表明，在有限维情形下，推论 4.3 中的必要条件也是充分的：条件 (i) 迫使 **A** 成为泰勒可逆的，条件 (ii) 随即给出 $H^k(\mathbf{B}) = \{0\}$ 对所有 k，且 $\mathbf{C} = \mathbf{0}$是一个泰勒可逆完备化。

声明

经费
第一作者感谢 CDP C2EMPI、法国政府在法国2030计划下提供的支持，以及里尔大学、里尔大学卓越倡议和里尔欧洲大都会对 R-CDP-24-004-C2EMPI 项目的资助与支持。第二作者获得了塞尔维亚共和国科学、技术发展与创新部的支持 [资助编号：451-03-34/2026-03/200102]。

数据和材料的可用性
本研究未使用任何数据。

利益冲突
作者声明不存在任何利益冲突。

作者贡献
本文由全体作者合作完成，所有作者均等参与了文章的撰写。所有作者均已阅读并认可最终稿件。

关于在稿件准备过程中使用生成式 AI 和 AI 辅助技术的声明

在准备本文的过程中，作者使用 Claude（Anthropic）来查找相关参考文献、核验数学论证、协助推导和撰写部分研究结果，以及进行语言编辑和表述改进。此外，作者还咨询了 ChatGPT（OpenAI）以进行投稿前检查。作者已审阅、核验并编辑所有生成的内容，并对已发表文章的内容承担全部责任。

参考文献

[1] M. Ch¯o、M. Takaguchi，可交换算子 n元组的某些等价类，Studia Math. 80(3)（1984），245–259。https://doi.org/10.4064/sm-80-3-245-259[2] R. E. Curto，关于可逆 n元组的连通性，Indiana Univ. Math. J. 29(3)（1980），393–406。https://doi.org/10.1512/iumj.1980.29.29028[3] R. E. Curto，算子的 Fredholm 与可逆 n元组：变形问题，Trans. Amer. Math. Soc. 266(1)（1981），129–159。https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1981-0613789-6[4] D. S. Cvetkovi´c-Ili´c，算子矩阵的可逆补全与正则补全，Electron. J. Linear Algebra 30（2015），530–549。https://doi.org/10.13001/1081-3810.3126 [5] D. S. Cvetkovi´c-Ili´c，算子矩阵补全问题，Math. Surveys and Monographs 第267卷。Amer. Math. Soc.，（2022）。https://doi.org/10.1090/surv/267[6] H. K. Du、J. Pan，2×2 算子矩阵的谱扰动，Proc. Amer. Math. Soc. 121(3)（1994），761–766。https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1994-1185266-2

[7] J. Eschmeier、M. Putinar，谱分解与解析层，伦敦数学会专著（新丛）第10卷，克拉伦登出版社，牛津大学出版社，纽约，1996年。[8]J. K. Han、H. Y. Lee、W. Y. Lee，可逆补全 2×2 上三角算子矩阵，Proc. Amer. Math. Soc. **128**（1）（2000年），119–123。https://doi.org/10.1090/S0002-9939-99-04965-5[9] V. M¨uller，线性算子的谱理论与巴拿赫代数中的谱系统，第2版，Oper. Theory Adv. Appl. 第139卷，Birkh¨auser，巴塞尔，2007年。[10] H. Stankovi´c，算子矩阵可逆补全问题的同调剖析 2×2 算子矩阵，预印本（2026年）。[11] J. L. Taylor，多个可交换算子的联合谱，《泛函分析杂志》**6**（1970年），172–191。[12] C. A. Weibel，同调代数导论，剑桥高等数学研究丛书第38卷，剑桥大学出版社，剑桥，1994年。

数学 与 科学 ´系，里尔大学 ´科学与 技术学院，法国里尔，F-59655 维伦纽夫-达斯克，法国电子邮件：chafiq.benhida@univ-lille.fr

电子 工程 系，尼什大学，亚历山德拉·梅德韦杰娃 4号，18000 尼什，塞尔维亚电子邮件：hranislav.stankovic@elfak.ni.ac.rs