arXiv:2611.32204v1 [math.CV] 24 Nov 2026

特殊CR类型的格的描述

R. M. Aminev，V. K. Beloshapka

摘要

我们证明，类型为（n，k）的特殊CR二次曲面存在，当且仅当 $4 \le n$和 $4 \le k \le (n-2)^2+1$。我们给出了所有这些类型的特殊二次曲面的具体例子。其余类型不存在的证明基于 [1] 和 [2]。本文完成了 [3]中开展的研究。

1. 引言

在 $\mathbb{C}^{n+k}$ 中，考虑一个位于 0 点的一般实解析子流形芽 M。其 CR维数是复维数 $n = \dim_{\mathbb{C}}(T_0M \cap iT_0M)$，而 k 是 M 在 $\mathbb{C}^{n+k}$ 中的实余维数。我们称有序对 $(n,\ k)$ 为其 CR 型。在适当的全纯坐标下，M 的方程可写成

$$\operatorname{Im} w = F(z,z) + O(3), \qquad z \in \mathbb{C}^n, \quad w \in \mathbb{C}^k,$$

其中 $O(3)$ 表示权至少为 3 的项。权由指定坐标的权 $[z]=1$、$[w]=2$ 确定。形式 F 的各分量由大小为 $n \times n$ 的厄米矩阵 H_1，……，H_k 表示，即 $F(z,\ b) = (b^*H_1z,\ \ldots\ldots,\ b^*H_kz)^T$。对应的切二次曲面 为

$$Q = \{(z,w) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^k : \operatorname{Im} w = F(z,z)\}.$$

这里 $H^* = \bar{H}^T$，而 H^T 表示不取共轭的转置；向量 z，b，w 均视为列向量。我们用 $\mathrm{Herm}(n)$ 表示厄米矩阵空间。令 $\mathrm{aut}(M)$ 为全纯向量场芽构成的代数，这些向量场的实部与 M 相切。$\mathrm{aut}(Q)$ 的有限维性判据由以下两个条件构成（见 [11]）：

$$H_1, \ldots, H_k \text{ are linearly independent over } \mathbb{R}, \qquad \bigcap_{j=1}^{k} \ker H_j = \{0\}.$$

我们称这样的二次曲面为非退化。全文中，所有二次曲面均假定为非退化。令 $\mathcal{H} = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}(H_1, \ldots, H_k)$ $S = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}(H_1, \ldots, H_k)$。那么 $\dim_{\mathbb{C}} S = \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{H} = k \le n^2$, $S^* = S$, $S \cap \mathrm{Herm}(n) = \mathcal{H}$.

实向量场 $2\operatorname{Re} X$ 的相切条件，其中 $X = f\partial_z + g\partial_w$ 是全纯的，形式为

$$\operatorname{Im} g(z,w) = 2\operatorname{Re} F(f(z,w),z), \qquad w = u + iF(z,z). \tag{1}$$

如果将权的定义扩展为：分别赋予关于 z 和 w 求导的权 (-1) 和 (-2)，那么在假设 Q 非退化的情况下，我们得到实代数 $g(Q) = \mathrm{aut}(Q)$ 的一个分次：

$$g(Q) = \bigoplus_{j \ge -2}^{l} g_j(Q), \qquad [g_i, g_j] \subseteq g_{i+j}.$$

我们将参数 $l \geq 0$ 称为 长度。长度大于二的二次曲面的第一个例子出现在 [9] （在该例中为 $l = 6$，见 [10]）。我们将其代数长度大于二的二次曲面称为例外二次曲面。在 [10] 中构造了一个例外二次曲面序列。论文 [1]和 [2] 表明，对于许多 CR类型，不存在例外二次曲面。论文 [3]致力于将 CR 类型的格划分为例外类型（存在例外二次曲面的类型）和非例外类型（不存在例外二次曲面的类型）。

负部分 $g_- = g_{-2} + g_{-1}$ 是基本的，其延拓在 Tanaka 的意义下是传递的（参见 [4] 以及 [2], § 2）。特别地，对于 $j \geq 0$，条件 $[X, g_{-1}] = 0$（其中 $X \in g_j$）蕴含 $X = 0$。因此

$$\text{if } g_3 = 0, \quad \text{then} \quad g_j = 0 \quad (j \geq 3). \tag{2}$$

事实上，若 $g_{j-1} = 0$，则对于 $X \in g_j$，我们有 $[X, g_{-1}] \subseteq g_{j-1} = 0$，因此 $X = 0$。所以，要排除所有更高权，只需排除权重三。我们将证明以下定理。

定理 1 存在类型为(n, k) 的例外非退化*CR*二次曲面，当且仅当 *if*

$$4 \leq n, \qquad 4 \leq k \leq (n-2)^2 + 1. \tag{3}$$

对于每一种满足 (3) 的类型，都存在一个满足 $g_3 \neq 0$ 和 $g_4 \neq 0$的例子。对于范围之外的每一个非退化二次曲面，所有 $j \geq 3$均有 $g_j = 0$。在权重二处终止意味着所有更高权均不存在；分量 g_2 本身也可能为零。

人们对二次曲面的兴趣，主要源于其全纯对称性 [4], [5], [6]。在最简单 Bloom–Graham 型 [7] 的流形类中，它们的全纯自同构群维数最大，并且可作为模型流形：

$$\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{aut}(M) \leq \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{aut}(Q).$$

对于任意 Bloom–Graham 型的芽，这一角色由更广泛的一类模型流形 [8]承担。

我们还要指出，定理证明中的主要技术难点在于处理边界抛物线 $k = (n-2)^2 + 2$。

2. 例外二次曲面的构造

命题2 对于每个 $4 \leq n$ 和 $4 \leq k \leq (n-2)^2 + 1$，都存在一个类型为 (n, k) 的非退化二次曲面，使得 $g_3 \neq 0$ 和 $g_4 \neq 0$。

证明。 令 $m = n - 2$，并将坐标拆分为

$$x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{C}^m, \qquad y = (y_1, y_2) \in \mathbb{C}^2.$$

选取 Herm(m) 的一组基，使其以

$$h_1 = x_1 \bar{x}_2 + x_2 \bar{x}_1, \quad h_2 = i x_1 \bar{x}_2 - i x_2 \bar{x}_1, \quad h_3 = |x_2|^2.$$

这样的基存在，因为这三个形式线性无关。取其前 $k-1 \le m^2$ 个元素，并定义二次曲面

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} w_j &= h_j(x,\bar{x}), \quad 1 \le j \le k-1, \\ \operatorname{Im} s &= q(x,y) := 2\operatorname{Re}(x_1\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2) + \sum_{j=3}^{m} |x_j|^2. \end{aligned} \tag{4}$$

对于 $m=2$，最后一个和为空。由于 h_j 彼此独立，且 q 是唯一涉及 y的形式，因此这些形式彼此独立。 q 在坐标顺序 x_1， y_1， x_2， y_2， x_3，... 下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus I_{m-2}.$$

它是可逆的，因此公共核是平凡的。所以，对于任意选定的 k，该二次曲面都是非退化的。

接下来，令

$$\Theta = 2w_3x_1 - (w_1 - iw_2)x_2$$

并定义向量场

$$X = -2iw_3\Theta\,\partial_{y_1} + i(w_1 + iw_2)\Theta\,\partial_{y_2}. \tag{5}$$

由于前 $k-1$ 个方程¯不依赖于 y，该向量场满足这些方程的相切条件。对于最后一个方程，我们要求 $(X+X)q = 0$。

由于 $\partial_{y_1} q = \bar{x}_1$ 和 $\partial_{y_2} q = \bar{x}_2$，我们有

$$Xq = \bar{x}_1 X(y_1) + \bar{x}_2 X(y_2) = i\Theta((w_1 + iw_2)\bar{x}_2 - 2w_3\bar{x}_1).$$

代入 $w_j = u_j + ih_j$ 以及 h_1、 h_2、 h_3的表达式，我们得到

$$\begin{aligned} (w_1 + iw_2)\bar{x}_2 - 2w_3\bar{x}_1 &= (u_1 + iu_2 + 2ix_2\bar{x}_1)\bar{x}_2 - 2(u_3 + i|x_2|^2)\bar{x}_1 \\ &= (u_1 + iu_2)\bar{x}_2 - 2u_3\bar{x}_1, \\ \Theta &= 2(u_3 + i|x_2|^2)x_1 - (u_1 - iu_2 + 2ix_1\bar{x}_2)x_2 \\ &= 2u_3x_1 - (u_1 - iu_2)x_2. \end{aligned}$$

Thus ¯， Xq 中括号内的表达式等于 $-\Theta$。因此，在二次曲 c,

$$Xq = -i\Theta\bar{\Theta} = -i|\Theta|^2, \qquad (X + \bar{X})q = 2\operatorname{Re}(Xq) = 0.$$

向量场 X 是非平凡的，并且具有权重四： Θ 具有权重三，而 X 的系数具有权重五。因此 $g_4 \neq 0$, 并且根据（2）， $g_3 \neq 0$也成立。该构造仅使用h_1、 h_2、 h_3，并且当加入任意选定的形式 h_4、.....、 h_{k-1}时保持不变。 □

3. 例外二次曲面不存在性结果的证明

在由 n 阶复方阵构成的向量空间 $Mat_n(\mathbb{C})$ 上，我们采用厄米内积 $\operatorname{tr}(AB^*)$。与子空间 V 中所有向量都正交的向量空间记作 $V^\perp$。对于复子空间 $L \subseteq \mathbb{C}^n$，设

$$L^F = \{v : F(v,u) = 0 \text{ for all } u \in L\}, \qquad a^F = (\mathbb{C}a)^F.$$

恒等式 $a^* H_j v = (H_j a)^* v$ 意味着

$$a^F = (Sa)^\perp. \tag{6}$$

如果对于 S，向量 a 是循环的，则称其为 $Sa = \mathbb{C}^n$，也就是说，列向量 $H_1 a,\ \ldots\ldots,\ H_k a$ 张成 $\mathbb{C}^n$。我们采用以下关于 $g_3 = 0$ 的充分条件，这些条件已在 Tumanov 的论文 [2]（定理 5.2 以及命题 6.2 和 6.4）中得到确立：

$$\exists a:\ Sa = \mathbb{C}^n \implies g_3 = 0; \tag{7}$$

$$(a^F)^F \cap a^F = 0 \text{ for generic } a \implies g_3 = 0. \tag{8}$$

在本文及下文中，“对于一般的 a”是指在 $\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$ 的一个开稠密子集上。我们还注意到，第一个条件是第二个条件的特例。

不存在循环向量可以用有界秩的矩阵线性空间来解释。事实上，在这种情况下，矩阵空间（$M(a) = (H_1 a,\ \ldots\ldots,\ H_k a)$），（$a \in \mathbb{C}^n$）由秩小于（$n$）的矩阵组成。这类空间的理论可追溯到 Flanders [12], 、Atkinson 和 Lloyd [13] 的工作；近期的发展尤其见于 Huang 和 Landsberg 的论文 [14]。我们在此并不直接使用这些论文中的结果，但我们的论证性质与之类似。

假设不存在循环向量。让我们估计 S 的可能维数。将 S 取为其正交补。由于 $S^* = S$，它具有如下形式

$$N = S^\perp = \{M \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) : \mathrm{tr}(HM) = 0 \text{ for all } H \in S\}, \qquad d = n^2 - k. \tag{9}$$

内积的非退化性给出 $\dim_{\mathbb{C}} N = d$。等式 $S^* = S$ 蕴含 $N^* = N$，因为对于 $M \in N$ 和 $H \in S$，

$$\mathrm{tr}(HM^*) = \overline{\mathrm{tr}(MH^*)} = \overline{\mathrm{tr}(H^*M)} = 0.$$

下文中，除非另有说明，矩阵空间和多项式的所有维数均取在 $\mathbb{C}$ 上。

因此，假设对于所有 a，均有 $Sa \neq \mathbb{C}^n$。考虑

$$\mathcal{M}(a) = (H_1 a\ \cdots\ H_k a).$$

其所有 n 阶子式恒等于零。因此，在域 $\mathbb{C}(a_1,\ \ldots\ldots,\ a_n)$ 上，该矩阵的秩小于 n，且其左核非零。因此存在一个多项式列 $p(a) \neq 0$，使得

$$p(a)^T H a = 0 \quad \text{for all } H \in S. \tag{10}$$

由迹的循环性，$p(a)^T H a = \mathrm{tr}(H a p(a)^T)$。由 (9) 和 (10) 可得

$$a p(a)^T \in N. \tag{11}$$

由于 Ha 关于 a 是线性的，因此 p 的每个齐次分量也满足（10）。在所有满足（10）的非零齐次多项式列中，选择 p 使其

$$r = \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{p_1, \ldots, p_n\}. \tag{12}$$

量 r 等于取值 $p(a)$ 的复张成空间的维数。将该张成空间记为 $R = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{p(a) : a \in \mathbb{C}^n\} \subseteq \mathbb{C}^n$。如果 $r = 1$，则对于某个常数 $v \neq 0$，$p(a) = f(a)v$，而（10）对所有 $H \in S$ 给出 $v^T H = 0$。特别地，$v^T H_j = 0$，且 H_j 的厄米性质蕴含对所有 j 均有 $H_j \bar{v} = 0$。这与公共核的平凡性矛盾。因此，

$$2 \leq r \leq n.$$

取一个酉矩阵 U，将 R 取到坐标子空间 $\mathbb{C}^r \times \{0\}$。在变量变换 $a = U^T z$ 下，相应的变换为

$$H' = \bar{U} H U^T, \qquad p'(z) = U p(U^T z), \qquad N' = \bar{U} N U^T.$$

它们保持 (10) 和 (11) 不变：

$$p'(z)^T H' z = p(U^T z)^T H U^T z, \qquad z p'(z)^T = \bar{U}(a p(a)^T) U^T.$$

现在回到记号 a，p，S，N；我们有 $R = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}(e_1, \ldots, e_r)$ 和 $p_{r+1} = \cdots = p_n = 0$。

令 L 表示 $a_1, \ldots, a_n$ 中线性形式所构成的空间。

引理 3 如果 $p_1, \ldots, p_r$ 是次数相同的线性无关齐次多项式，那么

$$\dim(L p_1 + \cdots + L p_r) \geq nr - \binom{r}{2}. \tag{13}$$

证明。在单项式上固定一个字典序。通过高斯消元，选取由 p_i 的基，使其首项单项式 m_i 各不相同。其线性倍式的首项单项式构成如下集合

$$A_i = \{a_1 m_i, \ldots, a_n m_i\}, \qquad |A_i| = n.$$

对于 $i \neq j$，交集 $A_i \cap A_j$ 至多包含一个单项式：下一个次数的公倍数必须与 $\mathrm{lcm}(m_i, m_j)$ 相同。令 $c(u)$ 表示包含单项式 u 的集合数量。那么

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_i A_i \right| &= nr - \sum_u (c(u) - 1) \geq nr - \sum_u \binom{c(u)}{2} \\ &= nr - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| \geq nr - \binom{r}{2}. \end{aligned}$$

首项单项式各不相同的乘积线性无关，因此得到了所需的估计。

□

Set

$$W = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{a p(a)^T : a \in \mathbb{C}^n\} \subset N.$$

线性泛函 $M \mapsto \sum_{i,\ j} c_{ij} M_{ij}$ 在 W 上为零，当且仅当 $\sum_{i,\ j} c_{ij} a_i p_j(a) \equiv 0$。因此，$W$ 的湮灭子的维数等于独立线性关系的数量

在多项式 $a_i p_j(a)$之间，而 $\dim W$ 等于它们的复张成空间的维数。根据引理 3，我们得到

$$\dim W = \dim(Lp_1 + \cdots + Lp_r) \geq nr - \binom{r}{2}.$$

对于 W 中的矩阵，只有前 r 列可以非零；对于 W^* 中的矩阵，只有前 r 行可以非零。因此，$W \cap W^*$ 包含于 $R \times R$ 块中，并且

$$\dim(W \cap W^*) \leq r^2.$$

由 $N^* = N$ 可得 $W + W^* \subset N$，从而

$$\dim N = d \geq \dim(W + W^*) = 2\dim W - \dim(W \cap W^*) \geq 2\dim W - r^2. \tag{14}$$

命题 4 设 $n \geq 4$。如果 S 没有循环向量，则 $d \geq 4n - 6$，即

$$\dim_{\mathbb{C}} S \leq (n-2)^2 + 2. \tag{15}$$

证明。考虑 r 的可能取值。

1. 如果 $r = 2$，则 $\dim W \geq 2n - 1$，因此

$$d \geq 2(2n-1) - 4 = 4n - 6.$$

2. 如果 $r = 3$ 且 $n \geq 5$，则

$$d \geq 2(3n-3) - 9 = 6n - 15 > 4n - 6.$$

3. 若 $r = 3$，$n = 4$，则前面的估计不够。在这种情况下，R 是前三个坐标向量张成的空间。W^* 中每个矩阵的最后一行都为零，而 W 在最后一行上的投影维数为三：a_4p_1，a_4p_2，a_4p_3 线性无关。因此，交集 $W \cap W^*$ 包含在该投影的核中：

$$\dim(W \cap W^*) \leq \dim W - 3.$$

We obtain $d \geq \dim W + 3 \geq 9 + 3 = 12 > 10 = 4n - 6$.

4. 若 $r \geq 4$，只需取四个线性无关的分量：

$$d \geq \dim W \geq 4n - \binom{4}{2} = 4n - 6.$$

在所有情况下，$d \geq 4n - 6$，这等价于 (15)。 □

对于 $k > (n-2)^2 + 2$，该命题保证存在一个循环向量，而条件 (7) 给出 $g_3 = 0$。

剩下需要考虑的情形是 $n \geq 4$, $k = (n-2)^2 + 2$，且 $d = 4n - 6$ 没有循环向量。

在命题 4 的证明中，情形 $r=3$ 给出严格不等式 $d>4n-6$，因此予以排除。对于 $r\geq 5$，对五个分量应用引理 3，得到 $d\geq 5n-10>4n-6$，因为 $n\geq r\geq 5$。

设 $r=4$。则 $4n-6\leq$ 维 $W\leq d=4n-6$，从而 $W=N=W^{*}$。因此， W 中的矩阵仅有 $R\times R$ 块对应的行和列可能非零，且它们的像包含于 R 中。另一方面，

$$\operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{\operatorname{im} M : M\in W\}=\mathbb{C}^{n}: \tag{16}$$

当 $p(a)\neq 0$ 时， $ap(a)^{T}$ 的像等于 $\mathbb{C}a$，而这样的 a 构成一个稠密集。因此，$n=$ 维 $R=4$。只剩下以下情形:

$$r=2 \qquad \text{or} \qquad (n,r,k)=(4,4,6).$$

我们从分支 $r=2$ 开始。维数不等式 $\dim W\geq 2n-1$ 和 $4n-6=d\geq 2\dim W-4$ 蕴含

$$\dim(Lp_1+Lp_2)=2n-1.$$

由于 $\dim Lp_i=n$，我们有 $\dim(Lp_1\cap Lp_2)=1$。因此，存在一个非平凡关系 $\ell_1 p_1=\ell_2 p_2$，其中 ℓ_i 为线性的。将 p_1,p_2 除以它们的公因子 μ: $p_i=\mu q_i$，最大公因式$(q_1,q_2)=1$。等式 $\ell_1 q_1=\ell_2 q_2$ 蕴含 $q_1\mid\ell_2$ 和 $q_2\mid\ell_1$。因此，q_i 的次数至多为一次。p_1,p_2 的独立性排除了零次。因此，约去μ后，分量是线性且相互独立的，并且恒等式 (10) 得以保留。将这些分量记为 ℓ_1,ℓ_2，并将它们置于最后两个坐标中:

$$p(a)=(0,\dots,0,\ell_1(a),\ell_2(a))^{T}.$$

将 H 作用于 a 后，其最后两行对应的线性形式为 $u_H(a)$ $v_H(a)$。恒等式$p(a)^{T}Ha=0$ 意味着

$$\ell_1 u_H+\ell_2 v_H=0.$$

由于 ℓ_1， ℓ_2 互素，因此

$$u_H=t_H\ell_2, \qquad v_H=-t_H\ell_1$$

其中常数 t_H 线性依赖于 H。因此， H 的最后两行为 $t_H D$，其中固定矩阵 D 的各行是形式 ℓ_2， $-\ell_1$ 的系数。特别地，秩 $D=2$。

记 $\mathbb{C}^{n}=E\oplus R$，$\dim E=m=n-2$，$\dim R=2$，以及

$$D=(B\ C), \qquad C\in \operatorname{Mat}_2(\mathbb{C}).$$

在实向量空间 $\mathcal{H}$ 上，考虑映射 $H\mapsto t_H\in\mathbb{C}$。其核由最后几行均为零的矩阵组成；因此，根据厄米对称性，最后几列也为零。所以，核的维数至多为 m^2，像的维数在 $\mathbb{R}$ 上至多为二。由于 $\dim_{\mathbb{R}}\mathcal{H}=m^2+2$，这两个上界均可达到：核就是整个上块 $\operatorname{Herm}(E)$，而 t_H 遍历 $\mathbb{C}$。右下块等于 $t_H C$，且对每个 t_H 都必须是厄米矩阵。代入 $t_H=1$ 和 $t_H=i$，得到

$$C=C^{*}, \qquad iC=(iC)^{*}=-iC^{*}.$$

因此， $C=0$ 且秩 $B=$秩 $D=2$。厄米对称性确定了右上块，而左上块可以任意取值，因为核包含所有 Herm(E)。于是，

$$\mathcal{H}_B=\left\{\begin{pmatrix} A & \bar{\alpha}B^* \\ \alpha B & 0\end{pmatrix} : A=A^*,\ \alpha\in\mathbb{C}\right\},\qquad \operatorname{rank} B=2. \tag{17}$$

通过在 E 中选取两个向量，使 B 映射到 $\mathbb{C}^2$ 的标准基，并添上 $\ker B$ 的一组基，我们将 B 化为 $(I_2\ 0)$。这是一个允许的复坐标变换，它对这些形式的作用如下： $H\mapsto C_0^* H C_0$。

权重三向量场的系数具有如下形式（见 [1], 命题 8；[2],定理 5.2 的证明）

$$\begin{aligned} f(z,w)&=A(z,z,w)+\mathcal{B}(w,w),\\ g(z,w)&=2iF(z,\mathcal{B}(\bar{w},\bar{w})),\end{aligned} \tag{18}$$

其中， A 是一个复三线性映射，在前两个自变量上对称； $\mathcal{B}$ 是一个复对称双线性映射。

相切条件 (1) 给出方程

$$F(A(z,z,w),b)=4iF(z,\mathcal{B}(\bar{w},F(b,z))).$$

代入 $w=e_l$，其中 e_l 是 $\mathbb{C}^k$ 的一个标准基向量，并令 $A_l(z)=A(z,\ z,\ e_l)$,$\mathcal{B}_{l\nu}=\mathcal{B}(e_l,\ e_\nu)$。对于矩阵为 $H=H_j$ 的分量，我们得到

$$\begin{aligned} b^*HA_l(z)&=4i\Big(\sum_{\nu=1}^{k}F_\nu(b,z)\mathcal{B}_{l\nu}\Big)^*Hz\\ &=\sum_{\nu=1}^{k}(4i\,\mathcal{B}_{l\nu}^*Hz)\,b^*H_\nu z,\end{aligned}$$

因为 $\overline{F_\nu(b,\ z)}=F_\nu(z,\ b)=b^*H_\nu z$。令 $D_{l\nu}=\overline{4i\,\mathcal{B}_{l\nu}}$。将两边左侧的 b^* 提取出来，并利用 b 的任意性，我们得到：对每个 H_j，再由线性性可知，对所有 $H\in S$，

$$HA_l(z)=\sum_{\nu=1}^{k}(D_{l\nu}^THz)H_\nu z,\qquad D_{l\nu}=D_{\nu l},\quad H\in S. \tag{19}$$

若所有 D_{lj}和 A_l均为零，则 $\mathcal{B}=0$和 $A(z,\ z,\ w)=\sum_l w_lA_l(z)=0$。由 (18) 可知，此时向量场也为零。

引理 5 对于形式空间为 (17) 的二次曲面，有 $g_3=0$。

证明。令 $\Phi(z,\ b)$ 为分量为 b^TH_jz 的列向量。对于 $\lambda,\ \mu\in\mathbb{C}^k$，令 $A_\lambda(z)=\sum_l\lambda_lA_l(z)$，且 $D(\lambda,\ \mu)=\sum_{l,\ j}\lambda_l\mu_jD_{lj}$。将 (19) 左乘 b^T 并对 l 按权 λ_l 求和，得到

$$b^THA_\lambda(z)=D(\lambda,\Phi(z,b))^THz,\qquad H\in S.$$

取两对 $(z_i,\ b_i)$，其中 $z_i=(x_i,\ y_i)$，$b_i=(\eta_i,\ \theta_i)$，$i=1,\ 2$。记 $\varphi_i=\Phi(z_i,\ b_i)$ 和 $(u,\ v)=D(\varphi_1,\ \varphi_2)$。利用 D 的对称性，将 $(z_1,\ b_1,\ \varphi_2)$ 和 $(z_2,\ b_2,\ \varphi_1)$ 代入

对于 $(z,\ b,\ \lambda)$，这会给同一向量 $(u,\ v)$ 带来一些条件。我们将证明，上块的存在迫使 u 同时属于 $\mathbb{C}\eta_1$ 和 $\mathbb{C}\eta_2$，而左下块随后给出 $v^TBx_1 = v^TBx_2 = 0$。对于一般点对，这意味着 $(u,\ v) = 0$。

分别表示 $A_{\varphi_2}(z_1)$ $A_{\varphi_1}(z_2)$ 的上分量 α_1, α_2。

空间 S 包含矩阵 $H_M = \left(\begin{smallmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$，其中 $M \in \mathsf{Mat}_m(\mathbb{C})$ 和$H_L = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ B & 0 \end{smallmatrix}\right)$任意。对于 $H = H_M$ 以及每个 $i = 1, 2$，我们有

$$\eta_i^T M \alpha_i = u^T M x_i \quad \text{for all } M, \qquad \text{hence} \quad \alpha_i \eta_i^T = x_i u^T$$

通过比较 M 各项的系数。对于一般点对，向量 η_1, η_2 线性无关， Bx_1, Bx_2 也如此，因为 $m \geq 2$ 且秩 $B = 2$。特别地， $x_i \neq 0$。在矩阵等式中选取对应于 x_i 的一个非零坐标的行，我们得到$u \in \mathbb{C}\eta_i$ ，对每个 i 都成立。这两条直线的交点为零。因此 $u = 0$，并且由于$\eta_i \neq 0$，我们也有 $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$。

对于 $H = H_L$，进行相同的两次代换可得

$$v^T B x_i = \theta_i^T B \alpha_i = 0, \qquad i = 1, 2.$$

向量 Bx_1， Bx_2 构成 $\mathbb{C}^2$ 的一组基，因此 $v = 0$。于是，对一般点对有 $D(\varphi_1,\ \varphi_2) = 0$；根据多项式性，这对所有点对都成立。 $\Phi(z,\ b)$ 的取值张成 $\mathbb{C}^k$，因为恒等式$\sum_j c_j b^T H_j z = 0$ 在 $z,\ b$ 中意味着 $\sum_j c_j H_j = 0$；再由矩阵 H_j 的复线性无关性可知，所有 $c_j = 0$。由双线性可得 $D = 0$。现在，(19) 推出对所有 $H \in S$ 都有 $HA_l(z) = 0$ 。这些形式的公共核为零，因此对每个 l，都有 $A_l = 0$ ，引理得证。 □

这就完成了对 $r = 2$ 的论证。对于 $n \geq 5$，这正是边界情形下唯一的可能性。

引理 6 对于每个类型为 $(4,6)$ 的非退化二次曲面 Q ，都有 $g_3(Q) = 0$。

证明。 若存在循环向量，则结论由 (7) 得出。设对所有a $Sa \neq \mathbb{C}^4$ 。考虑域 $K = \mathbb{C}(a_1, \dots, a_4)$ 上的矩阵 $\mathcal{M}(a) = (H_1 a \ \cdots \ H_6 a)$ 以及齐次关系 $p(a)^T \mathcal{M}(a) = 0$ ，其中 r 取为上文所选的极小值。由于 $d = 16 - 6 = 10$，如上所示，只有 $r = 2$ 和 $r = 4$ 两种可能。对于 $r = 2$，结论由引理 5 得出。令 $r = 4$。

我们将证明秩$_K \mathcal{M} = 3$。不存在循环向量，因此秩至多为三。假设秩至多为二；则 $\dim_K \ker \mathcal{M}^T \geq 2$。线性泛函 $v \mapsto v_4$ 在此核上的限制秩至多为一。因此， $\ker \mathcal{M}^T$ 中含有一个非零向量 $(q_1, q_2, q_3, 0)^T$，其定义在 K 上。乘以公分母并取一个非零齐次分量后，我们得到一个至多含有三个线性无关分量的多项式关系。这与 $r = 4$的极小性矛盾。

因此，对于一般的 a，我们有 $\dim_{\mathbb{C}} Sa = 3$ and $p(a) \neq 0$。令 $c(a) = p(a)$。由$\overline{c(a)}$ $^* H_j a = p(a)^T H_j a = 0$ 对所有 j 成立且 $\dim\ Sa = 3$，可得

$$a^F = (Sa)^\perp = \mathbb{C} c(a).$$

让我们验证，对于一般的 a， $F(c(a)\ c(a)) \neq 0$。固定一个非零矩阵 H_j，并写作$p(a) = \sum_\alpha v_\alpha a^\alpha$。列向量 v_α 张成 $\mathbb{C}^4$，因为若有一个非零线性泛函在所有 v_α 上都取零，就会导出 p 的四个线性无关分量之间的线性关系。若$c(a)^* H_j c(a)$ 恒等于零，那么等式

$$0 = p(a)^T H_j \overline{p(a)} = \sum_{\alpha,\beta} v_\alpha^T H_j \overline{v_\beta}\, a^\alpha \bar{a}^\beta$$

以及单项式 $a^\alpha \bar{a}^\beta$ 的线性无关性将推出，对所有 α，β，都有 $v_\alpha^T H_j v_\beta = 0$。由于 v_α 和 v_β 都张成 $\mathbb{C}^4$，这就意味着 $H_j = 0$，矛盾。

对于一般的 a，$(a^F)^F \cap a^F$ 中的每个向量都具有 $\lambda c(a)$ 的形式，并且满足

$$0 = F(\lambda c(a), c(a)) = \lambda F(c(a), c(a)).$$

因此，$\lambda = 0$ 和 $(a^F)^F \cap a^F = \{0\}$，且条件 (8) 给出 $g_3(Q) = 0$。 □

$k \le 3$ 不存在例外二次曲面，这一点已在 [1], § 3 中确立。对于类型 (3，3) 和 (3，4)，该文也在定理 7 中证明了这一点。上述方法使我们能够直接排除所有 CR 维数较小的情形。

引理7 对于类型为 (n, k) 且满足 $n \le 3$ 的每个非退化二次曲面 Q，对于所有 $j \ge 3$，都有 $g_j(Q) = 0$。此外，若 $n \le 3$ 且 $k \ge 4$，则空间 S 有一个循环向量。

证明。对于 $k \le 3$，第一个断言由 [1], § 3 得出。设 $k \ge 4$。由于 $k \le n^2$，情形 $n = 1$ 不可能。若 $n = 2$，则必有 $k = 4$，因此 $S = \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$，且每个非零向量都是循环的。

剩下的情况是 $n = 3$。假设不存在循环向量，并像上面一样选取一个满足 (10) 的齐次多项式列向量 p。公共核的平凡性排除了 $r = 1$，因此 $r = 2$ 或 $r = 3$。与之前一样，令

$$W = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{ap(a)^T : a \in \mathbb{C}^3\} \subset N, \qquad d = \dim_{\mathbb{C}} N = 9 - k.$$

若 $r = 2$，则由引理 3 可得 $\dim W \ge 2 \cdot 3 - 1 = 5$，而 $\dim(W \cap W^*) \le 4$。由于 $N^* = N$，我们得到

$$d \ge \dim(W + W^*) = 2 \dim W - \dim(W \cap W^*) \ge 10 - 4 = 6.$$

若 $r = 3$，同一引理给出

$$d \ge \dim W \ge 3 \cdot 3 - \binom{3}{2} = 6.$$

在这两种情况下，$k = 9 - d \le 3$，这与 $k \ge 4$ 矛盾。

因此，对于 $n \le 3$ 和 $k \ge 4$，存在一个循环向量。由 (7) 可知，这意味着 $g_3(Q) = 0$；由 (2) 还可知，对于所有 $j \ge 3$，都有 $g_j(Q) = 0$。 □

定理*1*的证明完成。

命题2为所有 $n \ge 4$, $4 \le k \le (n-2)^2 + 1$ 提供了例子。对于 $k \le 3$，根据 [1], ，例外性不可能成立；对于 $n \le 3$，根据引理7亦然。因此，剩下需要考虑的是 $n \ge 4$ 和 $k \ge (n-2)^2 + 2$。若 S 有一个循环向量，则由 (7) 得 $\mathfrak{g}_3 = 0$。若没有，命题 4 表明只剩下等式 $k = (n-2)^2 + 2$。对于 $r = 2$，由引理 5 可得 $\mathfrak{g}_3$ 消失。剩下的分支是 $(n, r, k) = (4, 4, 6)$，由引理 6 可得 $\mathfrak{g}_3 = 0$。因此，在范围 (3) 之外的所有情形中，我们都有 $g_3 = 0$；再由 (2)，权大于二的所有分量也都消失。结合上文构造的例子，这就证明了该定理。

□

作者在撰写本文时使用了 ChatGPT。

参考文献

[1] V. K. Beloshapka. 关于例外二次曲面。俄罗斯数学物理杂志 29:1 (2022年), 11–27. doi:10.1134/S1061920822010022. 俄文版：arXiv:2106.08246v1, 2021年.[2] A. Tumanov. 二次曲面的无穷小自同构与 CR映射的二阶喷射确定性。arXiv:2207.05307v1, 2022年.[3] V. K. Beloshapka. 关于例外 CR-二次曲面：进一步进展。arXiv:2609.08501v1, 2026年.[4] N. Tanaka. 关于微分系统、分次李代数与伪群。京都大学数学杂志 10:1 (1970年), 1–82.[5] S. S. Chern, J. K. Moser. 复流形中的实超曲面。数学学报 133 (1974年), 219–271. doi:10.1007/BF02392146.[6] V. K. Beloshapka. 复空间中的实子流形：其多项式模型、自同构及分类问题。数学科学进展 57:1(343) (2002年), 3–44（俄文）。doi:10.4213/rm474.[7] T. Bloom, I. Graham. 关于一般实子流形的“型”条件 $\mathbb{C}^n$。数学新进展 40:3 (1977年), 217–243.[8] V. K. Beloshapka. 有限 Bloom–Graham 型 CR流形：模型曲面方法。俄罗斯数学物理杂志 27 (2020年), 155–174.[9] F. Meylan. 高余维情形下二阶喷射确定性 Chern–Moser 定理的一个反例。arXiv:2003.11783v1, 2020年.[10] J. Gregorovič, F. Meylan. 构造高余维情形下二阶喷射确定性 Chern–Moser 定理的反例。数学研究通讯 29:2 (2022年), 399–420. doi:10.4310/MRL.2022.v29.n2.a4.[11] V. K. Beloshapka. 实解析曲面的自同构群的有限维性。苏联科学院学报：数学辑 52:2 (1988年), 437–442（俄文）。Math-Net.Ru：im1188.[12] H. Flanders. 关于有界秩线性变换空间。伦敦数学会杂志 37 (1962年), 10–16. DOI: 10.1112/jlms/s1-37.1.10.[13] M. D. Atkinson, S. Lloyd. 有界秩的大矩阵空间。数学季刊 31:3 (1980年), 253–262.[14] H. Huang, J. M. Landsberg. 关于有界秩矩阵线性空间。数学精选 32 (2026年), 文章 30。