arXiv:2611.32205v1 [math.LO] 24 Nov 2026

弱算术理论在

带指数运算的语言

Konstantin Kovalyov

俄罗斯科学院斯捷克洛夫数学研究所，俄罗斯莫斯科
kovalyov.ka@mi-ras.ru

2026年11月25日

摘要

记 IOpen 表示纯算术语言中的无量词归纳理论。本文考虑算术语言中通过一元函数 exp : $x \mapsto 2^x$ 扩展的 IOpen，并加入关于 exp 的某些简单全称公理，即:

$$\exp(1) = 2, \quad \exp(x+y) = \exp(x)\exp(y), \quad \exp(x) > x.$$

我们证明，该理论对于 IOpen 是 Π_1 保守的，对于离散有序 $\mathbb{Z}$ 半环理论是 $\forall$ 保守的。这一结果推广了 A. Wilkie [1] 的一个结果，并部分回答了 E. Je˘r´abek [2] 关于指数整数部分理论强度的问题。

1 引言

记 IOpen 表示纯算术语言中带有无量词归纳的离散有序半环理论。本文研究带有一元以 2 为底的指数运算 exp 的语言中 IOpen 的一个扩展。我们的主要结果见定理 3.1 和推论 3.3。下面将讨论这些结果的背景和细节。

IOpen 理论广为人知且已得到广泛研究；例如参见 [3, 1, 4, 5, 6, 7, 8, 9]及其中的参考文献。特别是，IOpen 因 Shepherdson 定理 [3], 而闻名，该定理指出，IOpen 的模型恰好是实闭域的非负整数部（有序环 $\mathcal{R}$ 的离散有序子环 $\mathcal{M}$若其中每个元素 $\mathcal{R}$都存在一个属于 $\mathcal{M}$的整数部，则称其为 整数部 ）。此外，M. H. Mourgues 和 J.-P. Ressayre [7] 证明了每个实闭域都有整数部。这为构造 IOpen 的模型提供了一种代数方法，我们将在后文中使用。

Shepherdson 定理的若干扩展已有研究；例如参见 [10, 11, 2, 12]。这些论文采用了指数域的指数整数部分这一概念（精确定义见第 2 节）。注意，每个满足增长公理的底数为 2 的实闭指数域（简称 RCEF）都存在指数整数部分（见 [13]）。在 [2], E. Je˘r´abek 证明了，满足增长公理的 RCEF 的指数整数

部这一类由 IOpen 与

$$\exp(1) = 2, \quad \exp(x+y) = \exp(x)\exp(y), \quad \exp(x) > x, \tag{Exp}$$

$$(x > 0) \to \exists y \, \big(\exp(y) \le x < \exp(y+1)\big). \tag{Log}$$

以下记理论 IOpen + (Exp) + (Log) 为 $\mathrm{TEIP}^+_{2^x}$。该理论并非 IOpen 的保守扩展：$\mathrm{TEIP}^+_{2^x}$ 证明了一个纯算术的 Π_1—句子，而该句子在 IOpen 中不可证明。这自然引出了 [2], 提出的问题：$\mathrm{TEIP}^+_{2^x}$ 究竟比 IOpen 强多少。特别地，目前尚不清楚 $\mathrm{TEIP}^+_{2^x}$是否是 IOpen 的 $\forall$—保守扩展。

在本文中，我们考察 $\mathrm{TEIP}^+_{2^x}$ 的片段 IOpen+(Exp)。类似于 [2, 定理 3.2], ，不难看出，满足增长公理的实闭 弱指数域 的指数整数部类可由 IOpen + (Exp) 公理化（见第 2.6 节）。因此，理论 IOpen + (Exp) 是十分自然的。

我们通过 [2] 证明理论 IOpen +(Exp) 是 IOpen 的 Π_1—保守扩展（因而也是 $\forall$—保守扩展），从而处理上述问题。证明采用模型论方法：利用 Shepherdson 定理，我们证明 IOpen 的每个模型都可以端扩张为 IOpen +(Exp) 的一个模型。由于 A. Wilkie [1] 证明了 IOpen 对离散有序 $\mathbb{Z}$半环理论是 $\forall$—保守的，因此理论 IOpen + (Exp) 对离散有序 $\mathbb{Z}$半环理论是$\forall$—保守的。因此，我们的结果也可以看作 Wilkie 定理的推广。注意，IOpen（因而 IOpen +(Exp) 也）并非对离散有序 $\mathbb{Z}$半环理论 Π_1—保守，因为例如，句子

$$\forall x \, \exists y \le x \, \big(y^2 \le x < (y+1)^2\big)$$

在后一理论中不可证，但在 IOpen 中可证。

2 预备知识

2.1 约定与记号

环指带单位元的结合交换环。结构通常用花体字母表示（如 $\mathcal{M}$、$\mathcal{F}$、$\mathcal{R}$，等等），其论域则用相应的字母表示：、F、R，等等。给定一种语言、一个 -结构 以及一个函数符号，我们用 () 表示由 扩展得到的结构，用 (、$f_{\mathcal{M}}$) 表示由函数 $f_{\mathcal{M}}$ 扩展 $\mathcal{M}$ 得到的结构。当不会引起混淆时，我们省略结构 $\mathcal{M}$ 中语言 $\mathcal{L}$ 的符号解释所带的下标 $\mathcal{M}$。例如，如果

$$\mathcal{M} = (M, +_{\mathcal{M}}, -_{\mathcal{M}}, \cdot_{\mathcal{M}}, 0_{\mathcal{M}}, 1_{\mathcal{M}})$$

是一个环，我们可以将其记为 (M、+、−、·、0、1)。

我们用 $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ 表示 $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{N}$的子结构。对于公式 φ 和变量组$\vec{x} =$(x_1，.....，x_n)，我们用 φ($\vec{x}$)表示 φ的所有自由变量都包含在 $\vec{x}$中的变量之内。对于项，也采用类似约定。为简化记号，在书写一个理论的公理时，我们有时会省略公式开头的 $\forall$量词。例如，我们会写 $x + y = y + x$，而不是$\forall x \, \forall y \, (x + y = y + x)$。对于理论 T_1 和 T_2的并集的演绎闭包，我们记作 $T_1 + T_2$。给定语言 $\mathcal{L}$中的理论 T和语言 $\mathcal{L}' \supseteq \mathcal{L}$中的理论 $T' \supseteq T$，如果对于任意一个全称 $\mathcal{L}$句 φ，只要 $T' \vdash \varphi$，就有 $T \vdash \varphi$，则称 T'是关于 T的 $\forall$-保守理论。

我们将考察语言中的有序半环和有序环（本节稍后将给出精确定义）

$$\mathcal{L}_{\mathrm{OSR}} := (+^{(2)}, \cdot^{(2)}, 0, 1, \leq^{(2)})$$

有序半环和

$$\mathcal{L}_{\mathrm{OR}} := (+^{(2)}, -^{(1)}, \cdot^{(2)}, 0, 1, \leq^{(2)})$$

有序环，分别如此。我们将术语

$$\underbrace{1 + (1 + (1 + \ldots))}_{n \text{ times}}$$

简称为 n。若公式 φ 中出现的每个量词都具有 $\exists x \leq t$ 或 $\forall x \leq t$ 的形式，其中 x 不出现在 t 中，则称公式 φ 为有界的，或称为 Δ_0-公式。若公式 φ 具有 $\forall \vec{x}\, \theta$ 的形式，其中 θ 是一个 Δ_0-公式，则称公式 φ 为 Π_1-公式。

若 $\mathcal{M} = (M, \leq, \ldots\ldots)$ 是一个有序结构，且 $a \in M$，则我们定义

$$M^{>a} := \{m \in M \mid m > a\}.$$

对于子集 $A \subseteq M$ 和元素 $a_0 \in M$，若对所有 $a \in A$ 都有 $a > a_0$（分别地，$a \geq a_0$），则记作 $A > a_0$（分别地，$A \geq a_0$）。若对所有 $a \in A$ 和 $b \in B$ 都有 $a < b$，则记作 $A < B$。

若 $\mathcal{M} = (M, +, -, \cdot, 0, 1, \leq)$ 是一个有序环，那么我们将 $\mathcal{M}^+$ 记作非负元素的半环 ts

$$(M^+, +, \cdot, 0, 1, \leq),$$

其中

$$M^+ := \{a \in M \mid a \geq 0\}.$$

2.2 有序环与域

定义 2.1。 有序环理论是一个以 $\mathcal{L}_{\mathrm{OR}}$为语言、由以下公理组成的理论：

(OR0) $x + (y + z) = (x + y) + z$; (OR1) $x + y = y + x$; (OR2) $x + 0 = x$; (OR3) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$; (OR4) $x \cdot y = y \cdot x$; (OR5) $x \cdot 1 = x$; (OR6) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$; (OR7) $x \leq x$; (OR8) $(x \leq y \wedge y \leq x) \to x = y$; (OR9) $(x \leq y \wedge y \leq z) \to x \leq z$;

(有序环理论10) $x \leq y \vee y \leq x$;

(有序环理论11) $x \le y \to x + z \le y + z$;
(有序环理论 12) ($x \le y \wedge 0 \le z$)
$\to x \cdot z \le y \cdot z$; (有序环理论13) $0 < 1$;

(OR14) $x + (-x) = 0$.

OR 的模型称为有序环（简称 OR）。

Defi定义 2.2。OF 是一种使用语言 $\mathcal{L}_{\mathrm{OR}}$ 的理论，由理论 OR 和以下公理组成:

$$(x \neq 0) \to \exists y\ (x \cdot y = 1).$$

OF 的模型称为有序域（简称 OF）。

注。按照惯例，本文其余部分将省略乘法符号 $\cdot$。

2.3 离散有序环与半环

定义 2.3。DOR 是一种使用语言 $\mathcal{L}_{\mathrm{OR}}$的理论，由理论 OR 和以下公理组成:

$$x \le 0 \vee 1 \le x,$$

这表示序是离散的。DOR 的模型称为离散有序环（简称 DOR）。

定义 2.4。DOSR 是语言 $\mathcal{L}_{\mathrm{OSR}}$ 中的一个理论，由公理 (OR0)–(OR13) 以及以下公理组成:

$$x = 0 \vee 1 \le x;$$

$$x \le y \leftrightarrow \exists z(x + z = y).$$

DOSR 的模型称为离散有序半环（简称 DOSR）。

DOSR 理论将作为我们的基本算术理论。

注。可以在 DOR 的模型与 DOSR 之间自由转换。更确切地说，对于每个 DOR，其非负部分都是一个 DOSR; 而每个 DOSR 都同构于某个 DOR 的非负部分（只需考虑对偶环 $(m,\ n)$，对等价关系 $(m,\ n) \sim (m',\ n')$: $\iff m + n' = m' + n$ 取商即可）。本文接下来主要讨论 DOR 及其非负部分，不再提及这种等价关系。更多详情请参见例如 [14]。

定义 2.5。 $\mathbb{Z}$-DOSR 是一种使用语言 $\mathcal{L}_{\mathrm{OSR}}$的理论，由理论 DOSR 和以下公理模式组成

$$\exists y \bigvee_{k=0}^{n-1} \big(x = ny + k\big), \quad n \in \mathbb{N}, n \ge 2.$$

$\mathbb{Z}$-DOSR 的模型称为离散有序 $\mathbb{Z}$-半环 （简称 $\mathbb{Z}$-DOSR）。

定义 2.6。 IOpen 是一种使用语言 $\mathcal{L}_{\mathrm{OSR}}$的理论，由理论 DOSR 和开放归纳模式组成

$$\Big(\varphi(0, \overline{y}) \wedge \forall x\big(\varphi(x, \overline{y}) \to \varphi(x + 1, \overline{y})\big)\Big) \to \forall x\ \varphi(x, \overline{y}),$$

其中， $\varphi(x, \overline{\ }\ y)$ 是语言 $\mathcal{L}_{\mathrm{OSR}}$ 中的无量词公式。

注记。 不难看出，IOpen $\vdash \mathbb{Z}$-DOSR。

定理 2.7 ([1])。 每个 $\mathbb{Z}$-*DOSR* 都可以嵌入到 IOpen 的一个模型中。等价地，IOpen 是 $\forall$-保守的，关于 $\mathbb{Z}$-DOSR。

2.4 实闭域

定义 2.8。 RCF 是 $\mathcal{L}_{\mathrm{OR}}$语言中的一个理论，由有序域理论 OF 和以下方案组成：

$$(x < y \wedge t(x, \overline{w}) \leq 0 \wedge t(y, \overline{w}) \geq 0) \rightarrow \exists z((x \leq z \leq y) \wedge t(z, \overline{w}) = 0)$$

对于每个 $\mathcal{L}_{\mathrm{OR}}$-项 $t(x, \overline{w})$。RCF 的模型称为实闭域 （简称 RCF）。

关于实闭域的详细论述，可参见例如 [15] 和 [16]。这里我们只陈述所需的结果。

定义 2.9。 如果 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{R}$ 是有序域，那么当 $\mathcal{R}$ 是实闭的且扩张 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{R}$ 是代数的时，称 $\mathcal{R}$ 为 $\mathcal{F}$ 的实闭包 。

定理 2.10 ([15, 第 XI 章，定理 2.9])。 对每个有序域 $\mathcal{F}$ ，都存在其实闭包 $\mathcal{R}$。此外，这个实闭包 $\mathcal{R}$ 在保持 F 不变的同构意义下是唯一的。

注。 根据上述定理，可以谈论给定有序域的 实闭包。

引理 2.11 ([15, 第 XI 章，引理 3。4])。 若 $\mathcal{R}$ 是实闭域，且 $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{R}$ 是有序子环，那么 $\mathcal{M}$ 在 $\mathcal{R}$ 中的相对代数闭包，就是（ $\mathcal{M}$的分式域的）实闭包。

现在我们回顾形式级数域的一种标准构造。设 $\mathcal{F}$ 是有序域，$\mathcal{P}$ 是有序加法阿贝尔群。设 X 是形式变量。记 $X^{\mathcal{P}}$ 为定义域是 $\{X^m \mid m \in P\}$ 、运算按显然方式定义的有序乘法阿贝尔群。因此， $X^{\mathcal{P}}$ 是 $\mathcal{P}$的一个有序乘法副本。对于函数 $f\colon P \to F$，记 supp(f) 为集合

$$\{a \in P \mid f(a) \neq 0\},$$

并定义

$$F((X^{\mathcal{P}})) := \{f : P \to F \mid \text{the ordered set } \operatorname{supp}(f) \text{ is Noetherian}\}.$$

$F((X^{\mathcal{P}}))$ 的元素可视为如下形式的形式和

$$\sum_{m \in P} f(m) X^m.$$

可以用自然的方式在 $F((X^{\mathcal{P}}))$ 上定义域运算和序：当且仅当 $f > 0$ $f\big(\max(\operatorname{supp}(f))\big) > 0$（即对于每个 $m > 0$, X^m 都是无穷大的）； 我们将所得的有序域记为 $\mathcal{F}((X^{\mathcal{P}}))$。

定理 2.12 （[17, 定理 4.3。7]）。 如果有序域 $\mathcal{F}$ 是实闭的，且有序阿贝尔加法群 $\mathcal{P}$ 是可除的，那么 $\mathcal{F}$（（$X^{\mathcal{P}}$）） 是实闭的。

在第 3 节中，这一构造将用于扩展 IOpen 的模型。

我们还将使用以下构造，将有序阿贝尔群嵌入有序可除阿贝尔群中。

定义 2.13. 给定一个有序加法阿贝尔群 $\mathcal{P}$，我们将 $\mathcal{P}$ 的有序可除包 记作 $\mathbb{N}^{-1}\mathcal{P}$，即集合 $P \times \mathbb{N}^{>0}/\sim$，其中 $(m,k) \sim (m',k')$ 当且仅当 $k'm = km'$；群运算和序按自然方式定义。一对 (m,k) 的等价类记作 $\frac{m}{k}$。

显然， $\mathbb{N}^{-1}\mathcal{P}$ 是可除的。

2.5 整数部与 Shepherdson 定理

定义 2.14. 设 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{R}$ 为有序环， $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{R}$ 和 $\mathcal{M}$ 为离散有序环理论。若对所有 $r \in R$，都存在 $m \in M$ 使得 $m \le r < m+1$，则称 $\mathcal{M}$ 为 $\mathcal{R}$ 的 整数部。记作： $\mathcal{M} \subseteq^{\mathrm{IP}} \mathcal{R}$。

注。 由于 $\mathcal{M}$ 是离散有序的，对于每个 $r \in R$，其整数部都有唯一确定的定义。

设 $\mathcal{M}$ 是一个离散有序环。用 $\mathcal{M}^+$ 表示 $\mathcal{M}$ 的非负元素构成的半环，用 $\mathcal{F}(\mathcal{M})$ 表示 $\mathcal{M}$ 的商域，用 $\mathcal{R}(\mathcal{M})$ 表示 $\mathcal{F}(\mathcal{M})$ 的实闭包（其在同构意义下唯一）。

定理 2.15(J. Shepherdson, [3])。 设 $\mathcal{M}$ 为一个离散有序环。当且仅当 $\mathcal{M}^+ \vDash \mathsf{IOpen}$ $\mathcal{M} \subseteq^{\mathrm{IP}} \mathcal{R}(\mathcal{M})$.

根据 定理 2.10 和引理 2.11，我们可以将定理 2.15 改写为以下形式：

定理 2.16。 设 $\mathcal{M}$ 为一个离散有序环。当且仅当存在一个有序域 $\mathcal{R}$，使得 $\mathcal{M} \subseteq^{\mathrm{IP}} \mathcal{R}$ 且 $\mathcal{R} \vDash \mathsf{RCF}$。

2.6 IOpen 的扩张、指数域与指数整数部分

定义 2.17。 用 (Exp) 表示公式的合取的全称闭包 s

$$\exp(1) = 2, \quad \exp(x+y) = \exp(x)\exp(y), \quad \exp(x) > x,$$

并且将（Log）定义为该公式的全称闭包

$$(x > 0) \to \exists y \, \big(\exp(y) \le x < \exp(y+1)\big).$$

注记。 这里，exp 表示一元二进制幂运算。

现在我们解释这些公理的来源。

定义 2.18。 EF^- 是语言 $\mathcal{L}_{\mathrm{OR}}(\mathrm{exp})$ 中的一个理论，由有序域理论 OF 以及以下公理组成：

（EF0）$\exp(x) > 0$；（EF1）
$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$；（
EF2）$(x < y) \to (\exp(x) < \exp(y))$。

EF 是语言 $\mathcal{L}_{\mathrm{OR}}(\mathrm{exp})$ 中的一个理论，由理论 EF^- 和公理

(EF4) $(x > 0) \to \exists y \, \big(x = \exp(y)\big)$.

模型 EF^- 将称为弱指数域，而 EF 的模型将称为指数域。

备注。 事实上，不难证明（EF0）可由 OF + (EF1)–(EF2) 证明。一些作者使用不同的术语：例如， [18], 中的模型 EF^- 被称为指数域。

指数域的标准例子是 $\mathbb{R}_{\exp} := (\mathbb{R},\ e^x)$和$(\mathbb{R},\ 2^x)$，其中 $\mathbb{R}$ 表示实数的有序域。

定义 2.19. 设 $(\mathcal{F},\exp)$ 是一个弱指数域，$\mathcal{M} \subseteq \mathcal{F}$ 是一个有序环。若 $\mathcal{M} \subseteq^{\mathrm{IP}} \mathcal{F}$，且 M^+ 在 exp 下封闭（即对所有 $m \in M^+$，都有 $\exp(m) \in M^+$），则称 $\mathcal{M}$ 是 $(\mathcal{F},\exp)$ 的一个指数整数部分 。

定理 2.20 ([2, 定理 3.2])。 $\mathsf{IOpen} + (\mathrm{Exp}) + (\mathrm{Log})$ 是模型的指数整数部分理论的公理化，其中模型属于 $\mathsf{RCF} + \mathsf{EF} + \big(\exp(1) = 2\big) + \forall x\ \big(\exp(x) > x\big)$。

以下命题可用同样的方法证明。

命题 2.21. $\mathsf{IOpen} + (\mathrm{Exp})$ 是模型的指数整数部分理论的公理化，其中模型属于$\mathsf{RCF} + \mathsf{EF}^- + \big(\exp(1) = 2\big) + \forall x\ \big(\exp(x) > x\big)$。

证明。 该证明沿用基于 Robinson 联合相容性定理的 [2, 定理 3.2], 的同一论证。

□

2.7 离散有序半环的端扩张

定义 2.22。 设 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$ 为离散有序半环。若 $\mathcal{N}$，则称其为 $\mathcal{M}$ 的端扩张，如果$\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$，并且对任意 $m \in M$和 $n \in N$，$n \leq m$蕴含 $n \in M$。记作：$\mathcal{M} \subseteq^{\mathrm{end}} \mathcal{N}$。

对于离散有序环 $\mathcal{M}$和 $\mathcal{N}$，若$\mathcal{M}^+ \subseteq^{\mathrm{end}} \mathcal{N}^+$，则称 $\mathcal{N}$为 $\mathcal{M}$的端扩张，并记作 $\mathcal{M} \subseteq^{\mathrm{end}} \mathcal{N}$。

以下事实是标准的。

命题 2.23 ([14, 定理 2.7])。 设 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$ 为离散有序半环，且满足 $\mathcal{M} \subseteq^{\mathrm{end}} \mathcal{N}$。那么，对于每个 Δ_0-公式 $\theta(\vec{x})$ 以及每个 $\vec{a} \in M$,

$$\mathcal{M} \vDash \theta(\vec{a}) \iff \mathcal{N} \vDash \theta(\vec{a}).$$

推论 2.24. 设 T 是语言 $\mathcal{L}_{\mathrm{OSR}}$ 中的一个理论，U 是语言$\mathcal{L}_{\mathrm{OSR}}$的某个扩展中的一个理论，且 $\mathsf{DOSR} \subseteq T, U$。假设 T 的每个模型都能端扩张为 U 的一个模型。那么U 是 T上的 Π_1保守理论，也就是说，在 U 中可证的每个 Π_1语句在 T中也可证。

3 IOpen + (Exp) 的保守性结果

本节的主要结果如下。

定理 3.1. IOpen 的每个模型都能端扩张为IOpen $+(\mathrm{Exp})$的一个模型。因此，理论IOpen $+(\mathrm{Exp})$ 是IOpen上的 Π_1 保守理论。

在给出证明之前,我们先介绍以下已知构造，它使我们能够扩展 IOpe 的模型 n.

命题 3.2 (见 [3, 7])。 设 $\mathcal{M}$ 是一个满足 $\mathcal{M}^+ \vDash \mathsf{IOpen}$ 的有序环，并设 $\mathcal{P}$ 是一个有序加法阿贝尔可除群。记 $\mathcal{R}$ 为 $\mathcal{M}$ 的分式域的实闭包，并记 $\mathcal{N}$ 为其定义域为

$$N := \{f \in \mathcal{R}((X^{\mathcal{P}})) \mid \mathrm{supp}(f) \geq 0,\ f(0) \in M\}.$$

那么 $\mathcal{M} \subseteq^{\mathrm{end}} \mathcal{N}$和 $\mathcal{N}^+ \vDash \mathsf{IOpen}$。

证明。根据定理 2.12，有序域 $\mathcal{R}((X^{\mathcal{P}}))$ 是实闭的，因为 $\mathcal{P}$ 是可除的。显然， $\mathcal{N}$ 是离散有序的，且 $\mathcal{M} \subseteq^{\mathrm{end}} \mathcal{N}$。由于 $\mathcal{N}$ 是实闭域 $\mathcal{R}((X^{\mathcal{P}}))$ 的整数部，根据定理 2.16，我们得到$\mathcal{N}^+ \models$ IOpen。

□

定理 *3.1* 的证明。 设 $\mathcal{M}$ 是一个离散有序环，且 $\mathcal{M}^+ \models$IOpen。我们递归地构造一个模型序列

$$\mathcal{N}_0 \subseteq \mathcal{N}_1 \subseteq \mathcal{N}_2 \subseteq \ldots,$$

集合 $P_{i+1} \subseteq \mathcal{N}_{i+1}$以及映射 $\exp_i$：$N_i^+ \to N_{i+1}^+$，对所有满足以下条件的 $i \in \mathbb{N}$，都有 $i \in \mathbb{N}$ d:

(0) $\mathcal{N}_0 = \mathcal{M}$;

(1) $\mathcal{N}_{i+1}^+ \models$ IOpen 且 $\mathcal{N}_i \subseteq^{\mathrm{end}} \mathcal{N}_{i+1}$;

(2) $(P_{i+1}, +, 0, \preceq)$ 是 $(N_{i+1}, +, 0, \preceq)$ 的子群;

(3) $\mathcal{N}_{i+1}= \mathcal{N}_i \oplus P_{i+1}$ 作为阿贝尔群；此外，对所有的 $m_0 \in N_i$ 和 $m_1 \in P_{i+1}^{>0}$，我们有 $m_0 <$ m_1;

(4) $\exp_i$ 在 N_i^+ 上满足公理（Exp）；

(5) 对于 $i > 0$, $\exp_i|_{N_{i-1}^+} = \exp_{i-1}$。

首先，我们先非正式地说明这个思路。每一步中，模型 $\mathcal{N}_i$ 都分解为一个“小”部分（若 $i > 0$，则为 $\mathcal{N}_{i-1}$，若 $i = 0$，则为 $\mathbb{Z}$）和一个“大”部分（若 $i > 0$ ，则为 P_i，若 $i = 0$，则为 N_0^{basis}）。我们已经在 N_i 的“小”部分的非负元素上构造了指数函数。接着，按照命题 3.2，从 $\mathcal{N}_i$ 构造模型 $\mathcal{N}_{i+1}$ ，并将其分解为“小”部分 $\mathcal{N}_i$ 和“大”部分 P_{i+1}。之后，通过将 N_i 的“大”部分中的元素 m 映射到 $\mathcal{N}_{i+1}$的“大”部分中的元素 $X^m \in P_{i+1}$ ，我们将指数函数扩展到 $\mathcal{N}_i^+$ 上。

现在让我们继续构造。 $\mathcal{N}_0$ 已经构造完成。在第 i步，我们构造 $\mathcal{N}_{i+1}$、P_{i+1}和 $\exp_i$： $N_i^+ \to N_{i+1}^+$。

我们从基础情形 $i = 0$开始。记 $\mathcal{R}_0$ 为 $\mathcal{N}_0$的分式域的实闭包，并记$\mathcal{N}_{\mathrm{ad0}}$为加法有序群（$N_0$, $+$, 0, $\leq$）。根据定理 2.15， $\mathcal{N}_0 \subseteq^{\mathrm{IP}} \mathcal{R}_0$。令 N_0^{basis}为 $N_0^+ \setminus \{1\}$的一个极大子集，使得 $\{1\} \cup N_{\mathrm{basis0}}$在 $\mathbb{N}^{-1}\mathcal{N}_{\mathrm{ad0}}$中关于 $\mathbb{Q}$ 线性无关；根据佐恩引理，这样的子集存在。显然， N_0中的每个元素都可以唯一地表示为 $\{1\}\cup N_{\mathrm{basis0}}$中元素的有理数系数线性组合（尽管并非所有这样的有理线性组合都必须属于 N_0）。现在定义一个定义域为.....的离散有序环 $\mathcal{N}_1$

$$N_1 := \{f \in R_0((X_0^{\mathbb{N}^{-1}\mathcal{N}_0^{\mathrm{ad}}})) \mid \mathrm{supp}(f) \geq 0 \text{ and } f(0) \in N_0\},$$

并定义

$$P_1 := \{f \in R_0((X_0^{\mathbb{N}^{-1}\mathcal{N}_0^{\mathrm{ad}}})) \mid \mathrm{supp}(f) > 0\}.$$

显然，条件 (2) 和 (3) 成立。由命题 3.2， $\mathcal{N}_1^+ \models$ IOpen 和 $\mathcal{N}_0 \subseteq^{\mathrm{end}} \mathcal{N}_1$; 因此，条件 (1) 也成立。接下来需要定义 $\exp_0$: $N_0^+ \to N_1^+$。令 $m \in N_0^+$。则 m可唯一表示为$_n$ $_n$ $m = q_0 + \sum q_j m_j$，其中 $q_0, \ldots, q_n \in \mathbb{Q}$、 $m_1, \ldots, m_n \in N_0^{\mathrm{basis}}$，且 $n \in \mathbb{N}$。注意， $\sum q_j m_j$要么为零，要么是 $_{j=1}$ $_{j=1}$非标准的（即大于任意标准整数），因此非负。现在定义

$$\exp_0(m) := 2^{q_0} X_0^{\sum_{j=1}^{n} q_j m_j}.$$

由于 2^{q_0} 是实代数数，它属于 R_0，因此 $\exp_0(m) \in N_1^+$。容易验证，$\exp_0$ 在其定义域上满足 (Exp)，即条件 (4) 成立。

现在考虑归纳步骤。该构造类似于基础情形。假设根据归纳假设，$\mathcal{N}_{i+1}$、P_{i+1} 和 $\exp_i\colon N_i^+ \to N_{i+1}^+$ 已经构造出来，并满足条件 (1)–(5)。记 $\mathcal{R}_{i+1}$ 为 $\mathcal{N}_{i+1}$ 的分式域的实闭包。现在定义一个离散有序环 $\mathcal{N}_{i+2}$，其定义域为

$$N_{i+2} := \{f \in R_{i+1}((X_{i+1}^{\mathbb{N}^{-1}\mathcal{P}_{i+1}})) \mid \mathrm{supp} f \geq 0 \text{ and } f(0) \in N_{i+1}\},$$

其中 $\mathcal{P}_{i+1} = (P_{i+1}, +, 0, \trianglelefteq)$，并定义

$$P_{i+2} := \{f \in R_{i+1}((X_{i+1}^{\mathbb{N}^{-1}\mathcal{P}_{i+1}})) \mid \mathrm{supp} f > 0\}.$$

显然，条件 (2) 和 (3) 成立。根据命题 3.2，$\mathcal{N}_{i+2}^+ \vDash \mathrm{IOpen}$ 且 $\mathcal{N}_{i+1} \subseteq^{\mathrm{end}} \mathcal{N}_{i+2}$，因此条件 (1) 也成立。还需定义 $\exp_{i+1}\colon N_{i+1}^+ \to N_{i+2}^+$。将 $\exp_i$ 延拓到 N_i，令 $\exp_i(-m) := {}^{1}_{\exp_i(m)} \in R_{i+1}$，其中 $m \in N_i$。然后对于 $m \in N_{i+1}^+$，定义 $\exp_{i+1}(m)$ 为 $\exp_i(m_0) X_{i+1}^{m_1}$，其中 $m_0 \in N_i$ 和 $m_1 \in P_{i+1}$ 是满足 $m = m_0 + m_1$ 的唯一元素（注意，根据条件 (3)，$m_1 \geq 0$）。显然，条件 (4) 和 (5) 也得到满足。

最后，令 $\mathcal{N} := \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{N}_i$ 和 $\exp := \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \exp_i\colon N^+ \to N^+$。那么 $\mathcal{N}^+ \vDash \mathrm{IOpen}$，因为 IOpen 是 $\forall\exists$-可公理化的，而链的并保留 $\forall\exists$句子（例如，参见 [19, 引理 3.1.6]）；并且 $(\mathcal{N}^+, \exp) \vDash (\mathrm{Exp})$，因为 (Exp) 是纯全称的。显然，$\mathcal{M} \subseteq^{\mathrm{end}} \mathcal{N}$。

□

推论 3.3。理论 $\mathrm{IOpen} + (\mathrm{Exp})$ 对理论 $\mathbb{Z}$-DOSR 是 $\forall$-保守的。

证明。应用定理 3.1 和定理 2.7。 □

推论 3.4。公式 $(x > 0) \to \exists y \left(\exp(y) \leq x < \exp(y+1)\right)$ 在 $\mathrm{IOpen} + (\mathrm{Exp})$ 中不可证。

证明。假设 $\mathrm{IOpen} + (\mathrm{Exp}) \vdash (x > 0) \to \exists y \left(\exp(y) \leq x < \exp(y+1)\right)$。这意味着 $\mathrm{IOpen} + (\mathrm{Exp})$ 与 $\mathrm{TEIP}_{2^x}^+$ 等价。然而，根据定理 3.1，$\mathrm{IOpen} + (\mathrm{Exp})$ 在 IOpen 上是 Π_1-保守的，而 $\mathrm{TEIP}_{2^x}^+$ 则不是（见 [2,例 4.9]）。

□

然而，关于 $\mathrm{TEIP}_{2^x}^+$ 对于 IOpen 的 $\forall$-保守性问题（见 [2],），仍未得到解答。定理 3.1 的证明中所使用的构造无法将对数的整数部加入 IOpen 的模型中。我们将这个问题以及下面相关的问题留待解决。

问题 3.5。*(1)* $\mathrm{IOpen} + (\mathrm{Exp})$ 在 IOpen上是保守的吗？

(2) 更一般地，$\mathrm{IOpen} + (\mathrm{Exp})$的 $\mathcal{L}_{OSR}$-片段是什么？

(3) $\mathrm{TEIP}_{2^x}^+$ $\forall$ 在语言 $\mathcal{L}_{\mathrm{OSR}}(\exp)$ 中对 $\mathrm{IOpen} + (\mathrm{Exp})$ 是保守的吗？

资助

本研究得到俄罗斯科学基金会资助，项目编号 25-21-00632；详见 https://rscf.ru/project/25- 21-00632/。

参考文献

[1] A. J. Wilkie. 弱算术系统的一些结果与问题。载于 A. Macintyre、L. Pacholski 和 J. Paris（编），Logic Colloquium ’77，逻辑与数学基础研究第 96 卷，第 285–296 页。North-Holland，1978。[2] E. Je˘r´abek. 关于指数整数部分理论。数学逻辑与数学基础杂志，72：175–196，2026年。[3]J. C. Shepherdson. 数论自由变量片段的一个非标准模型。波兰科学院通报，数学、天文学与物理学系列，12(2)：79–86，1964。[4] L. van den Dries. 哪些曲线在 $\mathbb{Z}$ 上有点的坐标属于离散有序环？美国数学学会汇刊，264(1)：181–189，1981。[5] L. van den Dries. 弱算术系统模型的若干模型论与数论问题。载于 L. Pacholski、J. Wierzejewski 和 A. J. Wilkie（编），代数与算术的模型论，数学讲义第 834 卷，第 346–362 页。Springer，1980。[6] M. Otero. 在开放归纳模型中可解的丢番图方程。符号逻辑杂志，55(2)：779–786，1990。[7] M.-H. Mourgues 和 J.-P. Ressayre. 每个实闭域都有整数部。符号逻辑杂志，58(2)：641–647，1993。[8] J. Glivick´a 和 P. Glivick´y. 开放归纳片段的 Shepherdson 定理。arXiv:1701.02001[math.LO], 2017。[9] K. Kovalyov. IOpen片段。数学逻辑档案，63(7–8)：969–986，2024。[10] S. Boughattas 和 J.-P. Ressayre. 带指数运算的实数域的算术化：扩展摘要。RAIRO——理论信息学与应用，42(1)：105–119，2008。[11] E. Je˘r´abek. VTC^0 作为指数整数部的模型。数学逻辑季刊，69(2)：244–260，2023。[12] K. Kovalyov. 带指数运算的语言中 Shepherdson 定理的类比。逻辑与计算杂志，36(3)：exag013，2026年。[13] J.-P. Ressayre. 实闭指数域的整数部。载于 P. Clote 和 J. Kraj´i˘cek（编），算术、证明论与计算复杂性，牛津逻辑指南第 23 卷，第 278–288 页。牛津大学出版社，1993。[14] R. Kaye. 皮亚诺算术的模型，牛津逻辑指南第 15 卷。牛津大学出版社，1991。[15] S. Lang. 代数，数学研究生文本第 211 卷。Springer，修订第三版，2002。[16] D. Marker、M. Messmer 和 A. Pillay. 域的模型论，逻辑讲义第 5 卷。Springer，1996。

[17] A. J. Engler 和 A. Prestel。《赋值域》。Springer数学专著。Springer，2005。

[18] L.van den Dries、A. Macintyre 和D.Marker。对数-指数级数。《纯粹与应用逻辑年刊》，111(1–2):61–113，2001。

[19] K. Tent 和 M. Ziegler。《模型论课程》，逻辑讲义第 40 卷。剑桥大学出版社，2012。