若干类非 GRS 型线性码的校验矩阵及其最大距离可分或近最大距离可分性质

Zhonghao Liang、Chenlu Jia、Qunying Liao

arXiv:2611.32212v1 [cs.IT] 24 Nov 2026

摘要

校验矩阵和重量分布对于理解线性码的结构与性能至关重要。然而，获得它们的显式表达式往往颇具挑战。近年来，受编码理论和密码学应用的推动，研究者构造了许多非 GRS 型线性码族。对于其中许多码，显式校验矩阵仍然缺失，这妨碍了对其对偶性质、译码方法和重量分布的进一步研究。本文首先提出一种利用码扩张和克莱姆法则构造校验矩阵的方法，随后运用该方法或通过直接构造，为列扭广义 Reed–Solomon 码（TGRS）、修正 GRS 码等获得显式校验矩阵。其次，我们引入 $(\mathcal{L},\ \mathcal{P})$-扭广义 Roth–Lempel (TGRL) 码 $\mathcal{C}_{k,\ \ell}(\mathcal{L},\ \mathcal{P},\ \boldsymbol{A}_{m\times m},\ \boldsymbol{B})$，通过直接构造为其中三个子类获得显式校验矩阵，并为具有最一般 $\mathcal{L}$、$\mathcal{P}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的 $\mathcal{C}_{k,\ \ell}(\mathcal{L},\ \mathcal{P},\ \boldsymbol{A}_{2\times 2},\ \boldsymbol{B})$ 建立成为最大距离可分（MDS）码的充要条件。对于单列 TGRS 码，我们证明它们要么是最大距离可分码，要么是近最大距离可分（NMDS）码；此外，还建立了它们成为 NMDS 码的充要条件，并利用有限阿贝尔群中的子集和确定了一族此类 NMDS 码的重量分布。最后，基于关于 TGRS 码非 GRS 性质的已知结果，我们从删 puncture 码的角度，为本文研究的这些码建立了成为非 GRS 码的充分条件。

索引词

奇偶校验 矩阵；非 GRS 型线性码；扩展码；MDS 码；NMDS码；TGRL 码 s.

I. 引言

设 $\mathbb{F}_q$ 为含有 q 个元素的有限域，且 $\mathbb{F}_q^* = \mathbb{F}_q\backslash\{0\}$，其中 q 为素数幂。若 k维线性子空间$\mathbb{F}_q^n$的最小（汉明）距离为 d，则称其为 $\mathbb{F}_q$上的 $[n,k,d]$ 线性码。对于 $[n,k]_q$线性码 $\mathcal{C}$，若给定 n和 k，则最小（汉明）距离 d 的最大值是确定的，即 $d \le n-k+1$。特别地，若$d = n-k+1$，则 $\mathcal{C}$是最大距离可分码（简称 MDS）；若 $d = n-k$，则 $\mathcal{C}$是几乎最大距离可分码（简称 AMDS）；若 $\mathcal{C}$ 的对偶码也是 AMDS，则

$\mathcal{C}$ 是近最大距离可分（简称 NMDS）。令 A_i 表示重量为ni 的码字数量，在 $\mathcal{C}$。多项式 $\sum A_i z^i$ 称为 $\mathcal{C}$的重量枚举器，而序列 $(A_0,\ A_1,\ \ldots,\ A_n)$ 称为$i=0$的重量分布，其中码为 $\mathcal{C}$。由于重量分布包含纠错能力和检错概率等重要信息，近年来线性码的重量分布一直是理论与实践中的热点话题之一 [7, 9, 27, 38]。

校验矩阵在线性编码理论中起着核心作用。它们生成对偶码，并为伴随式译码提供标准框架。更重要的是，其结构复杂性与刻画线性码关键性质的难度密切相关，这些性质包括自对偶性、自正交性、线性互补对偶性质、最小距离，以及译码复杂度。

广义 Reed-Solomon（简称 GRS）码作为一类众所周知的最大距离可分码，定义为

$$\mathrm{GRS}_k(\boldsymbol{\alpha}) \triangleq \left\{(v_1 f(\alpha_1), \ldots, v_n f(\alpha_n)) \,|\, f(x) \in \mathbb{F}_q^k[x]\right\}, \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{v} = (v_1、\ \ldots\ldots、\ v_n) \in \left(\mathbb{F}_q^*\right)^n$，$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1、\ \ldots\ldots、\ \alpha_n) \in \mathbb{F}_q^n$，且 $\alpha_i \neq \alpha_j (i \neq j)$，并且

$$\mathbb{F}_q^k[x] = \left\{ f(x) = \sum_{i=0}^{k-1} f_i x^i \mid f_i \in \mathbb{F}_q, 0 \le i \le k-1 \right\}.$$

非GRS线性码是指与任何 GRS 码都不等价的线性码。

近年来，受最大距离可分码分类这一基本问题及其密码学应用（例如抵抗 Sidelnikov–Shestakov 攻击和 Wieschebrink攻击）的推动，非 GRS 型线性码的构造

通信作者：Qunying Liao。电子邮箱：liangzhongh0807@163.com；chenluJiamath@163.com；qunyingliao@sicnu.edu.cn。Zhonghao Liang、Chenlu Jia 和 Qunying Liao 就职于四川师范大学数学科学学院，中国成都 610066。本论文得到国家自然科学基金委员会（12471494）和四川省自然科学基金（2024NS-FSC2051）的资助。

引起了广泛关注[2, 4, 5, 11, 14, 18, 19, 21–26, 29, 30, 34, 36, 37, 42, 44, 45] 。迄今为止，这些非 GRS 型线性码的最大距离可分性质已得到充分刻画。然而，由于缺乏显式的校验矩阵构造，人们对其自对偶性、自正交性、LCD 性质等其他结构性质的关注要少得多。目前，非 GRS 型线性码主要通过对 GRS 码的生成矩阵进行以下三类操作来构造。

- **添加列向量**。1989年，Roth 和 Lempel [28]通过向 RS 码的生成矩阵添加两个特殊的列向量，构造了第一类非 GRS 型 MDS 码，即将

$$(v_1 f(\alpha_1), \ldots, v_n f(\alpha_n)), f(x) \in \mathbb{F}_q^k[x] \tag{2}$$

改为

$$(v_1 f(\alpha_1), \ldots, v_n f(\alpha_n), f_{k-1}, f_{k-2} + \delta f_{k-1}), f(x) \in \mathbb{F}_q^k[x].$$

2025年，Li 等人 [20] 推广了 Roth 和 Lempel 的构造。2026 年，Liu 等人 [24] 通过向 RS 码的生成矩阵添加两个不同于 Roth 和 Lempel 所用列向量的列向量，构造了一类非 GRS 型线性码，即将方程(2)改为

$$(v_1 f(\alpha_1), \ldots, v_n f(\alpha_n), f(b) - \lambda_1 f(c), \ldots, f(b) - \lambda_s f(c)), s \in \{1, 2\}, f(x) \in \mathbb{F}_q^k[x], \tag{3}$$

为相应的码建立了成为最大距离可分码的充要条件，并给出了复杂的校验矩阵；最近，Gu 等人， [10] 推广了 Liu 等人的构造。 [24], 即将方程(2) 改为

$$(v_1 f(\alpha_1), \ldots, v_n f(\alpha_n), f(b_1) - \lambda_1 f(c), f(b_2) - \lambda_2 f(c)), f(x) \in \mathbb{F}_q^k[x], \tag{4}$$

给出了该码成为最大距离可分码的充要条件及其校验矩阵。此外，Wang 等人[34] 通过局部修改列向量，引入了一类非 GRS 型线性码及其扩展码，即将方程(2) 改为

$$(v_1 f(\alpha_1), \ldots, v_{n-1} f(\alpha_{n-1}), v_n (f(0) + \eta f_t)), f(x) \in \mathbb{F}_q^k[x].$$

- **执行扭曲操作**。2017年，Beelen 等人 [3] 通过对 RS 码的生成矩阵进行扭曲操作来构造非 GRS 最大距离可分码，提出了扭曲 GRS（简称 TGRS）码，即将方程(2) 改为

$$(v_1 f(\alpha_1), \ldots, v_n f(\alpha_n)), f(x) \in \mathcal{V}_{k,t,h,\eta} = \left\{ f(x) = \sum_{i=0}^{k-1} f_i x^i + \eta f_h x^{k-1+t} \mid f_i \in \mathbb{F}_q \right\}.$$

此后，学者们对其进行了推广$\mathcal{V}_{k,\ t,\ h,\ \eta}$并研究了相应线性码的性质[11, 15, 39, 41, 43]。

- **同时添加列向量并执行扭曲操作**。2025年，Li 等人 [21] 通过将方程(2)改为，提出了两类非 GRS 最大距离可分码

$$(v_1 f(\alpha_1), \ldots, v_n f(\alpha_n), \eta f_h), f(x) \in \mathcal{V}_{k,1,h,\eta}$$

or

$$(v_1 f(\alpha_1), \ldots, v_n f(\alpha_n), f_{k-1}), f(x) \in \mathcal{V}_{k,1,h,\eta},$$

并研究了其非 GRS 最大距离可分性质、覆盖半径和深洞。2026 年，Chen 等人 [5] 和 Ma 等人 [30],独立地通过将方程 (2) 改为

$$(v_1 f(\alpha_1), \ldots, v_n f(\alpha_n), f_{k-1}, f_{k-2} + \delta f_{k-1}), f(x) \in \mathcal{V}_{k,1,h,\eta};$$

Bhagat 等人 [2] 通过推广 Liu 等人的构造，提出了一类非 GRS 最大距离可分码， [24], 即将方程(3) 改为

$$(v_1 f(\alpha_1), \ldots, v_n f(\alpha_n), f(b) - \lambda_1 f(c)), f(x) \in \mathcal{V}_{k,1,h,\eta};$$

最近，Gu 等人 [10] 推广了 Bhagat 等人的构造 [2], ，即将 $f(x)$ 方程(4) 改为$\mathcal{V}_{k,\ 1,\ h,\ \eta}$，并给出了该码为最大距离可分码及其校验矩阵的充要条件。Zhang 等人[36] 通过将方程(2) 改为

$$(v_1 f(\alpha_1), \ldots, v_n f(\alpha_n), f_h), f(x) \in \mathcal{V}_{k,2,h,\eta}, 0 \le h \le k-2,$$

or

$$(v_1 f(\alpha_1), \ldots, v_n f(\alpha_n), f_h, f_h + \delta f_{k-1}), f(x) \in \mathcal{V}_{k,2,h,\eta}, 0 \le h \le k-2;$$

Lei 等人[16]通过将方程 (2) 改为

$$(v_1 f(\alpha_1), \ldots, v_n f(\alpha_n), f_{k-1}, f_{k-2} + \delta f_{k-1}), f(x) \in \mathcal{V}_{k,1,h,\eta}, 0 \le h \le k-1,$$

研究了最小距离，并给出了此类码为最大距离可分或近最大距离可分的充要条件。Wang 等人 [45] 通过将方程 (2) 改为

$$(v_1 f(\alpha_1), \ldots, v_n f(\alpha_n), f_{k-1}, f_{k-2}), f(x) \in \mathcal{V}_{k,3,h,\eta}$$

or

$$(v_1 f(\alpha_1), \ldots, v_n f(\alpha_n), f_{k-1}, f_{k-2}, f_{k-3} + \delta f_{k-1}), f(x) \in \mathcal{V}_{k,3,h,\eta}.$$

值得注意的是，在上述提到的非 GRS 型线性码中，只有少数码具有显式的校验矩阵，相关研究工作总结于下表 I。

表 I 非 GRS 线性码校验矩阵的研究进展

码的参考文献	校验矩阵	码及参考文献	校验矩阵
[20]	✓	[5]	✓
第一类 [24]	×	第一类 [21]	×
第二类 [24]	✓	第二类 [21]	×
[10]	✓	[2]	×
[34]	×	[16]	×
第一类 [36]	×	第一类 [45]	×
第二类 [36]	×	第二类 [45]	×
[30]	×	[11]	✓

本文主要为已知的非 GRS 型线性码提供相应的校验矩阵。具体而言，首先，我们引入（$\mathcal{L}$，$\mathcal{P}$）-扭曲广义 Roth-Lempel（简称（$\mathcal{L}$，$\mathcal{P}$）-TGRL）码，推广了 Cheng 等人 [5], Ma 等人 [30] 和 Wang 等人 [35], 给出的线性码定义，并给出了若干类（$\mathcal{L}$，$\mathcal{P}$）-TGRL 码的校验矩阵，以及一类（$\mathcal{L}$，$\mathcal{P}$）-TGRL 码为最大距离可分的充要条件；其次，我们证明，Liu 等人 [24] 引入的一类非 GRS 型线性码要么是最大距离可分码，要么是近最大距离可分码。最后，我们从两个角度为许多非 GRS 型线性码给出显式校验矩阵，即直接构造和扩展码。

本文结构安排如下。在第 II 节中，我们回顾并介绍一些必要的定义和引理。在第III 节中，我们给出五类非 GRS 型线性码对应的校验矩阵。在第 IV 节中，我们回顾两类扩展码的定义及相关结果，介绍一种从原码的生成矩阵构造非 GRS 型线性码校验矩阵的方法，并将该方法应用于一系列非 GRS 型线性码。在第 V 节中，我们给出一类 ($\mathcal{L}$，$\mathcal{P}$)-TGRL 码为最大距离可分码的充要条件；通过证明 (1)-列 TGRS 码为最大距离可分码或近最大距离可分码，给出 (1)-列 TGRS 码为近最大距离可分码的充要条件。在第 VI 节中，我们基于 ($\mathcal{L}$，$\mathcal{P}$)-TGRS 码的非 GRS 性质，讨论几类线性码的非 GRS 性质。

II. 预备知识

本文中，为方便起见，我们固定如下记号。

- q 是一个奇素数 p 的幂。
- $\mathbb{F}_q^n$ 表示 n 维的向量空间，其基域为 $\mathbb{F}_q$。
- $\mathbb{F}_q[x]$ 是定义在 $\mathbb{F}_q$ 上的多项式环，且 $\mathbb{F}_q^k[x] \triangleq \{f(x) \in \mathbb{F}_q[x] | \deg(f(x)) \leq k-1\}$。
- $\boldsymbol{\alpha} \triangleq (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{F}_q^n$，其中 $\alpha_i \neq \alpha_j (i \neq j)$，$\boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in (\mathbb{F}_q^*)^n$。
- 对于任意正整数 k，$[k] \triangleq \{0, 1, \ldots, k-1\}$，且 $\#L$ 表示集合 L 的基数。
- $\mathbf{0}_{s\times t}$ 表示 $s \times t$ 零矩阵，$\boldsymbol{I}_k$ 表示 $k \times k$ 单位矩阵，而$\mathbf{1}$ 表示全一向量。
- $\mathrm{GL}_m(\mathbb{F}_q)$表示 $\mathbb{F}_q$上的 $m \times m$ 可逆矩阵集合。
- 对于子集 $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subseteq \mathbb{F}_q$, $u_i = \prod_{j=1,\ j\neq i} (\alpha_i - \alpha_j)^{-1}$ 对于 $1 \leq i \leq n$。

本节回顾了几类非 GRS 型线性码的定义。对于其中一些码族，我们扩展其定义并介绍本文通篇将使用的辅助引理。

A. 几类非 GRS 线性码

在本小节中，基于已知的非 GRS 型线性码，我们回顾或介绍五类线性码的定义。

Hu 等人在 2026 年提出的第一类非 GRS 型线性码，即 $(\mathcal{L}, \mathcal{P})$-扭曲广义 Reed-Solomon 码，定义如下。

定义 II.1. ([11], 定义 2) 设 n 和 k 为整数，满足 $0<k\leq n$, $\boldsymbol{B}=(b_{i,j})_{k\times n-k}$, $\mathcal{L}\subseteq[n-k]$, $\#\mathcal{L}=\ell+1$ 且 $0\leq\ell\leq n-k-1$ 和 $\mathcal{P}\subseteq[k]$。$(\mathcal{L},\mathcal{P})$-扭曲广义 *Reed-Solomon*（简称 $(\mathcal{L},\mathcal{P})$-*TGRS*）码定义为

$$\mathcal{C}(\mathcal{L},\mathcal{P},\boldsymbol{B})\triangleq\{(v_1f(\alpha_1),\ldots,v_nf(\alpha_n))\,|f(x)\in\mathcal{F}(\mathcal{L},\mathcal{P},\boldsymbol{B})\},$$

其中

$$\mathcal{F}(\mathcal{L},\mathcal{P},\boldsymbol{B})=\left\{\sum_{i=0}^{k-1}f_ix^i+\sum_{i\in\mathcal{P}}f_i\sum_{j\in\mathcal{L}}b_{i,j}x^{k+j}|f_i\in\mathbb{F}_q,0\leq i\leq k-1\right\}. \tag{5}$$

而矩阵 $\boldsymbol{B}$ 被称为 $\mathcal{C}$ 的系数矩阵（$\boldsymbol{B}$）。

注 II.2. 容易得知，$\mathcal{C}(\mathcal{L},\mathcal{P},\boldsymbol{B})$ 在 $\mathcal{L}=[\ell+1]$ 和 $\mathcal{P}=[k]$ 下具有生成矩阵

$$\boldsymbol{G}(\mathcal{L},\mathcal{P},\boldsymbol{B})=\begin{pmatrix}v_1\left(1+\sum_{j=0}^{\ell}b_{0,j}\alpha_1^{k+j}\right) & \cdots & v_n\left(1+\sum_{j=0}^{\ell}b_{0,j}\alpha_n^{k+j}\right)\\ v_1\left(\alpha_1+\sum_{j=0}^{\ell}b_{1,j}\alpha_1^{k+j}\right) & \cdots & v_n\left(\alpha_n+\sum_{j=0}^{\ell}b_{1,j}\alpha_n^{k+j}\right)\\ \vdots & & \vdots\\ v_1\left(\alpha_1^{k-1}+\sum_{j=0}^{\ell}b_{k-1,j}\alpha_1^{k+j}\right) & \cdots & v_n\left(\alpha_n^{k-1}+\sum_{j=0}^{\ell}b_{k-1,j}\alpha_n^{k+j}\right)\end{pmatrix}_{k\times n}.$$

第二类非 GRS 型线性码通过对 RS 码的生成矩阵同时执行 Hu 等人在 2026 年提出的扭曲操作和 Liangetal. 在 2026 年提出的添加操作来构造，具体如下。

定义 II.3. 设 n 和 k 为整数，满足 $0<m\leq k\leq n$, $\boldsymbol{B}=(b_{i,j})_{k\times n-k}$, $\mathcal{L}\subseteq[n-k]$, $\#\mathcal{L}=\ell+1$，且 $0\leq\ell\leq n-k-1$ 和 $\mathcal{P}\subseteq[k]$。$(\mathcal{L},\mathcal{P})$-扭曲广义 *Roth-Lempel*（简称 $(\mathcal{L},\mathcal{P})$-*TGRL*）码定义为

$$\mathcal{C}_{k,\ell}(\mathcal{L},\mathcal{P},\boldsymbol{A}_{m\times m},\boldsymbol{B})\triangleq\{(v_1f(\alpha_1),\ldots,v_nf(\alpha_n),\boldsymbol{\beta})\mid f(x)\in\mathcal{F}(\mathcal{L},\mathcal{P},\boldsymbol{B})\},$$

其中 $\mathcal{F}(\mathcal{L},\ \mathcal{P},\ \boldsymbol{B})$ 由 *(5)* 给出，且 $\boldsymbol{A}_{m\times m}=(a_{ij})\in\mathrm{GL}_m(\mathbb{F}_q)$ 并且

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta}&=(f_{k-m},\ldots,f_{k-1})\,\boldsymbol{A}_{m\times m}\\&=\left(a_{11}f_{k-m}+a_{21}f_{k-(m-1)}+\cdots+a_{m1}f_{k-1},\ldots,a_{1m}f_{k-m}+a_{2m}f_{k-(m-1)}+\cdots+a_{mm}f_{k-1}\right).\end{aligned}$$

注 II.4. (1)这很容易　　知晓 $\mathcal{C}_{k,\ \ell}(\mathcal{L},\mathcal{P},\boldsymbol{A}_{m\times m},\boldsymbol{B})$ 其中 $\mathcal{L}=[\ell+1]$ 且 $\mathcal{P}=[k]$ 具有生成矩阵　　x

$$\boldsymbol{G}(\mathcal{L},\mathcal{P},\boldsymbol{A}_{m\times m},\boldsymbol{B})=\begin{pmatrix}\boldsymbol{G}(\mathcal{L},\mathcal{P},\boldsymbol{B}) & \boldsymbol{0}_{(k-m)\times m}\\ & \boldsymbol{A}_{m\times m}\end{pmatrix}_{k\times(n+m)}.$$

(2) *By taking* $m=2$, $\ell=0$, $\boldsymbol{A}_{2\times2}=\begin{pmatrix}0&1\\1&\delta\end{pmatrix}$ *and* $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&0\\ b_{k-1,0}&0&\cdots&0\end{pmatrix}$ *in Definition II.3, the corresponding* $\mathcal{C}_{k,\ell}(\mathcal{L},\ \mathcal{P},\ \boldsymbol{A}_{m\times m},\ \boldsymbol{B}$ 是 *Cheng* 等人独立引入的码 *[5]* 以及 *Ma* 等人 *[30]*。

(3) *By taking* $m=3$, $\boldsymbol{A}_{3\times3}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&\delta\end{pmatrix}$ *and* $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0&0&0&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&0&\cdots&0\\0&0&b_{k-1,2}&0&\cdots&0\end{pmatrix}$ *in Definition II.3, the corresponding* $\mathcal{C}_{k,\ \ell}(\mathcal{L},\ \mathcal{P},\ \boldsymbol{A}_{\ m\times m},\boldsymbol{B})$是 *Yang*等人引入的码。*d b W l [35]*

第三类非 GRS 线性码是通过添加一个恰有一个非零项的列向量构造的，对于$\mathcal{C}(\mathcal{L},\ \mathcal{P},\ \boldsymbol{B})$，其中 $\mathcal{L}=[\ell+1]$ 且 $\mathcal{P}=\{h\}$，如下所示。

定义 II.5. 设 n、k、ℓ和 h 为整数，且 $0<k\leq n$、$0\leq\ell\leq n-k-1$和 $0\leq h\leq k-1$。令 $\boldsymbol{b}=(b_0$、b_1、…、$b_\ell)\in\mathbb{F}_q^{\ell+1}\backslash\{\boldsymbol{0}_{\ell+1}\}$ 和 $\eta\in\mathbb{F}_q^*$。对于 $\mathcal{C}(\mathcal{L}$、$\mathcal{P}$、$\boldsymbol{B})$，其扩展码的一个类在 $\mathcal{L}=[\ell+1]$ 和 $\mathcal{P}=\{h\}$ 条件下定义为

$$\mathcal{C}_h(\eta,\boldsymbol{b})\triangleq\{(v_1f(\alpha_1),\ldots,v_nf(\alpha_n),\eta f_h)\,|f(x)\in\mathcal{W}\},$$

其中

$$\mathcal{W}=\left\{\sum_{i=0}^{k-1}f_ix^i+f_h\sum_{j=0}^{\ell}b_jx^{k+j}|f_i\in\mathbb{F}_q,0\leq i\leq k-1,\right\}. \tag{6}$$

注释 II.6。（1）容易得知，$\mathcal{C}_h$（η、$\boldsymbol{b}$）具有生成矩阵

$$\boldsymbol{G}_h(\eta,\boldsymbol{b})=\begin{pmatrix}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{B}) & \boldsymbol{\eta}\end{pmatrix}_{k\times(n+1)}$$

其中 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{0}_{h\times(\ell+1)} & \mathbf{0}_{h\times(n-k-\ell-1)}\\ \boldsymbol{b} & \mathbf{0}_{1\times(n-k-\ell-1)}\\ \mathbf{0}_{(k-h-1)\times(\ell+1)} & \mathbf{0}_{(k-h-1)\times(n-k-\ell-1)}\end{pmatrix}$ 和 $\boldsymbol{\eta}=(0,\cdots,0,\eta,0,\cdots,0)^T$.

(2) 通过取 $\ell=0$、$h=k-1$ 和 $\eta=1$，相应的 $\mathcal{C}_h$（$\boldsymbol{\alpha}$、η、$\boldsymbol{b}$）正是 *Zhu* 和 *Liao* *[38]* 引入的码。*(3)* 通过取 $\ell=0$ 和 $\eta=b_0\in\mathbb{F}_q^*$，或 $\ell=1$、$b_0=0$、$b_1\in\mathbb{F}_q^*$ 和 $\eta=1$，相应的 $\mathcal{C}_h$（$\boldsymbol{\alpha}$、η、$\boldsymbol{b}$）分别正是 *Li* 等人 *[21]* 或 *Zhang* 等人 *[36]*，引入的码。

此外，对于 $\mathcal{C}_h(\boldsymbol{\alpha},\ \eta,\ \boldsymbol{b})$，通过添加一个恰有两个非零项的列向量，我们引入如下扩展$\mathcal{C}_h(\eta,\ \boldsymbol{b},\ \delta)$。

定义 II.7. 设 n、k、ℓ 和 h 为整数，满足 $0<k\leq n$、$0\leq\ell\leq n-k-1$ 和 $0\leq h\leq k-2$。设 $\boldsymbol{b}=(b_0、b_1、\ldots、b_\ell)\in\mathbb{F}_q^{\ell+1}\backslash\{\mathbf{0}_{\ell+1}\}$、$\eta\in\mathbb{F}_q^*$ 和 $\delta\in\mathbb{F}_q$。对于具有 $\mathcal{L}=[\ell+1]$ 和 $\mathcal{P}=\{h\}$ 的 $\mathcal{C}(\mathcal{L}、\mathcal{P}、\boldsymbol{B})$，定义一类二重扩展码如下：

$$\mathcal{C}_h(\eta,\boldsymbol{b},\delta)\triangleq\{(v_1f(\alpha_1),\ldots,v_nf(\alpha_n),\eta f_h,\eta f_h+\delta f_{k-1})\,|f(x)\in\mathcal{W}\},$$

其中 $\mathcal{W}$ 由*(6)*给出。

注释 II.8. (1) 容易知道，$\mathcal{C}_h(\eta、\boldsymbol{b}、\delta)$ 的生成矩阵为

$$\boldsymbol{G}_h(\eta,\boldsymbol{b},\delta)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{G}_h(\eta,\boldsymbol{b}) & \boldsymbol{\delta}\end{pmatrix}_{k\times(n+2)}$$

其中 $\boldsymbol{\delta}=(0、\ldots、0、\eta、0、\ldots、0、\delta)^T$。

(2) 当 $h=k-2$ 和 $\delta\in\mathbb{F}_q^*$时，码 $\mathcal{C}_h(\eta,\boldsymbol{b},\delta)$ 与 $\mathcal{C}_{k,\ell}(\mathcal{L},\mathcal{P},\boldsymbol{A}_{2\times2},\boldsymbol{B})$ 在 $\boldsymbol{A}_{2\times2}=\begin{pmatrix}\eta & \eta\\ \delta & 0\end{pmatrix}$ 和

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{0}_{h\times(\ell+1)} & \mathbf{0}_{h\times(n-k-\ell-1)}\\ \boldsymbol{b} & \mathbf{0}_{1\times(n-k-\ell-1)}\\ \mathbf{0}_{(k-h-1)\times(\ell+1)} & \mathbf{0}_{(k-h-1)\times(n-k-\ell-1)}\end{pmatrix}$$

彼此置换等价。

第四类非 GRS 型线性码，即(s)-列 TGRS 码，是对 Liu 等人提出的码的推广，[24]以及 Gu 等人 [10]如下所示。

定义 II.9。设 n和 k为满足 $0<k\leq n$的整数。设 $\boldsymbol{b}=(b_1,\ldots,b_s)\in\mathbb{F}_q^s$满足 $b_i\neq c$，且 $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1,\ldots,\lambda_s)\in\mathbb{F}_q^s$满足 $\lambda_i\neq\lambda_j(i\neq j)$。则$(s)$列 *TGRS* 码定义为

$$\mathcal{C}_s(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{b},c)\triangleq\left\{(v_1f(\alpha_1),\ldots,v_nf(\alpha_n),f(b_1)-\lambda_1f(c),\ldots,f(b_s)-\lambda_sf(c))\,|f(x)\in\mathbb{F}_q^k[x]\right\},$$

注 II.10。(1) 容易看出，$\mathcal{C}_s(\boldsymbol{\lambda},b,c)$ 的生成矩阵为

$$\boldsymbol{G}_s(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{b},c)=\begin{pmatrix}\mathrm{GRS}_k(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{v}) & \boldsymbol{\lambda}_1 & \cdots & \boldsymbol{\lambda}_s\end{pmatrix}_{k\times(n+s)}$$

其中 $\boldsymbol{\lambda}_i=\left(1-\lambda_i,b_i-\lambda_ic,\ldots,b_i^{k-1}-\lambda_ic^{k-1}\right)^T$，且 $\mathrm{GRS}_k(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{v})$ 是一个 $[n,k]$ *GRS* 码的生成矩阵，其求值点为 $\boldsymbol{\alpha}$。

(2) 在定义 *II.9* 中取 $s=2$, $b_1=b_2=b$ 和 $\boldsymbol{v}=\mathbf{1}$，且 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n,b,c$ 两两不同，则相应的$\mathcal{C}_s(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{b},c)$ 正是 *[24]* 中介绍的码。在定义 *II.9* 中取 $s=2$ 和 $\boldsymbol{v}=\mathbf{1}$，则相应的 $\mathcal{C}_s(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{b},c)$ 正是 *[10]* 中的定义 *2.3*。

第五类非 GRS 型线性码是通过对（s）列 TGRS 码进行扭曲操作构造的，这也是 Bhagat 等人 [2] 和 Gu 等人 [10] 所介绍的码的构造方法，如下所示。

定义 II.11。设 n、k 和 ℓ 为整数，满足 $0<k\leq n$ 且 $0\leq\ell\leq n-k-1$、$\boldsymbol{B}=(b_{i,\ j})_{k\times n-k}$、$\mathcal{L}\subseteq[n-k]$ 和 $\mathcal{P}\subseteq[k]$。设 $c\in\mathbb{F}_q$、$\boldsymbol{b}=(b_1、\ldots、b_s)\in\mathbb{F}_q^s$，满足 $b_i\neq c$，以及 $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1、\ldots、\lambda_s)\in\mathbb{F}_q^s$，满足 $\lambda_i\neq\lambda_j(i\neq j)$。($\mathcal{L}$、$\mathcal{P}$、$s$)-行列 *TGRS* 码定义为

$$\mathcal{C}_s(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{b},c,\mathcal{L},\mathcal{P},\boldsymbol{B})\triangleq\{(v_1f(\alpha_1),\ldots,v_nf(\alpha_n),f(b_1)-\lambda_1f(c),\ldots,,f(b_s)-\lambda_sf(c))\,|f(x)\in\mathcal{F}(\mathcal{L},\mathcal{P},\boldsymbol{B})\},$$

其中 $\mathcal{F}(\mathcal{L}、\mathcal{P}、\boldsymbol{B})$ 由 *(5)*给出。

注 II.12。(1)它很容易　已知 $\mathcal{C}_s(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{b},c,\mathcal{L},\mathcal{P},\boldsymbol{B})$ 具有 $\mathcal{L}=[\ell+1]$ 和 $\mathcal{P}=[k]$，其生成矩阵为

$$\boldsymbol{G}_s(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{b},c,\mathcal{L},\mathcal{P},\boldsymbol{B})=\begin{pmatrix}\boldsymbol{G}(\mathcal{L},\mathcal{P},\boldsymbol{B}) & \boldsymbol{\mu}_1 & \cdots & \boldsymbol{\mu}_s\end{pmatrix}_{k\times(n+s)}$$

with

$$\boldsymbol{\mu}_i = \left(1-\lambda_i+\sum_{s=0}^{\ell} b_{0,s}\left(b_i^{k+s}-\lambda_i c^{k+s}\right), b_i-\lambda_i c+\sum_{s=0}^{\ell} b_{1,s}\left(b_i^{k+s}-\lambda_i c^{k+s}\right), \ldots, b_i^{k-1}-\lambda_i c^{k-1}+\sum_{s=0}^{\ell} b_{k-1,s}\left(b_i^{k+s}-\lambda_i c^{k+s}\right)\right)^T.$$

(2) 取 $s=1$, $\ell=t-1$, $\mathcal{L}=[t]$, $\mathcal{P}=\{h\}$ 和 $\boldsymbol{v}=\mathbf{1}$，其中 $1\le t\le n-k$, $b_{h,t-1}\in\mathbb{F}_q^*$ 和

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} \mathbf{0}_{h\times(t-1)} & \mathbf{0}_{h\times 1} & \mathbf{0}_{h\times(n-k-t)} \\ \mathbf{0}_{1\times(t-1)} & b_{h,t-1} & \mathbf{0}_{1\times(n-k-t)} \\ \mathbf{0}_{(k-h-1)\times(t-1)} & \mathbf{0}_{(k-h-1)\times 1} & \mathbf{0}_{(k-h-1)\times(n-k-t)} \end{pmatrix}$$

在定义 *II.11*中，相应的 $(\mathcal{L},\mathcal{P},s)$-行列 *TGRS* 码正是 *[2]* 中引入的行列 *TGRS* 码。(3) 取 $s=2$、$\boldsymbol{v}=\mathbf{1}$、$\ell=0$、$\mathcal{L}=\{0\}$ 和 $\mathcal{P}=\{h\}$，其中 $b_{h,0}\in\mathbb{F}_q^*$ 是 $\boldsymbol{B}$ 中唯一的非零项，即得到 *[10,*定义 *2.3]* 中相应的行列 *TGRS* 码。

第六类非 GRS 型线性码，即 Wang 等人引入的修正广义 Reed-Solomon 码[34]，如下所示。

定义 II.13。([34],定义 3) 令 $2\le k\le n\le q$、$1\le t\le k-1$、$\eta\in\mathbb{F}_q$、$\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\mathbb{F}_q^n$，其中 $\alpha_i\ne\alpha_j(i\ne j)$，且 $\boldsymbol{v}=(v_1,\ldots,v_n)\in\left(\mathbb{F}_q^*\right)^n$。修正广义 *Reed-Solomon* 码（简称 *MGRS* 码）$\mathrm{MGRS}_{n,k}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{v},\eta,t)$ 定义如下：

$$\mathrm{MGRS}_{n,k}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{v},\eta,t)\triangleq\left\{\left(v_1 f(\alpha_1),\ldots,v_{n-1}f(\alpha_{n-1}),v_n(f(0)+\eta f_t)\right)|f(x)\in\mathbb{F}_q^k[x]\right\},$$

其中，f_t 表示 f中的x) x^t 的系数。

B. 一些引理

在本小节中，我们回顾关于初等对称多项式、完全对称多项式、特殊行列式、有限阿贝尔群上的子集和问题以及 MDS 码的一些基本记号和结果。

首先，我们回顾初等对称多项式和完全对称多项式的定义，以及相关结果。

定义 II.14。([1]) 对于任意整数 t，n个变量中的 t 次初等对称多项式定义为

$$\sigma_t(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\begin{cases}0, & \text{if } t<0;\\ 1, & \text{if } t=0;\\ \sum\limits_{1\le j_1<j_2<\cdots<j_t\le n} x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_t}, & \text{if } 1\le t\le n;\\ 0, & \text{if } t>n,\end{cases}$$

并将 $\sigma_t(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 记为 σ_t。

定义 II.15. ([1]) 对于任意整数 t，n 个变量中的 t^{th} 次完全对称多项式定义为

$$S_t(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\begin{cases}0, & \text{if } t<0;\\ \sum\limits_{t_1+t_2+\cdots+t_n=t,t_i\ge 0} x_1^{t_1}x_2^{t_2}\cdots x_n^{t_n}, & \text{if } t\ge 0,\end{cases}$$

并将 $S_t(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 记为 S_t。

引理 II.16. ([1], 引理 2.4) 设 $u_i=\prod^{n}(\alpha_i-\alpha_j)^{-1}$，其中 $1\le i\le n$。则对于任意满足 $_{j=1,\ j\ne i}n\ge 3$ 的子集 $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}\subseteq\mathbb{F}_q$，有

$$\sum_{i=1}^{n}u_i\alpha_i^h=\begin{cases}0, & \text{if } 0\le h\le n-2;\\ S_{h-n+1}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n), & \text{if } h\ge n-1.\end{cases}$$

注 II.17. 初等对称多项式与完全对称多项式之间存在一个基本关系

$$\sum_{t=0}^{N}(-1)^t\sigma_t S_{N-t}=0,\ \textit{for all } N\ge 1.$$

接下来，我们回顾计算特殊行列式的公式。

引理 II.18。对于 $1 \le r \le n-1$，令

$$\boldsymbol{M}_n^{(r)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_n^2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha_1^{n-r-1} & \alpha_2^{n-r-1} & \dots & \alpha_n^{n-r-1} \\ \alpha_1^{n-r+1} & \alpha_2^{n-r+1} & \dots & \alpha_n^{n-r+1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \dots & \alpha_n^{n-1} \\ \alpha_1^n & \alpha_2^n & \dots & \alpha_n^n \end{pmatrix}_{n\times n}.$$

Then

$$\det(\boldsymbol{M}_n^{(r)}) = \prod_{1\le i<j\le n} (\alpha_j - \alpha_i) \cdot \sigma_r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n).$$

以下引理在第V节推导所考虑的码为最大距离可分码的充要条件时起着关键作用。

引理 II.19. ([11], 引理 4) 设 $\mathcal{T} = \{t_1, \dots, t_\tau\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ 满足 $\#\mathcal{T} = \tau$。设 $\prod_{i=1}^{\tau}(x - \alpha_{t_i}) = \sum_{j=0}^{\tau} \mu^{(\mathcal{T})}{}_j \; x^{\tau-j}$ 且 $\mu^{(\mathcal{T})}{}_j = 0$，其中 $j > \tau$，系数 $\mu^{(\mathcal{T})}{}_j$ 由 $\alpha_{t_1}, \dots, \alpha_{t_\tau}$ 的取值唯一确定。对于任意 $0 \le \varepsilon \le n-\tau-1$，定义 $f_\varepsilon^{(\mathcal{T}),s} \in \mathbb{F}_q$，其中 $0 \le s \le \tau - 1$ 由恒等式确定

$$\left(\alpha_{t_1}^{\tau+\varepsilon}, \alpha_{t_2}^{\tau+\varepsilon}, \dots, \alpha_{t_\tau}^{\tau+\varepsilon}\right) = \left(f_{\varepsilon,0}^{(\mathcal{T})}, f_{\varepsilon,1}^{(\mathcal{T})}, \dots, f_{\varepsilon,\tau-1}^{(\mathcal{T})}\right) \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_{t_1} & \alpha_{t_2} & \cdots & \alpha_{t_\tau} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{t_1}^{\tau-1} & \alpha_{t_2}^{\tau-1} & \cdots & \alpha_{t_\tau}^{\tau-1} \end{pmatrix}, \tag{7}$$

其中

$$f_{\varepsilon,s}^{(\mathcal{T})} = -\sum_{i=0}^{\min\{\varepsilon,s\}} \mu_{i+\tau-s}^{(\mathcal{T})} e_{\varepsilon-i}^{(\mathcal{T})}, \quad 0 \le s \le \tau-1, \tag{8}$$

满足 $e^{(\mathcal{T})}{}_0 = 1$ 且 $e^{(\mathcal{T})}{}_i = -\sum_{j=0}^{i-1} e^{(\mathcal{T})}{}_j \; \mu^{(\mathcal{T})}{}_{i-j}$，其中 $1 \le i \le \varepsilon$。

注 II.20. 为方便起见，当两个集合 $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ 及 $\tau_1 = \#\mathcal{T}_1 \ne \#\mathcal{T}_2 = \tau_2$ 同时出现，且在当前语境下各自的基数都能唯一确定相应集合时，我们用基数缩写上标，即

$$\mu_j^{(\mathcal{T}_1)},\ f_{\varepsilon,s}^{(\mathcal{T}_1)},\ e_j^{(\mathcal{T}_1)} \to \mu_j^{(\tau_1)},\ f_{\varepsilon,s}^{(\tau_1)},\ e_j^{(\tau_1)},$$

类似地，$\mu^{(\mathcal{T}_2)}{}_j, f_{(\mathcal{T}_2)\varepsilon,s}, e^{(\mathcal{T}_2)}{}_j \to \mu_j^{(\tau_2)}, f_\varepsilon^{(\tau_2)}{}_s, e^{(\tau_2)}{}_j$。

下面的引理 II.21 分别给出了线性码为最大距离可分码或近最大距离可分码的充要条件。

引理 II.21. ([12], 定理 2.4.3； [8], 定义 2.3) 设 $\mathcal{C}$ 是一个 $[n,k]$ 定义在 $\mathbb{F}_q$ 上的线性码，且 $k \ge 1$。假设 $\boldsymbol{G}$ 是 $\mathcal{C}$ 的生成矩阵。那么，以下两个陈述成立：

(1) $\mathcal{C}$ 是最大距离可分码当且仅当 $\boldsymbol{G}$ 的任意 k 列均 $\mathbb{F}_q$-线性无关；(2) $\mathcal{C}$ 是近最大距离可分码当且仅当以下三个条件同时成立：(i) $\boldsymbol{G}$ 的任意 $k-1$ 列均 $\mathbb{F}_q$-线性无关；(ii) 存在 $\boldsymbol{G}$ 的 k 列，它们 $\mathbb{F}_q$-线性相关；(iii) $\boldsymbol{G}$ 的任意 $k+1$ 列均满秩。

最后，我们回顾有限阿贝尔群中子集和的经典计数公式。

引理 II.22。设 G 是一个阶为 n、$g \in G$ 且满足 $0 \le i \le n-1$ 的有限阿贝尔群，其中 $i \in \mathbb{Z}$。对于子集 $D \subseteq G$ 和非负整数 t，记

$$N(D,t,g) \triangleq \#\left\{S \subseteq D : \#S = t, \sum_{s\in S} s = g\right\}.$$

于是我们有

$$N(G\setminus\{0\}, i, g) = \frac{1}{n} \sum_{s \mid \exp(G)} (-1)^{i+\lfloor \frac{i}{s} \rfloor} \binom{\frac{n}{s}-1}{\lfloor \frac{i}{s} \rfloor} \sum_{d \mid \gcd(s, e(g))} \mu\left(\frac{s}{d}\right) \#G[d],$$

其中$\exp(G)$ 表示 G的指数，

$$e(g) \triangleq \max\{d : d \mid \exp(G),\, g \in dG\},$$

$G[d] \triangleq \{h \in G : \quad dh = 0\}$ 是 G的 d-挠子群，而 μ 是莫比乌斯函数。

III. $\mathcal{C}_i(i = 1,2,3,4)$的校验矩阵的直接构造

在本节中，令

$$\boldsymbol{B}_i = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_{k-i,0} & \dots & b_{k-i,\ell} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{k-1,0} & \dots & b_{k-1,\ell} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} (i = 1,2,3), \tag{9}$$

分别对于以下线性码 p y,

(1) $\mathcal{C}_{k,\ell}(\mathcal{L}, \mathcal{P}, \boldsymbol{A}_{m\times m}, \boldsymbol{B}_1) \triangleq \mathcal{C}_1$ with $\mathcal{L} = [\ell+1]$, $\mathcal{P} = [k]$, $\boldsymbol{A}_{m\times m} \triangleq \boldsymbol{A}_m = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_{m2} & \cdots & a_{m(m-1)} & a_{mm} \end{pmatrix}$;

(2) $\mathcal{C}_{k,\ell}(\mathcal{L}, \mathcal{P}, \boldsymbol{A}_{m\times m}, \boldsymbol{B}_i) \triangleq \mathcal{C}_i (i = 2,3)$ with $\mathcal{L} = [\ell+1]$, $\mathcal{P} = [k]$, $\boldsymbol{A}_{m\times m} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \delta \end{pmatrix}$,

(3) $\mathcal{C}_h$ (η, h) $\triangleq \mathcal{C}$

我们直接构造相应的校验矩阵。

A. C1 的校验矩阵

定理 III.1。对于 $0 \le s \le \ell + m$，定义

$$d_{s,r} = \begin{cases} S_{s-\ell-m+r-1}, & 1 \le r \le m-1, \\ S_{s-\ell-1} + \sum_{j=0}^{\ell} b_{k-1,j} S_{s-\ell+j}, & r = m, \end{cases}$$

对于 $1 \le r \le m$，定义

$$k_{s,m-r+1} = -d_{s,r} - \sum_{c=m-r+2}^{m} a_{r,c} k_{s,c}.$$

如果 $n \ge k + \ell + 2$，那么 $\mathcal{C}_1$ 具有如下校验矩阵

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{A}_m, \boldsymbol{B}) = \begin{pmatrix} \frac{u_1}{v_1} & \cdots & \frac{u_n}{v_n} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{u_1}{v_1}\alpha_1 & \cdots & \frac{u_n}{v_n}\alpha_n & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{u_1}{v_1}\alpha_1^{n-k-\ell-2} & \cdots & \frac{u_n}{v_n}\alpha_n^{n-k-\ell-2} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{u_1}{v_1}\alpha_1^{n-k-\ell-1} & \cdots & \frac{u_n}{v_n}\alpha_n^{n-k-\ell-1} & k_{0,1} & \cdots & k_{0,m} \\ \frac{u_1}{v_1}\alpha_1^{n-k-\ell} & \cdots & \frac{u_n}{v_n}\alpha_n^{n-k-\ell} & k_{1,1} & \cdots & k_{1,m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{u_1}{v_1}\alpha_1^{n-k+m-1} & \cdots & \frac{u_n}{v_n}\alpha_n^{n-k+m-1} & k_{\ell+m,1} & \cdots & k_{\ell+m,m} \end{pmatrix}_{(n+m-k)\times(n+m)}.$$

证明。 容易得知， $\mathcal{C}_1$ 具有生成矩阵

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{A}_m, \boldsymbol{B}_1) = \begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ v_1\alpha_1 & \cdots & v_n\alpha_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ v_1\alpha_1^{k-m-1} & \cdots & v_n\alpha_n^{k-m-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ v_1\alpha_1^{k-m} & \cdots & v_n\alpha_n^{k-m} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ v_1\alpha_1^{k-m+1} & \cdots & v_n\alpha_n^{k-m+1} & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{2m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ v_1\alpha_1^{k-2} & \cdots & v_n\alpha_n^{k-2} & 0 & 1 & \cdots & a_{(m-1)(m-1)} & a_{(m-1)m} \\ v_1\left(\alpha_1^{k-1} + \sum_{j=0}^{\ell} b_{k-1,j}\alpha_1^{k+j}\right) & \cdots & v_n\left(\alpha_n^{k-1} + \sum_{j=0}^{\ell} b_{k-1,j}\alpha_n^{k+j}\right) & 1 & a_{m2} & \cdots & a_{m(m-1)} & a_{mm} \end{pmatrix}$$

为了证明 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{A}_m, \boldsymbol{B}_1)$ 是 $\mathcal{C}_1$ 的校验矩阵，我们只需验证以下两个陈述成立。

(1) 秩$(\boldsymbol{H}(\boldsymbol{A}_m, \boldsymbol{B}_1)) = n + m - k$

(2) $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{A}_m, \boldsymbol{B}_1)\boldsymbol{H}(\boldsymbol{A}_m, \boldsymbol{B}_1)^T = \boldsymbol{0}$。

对于陈述 (1), 容易看出，由 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{A}_m, \boldsymbol{B}_1)$ 的前 n 列构成的 $(n+m-k)\times n$ 子矩阵具有满行秩，即该 $(n+m-k)\times n$ 子矩阵的行向量 $\mathbb{F}_q$-线性无关。由于 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{A}_m, \boldsymbol{B}_1)$ 的行向量是这些 $\mathbb{F}_q$-线性无关行向量的扩展，因此它们也 $\mathbb{F}_q$-线性无关，从而 rank$(\boldsymbol{H}(\boldsymbol{A}_m, \boldsymbol{B}_1)) = n + m - k$。

对于陈述 (2), 为方便起见，记 $\boldsymbol{g}_i^{(1)}$ 和 $\boldsymbol{h}_j^{(1)}$ 分别为 $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{A}_m, \boldsymbol{B}_1)$ 和 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{A}_m, \boldsymbol{B}_1)$ 的第 $(i+1)$ 行和第 $(j+1)$ 行。**Case 1** 对于 $0 \le i \le k-m-1$ and $0 \le j \le n-k+m-1$, 或者 $k-m \le i \le k-1$ and $0 \le j \le n-k-\ell-2$, 我们 have

$$\boldsymbol{g}_i^{(1)}\left(\boldsymbol{h}_j^{(1)}\right)^T = \begin{cases} \sum_{s=1}^{n} u_s\alpha_s^{i+j}, & \text{if } 0 \le i \le k-m-1 \text{ and } 0 \le j \le n-k+m-1; \\ & \text{or } k-m \le i \le k-2 \text{ and } 0 \le j \le n-k-\ell-2; \\ \sum_{s=1}^{n} u_s\alpha_s^{i+j} + \sum_{t=0}^{\ell} b_{k-1,t}\sum_{s=1}^{n} u_s\alpha_s^{k+t+j}, & \text{if } i = k-1 \text{ and } 0 \le j \le n-k-\ell-2. \end{cases}$$

容易知道，如果 $0 \le i \le k-m-1$ 且 $0 \le j \le n-k+m-1$，那么

$$i + j \le n - 2;$$

如果 $k-m \le i \le k-2$ 和 $0 \le j \le n-k-\ell-2$，则

$$i + j \le n - \ell - 4 < n - 2;$$

如果 $i = k-1$ 和 $0 \le j \le n-k-\ell-2$，则

$$i + j \le n - \ell - 3 < n - 2,$$

and

$$k + t + j \le n - 2.$$

因此，根据引理 II.16，对于 $0 \le i \le k-1$ 和 $0 \le j \le n-k-\ell-2$，或 $0 \le i \le k-m-1$ 和 $0 \le j \le n-k+m-1$，有 $\boldsymbol{g}_i^{(1)}\left(\boldsymbol{h}_j^{(1)}\right)^T = 0.$

情况 2。 对于 $k-m \le i \le k-1$ 和 $n-k-\ell-1 \le j \le n-k+m-1$，令 $i = k-m-1+\vartheta$，其中 $1 \le \vartheta \le mj = n-k-\ell-1+\mu$，且 $0 \le \mu \le \ell+m$。

一方面，对于 $1 \le \vartheta \le m-1$ 和 $0 \le \mu \le \ell+m$，由引理II.16，可得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{g}_i^{(1)}\left(\boldsymbol{h}_j^{(1)}\right)^T &= \sum_{s=1}^{n} u_s\alpha_s^{i+j} + k_{\mu,m-\vartheta+1} + \sum_{t=m-\vartheta+2}^{m} k_{\mu,t}a_{\vartheta,t} \\ &= S_{\mu+\vartheta-\ell-m-1} + k_{\mu,m-\vartheta+1} + \sum_{t=m-\vartheta+2}^{m} k_{\mu,t}a_{\vartheta,t} \end{aligned}.$$

注意到

$$S_{\mu+\vartheta-\ell-m-1} = d_{\mu,\vartheta}$$

and

$$k_{\mu,m-\vartheta+1}=-d_{\mu,\vartheta}-\sum_{t=m-\vartheta+2}^{m}a_{\vartheta,t}k_{\mu,t},$$

因此，对于 $k-m\le i\le k-2$ 和 $n-k-\ell-1\le j\le n-k+m-1$，有 $\boldsymbol{g}_i^{(1)}\left(\boldsymbol{h}_j^{(1)}\right)^T=0.$

另一方面，对于 $\vartheta=m$ 和 $0\le\mu\le\ell+m$，根据引理 II.16，有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{g}_i^{(1)}\left(\boldsymbol{h}_j^{(1)}\right)^T=&\sum_{s=1}^{n}u_s\alpha_s^{i+j}+\sum_{t=0}^{\ell}b_{k-1,t}\sum_{s=1}^{n}u_s\alpha_s^{k+t+j}+k_{\mu,m-\vartheta+1}+\sum_{t=m-\vartheta+2}^{m}k_{\mu,t}a_{\vartheta,t}\\=&S_{\mu-\ell-1}+\sum_{t=0}^{\ell}b_{k-1,t}S_{\mu+t-\ell}+k_{\mu,1}+\sum_{t=2}^{m}k_{\mu,t}a_{\vartheta,t}\end{aligned}.$$

注意到

$$S_{\mu-\ell-1}+\sum_{t=0}^{\ell}b_{k-1,t}S_{\mu+t-\ell}=d_{\mu,m}$$

and

$$k_{\mu,1}=-d_{\mu,m}-\sum_{t=2}^{m}a_{m,t}k_{\mu,t}.$$

因此，对于 $i=k-1$ 和 $n-k-\ell-1\le j\le n-k+m-1$，有 $\boldsymbol{g}_i^{(1)}\left(\boldsymbol{h}_j^{(1)}\right)^T=0.$

□

注释 III.2。取 $m=2$、$a_{2m}=\delta$、$\ell=0$ 和 $b_{k-1,\,0}=\lambda_2$ 在定理 *III.1* 中，相应的结果正是定理 *2.8* 中的情形 $\lambda_1=1$，见 *[5]*。

B. C2 的校验矩阵

定理 III.3。如果 $n\ge k+\ell+2$，那么 $\mathcal{C}_2$ 具有如下校验矩阵

$$\boldsymbol{H}_1(\delta,\boldsymbol{B}_2)=\begin{pmatrix}\frac{u_1}{v_1} & \cdots & \frac{u_n}{v_n} & 0 & 0\\ \frac{u_1}{v_1}\alpha_1 & \cdots & \frac{u_n}{v_n}\alpha_n & 0 & 0\\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots\\ \frac{u_1}{v_1}\alpha_1^{n-k-\ell-2} & \cdots & \frac{u_n}{v_n}\alpha_n^{n-k-\ell-2} & 0 & 0\\ \frac{u_1}{v_1}\alpha_1^{n-k-\ell-1} & \cdots & \frac{u_n}{v_n}\alpha_n^{n-k-\ell-1} & \delta b_{k-2,\ell}-b_{k-1,\ell} & -b_{k-2,\ell}\\ \frac{u_1}{v_1}\alpha_1^{n-k-\ell} & \cdots & \frac{u_n}{v_n}\alpha_n^{n-k-\ell} & \sum_{j=0}^{1}\left(\delta b_{k-2,\ell-1+j}-b_{k-1,\ell-1+j}\right)S_j & -\sum_{j=0}^{1}b_{k-2,\ell-1+j}S_j\\ \frac{u_1}{v_1}\alpha_1^{n-k-\ell+1} & \cdots & \frac{u_n}{v_n}\alpha_n^{n-k-\ell+1} & \sum_{j=0}^{2}\left(\delta b_{k-2,\ell-2+j}-b_{k-1,\ell-2+j}\right)S_j & -\sum_{j=0}^{2}b_{k-2,\ell-2+j}S_j\\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots\\ \frac{u_1}{v_1}\alpha_1^{n-k-1} & \cdots & \frac{u_n}{v_n}\alpha_n^{n-k-1} & \sum_{j=0}^{\ell}\left(\delta b_{k-2,j}-b_{k-1,j}\right)S_j & -\sum_{j=0}^{\ell}b_{k-2,j}S_j\\ \frac{u_1}{v_1}\alpha_1^{n-k} & \cdots & \frac{u_n}{v_n}\alpha_n^{n-k} & \sum_{j=0}^{\ell}\left(\delta b_{k-2,j}-b_{k-1,j}\right)S_{j+1}-1 & -\sum_{j=0}^{\ell}b_{k-2,j}S_{j+1}\\ \frac{u_1}{v_1}\alpha_1^{n-k+1} & \cdots & \frac{u_n}{v_n}\alpha_n^{n-k+1} & \sum_{j=0}^{\ell}\left(\delta b_{k-2,j}-b_{k-1,j}\right)S_{j+2}-S_1+\delta & -\sum_{j=0}^{\ell}b_{k-2,j}S_{j+2}-1\end{pmatrix}_{(n+2-k)\times(n+2)}.$$

证明。容易看出，$\mathcal{C}_2$ 具有生成矩阵

$$\boldsymbol{G}(\delta,\boldsymbol{B}_2)=\begin{pmatrix}v_1 & \cdots & v_n & 0 & 0\\ v_1\alpha_1 & \cdots & v_n\alpha_n & 0 & 0\\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots\\ v_1\alpha_1^{k-3} & \cdots & v_n\alpha_n^{k-3} & 0 & 0\\ v_1\left(\alpha_1^{k-2}+\sum_{j=0}^{\ell}b_{k-2,j}\alpha_1^{k+j}\right) & \cdots & v_n\left(\alpha_n^{k-2}+\sum_{j=0}^{\ell}b_{k-2,j}\alpha_n^{k+j}\right) & 0 & 1\\ v_1\left(\alpha_1^{k-1}+\sum_{j=0}^{\ell}b_{k-1,j}\alpha_1^{k+j}\right) & \cdots & v_n\left(\alpha_n^{k-1}+\sum_{j=0}^{\ell}b_{k-1,j}\alpha_n^{k+j}\right) & 1 & \delta\end{pmatrix}$$

要证明 $\boldsymbol{H}_1(\delta, \boldsymbol{B}_2)$ 是 $\mathcal{C}_2$ 的校验矩阵，我们只需验证以下两个陈述成立。**(1)** 秩$(\boldsymbol{H}_1(\delta, \boldsymbol{B}_2)) = n + 2 - k$;

(2) $\boldsymbol{G}(\delta, \boldsymbol{B}_2)\boldsymbol{H}_1(\delta, \boldsymbol{B}_2)^T = \mathbf{0}$。

对于陈述 (1), 证明可以通过类似于定理 III.1 **(1)** 的论证完成。

对于陈述 (2), 为方便起见，我们记为 $\boldsymbol{g}_i^{(2)}$ 和 $\boldsymbol{h}_j^{(2)}$ 分别为 $\boldsymbol{G}(\delta, \boldsymbol{B}_2)$ 和 $\boldsymbol{H}_1(\delta, \boldsymbol{B}_2)$ 的第 $(i+1)$ 个 $(0 \le i \le k-1)$ 行和第 $(j+1)$ 个 $(0 \le j \le n-k+1)$ 行。

情况 1。 对于 $0 \le i \le k-3$ 和 $0 \le j \le n-k+1$，我们有

$$\boldsymbol{g}_i^{(2)} \left(\boldsymbol{h}_j^{(2)}\right)^T = \sum_{s=1}^{n} v_s \alpha_s^i \cdot \frac{u_s}{v_s} \alpha_s^j = \sum_{s=1}^{n} u_s \alpha_s^{i+j}.$$

由 $0 \le i \le k-3$ 和 $0 \le j \le n-k+1$，我们得到 $0 \le i+j \le n-2$，因此，由引理II.16，对于 $0 \le i \le k-3$ 和 $0 \le j \le n-k+1$，我们得到 $\boldsymbol{g}_i^{(2)} \left(\boldsymbol{h}_j^{(2)}\right)^T = 0$.

情况 2。对于 $i \in \{k-2, k-1\}$ 和 $0 \le j \le n-k-\ell-2$，我们有

$$\boldsymbol{g}_i^{(2)} \left(\boldsymbol{h}_j^{(2)}\right)^T = \sum_{s=1}^{n} v_s \left(\alpha_s^i + \sum_{t=0}^{\ell} b_{i,t} \alpha_s^{k+t}\right) \cdot \frac{u_s}{v_s} \alpha_s^j = \sum_{s=1}^{n} u_s \alpha_s^{i+j} + \sum_{s=1}^{n} \sum_{t=0}^{\ell} b_{i,t} u_s \alpha_s^{k+t+j}.$$

由 $i \in \{k-2, k-1\}$ 和 $0 \le j \le n-k-\ell-2$，我们有

$$0 \le i+j \le n-3-\ell < n-2$$

and

$$k+t+j \le k+\ell+n-k-\ell-2 = n-2,$$

因此，由引理II.16，对于 $i \in \{k-2, k-1\}$ 和 $0 \le j \le n-k-\ell-2$，我们得到 $\boldsymbol{g}_i^{(2)} \left(\boldsymbol{h}_j^{(2)}\right)^T = 0$.

情形 3。对于 $i = k-2$ 和 $n-k-\ell-1 \le j \le n-k-1$，即 $j = n-k-\ell-1+\mu$ 且 $\mu \in \{0, 1, \ldots, \ell\}$，我们有

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{g}_i^{(2)} \left(\boldsymbol{h}_j^{(2)}\right)^T &= \sum_{s=1}^{n} v_s \left(\alpha_s^{k-2} + \sum_{t=0}^{\ell} b_{k-2,t} \alpha_s^{k+t}\right) \cdot \frac{u_s}{v_s} \alpha_s^j - \sum_{t=0}^{\mu} b_{k-2,\ell-\mu+t} S_t \\
&= \sum_{s=1}^{n} u_s \alpha_s^{k-2+j} + \sum_{s=1}^{n} \sum_{t=0}^{\ell} b_{k-2,t} u_s \alpha_s^{k+t+j} - \sum_{t=0}^{\mu} b_{k-2,\ell-\mu+t} S_t.
\end{aligned}$$

一方面，根据 $n-k-\ell-1 \le j \le n-k-1$，我们有 $0 \le k-2+j \le n-3 < n-2$，因此，根据引理 II.16，

$$\sum_{s=1}^{n} u_s \alpha_s^{k-2+j} = 0.$$

另一方面，根据 $j = n-k-\ell-1+\mu$，我们可以得到 $k+t+j = n-1+t+\mu-\ell$，并且当 $0 \le t \le \ell-\mu-1$时，$n-1+t+\mu-\ell \le n-2$，因此，根据引理 II.16，我们可以得到

$$\begin{aligned}
\sum_{s=1}^{n} \sum_{t=0}^{\ell} b_{k-2,t} u_s \alpha_s^{k+t+j} &= \sum_{t=0}^{\ell} b_{k-2,t} \left(\sum_{s=1}^{n} u_s \alpha_s^{n-1+t+\mu-\ell}\right) \\
&= \sum_{t=\ell-\mu}^{\ell} b_{k-2,t} \left(\sum_{s=1}^{n} u_s \alpha_s^{n-1+t+\mu-\ell}\right) \\
&= \sum_{t=\ell-\mu}^{\ell} b_{k-2,t} S_{t+\mu-\ell}.
\end{aligned} \tag{10}$$

现在，令 $\hat{t} = t+\mu-\ell$ 在 (10)中，则 $t = \hat{t}-\mu+\ell$，并且 $\hat{t} \in \{0, 1, \ldots, \mu\}$，此外，

$$\sum_{s=1}^{n} \sum_{t=0}^{\ell} b_{k-2,t} u_s \alpha_s^{k+t+j} = \sum_{\hat{t}=0}^{\mu} b_{k-2,\hat{t}-\mu+\ell} S_{\hat{t}},$$

这意味着 $\sum_{s=1}^{n} \sum_{t=0}^{\ell} b_{k-2,t} u_s \alpha_s^{k+t+j} - \sum_{t=0}^{\mu} b_{k-2,\ell-\mu+t} S_t = 0.$

因此，对于 $i = k-2$ 和 $n-k-\ell-1 \le j \le n-k-1$，我们有 $\boldsymbol{g}_i^{(2)} \left(\boldsymbol{h}_j^{(2)}\right)^T = 0$。

情形 4. 对于 $i=k-2$ 和 $j\in\{n-k,n-k+1\}$，根据引理 II.16，我们有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{g}_i^{(2)}\left(\boldsymbol{h}_j^{(2)}\right)^T&=\begin{cases}\sum\limits_{s=1}^{n}v_s\left(\alpha_s^{k-2}+\sum\limits_{t=0}^{\ell}b_{k-2,t}\alpha_s^{k+t}\right)\cdot\frac{u_s}{v_s}\alpha_s^j-\sum\limits_{t=0}^{\ell}b_{k-2,t}S_{t+1}, & j=n-k;\\ \sum\limits_{s=1}^{n}v_s\left(\alpha_s^{k-2}+\sum\limits_{t=0}^{\ell}b_{k-2,t}\alpha_s^{k+t}\right)\cdot\frac{u_s}{v_s}\alpha_s^j-\sum\limits_{t=0}^{\ell}b_{k-2,t}S_{t+2}-1, & j=n-k+1;\end{cases}\\&=\begin{cases}\sum\limits_{s=1}^{n}u_s\alpha_s^{k-2+j}+\sum\limits_{t=0}^{\ell}b_{k-2,t}\left(\sum\limits_{s=1}^{n}u_s\alpha_s^{k+t+j}\right)-\sum\limits_{t=0}^{\ell}b_{k-2,t}S_{t+1}, & j=n-k;\\ \sum\limits_{s=1}^{n}u_s\alpha_s^{k-2+j}+\sum\limits_{t=0}^{\ell}b_{k-2,t}\left(\sum\limits_{s=1}^{n}u_s\alpha_s^{k+t+j}\right)-\sum\limits_{t=0}^{\ell}b_{k-2,t}S_{t+2}-1, & j=n-k+1;\end{cases}\\&=\begin{cases}\sum\limits_{s=1}^{n}u_s\alpha_s^{k-2+j}+\sum\limits_{t=0}^{\ell}b_{k-2,t}S_{t+1}-\sum\limits_{t=0}^{\ell}b_{k-2,t}S_{t+1}, & j=n-k;\\ \sum\limits_{s=1}^{n}u_s\alpha_s^{k-2+j}+\sum\limits_{t=0}^{\ell}b_{k-2,t}S_{t+2}-\sum\limits_{t=0}^{\ell}b_{k-2,t}S_{t+2}-1, & j=n-k+1;\end{cases}\end{aligned}$$

然后，对于 $i=k-2$ 和 $j\in\{n-k,n-k+1\}$，有 $\boldsymbol{g}_i^{(2)}\left(\boldsymbol{h}_j^{(2)}\right)^T=0$。

情形 5. 对于 $i=k-1$ 和 $n-k-\ell-1\le j\le n-k-1$，有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{g}_i^{(2)}\left(\boldsymbol{h}_j^{(2)}\right)^T&=\sum_{s=1}^{n}v_s\left(\alpha_s^{k-1}+\sum_{t=0}^{\ell}b_{k-1,t}\alpha_s^{k+t}\right)\cdot\frac{u_s}{v_s}\alpha_s^j+\sum_{t=0}^{\mu}\left(\delta b_{k-2,\ell-\mu+t}-b_{k-1,\ell-\mu+t}\right)S_t-\delta\sum_{t=0}^{\mu}b_{k-2,\ell-\mu+t}S_t\\&=\sum_{s=1}^{n}u_s\alpha_s^{k-1+j}+\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=0}^{\ell}b_{k-1,t}u_s\alpha_s^{k+t+j}-\sum_{t=0}^{\mu}b_{k-1,\ell-\mu+t}S_t.\end{aligned}$$

注意到 $k-1+j\le n-2$，则与**情形 3**的证明类似，对于 $i=k-1$ 和 $n-k-\ell-1\le j\le n-k-1$，有 $\boldsymbol{g}_i^{(2)}\left(\boldsymbol{h}_j^{(2)}\right)^T=0.$

情形 6. 对于 $i=k-1$ 和 $j\in\{n-k,n-k+1\}$，由引理 II.16，有

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{g}_i^{(2)}\left(\boldsymbol{h}_j^{(2)}\right)^T\\&=\begin{cases}\sum\limits_{s=1}^{n}v_s\left(\alpha_s^{k-1}+\sum\limits_{t=0}^{\ell}b_{k-1,t}\alpha_s^{k+t}\right)\cdot\frac{u_s}{v_s}\alpha_s^j+\sum\limits_{t=0}^{\ell}\left(\delta b_{k-2,t}-b_{k-1,t}\right)S_{t+1}-1-\delta\sum\limits_{t=0}^{\ell}b_{k-2,t}S_{t+1}, & j=n-k;\\ \sum\limits_{s=1}^{n}v_s\left(\alpha_s^{k-1}+\sum\limits_{t=0}^{\ell}b_{k-1,t}\alpha_s^{k+t}\right)\cdot\frac{u_s}{v_s}\alpha_s^j+\sum\limits_{t=0}^{\ell}\left(\delta b_{k-2,t}-b_{k-1,t}\right)S_{t+2}-S_1+\delta-\delta\left(\sum\limits_{t=0}^{\ell}b_{k-2,t}S_{t+2}+1\right), & j=n-k+1;\end{cases}\\&=\begin{cases}\sum\limits_{s=1}^{n}u_s\alpha_s^{k-1+j}+\sum\limits_{t=0}^{\ell}b_{k-1,t}\left(\sum\limits_{s=1}^{n}u_s\alpha_s^{k+t+j}\right)-1-\sum\limits_{t=0}^{\ell}b_{k-1,t}S_{t+1}, & j=n-k;\\ \sum\limits_{s=1}^{n}u_s\alpha_s^{k-1+j}+\sum\limits_{t=0}^{\ell}b_{k-1,t}\left(\sum\limits_{s=1}^{n}u_s\alpha_s^{k+t+j}\right)-\sum\limits_{t=0}^{\ell}b_{k-1,t}S_{t+2}-S_1, & j=n-k+1;\end{cases}\\&=\begin{cases}S_0+\sum\limits_{t=0}^{\ell}b_{k-1,t}S_{t+1}-1-\sum\limits_{t=0}^{\ell}b_{k-1,t}S_{t+1}, & j=n-k;\\ S_1+\sum\limits_{t=0}^{\ell}b_{k-1,t}S_{t+2}-\sum\limits_{t=0}^{\ell}b_{k-1,t}S_{t+2}-S_1, & j=n-k+1;\end{cases}\end{aligned}$$

此外，直接计算可得，对于 $i=k-1$ 和 $j\in\{n-k,n-k+1\}$，有 $\boldsymbol{g}_i^{(2)}\left(\boldsymbol{h}_j^{(2)}\right)^T=0$. 定理 III.3的证明至此完成。 □

注 III.4. 取 $b_{k-2,\ j}=0(j=0,\ 1,\ \ldots\ldots,\ \ell)$ 代入定理 *III.3*，所得结果正是定理 $(m,\ a_{2m})\ =(2,\ \delta)$ *III.1*中的情形。

C. C_3的校验矩阵

在本小节中，为方便起见，我们固定使用以下记号。

- $\Phi_{i,j}=S_i+\sum\limits_{t=0}^{\ell}b_{k-j,t}S_{t+3}(i\in\{0,1,2\},j\in\{1,2,3\}).$
- $\Psi_{i,j}^{(s)}=\sum\limits_{t=0}^{i}b_{k-j,\ell-t}S_{i-t+s}(i\in[\ell+1],j\in\{1,2,3\},s\in\{0,1,2\}).$

- When $\Phi_{0,3} \in \mathbb{F}_q^*$, $\Theta_i = \dfrac{\sum\limits_{t=0}^{i} b_{k-3,\ell-t} S_{i-t}}{1+\sum\limits_{t=0}^{\ell} b_{k-3,t} S_{t+3}} = \Phi_{0,3}^{-1} \Psi_{i,3}^{(0)} (i \in [\ell+1])$.
- When $\Phi_{0,3} \in \mathbb{F}_q^*$, $\Gamma_j = \dfrac{\sum\limits_{t=0}^{\ell} b_{k-3,\ell-t} S_{\ell-t+j}}{1+\sum\limits_{t=0}^{\ell} b_{k-3,t} S_{t+3}} = \Phi_{0,3}^{-1} \Psi_{\ell,3}^{(j)} (j \in \{1,2\})$.
- $\Delta_i = \left(\Theta_i \Phi_{2,1} - \Psi_{i,1}^{(0)}\right) + \delta \left(\Psi_{i,2}^{(0)} - \Theta_i \Phi_{1,2}\right) (i \in [\ell+1])$.
- $\widehat{\Delta_{i,j}} = \left(\Gamma_j \Phi_{2,1} - \Psi_{i,1}^{(j)}\right) - \delta \left(\Gamma_j \Phi_{1,2} - \Psi_{i,2}^{(j)}\right) (i \in [\ell+1], j \in \{1,2\})$.

定理 III.5. 若 $\Phi_{0,3} \in \mathbb{F}_q^*$ 和 $k \geq 3$，则 $\mathcal{C}_3$ 具有以下校验矩阵

$$\boldsymbol{H}(\delta, \boldsymbol{B}_3) = \begin{pmatrix} \frac{u_1}{v_1} & \cdots & \frac{u_n}{v_n} & 0 & 0 \\ \frac{u_1}{v_1}\alpha_1 & \cdots & \frac{u_n}{v_n}\alpha_n & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{u_1}{v_1}\alpha_1^{n-k-\ell-2} & \cdots & \frac{u_n}{v_n}\alpha_n^{n-k-\ell-2} & 0 & 0 \\ \frac{u_1}{v_1}\left(\alpha_1^{n-k-\ell-1} - \Theta_0 \alpha_1^{n-k+2}\right) & \cdots & \frac{u_n}{v_n}\left(\alpha_n^{n-k-\ell-1} - \Theta_0 \alpha_n^{n-k+2}\right) & \Delta_0 & \Theta_0\Phi_{1,2} - \Psi_{0,2}^{(0)} \\ \frac{u_1}{v_1}\left(\alpha_1^{n-k-\ell} - \Theta_1 \alpha_1^{n-k+2}\right) & \cdots & \frac{u_n}{v_n}\left(\alpha_n^{n-k-\ell} - \Theta_1 \alpha_n^{n-k+2}\right) & \Delta_1 & \Theta_1\Phi_{1,2} - \Psi_{1,2}^{(0)} \\ \frac{u_1}{v_1}\left(\alpha_1^{n-k-\ell+1} - \Theta_2 \alpha_1^{n-k+2}\right) & \cdots & \frac{u_n}{v_n}\left(\alpha_n^{n-k-\ell+1} - \Theta_2 \alpha_n^{n-k+2}\right) & \Delta_2 & \Theta_2\Phi_{1,2} - \Psi_{2,2}^{(0)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{u_1}{v_1}\left(\alpha_1^{n-k-1} - \Theta_\ell \alpha_1^{n-k+2}\right) & \cdots & \frac{u_n}{v_n}\left(\alpha_n^{n-k-1} - \Theta_\ell \alpha_n^{n-k+2}\right) & \Delta_\ell & \Theta_\ell\Phi_{1,2} - \Psi_{\ell,2}^{(0)} \\ \frac{u_1}{v_1}\left(\alpha_1^{n-k} - \Gamma_1 \alpha_1^{n-k+2}\right) & \cdots & \frac{u_n}{v_n}\left(\alpha_n^{n-k} - \Gamma_1 \alpha_n^{n-k+2}\right) & \widehat{\Delta_{\ell,1}} - 1 & \Gamma_1\Phi_{1,2} - \Psi_{\ell,2}^{(1)} \\ \frac{u_1}{v_1}\left(\alpha_1^{n-k+1} - \Gamma_2 \alpha_1^{n-k+2}\right) & \cdots & \frac{u_n}{v_n}\left(\alpha_n^{n-k+1} - \Gamma_2 \alpha_n^{n-k+2}\right) & \widehat{\Delta_{\ell,2}} - S_1 + \delta & \Gamma_2\Phi_{1,2} - \Psi_{\ell,2}^{(2)} - 1 \end{pmatrix}.$$

证明。 容易得知， $\mathcal{C}_3$ 具有生成矩阵

$$\boldsymbol{G}(\delta, \boldsymbol{B}_3) = \begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_n & 0 & 0 \\ v_1\alpha_1 & \cdots & v_n\alpha_n & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_1\alpha_1^{k-4} & \cdots & v_n\alpha_n^{k-4} & 0 & 0 \\ v_1\left(\alpha_1^{k-3} + \sum\limits_{j=0}^{\ell} b_{k-3,j}\alpha_1^{k+j}\right) & \cdots & v_n\left(\alpha_n^{k-3} + \sum\limits_{j=0}^{\ell} b_{k-3,j}\alpha_n^{k+j}\right) & 0 & 0 \\ v_1\left(\alpha_1^{k-2} + \sum\limits_{j=0}^{\ell} b_{k-2,j}\alpha_1^{k+j}\right) & \cdots & v_n\left(\alpha_n^{k-2} + \sum\limits_{j=0}^{\ell} b_{k-2,j}\alpha_n^{k+j}\right) & 0 & 1 \\ v_1\left(\alpha_1^{k-1} + \sum\limits_{j=0}^{\ell} b_{k-1,j}\alpha_1^{k+j}\right) & \cdots & v_n\left(\alpha_n^{k-1} + \sum\limits_{j=0}^{\ell} b_{k-1,j}\alpha_n^{k+j}\right) & 1 & \delta \end{pmatrix}$$

为证明 $\boldsymbol{H}(\delta,\ \boldsymbol{B}_3)$是 $\mathcal{C}_3$的校验矩阵，只需验证以下两个陈述成立即可。(1) $\mathrm{rank}(\boldsymbol{H}(\delta,\ \boldsymbol{B}_3)) = n+2-k$；(2) $\boldsymbol{G}(\delta,\ \boldsymbol{B}_3)\boldsymbol{H}(\delta,\ \boldsymbol{B}_3)^T = \boldsymbol{0}$。

对于陈述 (1)。对于子矩阵

$$\boldsymbol{H}_1(\delta, \boldsymbol{B}_3) = \begin{pmatrix} \frac{u_1}{v_1} & \cdots & \frac{u_n}{v_n} \\ \frac{u_1}{v_1}\alpha_1 & \cdots & \frac{u_n}{v_n}\alpha_n \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{u_1}{v_1}\alpha_1^{n-k-\ell-2} & \cdots & \frac{u_n}{v_n}\alpha_n^{n-k-\ell-2} \\ \frac{u_1}{v_1}\left(\alpha_1^{n-k-\ell-1} - \Theta_0 \alpha_1^{n-k+2}\right) & \cdots & \frac{u_n}{v_n}\left(\alpha_n^{n-k-\ell-1} - \Theta_0 \alpha_n^{n-k+2}\right) \\ \frac{u_1}{v_1}\left(\alpha_1^{n-k-\ell} - \Theta_1 \alpha_1^{n-k+2}\right) & \cdots & \frac{u_n}{v_n}\left(\alpha_n^{n-k-\ell} - \Theta_1 \alpha_n^{n-k+2}\right) \\ \frac{u_1}{v_1}\left(\alpha_1^{n-k-\ell+1} - \Theta_2 \alpha_1^{n-k+2}\right) & \cdots & \frac{u_n}{v_n}\left(\alpha_n^{n-k-\ell+1} - \Theta_2 \alpha_n^{n-k+2}\right) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{u_1}{v_1}\left(\alpha_1^{n-k-1} - \Theta_\ell \alpha_1^{n-k+2}\right) & \cdots & \frac{u_n}{v_n}\left(\alpha_n^{n-k-1} - \Theta_\ell \alpha_n^{n-k+2}\right) \\ \frac{u_1}{v_1}\left(\alpha_1^{n-k} - \Gamma_1 \alpha_1^{n-k+2}\right) & \cdots & \frac{u_n}{v_n}\left(\alpha_n^{n-k} - \Gamma_1 \alpha_n^{n-k+2}\right) \\ \frac{u_1}{v_1}\left(\alpha_1^{n-k+1} - \Gamma_2 \alpha_1^{n-k+2}\right) & \cdots & \frac{u_n}{v_n}\left(\alpha_n^{n-k+1} - \Gamma_2 \alpha_n^{n-k+2}\right) \end{pmatrix}$$

由矩阵 $\boldsymbol{H}(\delta,\ \boldsymbol{B}_3)$ 的前 n 列构成，注意

$$\boldsymbol{H}_1(\delta,\boldsymbol{B}_3)=\boldsymbol{A}_{(n+2-k)\times n}\cdot\boldsymbol{V}_n\cdot\operatorname{diag}\left\{\frac{u_1}{v_1},\ldots,\frac{u_n}{v_n}\right\},$$

其中

$$\boldsymbol{A}_{(n+2-k)\times n}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_{n+2-k} & \begin{matrix}0&0&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ 0&0&\cdots&0\\ -\Theta_0&0&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ -\Theta_\ell&0&\cdots&0\\ -\Gamma_1&0&\cdots&0\\ -\Gamma_2&0&\cdots&0\end{matrix}\end{pmatrix},\boldsymbol{V}_n=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\ \alpha_1&\alpha_2&\ldots&\alpha_n\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ \alpha_1^{n-1}&\alpha_2^{n-1}&\ldots&\alpha_n^{n-1}\end{pmatrix}.$$

很容易看出，$\boldsymbol{E}_{n+2-k}$ 是 $\boldsymbol{A}_{(n+2-k)\times n}$的一个（$n+2-k$）×（$n+2-k$）子矩阵。于是

$$\operatorname{rank}\left(\boldsymbol{H}_1(\delta,\boldsymbol{B}_3)\right)=\operatorname{rank}\left(\boldsymbol{A}_{(n+2-k)\times n}\right)=n+2-k.$$

因此，$\boldsymbol{H}_1$（δ，$\boldsymbol{B}_3$）的行向量是 $\mathbb{F}_q$-线性无关的。容易知道，$\boldsymbol{H}$（δ，$\boldsymbol{B}_3$）的行向量是在 $\boldsymbol{H}_1$（δ，$\boldsymbol{B}_3$）的对应行向量后附加两个坐标得到的。由于在线性无关向量后附加坐标会保持其线性无关性，因此，$\boldsymbol{H}$（δ，$\boldsymbol{B}_3$）的行向量是 $\mathbb{F}_q$-线性无关的，即，rank（$\boldsymbol{H}$（δ，$\boldsymbol{B}_3$））$=n+2-k$.

对于陈述（2），为方便起见，我们分别将 $\boldsymbol{g}_i^{(3)}$ 和 $\boldsymbol{h}_j^{(3)}$ 记为 $\boldsymbol{G}$（δ，$\boldsymbol{B}_3$）和 $\boldsymbol{H}$（δ，$\boldsymbol{B}_3$）的第（$i+1$）$0\le i\le k-1$行和第（$j+1$）$0\le j\le n-k+1$行。

情况 1. 对于 $0\le i\le k-4$ 和 $0\le j\le n-k+1$，我们有

$$\boldsymbol{g}_i^{(3)}\left(\boldsymbol{h}_j^{(3)}\right)^T=\begin{cases}\sum\limits_{s=1}^{n}u_s\alpha_s^{i+j}, & 0\le j\le n-k-\ell-2;\\ \sum\limits_{s=1}^{n}u_s\alpha_s^{i+j}-\Theta_{j-(n-k-\ell-1)}\sum\limits_{s=1}^{n}u_s\alpha_s^{i+n-k+2}, & n-k-\ell-1\le j\le n-k-1;\\ \sum\limits_{s=1}^{n}u_s\alpha_s^{i+j}-\Gamma_{j-(n-k-1)}\sum\limits_{s=1}^{n}u_s\alpha_s^{i+n-k+2}, & n-k\le j\le n-k+1.\end{cases}$$

由 $0\le i\le k-4$ 和 $0\le j\le n-k+1$，可得

$$0\le i+j\le n-3<n-2$$

and

$$i+n-k+2\le n-2,$$

因此，由引理 II.16，对于 $0\le i\le k-4$ 和 $0\le j\le n-k+1$，我们有

$\boldsymbol{g}_i^{(3)}\left(\boldsymbol{h}_j^{(3)}\right)^T=$ $0.$

情况 2. 对于 $k-3\le i\le k-1$ 和 $0\le j\le n-k-\ell-2$，我们有

$$\boldsymbol{g}_i^{(3)}\left(\boldsymbol{h}_j^{(3)}\right)^T=\sum_{s=1}^{n}u_s\alpha_s^{i+j}+\sum_{t=0}^{\ell}b_{i,t}\sum_{s=1}^{n}u_s\alpha_s^{k+t+j}.$$

由 $k-3\le i\le k-1$、$0\le j\le n-k-\ell-2$ 和 $0\le t\le\ell$，可得

$$i+j\le n-\ell-3<n-2$$

and

$$k\le k+t+j\le n-2,$$

因此，由引理 II.16，对于 $k-3\le i\le k-1$ 和 $0\le j\le n-k-\ell-2$，我们有

$\boldsymbol{g}_i^{(3)}\left(\boldsymbol{h}_j^{(3)}\right)^T=0.$

情形 3. 对于 $i=k-3$ 和 $n-k-\ell-1\le j\le n-k-1$，我们令 $j=n-k-\ell-1+\mu$，其中 $0\le\mu\le\ell$，则有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{g}_i^{(3)}\left(\boldsymbol{h}_j^{(3)}\right)^T&=\sum_{s=1}^{n}u_s\left(\alpha_s^{k-3}+\sum_{t=0}^{\ell}b_{k-3,t}\alpha_s^{k+t}\right)\left(\alpha_s^{j}-\Theta_\mu\alpha_s^{n-k+2}\right)\\&=\sum_{s=1}^{n}u_s\alpha_s^{k-3+j}+\sum_{t=0}^{\ell}b_{k-3,t}\sum_{s=1}^{n}u_s\alpha_s^{k+t+j}-\Theta_\mu\left(\sum_{s=1}^{n}u_s\alpha_s^{n-1}+\sum_{t=0}^{\ell}b_{k-3,t}\sum_{s=1}^{n}u_s\alpha_s^{n+t+2}\right).\end{aligned}$$

注意到

$$k-3+j\le n-4<n-2,$$

$\mu\sum b_{k-3,\ \ell-t}S_{\mu-t}$那么由引理 II.16 和 $\Theta_\mu = \overline{}^{t=0}{}_{\ell}$，
可得$1+\sum b_{k-3,\ t}S_{t+3t=0}$

$$\boldsymbol{g}_i^{(3)}\left(\boldsymbol{h}_j^{(3)}\right)^T = \sum_{t=0}^{\ell} b_{k-3,t}S_{k+t+j-n+1} - \sum_{t=0}^{\mu} b_{k-3,\ell-t}S_{\mu-t} = \sum_{t=\ell-\mu}^{\ell} b_{k-3,t}S_{t+\mu-\ell} - \sum_{t=0}^{\mu} b_{k-3,\ell-t}S_{\mu-t}.$$

设 $\hat{}t = \ell - t$，则 $0 \le \hat{}t \le \mu$ 和 $t+\mu-\ell = \mu - \hat{}t$，因此，

$$\boldsymbol{g}_i^{(3)}\left(\boldsymbol{h}_j^{(3)}\right)^T = \sum_{\hat{t}=0}^{\mu} b_{k-3,\ell-\hat{t}}S_{\mu-\hat{t}} - \sum_{t=0}^{\mu} b_{k-3,\ell-t}S_{\mu-t} = 0.$$

情形 4. 对于 $i = k-3$ 和 $j \in \{n-k, n-k+1\}$，我们令 $j = n-k-1+\mu$ 满足 $\mu \in \{1,2\}$，则

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{g}_i^{(3)}\left(\boldsymbol{h}_j^{(3)}\right)^T &= \sum_{s=1}^{n} u_s\left(\alpha_s^{k-3} + \sum_{t=0}^{\ell} b_{k-3,t}\alpha_s^{k+t}\right)\left(\alpha_s^{j} - \Gamma_\mu \alpha_s^{n-k+2}\right)\\
&= \sum_{s=1}^{n} u_s\alpha_s^{k-3+j} + \sum_{t=0}^{\ell} b_{k-3,t}\sum_{s=1}^{n} u_s\alpha_s^{k+t+j} - \Gamma_\mu\left(\sum_{s=1}^{n} u_s\alpha_s^{n-1} + \sum_{t=0}^{\ell} b_{k-3,t}\sum_{s=1}^{n} u_s\alpha_s^{n+t+2}\right)\\
&= \sum_{t=0}^{\ell} b_{k-3,t}S_{k+t+j-n+1} - \Gamma_\mu\left(S_0 + \sum_{t=0}^{\ell} b_{k-3,t}S_{t+3}\right)\\
&= \sum_{t=0}^{\ell} b_{k-3,t}S_{t+\mu} - \sum_{t=0}^{\ell} b_{k-3,\ell-t}S_{\ell-t+\mu}.
\end{aligned}$$

设 $\hat{}t = \ell - t$，则 $t+\mu = \ell - \hat{}t + \mu$ 和 $0 \le \hat{}t \le \ell$，因此

$$\boldsymbol{g}_i^{(3)}\left(\boldsymbol{h}_j^{(3)}\right)^T = \sum_{\hat{t}=0}^{\ell} b_{k-3,\ell-\hat{t}}S_{\ell-\hat{t}+\mu} - \sum_{t=0}^{\ell} b_{k-3,\ell-t}S_{\ell-t+\mu} = 0.$$

情形 5. 对于 $i = k-2$ 和 $n-k-\ell-1 \le j \le n-k-1$，我们令 $j = n-k-\ell-1+\mu$ 满足 $0 \le \mu \le \ell$，于是有

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{g}_i^{(3)}\left(\boldsymbol{h}_j^{(3)}\right)^T\\
&= \sum_{s=1}^{n} u_s\left(\alpha_s^{k-2} + \sum_{t=0}^{\ell} b_{k-2,t}\alpha_s^{k+t}\right)\left(\alpha_s^{j} - \Theta_\mu \alpha_s^{n-k+2}\right) + \Theta_\mu\Phi_{1,2} - \Psi_{\mu,2}^{(0)}\\
&= \sum_{s=1}^{n} u_s\alpha_s^{k-2+j} + \sum_{t=0}^{\ell} b_{k-2,t}\sum_{s=1}^{n} u_s\alpha_s^{k+t+j} - \Theta_\mu\left(\sum_{s=1}^{n} u_s\alpha_s^{n} + \sum_{t=0}^{\ell} b_{k-2,t}\sum_{s=1}^{n} u_s\alpha_s^{n+t+2}\right) + \Theta_\mu\Phi_{1,2} - \Psi_{\mu,2}^{(0)}.
\end{aligned}$$

注意，

$$k-2+j \le n-3 < n-2,$$

$\mu\sum b_{k-3,\ \ell-t}S_{\mu-t}$由引理 II.16 和 $\Theta_\mu = \overline{}^{t=0}{}_{\ell}$，可得
$1+\sum b_{k-3,\ t}S_{t+3t=0}$

$$\boldsymbol{g}_i^{(3)}\left(\boldsymbol{h}_j^{(3)}\right)^T = \sum_{t=0}^{\ell} b_{k-2,t}S_{k+t+j-n+1} - \Theta_\mu\left(S_1 + \sum_{t=0}^{\ell} b_{k-2,t}S_{t+3}\right) + \Theta_\mu\Phi_{1,2} - \Psi_{\mu,2}^{(0)}.$$

通过与定理 III.5 (2) **情形 4** 类似的论证，以及 $\Psi_{\mu\ 2}^{(0)}$、和 $\Phi_{1、\ 2}$ 的定义，结论显然成立。**情形 6**。 对于 $i = k-2$ 和 $j \in \{n-k, n-k+1\}$，我们令 $j = n-k-1+\mu$ 满足 $\mu \in \{1,2\}$，则

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{g}_i^{(3)}\left(\boldsymbol{h}_j^{(3)}\right)^T\\
&= \sum_{s=1}^{n} u_s\left(\alpha_s^{k-2} + \sum_{t=0}^{\ell} b_{k-2,t}\alpha_s^{k+t}\right)\left(\alpha_s^{j} - \Gamma_\mu \alpha_s^{n-k+2}\right) + \Gamma_\mu\Phi_{1,2} - \Psi_{\ell,2}^{(\mu)} - S_{\mu-2}\\
&= \sum_{s=1}^{n} u_s\alpha_s^{k-2+j} + \sum_{t=0}^{\ell} b_{k-2,t}\sum_{s=1}^{n} u_s\alpha_s^{k+t+j} - \Gamma_\mu\left(\sum_{s=1}^{n} u_s\alpha_s^{n} + \sum_{t=0}^{\ell} b_{k-2,t}\sum_{s=1}^{n} u_s\alpha_s^{n+t+2}\right) + \Gamma_\mu\Phi_{1,2} - \Psi_{\ell,2}^{(\mu)} - S_{\mu-2}\\
&= S_{\mu-2} + \sum_{t=0}^{\ell} b_{k-2,t}S_{\mu+t} - \Gamma_\mu\left(S_1 + \sum_{t=0}^{\ell} b_{k-2,t}S_{t+3}\right) + \Gamma_\mu\Phi_{1,2} - \Psi_{\ell,2}^{(\mu)} - S_{\mu-2}.
\end{aligned}$$

通过与定理 III.5 (2) **情形 3** 以及 $\Psi_{\ell\ 2}^{(\mu)}$、和 $\Phi_{1,\ 2}$的定义类似的论证，结论即可得到。**情形 7**。 对于 $i=k-1$ 和 $n-k-\ell-1\leq j\leq n-k-1$，我们令 $j=n-k-\ell-1+\mu$，其中 $0\leq\mu\leq\ell$，有

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{g}_i^{(3)}\left(\boldsymbol{h}_j^{(3)}\right)^T\\
=&\sum_{s=1}^{n}u_s\left(\alpha_s^{k-1}+\sum_{t=0}^{\ell}b_{k-1,t}\alpha_s^{k+t}\right)\left(\alpha_s^{j}-\Theta_\mu\alpha_s^{n-k+2}\right)+\Delta_\mu+\delta\left(\Theta_\mu\Phi_{1,2}-\Psi_{\mu,2}^{(0)}\right)\\
=&\sum_{s=1}^{n}u_s\alpha_s^{k-1+j}+\sum_{t=0}^{\ell}b_{k-1,t}\sum_{s=1}^{n}u_s\alpha_s^{k+t+j}-\Theta_\mu\left(\sum_{s=1}^{n}u_s\alpha_s^{n+1}+\sum_{t=0}^{\ell}b_{k-1,t}\sum_{s=1}^{n}u_s\alpha_s^{n+t+2}\right)+\Delta_\mu+\delta\left(\Theta_\mu\Phi_{1,2}-\Psi_{\mu,2}^{(0)}\right)
\end{aligned}$$

注意到

$$k-1+j\leq n-2,$$

于是根据引理II.16，我们有

$$\boldsymbol{g}_i^{(3)}\left(\boldsymbol{h}_j^{(3)}\right)^T=\sum_{t=0}^{\ell}b_{k-1,t}S_{t+\mu-\ell}-\Theta_\mu\left(S_2+\sum_{t=0}^{\ell}b_{k-1,t}S_{t+3}\right)+\Delta_\mu+\delta\left(\Theta_\mu\Phi_{1,2}-\Psi_{\mu,2}^{(0)}\right)$$

通过与定理 III.5 (2) **情形 3**类似的论证， $\Psi_{\mu\ 1}^{(0)}$、 $\Phi_{1,\ 2}$、 $\Phi_{2,\ 1}$ 的定义以及

$$\Delta_\mu=\left(\Theta_\mu\Phi_{2,1}-\Psi_{\mu,1}^{(0)}\right)+\delta\left(\Psi_{\mu,2}^{(0)}-\Theta_\mu\Phi_{1,2}\right),$$

结果立即可得。

情形 8。 对于 $i=k-1$和 $j\in\{n-k,n-k+1\}$，我们令 $j=n-k-1+\mu$，其中 $\mu\in\{1,2\}$，于是

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{g}_i^{(3)}\left(\boldsymbol{h}_j^{(3)}\right)^T\\
=&\sum_{s=1}^{n}u_s\left(\alpha_s^{k-1}+\sum_{t=0}^{\ell}b_{k-1,t}\alpha_s^{k+t}\right)\left(\alpha_s^{j}-\Gamma_\mu\alpha_s^{n-k+2}\right)+\widehat{\Delta_{\ell,\mu}}-S_{\mu-1}+\delta S_{\mu-2}+\delta\left(\Gamma_\mu\Phi_{1,2}-\Psi_{\ell,2}^{(\mu)}-S_{\mu-2}\right)\\
=&\sum_{s=1}^{n}u_s\alpha_s^{k-1+j}+\sum_{t=0}^{\ell}b_{k-1,t}\sum_{s=1}^{n}u_s\alpha_s^{k+t+j}-\Gamma_\mu\left(\sum_{s=1}^{n}u_s\alpha_s^{n+1}+\sum_{t=0}^{\ell}b_{k-1,t}\sum_{s=1}^{n}u_s\alpha_s^{n+t+2}\right)\\
&+\widehat{\Delta_{\ell,\mu}}-S_{\mu-1}+\delta S_{\mu-2}+\delta\left(\Gamma_\mu\Phi_{1,2}-\Psi_{\ell,2}^{(\mu)}-S_{\mu-2}\right)\\
=&S_{\mu-1}+\sum_{t=0}^{\ell}b_{k-1,t}S_{\mu+t}-\Gamma_\mu\left(S_2+\sum_{t=0}^{\ell}b_{k-1,t}S_{t+3}\right)+\widehat{\Delta_{\ell,\mu}}-S_{\mu-1}+\delta S_{\mu-2}+\delta\left(\Gamma_\mu\Phi_{1,2}-\Psi_{\ell,2}^{(\mu)}-S_{\mu-2}\right).
\end{aligned}$$

通过与定理 III.5 (2) **情形 4**类似的论证， $\Psi_{\ell\ 2}^{(\mu)}$、 $\Phi_{1,\ 2}$、 $\Phi_{2,\ 1}$ 的定义以及

$$\widehat{\Delta_{\ell,\mu}}=\left(\Gamma_\mu\Phi_{2,1}-\Psi_{\ell,1}^{(\mu)}\right)-\delta\left(\Gamma_\mu\Phi_{1,2}-\Psi_{\ell,2}^{(\mu)}\right),$$

结论显然成立。

至此，定理III.5的证明。 □

注 III.6。 在定理 $b_{k-s,j}=0$ 中取 $s\in\{2,3\}$ 和 $j\in[\ell+1]$，或者取 $b_{k-3,j}=0$ 其中 $j\in[\ell+1]$，定理 *III.5*中的相应结论就是定理*III.1*或定理 *III.3*，分别对应前述两种情况。

D. $\mathcal{C}_4$的校验矩阵

定理 III.7。设

$$\Lambda_{i,h}=\sum_{j=0}^{n-1-h}(-1)^j\sigma_j\,\alpha_i^{n-1-h-j}.$$

Then

$$\boldsymbol{H}_h(\boldsymbol{\alpha},\eta,\boldsymbol{b})=\begin{pmatrix}
\frac{u_1}{v_1} & \cdots & \frac{u_n}{v_n} & -\eta^{-1}\sum_{t=0}^{\ell}b_t\,S_{k+t-n+1}\\
\frac{u_1}{v_1}\alpha_1 & \cdots & \frac{u_n}{v_n}\alpha_n & -\eta^{-1}\sum_{t=0}^{\ell}b_t\,S_{k+t-n+2}\\
\vdots & & \vdots & \vdots\\
\frac{u_1}{v_1}\alpha_1^{n-k-1} & \cdots & \frac{u_n}{v_n}\alpha_n^{n-k-1} & -\eta^{-1}\sum_{t=0}^{\ell}b_t\,S_t\\
\frac{u_1}{v_1}\Lambda_{1,h} & \cdots & \frac{u_n}{v_n}\Lambda_{n,h} & -\eta^{-1}
\end{pmatrix}_{(n+1-k)\times(n+1)}$$

是 $\mathcal{C}_4$ 的校验矩阵。

证明。 容易得知， $\mathcal{C}_4$ 的生成矩阵为

$$\boldsymbol{G}_h(\boldsymbol{\alpha},\eta,\boldsymbol{b})=\begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_n & 0\\ v_1\alpha_1 & \cdots & v_n\alpha_n & 0\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ v_1\alpha_1^{h-1} & \cdots & v_n\alpha_n^{h-1} & 0\\ v_1\left(\alpha_1^h+\sum\limits_{j=0}^{\ell}b_j\alpha_1^{k+j}\right) & \cdots & v_n\left(\alpha_n^h+\sum\limits_{j=0}^{\ell}b_j\alpha_n^{k+j}\right) & \eta\\ v_1\alpha_1^{h+1} & \cdots & v_n\alpha_n^{h+1} & 0\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ v_1\alpha_1^{k-1} & \cdots & v_n\alpha_n^{k-1} & 0 \end{pmatrix}_{k\times(n+1)}$$

为证明 $\boldsymbol{H}_h(\boldsymbol{\alpha},\ \eta,\ \boldsymbol{b})$ 是 $\mathcal{C}_4$ 的校验矩阵，只需验证以下两个陈述成立。

(1) $\operatorname{rank}\left(\boldsymbol{H}_h(\boldsymbol{\alpha},\ \eta,\ \boldsymbol{b})\right)=n+1-k$

(2) $\boldsymbol{G}_h(\boldsymbol{\alpha},\ \eta,\ \boldsymbol{b})\left(\boldsymbol{H}_h(\boldsymbol{\alpha},\ \eta,\ \boldsymbol{b})\right)^T=\mathbf{0}$。

对于陈述 (1)。 我们关注 $(n+1-k)\times n$ 子矩阵

$$\boldsymbol{H}_h^{(1)}(\boldsymbol{\alpha},\eta,\boldsymbol{b})=\begin{pmatrix} \frac{u_1}{v_1} & \cdots & \frac{u_n}{v_n}\\ \frac{u_1}{v_1}\alpha_1 & \cdots & \frac{u_n}{v_n}\alpha_n\\ \vdots & & \\ \frac{u_1}{v_1}\alpha_1^{n-k-1} & \cdots & \frac{u_n}{v_n}\alpha_n^{n-k-1}\\ \frac{u_1}{v_1}\Lambda_{1,h} & \cdots & \frac{u_n}{v_n}\Lambda_{n,h} \end{pmatrix}_{(n+1-k)\times n}.$$

我们记 $\boldsymbol{h}_i^{(1)}(\boldsymbol{\alpha},\ \eta,\ \boldsymbol{b})$ 为 $\boldsymbol{H}_h^{(1)}(\boldsymbol{\alpha},\ \eta,\ \boldsymbol{b})$ 的第 $(i+1)$ 个 $(0\le i\le n-k)$ 行。接下来，w $\boldsymbol{H}_h(\boldsymbol{\alpha},\ \eta,\ \boldsymbol{b})$。为方便起见，
我们证明

$$\boldsymbol{h}_0^{(1)}(\boldsymbol{\alpha},\eta,\boldsymbol{b}),\boldsymbol{h}_1^{(1)}(\boldsymbol{\alpha},\eta,\boldsymbol{b}),\ldots,\boldsymbol{h}_{n-k}^{(1)}(\boldsymbol{\alpha},\eta,\boldsymbol{b})$$

是 $\mathbb{F}_q$-线性无关的。若存在 $\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-k}\in\mathbb{F}_q$ 使得

$$\sum_{i=0}^{n-k}\lambda_i\boldsymbol{h}_i^{(1)}(\boldsymbol{\alpha},\eta,\boldsymbol{b})=\mathbf{0},$$

那么对每个 $1\le j\le n$，都有

$$\sum_{i=0}^{n-k-1}\lambda_i\frac{u_j}{v_j}\alpha_j^i+\lambda_{n-k}\frac{u_j}{v_j}\sum_{s=0}^{n-1-h}(-1)^s\sigma_s\alpha_j^{n-1-h-s}=0.$$

由于 $\frac{u_j}{v_j}\in\mathbb{F}_q^*$，因此对每个 $1\le j\le n$，

$$\sum_{i=0}^{n-k-1}\lambda_i\alpha_j^i+\lambda_{n-k}\sum_{s=0}^{n-1-h}(-1)^s\sigma_s\alpha_j^{n-1-h-s}=0.$$

令 $L_1(x)=\sum\limits_{i=0}^{n-k-1}\lambda_i x^i+\lambda_{n-k}\sum\limits_{s=0}^{n-1-h}(-1)^s\sigma_s x^{n-1-h-s}$，则 $L_1(x)$ 有 n 个互异根 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$。根据 $0\le h\le k-1$，我们可以得到

$$n-k-1<n-k=n-1-(k-1)\le n-1-h.$$

此外，

$$\deg(L_1(x))\le\max\{n-k-1,n-1-h\}=n-1-h\le n-1<n,$$

这意味着 $L_1(x)\equiv 0$。根据 $n-k-1<n-1-h$，我们知道 $L_1(x)$ 的 x^{n-1-h} 项系数为 $\lambda_{n-k}\sigma_0$，于是 $\lambda_{n-k}=0$。因此，对于每个 $1\le j\le n$，我们有

$$\sum_{i=0}^{n-k-1}\lambda_i\alpha_j^i=0,$$

$_{n-k-1}$这意味着多项式 $L_2(x)=\sum_{i=0}\lambda_i x^i$ 有 n 个互异根 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$。根据 $n-k-1\leq n-1<n$, $L_2(x)\equiv 0$, 因此$\lambda_0=\cdots=\lambda_{n-k-1}=0.$

因此 $\begin{matrix}\boldsymbol{h}_0^{(1)}\ \boldsymbol{\alpha}\ \eta\ \boldsymbol{b}\\ 1-k\end{matrix}$ $\begin{matrix}\boldsymbol{h}_1^{(1)}\ \boldsymbol{\alpha}\ \eta\ \boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{H}_h\ \boldsymbol{\alpha}\ \eta\ \boldsymbol{b}\end{matrix}$ $\ldots$ $\begin{matrix}\boldsymbol{h}_{n-k}^{(1)}\ \boldsymbol{\alpha}\ \eta\ \boldsymbol{b}\\ =n+1-k\end{matrix}$ $\mathbb{F}_q$ $\left(\boldsymbol{H}_h^{(1)}\ \boldsymbol{\alpha}\ \eta\ \boldsymbol{b}\right)=n+(,,)$

(,,),(,,) 线性无关，这意味着秩 (,,)。因此，秩 ((,,))。

对于陈述 (2)。为方便起见，我们分别将 $\boldsymbol{G}_h(\boldsymbol{\alpha},\eta,\boldsymbol{b})$ 的第 $(i+1)$ 个 $(0\leq i\leq k-1)$ 行和 $\boldsymbol{H}_h(\boldsymbol{\alpha},\eta,\boldsymbol{b})$ 的第 $(j+1)$ 个 ($0\leq j\leq n-k)$ 行记为 $\boldsymbol{g}_i^{(4)}$ 和 $\boldsymbol{h}_j^{(4)}$。

情况 1。对于 $i\in\{0,1\ldots,k-1\}\setminus\{h\}$ 以及 $0\leq j\leq n-k-1$，我们有

$$\boldsymbol{g}_i^{(4)}\left(\boldsymbol{h}_j^{(4)}\right)^T=\sum_{s=1}^{n}u_s\alpha_s^{i+j}.$$

由 $i\in\{0,1\ldots,k-1\}\setminus\{h\}$ 和 $0\leq j\leq n-k-1$，我们可以得到

$$0\leqq i+j\leq(k-1)+(n-k-1)=n-2.$$

因此由引理 II.16，我们得到 $\boldsymbol{g}_i^{(4)}\left(\boldsymbol{h}_j^{(4)}\right)^T=0$。

情况 2。对于 $i=h$ 和 $0\leq j\leq n-k-1$，我们有

$$\boldsymbol{g}_i^{(4)}\left(\boldsymbol{h}_j^{(4)}\right)^T=\sum_{s=1}^{n}u_s\alpha_s^{h+j}+\sum_{t=0}^{\ell}b_t\sum_{s=1}^{n}u_s\alpha_s^{k+t+j}+\eta\cdot\left(-\eta^{-1}\sum_{t=0}^{\ell}b_t\,S_{k+t-n+1+j}\right).$$

由 $0\leq h\leq k-1$，我们可以得到 $0\leq h+j\leq n-2$，再由引理 II.16，我们有

$$\boldsymbol{g}_i^{(4)}\left(\boldsymbol{h}_j^{(4)}\right)^T=\sum_{t=0}^{\ell}b_tS_{k+t+j-n+1}+\eta\cdot\left(-\eta^{-1}\sum_{t=0}^{\ell}b_t\,S_{k+t-n+1+j}\right)=0.$$

情形 3。对于 $i\in\{0,1\ldots,k-1\}\setminus\{h\}$ 和 $j=n-k$，由引理 II.16，我们有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{g}_i^{(4)}\left(\boldsymbol{h}_j^{(4)}\right)^T&=\sum_{s=1}^{n}u_s\alpha_s^i\Lambda_{s,h}=\sum_{s=1}^{n}u_s\alpha_s^i\left(\sum_{t=0}^{n-1-h}(-1)^t\sigma_t\alpha_s^{n-1-h-t}\right)\\&=\sum_{t=0}^{n-1-h}(-1)^t\sigma_t\left(\sum_{s=1}^{n}u_s\alpha_s^{i+n-1-h-t}\right)\\&=\sum_{t=0}^{n-1-h}(-1)^t\sigma_tS_{i-h-t}.\end{aligned}$$

若 $i<h$，则根据定义 II.15， $S_{i-h-t}=0$ 对于任意 $t\geq 0$。因此，
$\boldsymbol{g}_i^{(4)}\left(\boldsymbol{h}_j^{(4)}\right)^T=0$。若 $i>h$，则

$$\sum_{t=0}^{n-1-h}(-1)^t\sigma_tS_{i-h-t}=\sum_{t=0}^{i-h}(-1)^t\sigma_tS_{i-h-t}+\sum_{t=i-h+1}^{n-1-h}(-1)^t\sigma_tS_{i-h-t}.$$

当 $t\geq i-h+1$时，我们可以得到 $i-h-t<0$，然后根据定义 II.15， $S_{i-h-t}=0$。因此，根据注 II.17，

$$\boldsymbol{g}_i^{(4)}\left(\boldsymbol{h}_j^{(4)}\right)^T=\sum_{t=0}^{n-1-h}(-1)^t\sigma_tS_{i-h-t}=\sum_{t=0}^{i-h}(-1)^t\sigma_tS_{i-h-t}=0.$$

因此，对于 $i\in\{0,1\ldots,k-1\}\setminus\{h\}$ 和 $j=n-k$，我们可以得到
$\boldsymbol{g}_i^{(4)}\left(\boldsymbol{h}_j^{(4)}\right)^T=0.$

情形 4。 对于 $i=h$ 和 $j=n-k$，根据引理 II.16，我们有

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{g}_i^{(4)}\left(\boldsymbol{h}_j^{(4)}\right)^T &= \sum_{s=1}^{n} u_s \left(\alpha_s^h + \sum_{j=0}^{\ell} b_j \alpha_s^{k+j}\right) \Lambda_{s,h} + \eta\cdot(-\eta^{-1}) \\
&= \sum_{s=1}^{n} u_s \alpha_s^h \left(\sum_{t=0}^{n-1-h} (-1)^t \sigma_t \alpha_s^{n-1-h-t}\right) + \sum_{s=1}^{n} u_s \left(\sum_{j=0}^{\ell} b_j \alpha_s^{k+j}\right)\left(\sum_{t=0}^{n-1-h} (-1)^t \sigma_t \alpha_s^{n-1-h-t}\right) - 1 \\
&= \sum_{t=0}^{n-1-h} (-1)^t \sigma_t \left(\sum_{s=1}^{n} u_s \alpha_s^{n-1-t}\right) + \sum_{j=0}^{\ell} b_j \sum_{t=0}^{n-1-h} (-1)^t \sigma_t \left(\sum_{s=1}^{n} u_s \alpha_s^{k+j+n-1-t-h}\right) - 1 \\
&= \sum_{t=0}^{n-1-h} (-1)^t \sigma_t S_{-t} + \sum_{j=0}^{\ell} b_j \sum_{t=0}^{n-1-h} (-1)^t \sigma_t S_{k+j-t-h} - 1 \\
&= \sum_{j=0}^{\ell} b_j \sum_{t=0}^{n-1-h} (-1)^t \sigma_t S_{k+j-t-h} \\
&= \sum_{j=0}^{\ell} b_j \left(\sum_{t=0}^{k+j-h} (-1)^t \sigma_t S_{k+j-t-h} + \sum_{t=k+j-h+1}^{n-1-h} (-1)^t \sigma_t S_{k+j-t-h}\right).
\end{aligned}$$

当 $t \geq k+j-h+1$时，我们可以得到 $k+j-t-h<0$，然后根据定义II.15， $S_{k+j-t-h}=0$。因此，根据注II.17，

$$\boldsymbol{g}_i^{(4)}\left(\boldsymbol{h}_j^{(4)}\right)^T = \sum_{j=0}^{\ell} b_j \sum_{t=0}^{k+j-h} (-1)^t \sigma_t S_{k+j-t-h} = 0.$$

这就证明了定理III.7。 □

注释 III.8。在定理*III.7*中取 $h=k-1$、 $\ell=0$ 和 $b_0=\eta\in\mathbb{F}_q^*$，对于相应的 $\boldsymbol{H}_{k-1}(\boldsymbol{\alpha}_n,\ \eta,\ (\eta))$，我们有

$$\boldsymbol{H}_{k-1}(\boldsymbol{\alpha}_n,\eta,(\eta)) = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ (-1)^{n-k}\sigma_{n-k} & (-1)^{n-k-1}\sigma_{n-k-1} & \cdots & -\sigma_1 & 1 \end{pmatrix}_{(n+1-k)\times(n+1-k)} \cdot \boldsymbol{H}_{n+1-k}\,\mathrm{diag}(1,\ldots,1,\eta^{-1}),$$

其中 $\boldsymbol{H}_{n+1-k}$ 由 *[38,* 定理 *3* 给出。*1]*因此， $\boldsymbol{H}_{k-1}(\boldsymbol{\alpha}_n,\ \eta,\ (\eta))$ 和 $\boldsymbol{H}_{n+1-k}\,\mathrm{diag}(1,\ldots,1,\ \eta^{-1})$ 彼此行等价。

最后，我们以一个开放问题结束本节。

开放问题 III.9。给出一个 $\mathcal{C}_{k,\ \ell}(\mathcal{L},\mathcal{P},\boldsymbol{A}_{m\times m},\boldsymbol{B})$ 的校验矩阵，使 $\boldsymbol{A}_{m\times m}$ 和 $\boldsymbol{B}$同时取最一般形式。

IV. 三类非 GRS 码校验矩阵的间接构造

在编码理论中，有多种方法可以从已知线性码构造具有有趣参数和性质的新线性码。其中包括缩短、puncturing、增补和扩展技术。特别是，两种不同的扩展操作，即第一类扩展和第二类扩展，已被广泛采用。迄今为止，大多数已知的非 GRS 线性码族都是通过第一类扩展构造的：给定一个线性码 $\mathcal{C}$ 及其生成矩阵 $\boldsymbol{G}$，增添一个额外的列向量 $\boldsymbol{g}$，形成扩展码 $\mathcal{C}(\boldsymbol{G},\ \boldsymbol{g})$。

本节基于这样一个事实：第一类扩展码通过线性方程 $\boldsymbol{G}\boldsymbol{w}^\top=\boldsymbol{g}^\top$与第二类扩展码 $\mathcal{C}(\boldsymbol{w})$相关联。我们使用克莱姆法则推导出满足$\boldsymbol{G}\boldsymbol{w}^\top=\boldsymbol{g}^\top$的向量 $\boldsymbol{w}$ 的显式表达式。随后利用该表达式构造(1) 列 TGRS 码、双列 TGRS 码、一族 $(\mathcal{L},\ \mathcal{P},\ s)$ 行列 TGRS 码以及修正 GRS 码 $\mathrm{MGRS}_{n,\ k}(\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{v},\ \eta,\ t)$ 的校验矩阵，其中 $1\leq t\leq k-1$。此外，直接构造满足 $\boldsymbol{G}\boldsymbol{w}^\top=\boldsymbol{g}^\top$ 的向量 $\boldsymbol{w}$，可以得到 $\mathcal{C}_h(\eta,\ b,\ \delta)$ 以及一类特殊的 $\mathcal{C}_{k,\ \ell}(\mathcal{L},\ \mathcal{P},\ \mathcal{A}_{2\times2},\ \boldsymbol{B}_1)$ 的校验矩阵。

下面给出第一类扩展码的定义。

定义 IV.1。 设 $\mathcal{C}_1$ 是域 $[n,k]$ 上具有生成矩阵 $\boldsymbol{G}_1$ 的线性码，且 $\boldsymbol{g}$ 是域 $\mathbb{F}_q$ 上的 $1\times k$ 向量。由矩阵生成的线性码 $\mathcal{C}_2$

$$\boldsymbol{G}_2 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{G}_1 & \boldsymbol{g}^T \end{pmatrix}$$

称为 $\mathcal{C}_1$ 的第一类扩展码，并将 $\mathcal{C}_2$ 记为 $\mathcal{C}(\boldsymbol{G}_1, \boldsymbol{g})$。

第二类扩展码的定义如下：

定义 IV.2 ([33])。设 $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, \cdots, w_n) \in \mathbb{F}_q^n$ 为任意向量。给定一个 $[n, k, d]$ 线性码 $\mathcal{C}$，第二类扩展码 $\mathcal{C}(\boldsymbol{w})$ 其参数为 $[n+1, k, d]$ 且定义在 $\mathbb{F}_q$ 上，定义如下：

$$\overline{C}(\boldsymbol{w}) = \left\{ (c_1, \cdots, c_n, c_{n+1}) | (c_1, \cdots, c_n) \in \mathcal{C},\, c_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} w_i c_i \right\}, \tag{11}$$

其中 $d = d$ 或 $d = d + 1$。

2024年，Sun 等人指出，线性码 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{C}(\boldsymbol{w})$ 的生成矩阵与校验矩阵之间存在如下引理 IV.3所述的密切关系。

引理 IV.3 ([33])。设 $\mathcal{C}$ 是一个 $[n, k, d]$ 定义在 $\mathbb{F}_q$ 上的线性码，且 $\boldsymbol{w} \in \mathbb{F}_q^n$。若 $\mathcal{C}$ 具有生成矩阵 $\boldsymbol{G}$ 和校验矩阵 $\boldsymbol{H}$，则由 $\mathcal{C}(\boldsymbol{w})$ 中 *(11)* 定义的扩展码的生成矩阵和校验矩阵分别为 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{G} & \boldsymbol{G}\boldsymbol{w}^T \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{H} & \boldsymbol{0}^T \\ \boldsymbol{w} & -1 \end{pmatrix}$。

此外，他们还证明了两类扩展码之间存在联系。对于 $\mathcal{C}(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{g})$，存在 q^{n-k} 个向量 $\boldsymbol{w}$ 使得 $\mathcal{C}(\boldsymbol{w}) = \mathcal{C}(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{g})$。具体陈述如下。

引理 IV.4。对于给定的扩展码 $\mathcal{C}(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{g})$，其中 $\boldsymbol{G}$ 是 $\mathcal{C}$ 的生成矩阵，$\boldsymbol{g}$ 是 $\mathbb{F}_q$ 上的 $1 \times k$ 向量，存在 q^{n-k} 个向量 $\boldsymbol{w} \in \mathbb{F}_q^n$ 使得 $\mathcal{C}(\boldsymbol{w}) = \mathcal{C}(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{g})$，其中 秩$(\boldsymbol{G}) =$ 秩$\left((\boldsymbol{G}\ \boldsymbol{g}^T)\right) = k \leq n$。向量 $\boldsymbol{w}$ 正是方程组 $\boldsymbol{G}\boldsymbol{w}^T = \boldsymbol{g}^T$ 的解。

截至目前，对于某些线性码族，第一类扩展码是通过选取适当的向量 $\boldsymbol{g}$ 构造的，并且已研究了它们相应的性质 [2, 24, 30, 34, 36]。然而，现有文献尚未给出这些扩展码的显式校验矩阵。

根据上述引理IV.3-IV.4，要获得$\mathcal{C}(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{g})$的校验矩阵，只需找到方程 $\boldsymbol{G}\boldsymbol{w}^T = \boldsymbol{g}^T$ 的一个解。尽管 Sun 等人在理论上证明了存在 q^{n-k} 这样的向量 $\boldsymbol{w}$，但他们没有给出 $\boldsymbol{w}$ 的显式表达式。因此，$\mathcal{C}(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{g})$ 的校验矩阵无法直接计算。

下面的定理IV.5 基于 $\boldsymbol{G}$ 的生成矩阵，给出了任意 $\mathcal{C}(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{g})$ 的一个特殊向量 $\boldsymbol{w}$。

定理 IV.5。设 $\mathcal{C}$ 是一个在 $\mathbb{F}_q$ 上的 $[n, k]$ 线性码，其生成矩阵为 $\boldsymbol{G}$，且 $\mathcal{C}(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{g})$ 是一个在相应域上的 $[n+1, k]$ 线性码，其生成矩阵为 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{G} & \boldsymbol{g}^T \end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{g} \in \mathbb{F}_q^k$ 是一个 $1 \times k$ 非零向量。选取 $\boldsymbol{G}$ 中由 $j_1, \ldots, j_k$ 索引的 $\mathbb{F}_q$-线性无关列，并令 $\boldsymbol{G}^{(k)}$ 为相应的子矩阵。对于满足 $1 \leq r \leq k$ 的 $i = j_r$，令 $\boldsymbol{G}^{(k,i)}$ 为将 $\boldsymbol{G}^{(k)}$ 的第 r 列替换为 $\boldsymbol{g}^T$ 后得到的矩阵。则存在一个非零向量 $\boldsymbol{w}$，使得

$$w_i = \begin{cases} \frac{\det\left(\boldsymbol{G}^{(k,i)}\right)}{\det\left(\boldsymbol{G}^{(k)}\right)}, & i \in \{j_1, j_2, \ldots, j_k\}; \\ 0, & i \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{j_1, j_2, \ldots, j_k\}, \end{cases}$$

使得 $\boldsymbol{G}\boldsymbol{w}^T = \boldsymbol{g}^T$，即 $\mathcal{C}(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{g}) = \mathcal{C}(\boldsymbol{w})$。

证明。根据秩$(\boldsymbol{G}) = k$，存在 k 列，它们在 $\boldsymbol{G}$ 上是 $\mathbb{F}_q$-线性无关的。假设 j_1、j_2、…、j_k 是 $\boldsymbol{G}$ 的 $\mathbb{F}_q$ 的 k 是 $k \times k$ 列是 -线性无关的，并将由这些列构成的子矩阵记为 $\boldsymbol{G}^{(k)}$。那么子矩阵 $\boldsymbol{G}^{(k)}$ 在 $\mathbb{F}_q$ 上可逆，即 $\det\left(\boldsymbol{G}^{(k)}\right) \in \mathbb{F}_q^*$。此外，由于 $w_i = 0$ 对于 $i \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{j_1, j_2, \ldots, j_k\}$，我们有

$$\boldsymbol{G}\left(\boldsymbol{w}\right)^T = \boldsymbol{g}^T \Longleftrightarrow \boldsymbol{G}^{(k)}\left(w_{j_1}, \ldots, w_{j_k}\right)^T = \boldsymbol{g}^T.$$

根据克莱姆法则，$w_i = \frac{\det(\boldsymbol{G}^{(k,i)})}{\det(\boldsymbol{G}^{(k)})}$ $(i \in \{j_1, j_2, \ldots, j_k\})$ 是方程的解

$$\boldsymbol{G}^{(k)}\left(w_{j_1}, \ldots, w_{j_k}\right)^T = \boldsymbol{g}^T,$$

其中，$\boldsymbol{G}^{(k,i)}$ 是将 r的第 $\boldsymbol{G}^{(k)}$ 列替换为 $\boldsymbol{g}^T$ 所得，其中 $i = j_r$ 替换为 $1 \leq r \leq k$。这证明了定理 IV.5。 □

值得注意的是，上述向量 $\boldsymbol{w}$ 很大程度上取决于生成矩阵 $\boldsymbol{G}$的复杂性。对于一些生成矩阵结构相对清晰的线性码，定理 IV.5的适用范围更广，例如 GRS 码、GRL 码和列 TRS 码。

A. 两类列*TRS*码的校验矩阵

在本小节中，对于列TGRS码 $\mathcal{C}_s(\boldsymbol{\lambda},\ \boldsymbol{b},\ c)$，我们给出相应的校验矩阵。为方便起见，记 $\mathcal{C}_1(\boldsymbol{\lambda},\ \boldsymbol{b},\ c)$ 为 $\mathcal{C}_5$。并记

$$\frac{\det\left(\boldsymbol{G}_t^{(k,i)}(\boldsymbol{\lambda},b_t,c)\right)}{\det\left(\boldsymbol{G}_t^{(k)}(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{b},c)\right)}=\frac{\prod\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{k}(b_t-\alpha_j)-\lambda_t\prod\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{k}(c-\alpha_j)}{v_i\prod\limits_{1\leq j\leq k,j\neq i}(\alpha_i-\alpha_j)},1\leq t\leq s,1\leq i\leq k,$$

其中，$\boldsymbol{G}_t^{(k)}(\boldsymbol{\lambda},\ \boldsymbol{b},\ c)$ 表示生成矩阵 $\boldsymbol{G}_t(\boldsymbol{\lambda},\ \boldsymbol{b},\ c)$ 的前 k 列所组成的矩阵，该生成矩阵对应于 $\mathcal{C}_t(\boldsymbol{\lambda},\ \boldsymbol{b},\ c)$。**定理 IV.6**。 该 (1)-列*TGRS*码的校验矩阵为

$$\begin{pmatrix}\frac{u_1}{v_1}&\cdots&\frac{u_k}{v_k}&\frac{u_{k+1}}{v_{k+1}}&\cdots&\frac{u_n}{v_n}&0\\ \frac{u_1}{v_1}\alpha_1&\cdots&\frac{u_k}{v_k}\alpha_k&\frac{u_{k+1}}{v_{k+1}}\alpha_{k+1}&\cdots&\frac{u_n}{v_n}\alpha_n&0\\ \frac{u_1}{v_1}\alpha_1^2&\cdots&\frac{u_k}{v_k}\alpha_k^2&\frac{u_{k+1}}{v_{k+1}}\alpha_{k+1}^2&\cdots&\frac{u_n}{v_n}\alpha_n^2&0\\ \vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\ \frac{u_1}{v_1}\alpha_1^{n-k-1}&\cdots&\frac{u_k}{v_k}\alpha_k^{n-k-1}&\frac{u_{k+1}}{v_{k+1}}\alpha_{k+1}^{n-k-1}&\cdots&\frac{u_n}{v_n}\alpha_n^{n-k-1}&0\\ \frac{\det\left(\boldsymbol{G}_1^{(k,1)}(\boldsymbol{\lambda},b_1,c)\right)}{\det\left(\boldsymbol{G}_1^{(k)}(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{b},c)\right)}&\cdots&\frac{\det\left(\boldsymbol{G}_1^{(k,k)}(\boldsymbol{\lambda},b_1,c)\right)}{\det\left(\boldsymbol{G}_1^{(k)}(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{b},c)\right)}&0&\cdots&0&-1\end{pmatrix}.$$

证明。 根据定义II.9，容易得到 $\mathcal{C}_5$ 的生成矩阵为

$$\boldsymbol{G}_1(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{b},c)=\begin{pmatrix}v_1&v_2&\cdots&v_n&1-\lambda_1\\ v_1\alpha_1&v_2\alpha_2&\cdots&v_n\alpha_n&b_1-\lambda_1c\\ v_1\alpha_1^2&v_2\alpha_2^2&\cdots&v_n\alpha_n^2&b_1^2-\lambda_1c^2\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\ v_1\alpha_1^{k-1}&v_2\alpha_2^{k-1}&\cdots&v_n\alpha_n^{k-1}&b_1^{k-1}-\lambda_1c^{k-1}\end{pmatrix}$$

容易看出，$\boldsymbol{G}_1(\boldsymbol{\lambda},\ \boldsymbol{b},\ c)$ 的前 n 列构成一个 $[n,k]$ RS码 的生成矩阵，因此 $\boldsymbol{G}_1(\boldsymbol{\lambda},\ \boldsymbol{b},\ c)$ 的前 n 列中任意 k 列都线性无关。一般性不失，选取前 k 列。于是

$$\det\left(\boldsymbol{G}_1^{(k)}(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{b},c)\right)=\det\begin{pmatrix}v_1&v_2&\cdots&v_k\\ v_1\alpha_1&v_2\alpha_2&\cdots&v_k\alpha_k\\ v_1\alpha_1^2&v_2\alpha_2^2&\cdots&v_k\alpha_k^2\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\ v_1\alpha_1^{k-1}&v_2\alpha_2^{k-1}&\cdots&v_k\alpha_k^{k-1}\end{pmatrix}=\prod_{i=1}^{k}v_i\cdot\prod_{1\leq i<j\leq k}(\alpha_j-\alpha_i),$$

and

$$
\begin{aligned}
&\det\left(\boldsymbol{G}_1^{(k,i)}(\boldsymbol{\lambda}, b_1, c)\right)\\
=&\det\begin{pmatrix}
v_1 & \cdots & v_{i-1} & 1-\lambda_1 & v_{i+1} & \cdots & v_k\\
v_1\alpha_1 & \cdots & v_{i-1}\alpha_{i-1} & b_1-\lambda_1 c & v_{i+1}\alpha_{i+1} & \cdots & v_k\alpha_k\\
v_1\alpha_1^2 & \cdots & v_{i-1}\alpha_{i-1}^2 & b_1^2-\lambda_1 c^2 & v_{i+1}\alpha_{i+1}^2 & \cdots & v_k\alpha_k^2\\
\vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\
v_1\alpha_1^{k-1} & \cdots & v_{i-1}\alpha_{i-1}^{k-1} & b_1^{k-1}-\lambda_1 c^{k-1} & v_{i+1}\alpha_{i+1}^{k-1} & \cdots & v_k\alpha_k^{k-1}
\end{pmatrix}\\
=&\det\begin{pmatrix}
v_1 & \cdots & v_{i-1} & 1 & v_{i+1} & \cdots & v_k\\
v_1\alpha_1 & \cdots & v_{i-1}\alpha_{i-1} & b_1 & v_{i+1}\alpha_{i+1} & \cdots & v_k\alpha_k\\
v_1\alpha_1^2 & \cdots & v_{i-1}\alpha_{i-1}^2 & b_1^2 & v_{i+1}\alpha_{i+1}^2 & \cdots & v_k\alpha_k^2\\
\vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\
v_1\alpha_1^{k-1} & \cdots & v_{i-1}\alpha_{i-1}^{k-1} & b_1^{k-1} & v_{i+1}\alpha_{i+1}^{k-1} & \cdots & v_k\alpha_k^{k-1}
\end{pmatrix}\\
&-\lambda_1\cdot\det\begin{pmatrix}
v_1 & \cdots & v_{i-1} & 1 & v_{i+1} & \cdots & v_k\\
v_1\alpha_1 & \cdots & v_{i-1}\alpha_{i-1} & c & v_{i+1}\alpha_{i+1} & \cdots & v_k\alpha_k\\
v_1\alpha_1^2 & \cdots & v_{i-1}\alpha_{i-1}^2 & c^2 & v_{i+1}\alpha_{i+1}^2 & \cdots & v_k\alpha_k^2\\
\vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\
v_1\alpha_1^{k-1} & \cdots & v_{i-1}\alpha_{i-1}^{k-1} & c^{k-1} & v_{i+1}\alpha_{i+1}^{k-1} & \cdots & v_k\alpha_k^{k-1}
\end{pmatrix}\\
=&(-1)^{k-i}\prod_{s=1,s\neq i}^{k} v_s\cdot\prod_{\substack{1\le s<t\le k\\ s\neq i,\,t\neq i}}(\alpha_t-\alpha_s)\left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k}(b_1-\alpha_j)-\lambda_1\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k}(c-\alpha_j)\right).
\end{aligned}
$$

因此，根据

$$
\prod_{1\le s<t\le k}(\alpha_t-\alpha_s)=(-1)^{k-i}\prod_{\substack{1\le s<t\le k\\ s,t\neq i}}(\alpha_t-\alpha_s)\prod_{j\neq i}(\alpha_i-\alpha_j),
$$

我们有

$$
\begin{aligned}
\frac{\det\left(\boldsymbol{G}_1^{(k,i)}(\boldsymbol{\lambda}, b_1, c)\right)}{\det\left(\boldsymbol{G}_1^{(k)}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{b}, c)\right)}=&(-1)^{k-i}v_i^{-1}\prod_{\substack{1\le s<t\le k\\ s\neq i,\,t\neq i}}(\alpha_t-\alpha_s)\left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k}(b_1-\alpha_j)-\lambda_1\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k}(c-\alpha_j)\right)\cdot\prod_{1\le t<s\le k}(\alpha_s-\alpha_t)^{-1}\\
=&\frac{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k}(b_1-\alpha_j)-\lambda_1\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k}(c-\alpha_j)}{v_i\prod_{1\le j<k,\,j\neq i}(\alpha_i-\alpha_j)}.
\end{aligned}
$$

注意，$\boldsymbol{G}_1(\boldsymbol{\lambda},\ \boldsymbol{b},\ c)=\left(\boldsymbol{G}_{n,\ k}(\boldsymbol{\alpha})\,\boldsymbol{g}^T\right)$ 其中 $\boldsymbol{g}=\left(1-\lambda_1,\ b_1-\lambda_1 c,\ \ldots,\ b_1^{k-1}-\lambda_1 c^{k-1}\right)$，其中 $\boldsymbol{G}_{n,\ k}(\boldsymbol{\alpha})$ 是一个 $[n,k]$ GRS 码的生成矩阵。众所周知，一个 $[n,k]$ GRS 码的校验矩阵为

$$
\boldsymbol{H}_{n,k}(\boldsymbol{\alpha})=\begin{pmatrix}
\frac{u_1}{v_1} & \cdots & \frac{u_n}{v_n}\\
\frac{u_1}{v_1}\alpha_1 & \cdots & \frac{u_n}{v_n}\alpha_n\\
\frac{u_1}{v_1}\alpha_1^2 & \cdots & \frac{u_n}{v_n}\alpha_n^2\\
\vdots & & \vdots\\
\frac{u_1}{v_1}\alpha_1^{n-k-1} & \cdots & \frac{u_n}{v_n}\alpha_n^{n-k-1}
\end{pmatrix}_{(n-k)\times n}.
$$

由定理 IV.5，我们证明定理 IV.6。 □

与定理 IV.6的证明类似，对于 $\mathcal{C}_s(\boldsymbol{\lambda},\ \boldsymbol{b},\ c)$，我们有

定理 IV.7。 码 $\mathcal{C}_s(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{b}, c)$ 具有如下校验矩阵

$$\begin{pmatrix}
\frac{u_1}{v_1} & \cdots & \frac{u_k}{v_k} & \frac{u_{k+1}}{v_{k+1}} & \cdots & \frac{u_n}{v_n} & 0 & \cdots & 0 \\
\frac{u_1}{v_1}\alpha_1 & \cdots & \frac{u_k}{v_k}\alpha_k & \frac{u_{k+1}}{v_{k+1}}\alpha_{k+1} & \cdots & \frac{u_n}{v_n}\alpha_n & 0 & \cdots & 0 \\
\frac{u_1}{v_1}\alpha_1^2 & \cdots & \frac{u_k}{v_k}\alpha_k^2 & \frac{u_{k+1}}{v_{k+1}}\alpha_{k+1}^2 & \cdots & \frac{u_n}{v_n}\alpha_n^2 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\frac{u_1}{v_1}\alpha_1^{n-k-1} & \cdots & \frac{u_k}{v_k}\alpha_k^{n-k-1} & \frac{u_{k+1}}{v_{k+1}}\alpha_{k+1}^{n-k-1} & \cdots & \frac{u_n}{v_n}\alpha_n^{n-k-1} & 0 & \cdots & 0 \\
\frac{\det\left(\boldsymbol{G}_1^{(k,1)}(\boldsymbol{\lambda},b_1,c)\right)}{\det\left(\boldsymbol{G}_1^{(k)}(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{b},c)\right)} & \cdots & \frac{\det\left(\boldsymbol{G}_1^{(k,k)}(\boldsymbol{\lambda},b_1,c)\right)}{\det\left(\boldsymbol{G}_1^{(k)}(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{b},c)\right)} & 0 & \cdots & 0 & -1 & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\frac{\det\left(\boldsymbol{G}_s^{(k,1)}(\boldsymbol{\lambda},b_s,c)\right)}{\det\left(\boldsymbol{G}_s^{(k)}(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{b},c)\right)} & \cdots & \frac{\det\left(\boldsymbol{G}_s^{(k,k)}(\boldsymbol{\lambda},b_s,c)\right)}{\det\left(\boldsymbol{G}_s^{(k)}(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{b},c)\right)} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -1
\end{pmatrix}_{(n+s-k)\times(n+s)}.$$

注 IV.8。 (1) 我们的结果为已知的校验矩阵提供了统一表述。具体而言，对于 $3 \le k \le n-1$，取 $s=2$ 和 $v_1 = \cdots = v_n = 1$ 于定理 *IV.7*，可知相应矩阵与*[10,* 定理*53]*中的矩阵行等价。此外，如果 $b_1 = b_2 = b$ 和 α_1、……、α_n、b、c 两两不同，则它与 $\mathcal{C}_2(b,\ c)$ 中的 *[24,* 定理 *3(1)]*的校验矩阵行等价。

(2) 通过我们的方法，只需计算某些行列式，且校验矩阵具有清晰的分块结构。

B. 一类$(\mathcal{L}, \mathcal{P}, 1)$-行列 *TRS* 码的校验矩阵

在本 小节中，我们考虑 $\mathcal{C}_1(\boldsymbol{\lambda},\ \boldsymbol{b},\ c,\ \mathcal{L},\ \mathcal{P},\ \boldsymbol{B})$，其中 $\ell = 0$、$\mathcal{L} = \{0\}$、$\mathcal{P} = \{k-1\}$、$\eta \in \mathbb{F}_q^*$an d

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0}_{(k-1)\times 1} & \boldsymbol{0}_{(k-1)\times n-k-1} \\ \eta & \boldsymbol{0}_{1\times(n-k-1)} \end{pmatrix},$$

我们给出校验矩阵。为方便起见，将此码记为 $\mathcal{C}_6$。

定理 IV.9。设

$$S_k = \left\{ \sum_{i\in I} \alpha_i | \forall I \subseteq \{1,2,\ldots,n\}, \#I = k \right\}$$

若 $-\eta_n^{-1} \notin S_k$ 且以下两个条件之一成立，

(1) $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$ 和 $\eta \neq -\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right)^{-1}$；

(2) $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$ 且 $\eta \neq 0$，

则 $\mathcal{C}_6$ 具有如下校验矩阵

$$\begin{pmatrix}
\frac{u_1}{v_1} & \cdots & \frac{u_k}{v_k} & \frac{u_{k+1}}{v_{k+1}} & \cdots & \frac{u_n}{v_n} & 0 \\
\frac{u_1}{v_1}\alpha_1 & \cdots & \frac{u_k}{v_k}\alpha_k & \frac{u_{k+1}}{v_{k+1}}\alpha_{k+1} & \cdots & \frac{u_n}{v_n}\alpha_n & 0 \\
\frac{u_1}{v_1}\alpha_1^2 & \cdots & \frac{u_k}{v_k}\alpha_k^2 & \frac{u_{k+1}}{v_{k+1}}\alpha_{k+1}^2 & \cdots & \frac{u_n}{v_n}\alpha_n^2 & 0 \\
\vdots & & \vdots & & & & \\
\frac{u_1}{v_1}\alpha_1^{n-k-2} & \cdots & \frac{u_k}{v_k}\alpha_k^{n-k-2} & \frac{u_{k+1}}{v_{k+1}}\alpha_{k+1}^{n-k-2} & \cdots & \frac{u_n}{v_n}\alpha_n^{n-k-2} & 0 \\
\frac{u_1}{v_1}\left(\alpha_1^{n-k-1} - \Delta\alpha_1^{n-k}\right) & \cdots & \frac{u_k}{v_k}\left(\alpha_k^{n-k-1} - \Delta\alpha_k^{n-k}\right) & \frac{u_{k+1}}{v_{k+1}}\left(\alpha_{k+1}^{n-k-1} - \Delta\alpha_{k+1}^{n-k}\right) & \cdots & \frac{u_n}{v_n}\left(\alpha_n^{n-k-1} - \Delta\alpha_n^{n-k}\right) & 0 \\
\frac{\det\left(\boldsymbol{G}_{k-1,1}^{(k,1)}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{b},c,\eta)\right)}{\det\left(\boldsymbol{G}_{k-1,1}^{(k)}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{b},c,\eta)\right)} & \cdots & \frac{\det\left(\boldsymbol{G}_{k-1,1}^{(k,k)}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{b},c,\eta)\right)}{\det\left(\boldsymbol{G}_{k-1,1}^{(k)}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{b},c,\eta)\right)} & 0 & \cdots & 0 & -1
\end{pmatrix},$$

其中 $\Delta = \frac{\eta}{1+\eta\sum_{i=1}^{n}\alpha_{i_{i=1}}}$ 和

$$\frac{\det\left(\boldsymbol{G}_{k-1,1}^{(k,i)}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{b},c,\eta)\right)}{\det\left(\boldsymbol{G}_{k-1,1}^{(k)}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{b},c,\eta)\right)} = \frac{\left(1+\eta\left(b_1+\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{k}\alpha_j\right)\right)\prod\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{k}(b_1-\alpha_j) - \lambda_1\left(1+\eta\left(c+\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{k}\alpha_j\right)\right)\prod\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{k}(c-\alpha_j)}{v_i\left(1+\eta\sum\limits_{i=1}^{k}\alpha_i\right)\prod\limits_{1\le j\le k, j\neq i}(\alpha_i-\alpha_j)}.$$

证明。 根据 II.11， $\mathcal{C}_6$ 的生成矩阵为

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{G}_1(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{b}, c, \mathcal{L}, \mathcal{P}, \boldsymbol{B}) \\
\triangleq &\boldsymbol{G}_{k-1,1}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{b}, c, \eta) \\
= &\begin{pmatrix}
v_1 & v_2 & \cdots & v_n & 1-\lambda_1 \\
v_1\alpha_1 & v_2\alpha_2 & \cdots & v_n\alpha_n & b_1-\lambda_1 c \\
v_1\alpha_1^2 & v_2\alpha_2^2 & \cdots & v_n\alpha_n^2 & b_1^2-\lambda_1 c^2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
v_1\alpha_1^{k-2} & v_2\alpha_2^{k-2} & \cdots & v_n\alpha_n^{k-2} & b_1^{k-2}-\lambda_1 c^{k-2} \\
v_1\left(\alpha_1^{k-1}+\eta\alpha_1^k\right) & v_2\left(\alpha_2^{k-1}+\eta\alpha_2^k\right) & \cdots & v_n\left(\alpha_n^{k-1}+\eta\alpha_n^k\right) & b_1^{k-1}-\lambda_1 c^{k-1}+\eta\left(b_1^k-\lambda_1 c^k\right)
\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

容易得知，$\boldsymbol{G}_{k-1,1}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{b}, c, \eta)$ 的前 n 列构成一个 $[n,k]$ (+)-TRS 码的生成矩阵，因此 $\boldsymbol{G}_{k-1,1}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{b}, c, \eta)$ 的前 n 列中任意 k 列均线性无关。一般性不失，选取前 k 列。于是

$$
\begin{aligned}
\det\left(\boldsymbol{G}_{k-1,1}^{(k)}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{b}, c, \eta)\right) &= \det\begin{pmatrix}
v_1 & v_2 & \cdots & v_k \\
v_1\alpha_1 & v_2\alpha_2 & \cdots & v_k\alpha_k \\
v_1\alpha_1^2 & v_2\alpha_2^2 & \cdots & v_k\alpha_k^2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
v_1\alpha_1^{k-2} & v_2\alpha_2^{k-2} & \cdots & v_k\alpha_k^{k-2} \\
v_1\left(\alpha_1^{k-1}+\eta\alpha_1^k\right) & v_2\left(\alpha_2^{k-1}+\eta\alpha_2^k\right) & \cdots & v_k\left(\alpha_k^{k-1}+\eta\alpha_k^k\right)
\end{pmatrix} \\
&= \left(1+\eta\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\right)\prod_{i=1}^{k}v_i\prod_{1\le i<j\le k}(\alpha_j-\alpha_i),
\end{aligned}
$$

and

$$
\begin{aligned}
&\det\left(\boldsymbol{G}_{k-1,1}^{(k,i)}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{b}, c, \eta)\right) \\
=&\det\begin{pmatrix}
v_1 & \cdots & v_{i-1} & 1-\lambda_1 & v_{i+1} & \cdots & v_k \\
v_1\alpha_1 & \cdots & v_{i-1}\alpha_{i-1} & b_1-\lambda_1 c & v_{i+1}\alpha_{i+1} & \cdots & v_k\alpha_k \\
v_1\alpha_1^2 & \cdots & v_{i-1}\alpha_{i-1}^2 & b_1^2-\lambda_1 c^2 & v_{i+1}\alpha_{i+1}^2 & \cdots & v_k\alpha_k^2 \\
\vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
v_1\alpha_1^{k-2} & \cdots & v_{i-1}\alpha_{i-1}^{k-2} & b_1^{k-2}-\lambda_1 c^{k-2} & v_{i+1}\alpha_{i+1}^{k-2} & \cdots & v_k\alpha_k^{k-2} \\
v_1\left(\alpha_1^{k-1}+\eta\alpha_1^k\right) & \cdots & v_{i-1}\left(\alpha_{i-1}^{k-1}+\eta\alpha_{i-1}^k\right) & b_1^{k-1}-\lambda_1 c^{k-1}+\eta\left(b_1^k-\lambda_1 c^k\right) & v_{i+1}\left(\alpha_{i+1}^{k-1}+\eta\alpha_{i+1}^k\right) & \cdots & v_k\left(\alpha_k^{k-1}+\eta\alpha_k^k\right)
\end{pmatrix} \\
=&\det\begin{pmatrix}
v_1 & \cdots & v_{i-1} & 1-\lambda_1 & v_{i+1} & \cdots & v_k \\
v_1\alpha_1 & \cdots & v_{i-1}\alpha_{i-1} & b_1-\lambda_1 c & v_{i+1}\alpha_{i+1} & \cdots & v_k\alpha_k \\
v_1\alpha_1^2 & \cdots & v_{i-1}\alpha_{i-1}^2 & b_1^2-\lambda_1 c^2 & v_{i+1}\alpha_{i+1}^2 & \cdots & v_k\alpha_k^2 \\
\vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
v_1\alpha_1^{k-2} & \cdots & v_{i-1}\alpha_{i-1}^{k-2} & b_1^{k-2}-\lambda_1 c^{k-2} & v_{i+1}\alpha_{i+1}^{k-2} & \cdots & v_k\alpha_k^{k-2} \\
v_1\alpha_1^{k-1} & \cdots & v_{i-1}\alpha_{i-1}^{k-1} & b_1^{k-1}-\lambda_1 c^{k-1} & v_{i+1}\alpha_{i+1}^{k-1} & \cdots & v_k\alpha_k^{k-1}
\end{pmatrix} \\
&+\eta\cdot\det\begin{pmatrix}
v_1 & \cdots & v_{i-1} & 1-\lambda_1 & v_{i+1} & \cdots & v_k \\
v_1\alpha_1 & \cdots & v_{i-1}\alpha_{i-1} & b_1-\lambda_1 c & v_{i+1}\alpha_{i+1} & \cdots & v_k\alpha_k \\
v_1\alpha_1^2 & \cdots & v_{i-1}\alpha_{i-1}^2 & b_1^2-\lambda_1 c^2 & v_{i+1}\alpha_{i+1}^2 & \cdots & v_k\alpha_k^2 \\
\vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
v_1\alpha_1^{k-2} & \cdots & v_{i-1}\alpha_{i-1}^{k-2} & b_1^{k-2}-\lambda_1 c^{k-2} & v_{i+1}\alpha_{i+1}^{k-2} & \cdots & v_k\alpha_k^{k-2} \\
v_1\alpha_1^{k} & \cdots & v_{i-1}\alpha_{i-1}^{k} & b_1^{k}-\lambda_1 c^{k} & v_{i+1}\alpha_{i+1}^{k} & \cdots & v_k\alpha_k^{k}
\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

直接计算可得

$$\begin{aligned}
&\det\left(\boldsymbol{G}_{k-1,1}^{(k,i)}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{b},c,\eta)\right)\\
=&(-1)^{k-i}\prod_{s=1,s\neq i}^{k}v_s\cdot\prod_{\substack{1\leq s<t\leq k\\ s\neq i,\,t\neq i}}(\alpha_t-\alpha_s)\left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k}(b_1-\alpha_j)-\lambda_1\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k}(c-\alpha_j)\right)\\
&+(-1)^{k-i}\prod_{s=1,s\neq i}^{k}v_s\cdot\eta\left(\left(b_1+\sum_{j=1,j\neq i}^{k}\alpha_j\right)\prod_{\substack{1\leq s<t\leq k\\ s\neq i,\,t\neq i}}(\alpha_t-\alpha_s)\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k}(b_1-\alpha_j)\right.\\
&\left.-\lambda_1\left(c+\sum_{j=1,j\neq i}^{k}\alpha_j\right)\prod_{\substack{1\leq s<t\leq k\\ s\neq i,\,t\neq i}}(\alpha_t-\alpha_s)\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k}(c-\alpha_j)\right)\\
=&(-1)^{k-i}\prod_{s=1,s\neq i}^{k}v_s\cdot\prod_{\substack{1\leq s<t\leq k\\ s\neq i,\,t\neq i}}(\alpha_t-\alpha_s)\cdot\mathcal{K}_i,
\end{aligned}$$

其中

$$\mathcal{K}_i=\left(1+\eta\left(b_1+\sum_{j=1,j\neq i}^{k}\alpha_j\right)\right)\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k}(b_1-\alpha_j)-\lambda_1\left(1+\eta\left(c+\sum_{j=1,j\neq i}^{k}\alpha_j\right)\right)\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k}(c-\alpha_j).$$

因此，根据

$$\prod_{1\leq i<j\leq k}(\alpha_j-\alpha_i)=(-1)^{k-i}\cdot\prod_{\substack{1\leq s<t\leq k\\ s\neq i,\,t\neq i}}(\alpha_t-\alpha_s)\cdot\prod_{1\leq j\leq k,j\neq i}(\alpha_i-\alpha_j),$$

我们有

$$\frac{\det\left(\boldsymbol{G}_{k-1,1}^{(k,i)}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{b},c,\eta)\right)}{\det\left(\boldsymbol{G}_{k-1,1}^{(k)}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{b},c,\eta)\right)}=\frac{\mathcal{K}_i}{v_i\left(1+\eta\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\right)\prod_{1\leq j\leq k,j\neq i}(\alpha_i-\alpha_j)}.$$

注意，$\boldsymbol{G}_{k-1,\,1}(\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{b},\ c,\ \eta)=\left(\boldsymbol{G}_{n,\,k}(\boldsymbol{\alpha},\ \eta)\,\boldsymbol{g}^T\right)$ 满足

$$\boldsymbol{g}=\left(1-\lambda_1,b_1-\lambda_1c,\ldots,b_1^{k-2}-\lambda_1c^{k-2},b_1^{k-1}-\lambda_1c^{k-1}+\eta\left(b_1^k-\lambda_1c^k\right)\right),$$

其中 $\boldsymbol{G}_{n,\,k}(\boldsymbol{\alpha},\ \eta)$ 是一个 $[n,k]\,(+)$-TGRS 码的生成矩阵。根据 [13, 定理 2.4], 可知，若 $\sum\alpha_i\neq 0_{i=1}$ 且 $\eta\neq-\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)$，或 $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=0$ 且 $\eta\neq 0$，则该 $[n,k]\,(+)$-TGRS 码的校验矩阵为

$$\boldsymbol{H}_{n,k}(\boldsymbol{\alpha})=\begin{pmatrix}
\frac{u_1}{v_1} & \cdots & \frac{u_n}{v_n}\\
\frac{u_1}{v_1}\alpha_1 & \cdots & \frac{u_n}{v_n}\alpha_n\\
\frac{u_1}{v_1}\alpha_1^2 & \cdots & \frac{u_n}{v_n}\alpha_n^2\\
\vdots & & \vdots\\
\frac{u_1}{v_1}\alpha_1^{n-k-2} & \cdots & \frac{u_n}{v_n}\alpha_n^{n-k-2}\\
\frac{u_1}{v_1}\left(\alpha_1^{n-k-1}-\frac{\eta}{1+\eta\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}\alpha_1^{n-k}\right) & \cdots & \frac{u_n}{v_n}\left(\alpha_n^{n-k-1}-\frac{\eta}{1+\eta\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}\alpha_n^{n-k}\right)
\end{pmatrix}_{(n-k)\times n}.$$

现在，根据定理 IV.5，我们证明定理 IV.9。 □

C. 通过两次连续扩展得到的特殊情形下的 $\mathcal{C}_1$ 校验矩阵

在本小节中，我们考虑 $\mathcal{C}_1$ 在 $m=2$ 和 $\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & \delta\end{pmatrix}$ 的特殊情形，记作 $\mathcal{C}_1^{(1)}$。我们基于 $\mathcal{C}\left(\mathcal{L},\ \mathcal{P},\ \boldsymbol{B}_1\right)$ 的校验矩阵，通过两次连续扩展构造校验矩阵。

首先，通过构造一个 $1\times n$ 向量，我们证明 $\mathcal{C}_{k,\ell}(\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{v},\ \boldsymbol{A}_1,\ \boldsymbol{B}_1)$ 是 $\mathcal{C}(\mathcal{L},\ \mathcal{P},\ \boldsymbol{B}_1)$ 的第二类扩展码，其中 $\boldsymbol{A}_1=(1)$ 且 $\boldsymbol{B}_1$ 见 （9）。

定理 IV.10。 若 $n\geq k+\ell+1$ 和 $b_{k-1,\ell}\in\mathbb{F}_q^*$，则 $\mathcal{C}_{k,\ell}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{v},\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{B}_1)=\mathcal{C}(\mathcal{L},\mathcal{P},\boldsymbol{B}_1)\left(\boldsymbol{w}^{(1)}\right)$ 满足

$$w_i^{(1)}=b_{k-1,\ell}^{-1}\frac{u_i}{v_i}\alpha_i^{n-k-1-\ell}(1\leq i\leq n).$$

证明。 根据定义 II.1，容易得知 $\mathcal{C}(\mathcal{L},\ \mathcal{P},\ \boldsymbol{B}_1)$ 的生成矩阵为

$$\boldsymbol{G}(\mathcal{L},\mathcal{P},\boldsymbol{B}_1)=\begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_n\\ v_1\alpha_1 & \cdots & v_n\alpha_n\\ \vdots & & \vdots\\ v_1\alpha_1^{k-3} & \cdots & v_n\alpha_n^{k-3}\\ v_1\alpha_1^{k-2} & \cdots & v_n\alpha_n^{k-2}\\ v_1\left(\alpha_1^{k-1}+\sum\limits_{j=0}^{\ell}b_{k-1,j}\alpha_1^{k+j}\right) & \cdots & v_n\left(\alpha_n^{k-1}+\sum\limits_{j=0}^{\ell}b_{k-1,j}\alpha_n^{k+j}\right)\end{pmatrix}.$$

接下来只需验证

$$\boldsymbol{G}(\mathcal{L},\mathcal{P},\boldsymbol{B}_1)\left(\boldsymbol{w}^{(1)}\right)^T=(0,\ldots,0,1)^T.$$

经直接计算，很容易完成如下验证。

为方便起见，记 $\boldsymbol{g}_i^{(4)}(0\leq i\leq k-1)$ 为 $\boldsymbol{G}(\mathcal{L},\ \mathcal{P},\ \boldsymbol{B}_1)$ 的第 $i+1$ 行向量。

对于 $0\leq i\leq k-2$，注意到

$$n-k-1-\ell+i\leq n-\ell-3<n-2,$$

则根据引理II.16，有

$$\boldsymbol{g}_i^{(4)}\left(\boldsymbol{w}^{(1)}\right)^T=b_{k-1,\ell}^{-1}\sum_{s=1}^{n}u_s\alpha_s^{n-k-1-\ell+i}=0,$$

对于 $i=k-1$，根据引理 II.16，有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{g}_i^{(4)}\left(\boldsymbol{w}^{(1)}\right)^T=&b_{k-1,\ell}^{-1}\sum_{s=1}^{n}u_s\left(\alpha_s^i+\sum_{j=0}^{\ell}b_{k-1,j}\alpha_s^{k+j}\right)\alpha_s^{n-k-1-\ell}\\ =&b_{k-1,\ell}^{-1}\sum_{s=1}^{n}u_s\alpha_s^{n-k-1-\ell+i}+b_{k-1,\ell}^{-1}\sum_{j=0}^{\ell}b_{k-1,j}\sum_{s=1}^{n}u_s\alpha_s^{n-k-1-\ell+k+j},\end{aligned}$$

注意，对于 $i=k-1$，

$$n-k-1-\ell+i=n-2-\ell\leq n-2,$$

而对于 $0\leq j\leq\ell-1$，

$$n-k-1-\ell+k+j=n-1-\ell+j\leq n-2,$$

then

$$\begin{aligned}\boldsymbol{g}_i^{(4)}\left(\boldsymbol{w}^{(1)}\right)^T=&b_{k-1,\ell}^{-1}\left(\sum_{j=0}^{\ell-1}b_{k-1,j}\sum_{s=1}^{n}u_s\alpha_s^{n-k-1-\ell+k+j}+b_{k-1,\ell}\sum_{s=1}^{n}u_s\alpha_s^{n-k-1-\ell+k+\ell}\right)\\ =&b_{k-1,\ell}^{-1}\cdot b_{k-1,\ell}\sum_{i=1}^{n}u_i\alpha_i^{n-k-1-\ell+k+\ell}\\ =&1.\end{aligned}$$

这就证明了定理 IV.10。 □

其次，通过构造一个 $1\times(n+1)$ 向量，我们证明 $\mathcal{C}_{k,\ell}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{v},\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{B}_1)$ 是 $\mathcal{C}_{k,\ell}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{v},\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{B}_1)$ 的第二类扩展码，其中 $\boldsymbol{A}_1=(1)$、$\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}0&1\\1&\delta\end{pmatrix}$ 和 $\boldsymbol{B}_i(i=1,2)$ 在（9）中给出。

定理 IV.11。 $\mathcal{C}_{k,\ell}(\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{v},\ \boldsymbol{A}_2,\ \boldsymbol{B}_1)=\mathcal{C}_{k,\ell}(\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{v},\ \boldsymbol{A}_1,\ \boldsymbol{B}_1)\left(\boldsymbol{w}^{(2)}\right)$ 其中 $w_i^{(2)}=\begin{cases}\frac{u_i}{v_i}\alpha_i^{n-k+1}, & 1\leq i\leq n;\\ \delta-S_1-\sum\limits_{j=0}^{\ell}b_{k-1,j}S_{j+2}, & i=n+1.\end{cases}$

证明。 根据注 II.4，容易得知 $\mathcal{C}_{k,\ \ell}(\boldsymbol{\alpha},\ \ \boldsymbol{v},\ \ \boldsymbol{A}_1,\ \ \boldsymbol{B}_1)$ 的生成矩阵为

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{B}_1)=\begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_n & 0\\ v_1\alpha_1 & \cdots & v_n\alpha_n & 0\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ v_1\alpha_1^{k-3} & \cdots & v_n\alpha_n^{k-3} & 0\\ v_1\alpha_1^{k-2} & \cdots & v_n\alpha_n^{k-2} & 0\\ v_1\left(\alpha_1^{k-1}+\sum\limits_{j=0}^{\ell}b_{k-1,j}\alpha_1^{k+j}\right) & \cdots & v_n\left(\alpha_n^{k-1}+\sum\limits_{j=0}^{\ell}b_{k-1,j}\alpha_n^{k+j}\right) & 1\end{pmatrix}.$$

那么我们只需检查

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{B}_1)\left(\boldsymbol{w}^{(2)}\right)^T=(0,\ldots,0,1,\delta)^T.$$

通过直接计算，很容易完成如下验证。

为方便起见，记 $\boldsymbol{g}_i^{(6)}$ $(0\le i\le k-1)$ 为 $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{B}_1)$ 的第 $(i+1)$ 个行向量。

对于 $0\le i\le k-2$，根据引理 II.16，有

$$\boldsymbol{g}_i^{(6)}\left(\boldsymbol{w}^{(2)}\right)^T=\begin{cases}\sum\limits_{s=1}^{n}u_s\alpha_s^{n-k+1+i}=0, & 0\le i\le k-3;\\ \sum\limits_{s=1}^{n}u_s\alpha_s^{n-k+1+i}=1, & i=k-2.\end{cases}$$

对于 $i=k-1$，根据引理 II.16，有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{g}_{k-1}^{(6)}\left(\boldsymbol{w}^{(2)}\right)^T=&\sum_{s=1}^{n}u_s\left(\alpha_s^{k-1}+\sum_{j=0}^{\ell}b_{k-1,j}\alpha_s^{k+j}\right)\alpha_s^{n-k+1}+\left(\delta-S_1-\sum_{j=0}^{\ell}b_{k-1,j}S_{j+2}\right)\\ =&S_1+\sum_{j=0}^{\ell}b_{k-1,j}S_{j+2}+\left(\delta-S_1-\sum_{j=0}^{\ell}b_{k-1,j}S_{j+2}\right)\\ =&\delta.\end{aligned}$$

这就证明了定理IV.11。 □

最后，由引理 IV.3 和 [17],的定理 3.1，可容易得到如下结果

ℓ**定理 IV.12.** 设 $n\ge k+\ell+1$, $\mathcal{A}=\delta-S_1-\sum b_{k-1,j}S_{j+2}$ 和 $\beta=b_{k-1,\ell}\in\mathbb{F}_q^*$。则以下两个陈述$j=0$成立。

(1) 若 $1+\sum\limits_{t=0}^{\ell}b_{k-1,t}S_{t+1}\neq 0$,
则

$$\boldsymbol{H}_3(\delta,\boldsymbol{B}_1)=\begin{pmatrix} \frac{u_1}{v_1} & \cdots & \frac{u_n}{v_n} & 0 & 0\\ \frac{u_1}{v_1}\alpha_1 & \cdots & \frac{u_n}{v_n}\alpha_n & 0 & 0\\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots\\ \frac{u_1}{v_1}\alpha_1^{n-k-(\ell+2)} & \cdots & \frac{u_n}{v_n}\alpha_n^{n-k-(\ell+2)} & 0 & 0\\ \frac{u_1}{v_1}\alpha_1^{n-k-1-\ell} & \cdots & \frac{u_n}{v_n}\alpha_n^{n-k-1-\ell} & -b_{k-1,\ell} & 0\\ \frac{u_1}{v_1}\alpha_1^{n-k-\ell} & \cdots & \frac{u_n}{v_n}\alpha_n^{n-k-\ell} & -b_{k-1,\ell}\Theta_{n-k-(\ell+1)}^{-1}\Theta_{n-k-\ell} & 0\\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots\\ \frac{u_1}{v_1}\alpha_1^{n-k-1} & \cdots & \frac{u_n}{v_n}\alpha_n^{n-k-1} & -b_{k-1,\ell}\Theta_{n-k-(\ell+1)}^{-1}\Theta_{n-k-1} & 0\\ \frac{u_1}{v_1}\alpha_1^{n-k} & \cdots & \frac{u_n}{v_n}\alpha_n^{n-k} & -b_{k-1,\ell}\Theta_{n-k-(\ell+1)}^{-1} & 0\\ \frac{u_1}{v_1}\alpha_1^{n-k+1} & \cdots & \frac{u_n}{v_n}\alpha_n^{n-k+1} & \mathcal{A} & -1\end{pmatrix}_{(n+2-k)\times(n+2)}$$

ℓ是码 $\mathcal{C}_1^{(1)}$ 的校验矩阵，其中 $\Theta_i=\frac{\sum\limits_{t=0}^{\ell}b_{k-1,\ t}S_{k+t+i-n+1}}{1+\sum\limits_{t=0}^{\ell}b_{k-1,\ t}S_{t+1}}$ $(n-k-\ell-1\le i\le n-k-1)$。

$\ell(2)$ 如果 $\ell \geq 1$ 且 $1+\sum b_{k-1,\ t}S_{t+1}=0$，则矩阵$_{t=0}$

$$\boldsymbol{H}_4(\delta,\boldsymbol{B}_1)=\begin{pmatrix} \frac{u_1}{v_1} & \cdots & \frac{u_n}{v_n} & 0 & 0 \\ \frac{u_1}{v_1}\alpha_1 & \cdots & \frac{u_n}{v_n}\alpha_n & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{u_1}{v_1}\alpha_1^{n-k-(\ell+2)} & \cdots & \frac{u_n}{v_n}\alpha_n^{n-k-(\ell+2)} & 0 & 0 \\ \frac{u_1}{v_1}\left(\alpha_1^{n-k-\ell}-\Omega_{n-k-\ell}\alpha_1^{n-k-(\ell+1)}\right) & \cdots & \frac{u_n}{v_n}\left(\alpha_n^{n-k-\ell}-\Omega_{n-k-\ell}\alpha_n^{n-k-(\ell+1)}\right) & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{u_1}{v_1}\left(\alpha_1^{n-k-1}-\Omega_{n-k-1}\alpha_1^{n-k-(\ell+1)}\right) & \cdots & \frac{u_n}{v_n}\left(\alpha_n^{n-k-1}-\Omega_{n-k-1}\alpha_n^{n-k-(\ell+1)}\right) & 0 & 0 \\ \frac{u_1}{v_1}\alpha_1^{n-k} & \cdots & \frac{u_n}{v_n}\alpha_n^{n-k} & 0 & 0 \\ b_{k-1,\ell}^{-1}\frac{u_1}{v_1}\alpha_1^{n-k-1-\ell} & \cdots & b_{k-1,\ell}^{-1}\frac{u_n}{v_n}\alpha_n^{n-k-1-\ell} & -1 & 0 \\ \frac{u_1}{v_1}\alpha_1^{n-k+1} & \cdots & \frac{u_n}{v_n}\alpha_n^{n-k+1} & \mathcal{A} & -1 \end{pmatrix}_{(n+2-k)\times(n+2)}$$

是码 $\mathcal{C}_1^{(1)}$ 的校验矩阵，其中 $\Omega_i=b_{k-1,\ \ell}^{-1}\sum_{t=0}^{\ell}b_{k-1,\ t}S_{k+t+i-n+1}$（$n-k-\ell\leq i\leq n-k-1$）。

证明。由定理 IV.5 和 [17] 的定理 3.1（为节省篇幅，这里不将其写成引理的形式），很容易看出以下两个陈述成立。

（i）若 $1+\sum_{t=0}^{\ell}b_{k-1,\ t}S_{t+1}\neq 0$，则

$$\boldsymbol{H}_2(\delta,\boldsymbol{B}_1)=\begin{pmatrix} \frac{u_1}{v_1} & \cdots & \frac{u_n}{v_n} & 0 & 0 \\ \frac{u_1}{v_1}\alpha_1 & \cdots & \frac{u_n}{v_n}\alpha_n & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{u_1}{v_1}\alpha_1^{n-k-(\ell+2)} & \cdots & \frac{u_n}{v_n}\alpha_n^{n-k-(\ell+2)} & 0 & 0 \\ \frac{u_1}{v_1}\left(\alpha_1^{n-k-(\ell+1)}-\Theta_{n-k-(\ell+1)}\alpha_1^{n-k}\right) & \cdots & \frac{u_n}{v_n}\left(\alpha_n^{n-k-(\ell+1)}-\Theta_{n-k-(\ell+1)}\alpha_n^{n-k}\right) & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{u_1}{v_1}\left(\alpha_1^{n-k-1}-\Theta_{n-k-1}\alpha_1^{n-k}\right) & \cdots & \frac{u_n}{v_n}\left(\alpha_n^{n-k-1}-\Theta_{n-k-1}\alpha_n^{n-k}\right) & 0 & 0 \\ b_{k-1,\ell}^{-1}\frac{u_1}{v_1}\alpha_1^{n-k-1-\ell} & \cdots & b_{k-1,\ell}^{-1}\frac{u_n}{v_n}\alpha_n^{n-k-1-\ell} & -1 & 0 \\ \frac{u_1}{v_1}\alpha_1^{n-k+1} & \cdots & \frac{u_n}{v_n}\alpha_n^{n-k+1} & \mathcal{A} & -1 \end{pmatrix}_{(n+2-k)\times(n+2)}$$

是码 $\mathcal{C}_1^{(1)}$ 的校验矩阵；

（ii）若 $\ell\geq 1$ 且 $1+\sum_{t=0}^{\ell}b_{k-1,\ t}S_{t+1}=0$，则 $\boldsymbol{H}_4(\delta,\ \boldsymbol{B}_1)$ 是码 $\mathcal{C}_1^{(1)}$ 的校验矩阵。$_{t=0}$对于（i），为方便起见，我们记 $\boldsymbol{g}_i(\delta,\ \boldsymbol{B}_1)(0\leq i\leq n+1-k)$ 为 $\boldsymbol{H}_2(\delta,\ \boldsymbol{B}_1)$ 的第（$i+1$）行行向量。注意 t hat

$$\Theta_{n-k-(\ell+1)}=\frac{\sum_{t=0}^{\ell}b_{k-1,t}S_{t-\ell}}{1+\sum_{t=0}^{\ell}b_{k-1,t}S_{t+1}}=\frac{b_{k-1,\ell}}{1+\sum_{t=0}^{\ell}b_{k-1,t}S_{t+1}}\in\mathbb{F}_q^*,$$

然后通过 p 对 $\boldsymbol{H}_2(\delta,\ \boldsymbol{B}_1)$ 执行以下初等行变换，我们可以得到 $\boldsymbol{H}_3(\delta,\ \boldsymbol{B}_1$).

步骤 1. 将 $\boldsymbol{g}_{n-k-\ell-1}(\delta,\boldsymbol{B}_1)$ 替换为 $\boldsymbol{g}^{(1)}_{n-k-\ell-1}(\delta,\boldsymbol{B}_1)\triangleq\boldsymbol{g}_{n-k-\ell-1}(\delta,\boldsymbol{B}_1)-b_{k-1,\ \ell}\boldsymbol{g}_{n-k}(\delta,\boldsymbol{B}_1)$。步骤 2. 将 $\boldsymbol{g}^{(1)}_{n-k-\ell-1}(\delta,\boldsymbol{B}_1)$ 替换为 $\boldsymbol{g}^{(2)}_{n-k-\ell-1}(\delta,\boldsymbol{B}_1)\triangleq-\Theta^{-1}_{n-k-\ell-1}\boldsymbol{g}^{(1)}_{n-k-\ell-1}(\delta,\boldsymbol{B}_1)$。步骤 3. 对于 $n-k-\ell\leq i\leq n-k-1$，将 $\boldsymbol{g}_i(\delta,\boldsymbol{B}_1)$ 替换为 $\boldsymbol{g}_i(\delta,\boldsymbol{B}_1)+\Theta_i\boldsymbol{g}^{(2)}_{n-k-\ell-1}(\delta,\boldsymbol{B}_1)$。步骤 4. 将 $\boldsymbol{g}_{n-k}(\delta,\boldsymbol{B}_1)$ 替换为 $b_{k-1,\ \ell}\boldsymbol{g}_{n-k}(\delta,\boldsymbol{B}_1)$。步骤 5. 交换所得矩阵的第（$n-k-\ell$）行和第（$n-k+1$）行。这证明了定理 IV.12。 □

注 IV.13. (1) 对于 $n\geq k+\ell+2$ 以及定理 *IV.12* 中的相应假设，矩阵 $\boldsymbol{H}_3(\delta,\boldsymbol{B}_1)$ 和 $\boldsymbol{H}_4(\delta,\boldsymbol{B}_1)$ 均与定理 $m=2$ 和 $\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}0&1\\1&\delta\end{pmatrix}$ 所述情形下的矩阵行等价，其中情形见定理 *III.1*。通过选择这些高度依赖于指定附加列的扩展向量，可以继续此构造，从而得到一个$\mathcal{C}_1$的校验矩阵。它是否与定理 *III.1* 中的矩阵行等价，取决于所选向量，而这又取决于所需的行变换。

(2) 扩展构造清楚地展现了原码 $\mathcal{C}(\mathcal{L},\mathcal{P},\boldsymbol{B}_1)$ 与所得扩展码之间的密切联系。

D. $\mathcal{C}_h$ （η、 b、 δ） 的校验矩阵

在本小节中，我们从扩展码的角度出发，给出 $\mathcal{C}_h(\eta,b,\delta)$ 的校验矩阵，该矩阵基于定理 III.7中给出的 $\mathcal{C}_h(\eta,b)$ 的校验矩阵。

定理 IV.14。 $\mathcal{C}_h(\boldsymbol{\alpha},\eta,\boldsymbol{b},\delta) = \mathcal{C}_h(\boldsymbol{\alpha},\eta,\boldsymbol{b})\left(\boldsymbol{w}^{(4)}\right)$ 其中

$$w_i^{(4)} = \begin{cases} \frac{u_i}{v_i}\delta\alpha_i^{n-k}, & 1\le i\le n; \\ \eta^{-1}\left(\eta-\delta\sum\limits_{j=0}^{\ell}b_jS_{j+1}\right), & i=n+1. \end{cases}$$

证明。 容易知道， $\mathcal{C}_4$ 具有生成矩阵

$$\boldsymbol{G}_h(\boldsymbol{\alpha},\eta,\boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_n & 0 \\ v_1\alpha_1 & \cdots & v_n\alpha_n & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ v_1\alpha_1^{h-1} & \cdots & v_n\alpha_n^{h-1} & 0 \\ v_1\left(\alpha_1^h+\sum\limits_{j=0}^{\ell}b_j\alpha_1^{k+j}\right) & \cdots & v_n\left(\alpha_n^h+\sum\limits_{j=0}^{\ell}b_j\alpha_n^{k+j}\right) & \eta \\ v_1\alpha_1^{h+1} & \cdots & v_n\alpha_n^{h+1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ v_1\alpha_1^{k-1} & \cdots & v_n\alpha_n^{k-1} & 0 \end{pmatrix}_{k\times(n+1)}$$

然后我们只需检查

$$\boldsymbol{G}_h(\boldsymbol{\alpha},\eta,\boldsymbol{b})\left(\boldsymbol{w}^{(4)}\right)^T = (0,\ldots,0,\eta,0,\ldots,0,\delta)^T.$$

对于 $i\in\{0,1,\ldots,k-1\}\setminus\{h\}$,

$$\delta\sum_{s=1}^{n}u_s\alpha_s^{n-k+i} = \begin{cases} 0, & i\ne k-1; \\ \delta, & i=k-1. \end{cases}$$

对于 $i=h$,

$$\delta\sum_{s=1}^{n}u_s\left(\alpha_s^h+\sum_{j=0}^{\ell}b_j\alpha_s^{k+j}\right)\alpha_s^{n-k}+\eta\cdot\eta^{-1}\left(\eta-\delta\sum_{j=0}^{\ell}b_jS_{j+1}\right)=\eta.$$

这证明了定理IV.14。 □

注 IV.15. 取 $\ell=1$， $b_0=0$， $b_1\in\mathbb{F}_q^*$ 和 $\eta=1$ 代入定理 *IV.14*，相应的结果就是 *[36]* 中的定理 *3.1*。

因此，由定理 IV.5 和定理 III.7，我们有以下

定理 IV.16. 矩阵

$$\boldsymbol{H}_h(\boldsymbol{\alpha},\eta,\boldsymbol{b},\delta) = \begin{pmatrix} \frac{u_1}{v_1} & \cdots & \frac{u_n}{v_n} & -\eta^{-1}\sum\limits_{t=0}^{\ell}b_t\,S_{k+t-n+1} & 0 \\ \frac{u_1}{v_1}\alpha_1 & \cdots & \frac{u_n}{v_n}\alpha_n & -\eta^{-1}\sum\limits_{t=0}^{\ell}b_t\,S_{k+t-n+2} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{u_1}{v_1}\alpha_1^{n-k-1} & \cdots & \frac{u_n}{v_n}\alpha_n^{n-k-1} & -\eta^{-1}\sum\limits_{t=0}^{\ell}b_t\,S_t & 0 \\ \frac{u_1}{v_1}\Lambda_{1,h} & \cdots & \frac{u_n}{v_n}\Lambda_{n,h} & -\eta^{-1} & 0 \\ \frac{u_1}{v_1}\delta\alpha_1^{n-k} & \cdots & \frac{u_n}{v_n}\delta\alpha_n^{n-k} & \eta^{-1}\left(\eta-\delta\sum\limits_{j=0}^{\ell}b_jS_{j+1}\right) & -1 \end{pmatrix}_{(n+2-k)\times(n+2)}$$

是 $\mathcal{C}_h(\eta,\ \boldsymbol{b},\ \delta)$，其中$\Lambda_{i,\ h} = \sum\limits_{j=0}^{n-1-h}(-1)^j\sigma_j\,\alpha_i^{n-1-h-j}$

E. MGRS_{n+1}的校验矩阵$k\,(\alpha,\ \ v,\ \ \eta,\ \ t)$

定理 IV.17。若 $k \leq \ \ n$，则对任意 $1 \leq t \leq k-1$，$\mathrm{MGRS}_{n+1,\ k}\ (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{v}, \eta, t)$ 具有如下校验矩阵 *ix*

$$\begin{pmatrix} \frac{u_1}{v_1} & \cdots & \frac{u_k}{v_k} & \frac{u_{k+1}}{v_{k+1}} & \cdots & \frac{u_n}{v_n} & 0 \\ \frac{u_1}{v_1}\alpha_1 & \cdots & \frac{u_k}{v_k}\alpha_k & \frac{u_{k+1}}{v_{k+1}}\alpha_{k+1} & \cdots & \frac{u_n}{v_n}\alpha_n & 0 \\ \frac{u_1}{v_1}\alpha_1^2 & \cdots & \frac{u_k}{v_k}\alpha_k^2 & \frac{u_{k+1}}{v_{k+1}}\alpha_{k+1}^2 & \cdots & \frac{u_n}{v_n}\alpha_n^2 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{u_1}{v_1}\alpha_1^{n-k-1} & \cdots & \frac{u_k}{v_k}\alpha_k^{n-k-1} & \frac{u_{k+1}}{v_{k+1}}\alpha_{k+1}^{n-k-1} & \cdots & \frac{u_n}{v_n}\alpha_n^{n-k-1} & 0 \\ \frac{\det\left(\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{v},n+1,t}^{(k,1)}\right)}{\det\left(\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{v},n+1,t}^{(k)}\right)} & \cdots & \frac{\det\left(\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{v},n+1,t}^{(k,k)}\right)}{\det\left(\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{v},n+1,t}^{(k)}\right)} & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

其中 $\det\left(\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{v},n+1,t}^{(k,i)}\right)$ $\det\left(\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{v},n+1,t}^{(k)}\right)$ 的定义见*(12)*。

证明。根据定义 II.13，我们知道 $\mathrm{MGRS}_{n+1,\ k}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{v}, \eta, t)$ 具有如下生成矩阵

$$\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{v},n+1,t} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n & v_{n+1} \\ v_1\alpha_1 & v_2\alpha_2 & \cdots & v_n\alpha_n & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ v_1\alpha_1^{t-1} & v_2\alpha_2^{t-1} & \cdots & v_n\alpha_n^{t-1} & 0 \\ v_1\alpha_1^{t} & v_2\alpha_2^{t} & \cdots & v_n\alpha_n^{t} & v_{n+1}\eta \\ v_1\alpha_1^{t+1} & v_2\alpha_2^{t+1} & \cdots & v_n\alpha_n^{t+1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ v_1\alpha_1^{k-1} & v_2\alpha_2^{k-1} & \cdots & v_n\alpha_n^{k-1} & 0 \end{pmatrix}_{k\times(n+1)}.$$

容易看出，$\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{v},\ n+1,\ t}$ 的前 n 列构成一个 $[n,k]$ GRS 码的生成矩阵，因此 $\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{v},\ n+1,\ t}$ 的前 n 列中任意 k 列都是 $\mathbb{F}_q$-线性无关的。不失一般性，我们选取前 k 列。于是

$$\det\left(\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{v},n+1,t}^{(k)}\right) = \det\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_k \\ v_1\alpha_1 & v_2\alpha_2 & \cdots & v_k\alpha_k \\ v_1\alpha_1^2 & v_2\alpha_2^2 & \cdots & v_k\alpha_k^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_1\alpha_1^{k-1} & v_2\alpha_2^{k-1} & \cdots & v_k\alpha_k^{k-1} \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{k} v_i \cdot \prod_{1\leq i<j\leq k}(\alpha_j-\alpha_i),$$

and

$$\begin{aligned} &\det\left(\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{v},n+1,t}^{(k,i)}\right) \\ =&\det\begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_{i-1} & v_{n+1} & v_{i+1} & \cdots & v_k \\ v_1\alpha_1 & \cdots & v_{i-1}\alpha_{i-1} & 0 & v_{i+1}\alpha_{i+1} & \cdots & v_k\alpha_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \\ v_1\alpha_1^{t-1} & \cdots & v_{i-1}\alpha_{i-1}^{t-1} & 0 & v_{i+1}\alpha_{i+1}^{t-1} & \cdots & v_k\alpha_k^{t-1} \\ v_1\alpha_1^{t} & \cdots & v_{i-1}\alpha_{i-1}^{t} & v_{n+1}\eta & v_{i+1}\alpha_{i+1}^{t} & \cdots & v_k\alpha_k^{t} \\ v_1\alpha_1^{t+1} & \cdots & v_{i-1}\alpha_{i-1}^{t+1} & 0 & v_{i+1}\alpha_{i+1}^{t+1} & \cdots & v_k\alpha_k^{t+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_1\alpha_1^{k-1} & \cdots & v_{i-1}\alpha_{i-1}^{k-1} & 0 & v_{i+1}\alpha_{i+1}^{k-1} & \cdots & v_k\alpha_k^{k-1} \end{pmatrix} \\ =&(-1)^{k-i}\cdot v_{n+1}\cdot\prod_{j=1,j\neq i}^{k} v_j\left((-1)^{k+1}\prod_{j=1,j\neq i}^{k}\alpha_j\cdot\det\left(\boldsymbol{M}_{1,i}\right)+(-1)^{k+t+1}\eta\cdot\det\left(\boldsymbol{M}_{2,i}\right)\right), \end{aligned}$$

其中

$$\boldsymbol{M}_{1,i} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_{i-1} & \alpha_{i+1} & \cdots & \alpha_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ \alpha_1^{k-2} & \cdots & \alpha_{i-1}^{k-2} & \alpha_{i+1}^{k-2} & \cdots & \alpha_k^{k-2} \end{pmatrix}, \boldsymbol{M}_{2,i} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_{i-1} & \alpha_{i+1} & \cdots & \alpha_k \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^{t-1} & \cdots & \alpha_{i-1}^{t-1} & \alpha_{i+1}^{t-1} & \cdots & \alpha_k^{t-1} \\ \alpha_1^{t+1} & \cdots & \alpha_{i-1}^{t+1} & \alpha_{i+1}^{t+1} & \cdots & \alpha_k^{t+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ \alpha_1^{k-1} & \cdots & \alpha_{i-1}^{k-1} & \alpha_{i+1}^{k-1} & \cdots & \alpha_k^{k-1} \end{pmatrix}.$$

容易得到

$$\det\left(\boldsymbol{M}_{1,i}\right)=\prod_{\substack{1\le r<s\le k\\ r,s\neq i}}(\alpha_s-\alpha_r),$$

根据引理II.18 和通常的范德蒙德公式，可得

$$\det\left(\boldsymbol{M}_{2,i}\right)=\prod_{\substack{1\le r<s\le k\\ r,s\neq i}}(\alpha_s-\alpha_r)\cdot\sigma_{k-1-t}(\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1},\alpha_{i+1},\ldots,\alpha_k).$$

此外,

$$\det\left(\boldsymbol{G}^{(k,i)}_{\boldsymbol{v},n+1,t}\right)=(-1)^{k-i}v_{n+1}\cdot\prod_{j=1,j\neq i}^{k}v_j\cdot\prod_{\substack{1\le r<s\le k\\ r,s\neq i}}(\alpha_s-\alpha_r)\cdot\left((-1)^{k+1}\prod_{j=1,j\neq i}^{k}\alpha_j+(-1)^{k+t+1}\eta\sigma_{k-1-t}(\boldsymbol{\alpha_{k,i}})\right),$$

其中 $\boldsymbol{\alpha_{k,\ i}}=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1},\alpha_{i+1},\ldots,\alpha_k\}$。则

$$\frac{\det\left(\boldsymbol{G}^{(k,i)}_{\boldsymbol{v},n+1,t}\right)}{\det\left(\boldsymbol{G}^{(k)}_{\boldsymbol{v},n+1,t}\right)}=\frac{v_{n+1}\left((-1)^{k+1}\prod_{j=1,j\neq i}^{k}\alpha_j+(-1)^{k+t+1}\eta\sigma_{k-1-t}(\boldsymbol{\alpha_{k,i}})\right)}{v_i\prod_{j=1,j\neq i}^{k}(\alpha_i-\alpha_j)}\tag{12}$$

因此，根据定理IV.5，我们证明了定理IV.17。 □

V. (1) 列 TGRS 码和一类 $(\mathcal{L},\ \mathcal{P})$-TGRL 码的最大距离可分或近最大距离可分性质*A. 一类$(\mathcal{L},\ \mathcal{P})$-TGRL 码的最大距离可分性质*

在本小节中，我们 为一类 $(\mathcal{L},\mathcal{P})$-TGRL 码建立充要条件，使其为最大距离可分 S.

定理 V.1。 当且仅当以下三个陈述成立时，$(\mathcal{L},\mathcal{P})$-TGRL 码 $\mathcal{C}_{k,\ell}(\mathcal{L},\mathcal{P},\boldsymbol{A}_{2\times 2},\boldsymbol{B})$ 满足 $k\ge 3$, $\mathcal{L}=[\ell+1]$ 和 $\mathcal{P}=[k]$，且为最大距离可分码。

(1) 对任意 $\det\left(\boldsymbol{I}_k+\widetilde{\boldsymbol{B}_1}\boldsymbol{F}_{\mathcal{I}_k}\right)\in\mathbb{F}_q^*$-子集 $\mathcal{I}_k\subseteq\{1,2,\ldots,n\}$，*det* k，其中 $\widetilde{\boldsymbol{B}_1}$在 *(13)* 中给出，且 $\boldsymbol{F}_{\mathcal{I}_k}=\begin{pmatrix} f_{0,0}^{(\mathcal{I}_k)} & \cdots & f_{0,k-1}^{(\mathcal{I}_k)}\\ \vdots & & \vdots\\ f_{\ell,0}^{(\mathcal{I}_k)} & \cdots & f_{\ell,k-1}^{(\mathcal{I}_k)}\end{pmatrix}$.

(2) $\left(a_{2i}\cdot\det\left(\boldsymbol{I}_{k-1}+\widetilde{\boldsymbol{B}_2}\boldsymbol{F}_{\mathcal{I}_{k-1}}\right)-a_{1i}\det\left(\boldsymbol{T}_{\mathcal{I}_{k-1}}+\widetilde{\boldsymbol{B}_3}\boldsymbol{F}_{\mathcal{I}_{k-1}}\right)\right)\in\mathbb{F}_q^*$对任意 $(k-1)$-子集 $\mathcal{I}_{k-1}\subseteq\{1,2,\ldots,n\}$ 和 $i\in\{1,2\}$，其中 $\boldsymbol{B}_2$，$\boldsymbol{B}_3$ 在 *(14)* 中给出，且

$$\boldsymbol{T}_{\mathcal{I}_{k-1}}=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0&0\\0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&0\\f_{0,0}^{(\mathcal{I}_{k-1})}&f_{0,1}^{(\mathcal{I}_{k-1})}&\cdots&f_{0,k-3}^{(\mathcal{I}_{k-1})}&f_{0,k-2}^{(\mathcal{I}_{k-1})}\end{pmatrix},\ \boldsymbol{F}_{\mathcal{I}_{k-1}}=\begin{pmatrix}f_{1,0}^{(\mathcal{I}_{k-1})}&\cdots&f_{1,k-2}^{(\mathcal{I}_{k-1})}\\\vdots&&\vdots\\f_{\ell+1,0}^{(\mathcal{I}_{k-1})}&\cdots&f_{\ell+1,k-2}^{(\mathcal{I}_{k-1})}\end{pmatrix}.$$

(3) $\det\left(\boldsymbol{I}_{k-2}+\widetilde{\boldsymbol{B}_4}\boldsymbol{F}_{\mathcal{I}_{k-2}}\right)\in\mathbb{F}_q^*$对于任意 $(k-2)$-子集 $\mathcal{I}_{k-2}\subseteq\{1,2,\ldots,n\}$，其中 $\widetilde{\boldsymbol{B}_4}$ 由*(15)* 给出，并且

$$\boldsymbol{F}_{\mathcal{I}_{k-2}}=\begin{pmatrix}f_{2,0}^{(\mathcal{I}_{k-2})}&\cdots&f_{2,k-3}^{(\mathcal{I}_{k-2})}\\\vdots&&\vdots\\f_{\ell+2,0}^{(\mathcal{I}_{k-2})}&\cdots&f_{\ell+2,k-3}^{(\mathcal{I}_{k-2})}\end{pmatrix}.$$

证明。 根据定义 II.3，容易得知，$(\mathcal{L},\mathcal{P})$-TGRL 码 $\mathcal{C}_{k,\ \ell}(\mathcal{L},\mathcal{P},\boldsymbol{A}_{2\times 2},\boldsymbol{B})$ 在 $\mathcal{L}=[\ell+1]$ 和 $\mathcal{P}=[k]$的条件下具有如下生成矩阵

$$\boldsymbol{G}\left(\mathcal{L},\mathcal{P},\boldsymbol{A}_{2\times 2},\boldsymbol{B}\right)=\begin{pmatrix} v_1\left(1+\sum_{j=0}^{\ell}b_{0,j}\alpha_1^{k+j}\right) & \cdots & v_n\left(1+\sum_{j=0}^{\ell}b_{0,j}\alpha_n^{k+j}\right) & 0 & 0\\ v_1\left(\alpha_1+\sum_{j=0}^{\ell}b_{1,j}\alpha_1^{k+j}\right) & \cdots & v_n\left(\alpha_n+\sum_{j=0}^{\ell}b_{1,j}\alpha_n^{k+j}\right) & 0 & 0\\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots\\ v_1\left(\alpha_1^{k-3}+\sum_{j=0}^{\ell}b_{k-3,j}\alpha_1^{k+j}\right) & \cdots & v_n\left(\alpha_n^{k-3}+\sum_{j=0}^{\ell}b_{k-3,j}\alpha_n^{k+j}\right) & 0 & 0\\ v_1\left(\alpha_1^{k-2}+\sum_{j=0}^{\ell}b_{k-2,j}\alpha_1^{k+j}\right) & \cdots & v_n\left(\alpha_n^{k-2}+\sum_{j=0}^{\ell}b_{k-2,j}\alpha_n^{k+j}\right) & a_{11} & a_{12}\\ v_1\left(\alpha_1^{k-1}+\sum_{j=0}^{\ell}b_{k-1,j}\alpha_1^{k+j}\right) & \cdots & v_n\left(\alpha_n^{k-1}+\sum_{j=0}^{\ell}b_{k-1,j}\alpha_n^{k+j}\right) & a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}_{k\times(n+2)}.$$

根据引理 II.21 (1)，当且仅当 $\boldsymbol{G}\left(\mathcal{L},\mathcal{P},\boldsymbol{A}_{2\times 2},\boldsymbol{B}\right)$ 的所有 $k\times k$ 阶子式均非零时，$\mathcal{C}_{k,\ell}(\mathcal{L},\mathcal{P},\boldsymbol{A}_{2\times 2},\boldsymbol{B})$ 是最大距离可分的，即由 $\boldsymbol{G}(\mathcal{L},\mathcal{P},\boldsymbol{A}_{2\times 2},\boldsymbol{B})$ 的任意 k列构成的 $k\times k$ 子矩阵的行列式非零。为方便起见， $\widetilde{\boldsymbol{g}}_i$ 表示 $\boldsymbol{G}\left(\mathcal{L},\mathcal{P},\boldsymbol{A}_{2\times 2},\boldsymbol{B}\right)$ 的第 i 列，且 $1\le i\le n$和

$$\boldsymbol{a}_i=\left(0,\ldots,0,a_{1i},a_{2i}\right)^T,i=1,2.$$

Wit不失一般性， $\boldsymbol{G}\left(\mathcal{L},\mathcal{P},\boldsymbol{A}_{2\times 2},\boldsymbol{B}\right)$ 的 $k\times k$ 子矩阵只有三种形式，即 e.,

$$\boldsymbol{G}_1=\left[\widetilde{\boldsymbol{g}}_1,\ldots,\widetilde{\boldsymbol{g}}_k\right],\boldsymbol{G}_{2i}=\left[\widetilde{\boldsymbol{g}}_1,\ldots,\widetilde{\boldsymbol{g}}_{k-1},\boldsymbol{a}_i\right],\boldsymbol{G}_3=\left[\widetilde{\boldsymbol{g}}_1,\ldots,\widetilde{\boldsymbol{g}}_{k-2},\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2\right].$$

接下来，我们只计算 $\det(\boldsymbol{G}_i)(i=1,2,3)$。

对于 $\det(\boldsymbol{G}_1)$，根据引理 II.19 中取 $\mathcal{T}=\{1,2,\ldots,k\}$，我们知道 α_i^{k+j} 可以表示为 $\sum_{s=0}^{k-1}f_j^{(\mathcal{T}),s}\ \alpha_i^s\triangleq\sum_{s=0}^{k-1}f_{(k)\,j,s}\,\alpha_i^s$，其中 $1\le i\le k$ 和 $0\le j\le\ell$，此外，

$$\det(\boldsymbol{G}_1)=\prod_{i=1}^{k}v_i\cdot\det\left(\boldsymbol{I}_k+\widetilde{\boldsymbol{B}_1}\boldsymbol{F}_1\right)\prod_{1\le j<i\le k}\left(\alpha_i-\alpha_j\right),$$

其中

$$\widetilde{\boldsymbol{B}_1}=\begin{pmatrix}b_{0,0}&\cdots&b_{0,\ell}\\ \vdots&&\vdots\\ b_{k-1,0}&\cdots&b_{k-1,\ell}\end{pmatrix},\boldsymbol{F}_1=\begin{pmatrix}f_{0,0}^{(k)}&\cdots&f_{0,k-1}^{(k)}\\ \vdots&&\vdots\\ f_{\ell,0}^{(k)}&\cdots&f_{\ell,k-1}^{(k)}\end{pmatrix}.\tag{13}$$

因此，很容易得知定理V.1 中的（1）成立。

对于 $\det(\boldsymbol{G}_{2i})$，通过取 $\mathcal{T}=\{1,2,\ldots,k-1\}$ 引理II.19中，我们知道 $\alpha_i^{k+j}=\alpha_i^{k-1+j+1}$ 可以表示为 as

$$\sum_{s=0}^{k-2}f_{j+1,s}^{(\mathcal{T})}\alpha_i^s\triangleq\sum_{s=0}^{k-2}f_{j+1,s}^{(k-1)}\alpha_i^s$$

对于 $1\le i\le k-1$ 和 $0\le j\le\ell$，此外，

$$\det(\boldsymbol{G}_{2i})=\left(a_{2i}\cdot\det\left(\boldsymbol{I}_{k-1}+\widetilde{\boldsymbol{B}_2}\boldsymbol{F}_2\right)-a_{1i}\cdot\det\left(\boldsymbol{T}+\widetilde{\boldsymbol{B}_3}\boldsymbol{F}_2\right)\right)\cdot\prod_{i=1}^{k-1}v_i\cdot\prod_{1\le j<i\le k-1}\left(\alpha_i-\alpha_j\right)$$

with

$$\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0&0\\ 0&1&\cdots&0&0\\ \vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\ 0&0&\cdots&1&0\\ f_{0,0}^{(k-1)}&f_{0,1}^{(k-1)}&\cdots&f_{0,k-3}^{(k-1)}&f_{0,k-2}^{(k-1)}\end{pmatrix},\boldsymbol{F}_2=\begin{pmatrix}f_{1,0}^{(k-1)}&\cdots&f_{1,k-2}^{(k-1)}\\ \vdots&&\vdots\\ f_{\ell+1,0}^{(k-1)}&\cdots&f_{\ell+1,k-2}^{(k-1)}\end{pmatrix},$$

$$\widetilde{\boldsymbol{B}_2}=\begin{pmatrix}b_{0,0}&\cdots&b_{0,\ell}\\ \vdots&&\vdots\\ b_{k-2,0}&\cdots&b_{k-2,\ell}\end{pmatrix},\widetilde{\boldsymbol{B}_3}=\begin{pmatrix}b_{0,0}&\cdots&b_{0,\ell}\\ \vdots&&\vdots\\ b_{k-3,0}&\cdots&b_{k-3,\ell}\\ b_{k-1,0}&\cdots&b_{k-1,\ell}\end{pmatrix}.\tag{14}$$

因此，很容易得知定理 V.1 中的（2）成立。

对于 $\det(\boldsymbol{G}_3)$,根据 $\mathcal{T}=\{1,2,\ldots,k-2\}$ 引理 II.19，我们知道 α_i^{k+j} 可以表示为

$$\sum_{s=0}^{k-3} f_{j+2,s}^{(\mathcal{T})}\alpha_i^s \triangleq \sum_{s=0}^{k-3} f_{j+2,s}^{(k-2)}\alpha_i^s$$

对于 $1\le i\le k-2$ 和 $0\le j\le \ell$，此外，

$$\det(\boldsymbol{G}_3)=\prod_{i=1}^{k-2} v_i\cdot\det\left(\boldsymbol{I}_{k-2}+\widetilde{\boldsymbol{B}_4}\boldsymbol{F}_3\right)\cdot\prod_{1\le j<i\le k-2}(\alpha_i-\alpha_j)\cdot\det\left(\boldsymbol{A}_{2\times 2}\right),$$

其中

$$\widetilde{\boldsymbol{B}_4}=\begin{pmatrix} b_{0,0} & \cdots & b_{0,\ell}\\ \vdots & & \vdots\\ b_{k-3,0} & \cdots & b_{k-3,\ell}\end{pmatrix},\boldsymbol{F}_3=\begin{pmatrix} f_{2,0}^{(k-2)} & \cdots & f_{2,k-3}^{(k-2)}\\ \vdots & & \vdots\\ f_{\ell+2,0}^{(k-2)} & \cdots & f_{\ell+2,k-3}^{(k-2)}\end{pmatrix}. \tag{15}$$

因此，容易知道定理 V.1中的 (3) 成立。

至此，定理 V.1的证明完成。 □

B. (1) 列TGRS码的NMDS性质与重量分布

定理 V.2. 若 $k\ge 3$ 且 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n,b,c$ 两两互不相同，则 *(1)* 列*TGRS*码要么是最大距离可分码，要么是近最大距离可分码。

证明。 根据定义 II.9 以及单项式等价的定义，我们只需关注 $\mathcal{C}_1(\boldsymbol{\lambda},b,c)$，其生成矩阵为矩阵

$$\boldsymbol{G}_1(\boldsymbol{\lambda},b,c)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-\lambda_1\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n & b-\lambda_1 c\\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_n^2 & b^2-\lambda_1 c^2\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ \alpha_1^{k-2} & \alpha_2^{k-2} & \cdots & \alpha_n^{k-2} & b^{k-2}-\lambda_1 c^{k-2}\\ \alpha_1^{k-1} & \alpha_2^{k-1} & \cdots & \alpha_n^{k-1} & b^{k-1}-\lambda_1 c^{k-1}\end{pmatrix}.$$

若码 $\mathcal{C}_1(\boldsymbol{\lambda},b,c)$ 不是最大距离可分码，则根据引理 II.21，存在 k 列在 $\boldsymbol{G}_1(\boldsymbol{\lambda},b,c)$ 线性相关，即引理 $\mathbb{F}_q$-线性相关，即引理 II.21 (ii) 成立。

接下来，我们证明引理 II.21 (i)和 (iii)。

对于引理 II.21 (i)，我们仅证明存在某个 $(k-1)\times(k-1)$ 非零子式，适用于以下两类子矩阵

$$\boldsymbol{G}_1^{(1)}(\boldsymbol{\lambda},b,c)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{k-1}\\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_{k-1}^2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \alpha_1^{k-2} & \alpha_2^{k-2} & \cdots & \alpha_{k-1}^{k-2}\\ \alpha_1^{k-1} & \alpha_2^{k-1} & \cdots & \alpha_{k-1}^{k-1}\end{pmatrix},\boldsymbol{G}_1^{(2)}(\boldsymbol{\lambda},b,c)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-\lambda_1\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{k-2} & b-\lambda_1 c\\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_{k-2}^2 & b^2-\lambda_1 c^2\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ \alpha_1^{k-2} & \alpha_2^{k-2} & \cdots & \alpha_{k-2}^{k-2} & b^{k-2}-\lambda_1 c^{k-2}\\ \alpha_1^{k-1} & \alpha_2^{k-1} & \cdots & \alpha_{k-2}^{k-1} & b^{k-1}-\lambda_1 c^{k-1}\end{pmatrix}.$$

对于子矩阵 $\boldsymbol{G}_1^{(1)}(\boldsymbol{\lambda},b,c)$，通过删除 $\boldsymbol{G}_1^{(1)}(\boldsymbol{\lambda},b,c)$ 的最后一行，很容易得到 $(k-1)\times(k-1)$ 非零子式。对于子矩阵 $\boldsymbol{G}_1^{(2)}(\boldsymbol{\lambda},b,c)$，我们考虑通过删除 $\boldsymbol{G}_1^{(2)}(\boldsymbol{\lambda},b,c)$ 的最后一行得到的子矩阵 $\boldsymbol{R}_1$，以及通过删除 $\boldsymbol{G}_1^{(2)}(\boldsymbol{\lambda},b,c)$ 的倒数第二行得到的子矩阵 $\boldsymbol{R}_2$。容易得知，对于 $\det(\boldsymbol{R}_1)\in\mathbb{F}_q^*$，$\boldsymbol{R}_1$ 是 $\boldsymbol{G}_1^{(2)}(\boldsymbol{\lambda},b,c)$ 的一个 $(k-1)\times(k-1)$ 非零子式。

接下来，我们证明 $\det(\boldsymbol{R}_1)=0$，$\det(\boldsymbol{R}_2)\in\mathbb{F}_q^*$，即 $\boldsymbol{R}_2$ 是 $\boldsymbol{G}_1^{(2)}(\boldsymbol{\lambda},b,c)$ 的一个 $(k-1)\times(k-1)$ 非零子式。

通过直接计算，我们得到

$$\det(\boldsymbol{R}_1)=\prod_{1\le j<i\le k-2}(\alpha_i-\alpha_j)\left(\prod_{i=1}^{k-2}(b-\alpha_i)-\lambda_1\prod_{i=1}^{k-2}(c-\alpha_i)\right)$$

and

$$\det(\boldsymbol{R}_2)=\prod_{1\le j<i\le k-2}(\alpha_i-\alpha_j)\left[\left(\sum_{i=1}^{k-2}\alpha_i+b\right)\prod_{i=1}^{k-2}(b-\alpha_i)-\lambda_1\left(\sum_{i=1}^{k-2}\alpha_i+c\right)\prod_{i=1}^{k-2}(c-\alpha_i)\right].$$

$k-2$ $k-2$如果 $\det(\boldsymbol{R}_1)=0$，即 $\prod_{i=1}($
$b-\alpha_i)=\lambda_1\prod(c-\alpha_i)$，那么$i=1$ $i=1$

$$\det(\boldsymbol{R}_2)=\lambda_1\prod_{1\le j<i\le k-2}(\alpha_i-\alpha_j)\prod_{i=1}^{k-2}(c-\alpha_i)(b-c).$$

注意到 α_1、……、α_n、b、c两两不同，因此有 $\det(\boldsymbol{R}_2)\in\mathbb{F}_{q^\circ}^*$

因此，对于 $\boldsymbol{G}_1^{(2)}(\boldsymbol{\lambda}$、$b$、$c)$，存在某个 $(k-1)\times(k-1)$ 非零子式。

对于引理 II.21 (iii)，删除由 $k+1$ 列 $\boldsymbol{G}_1(\boldsymbol{\lambda}$、$b$、$c)$形成的子矩阵的最后一列，很容易得到一个 $k\times k$ 非零子式。此外，由于该子矩阵恰有 k 行，因此由 $k+1$ 列 $\boldsymbol{G}_1(\boldsymbol{\lambda}$、$b$、$c)$ 形成的任意子矩阵都是满秩的。

定理V.2的证明至此完成。 □

接下来，我们回顾（1）列 TGRS 码为最大距离可分码的一个充要条件。

引理 V.3 ([24], 引理 1)。 当且仅当对于任意（$k-1$）-子集 $\mathcal{J}\subseteq\{1,2,\ldots,n$，$(1)$ 列 *TGRS* 码是最大距离可分的 $\}$，

$$\prod_{i\in\mathcal{J}}(b-\alpha_i)-\lambda\prod_{i\in\mathcal{J}}(c-\alpha_i)\neq 0.$$

此外，根据定理 V.2 和引理 V.3，可得

定理 V.4。 如果 $k\ge 3$ 和 α_1、..、α_n、b、c 两两不同，那么(1) 列 *TGRS* 码是近最大距离可分的，当且仅当存在一个（$k-1$）-子集 $\mathcal{J}\subseteq\{1,2,\ldots,n\}$，使得

$$\prod_{i\in\mathcal{J}}(b-\alpha_i)-\lambda\prod_{i\in\mathcal{J}}(c-\alpha_i)=0.$$

最后，对于一类近最大距离可分 (1) 列 TGRS 码，我们确定了其重量分布 .

定理 V.5。 设 $\mathbb{F}_q^*=\langle\omega\rangle$ 和 $\lambda=\omega^s$、$s\in\{0,1,\ldots,q-2\}$。如果 $n=q-2$ 和 $\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\}=\mathbb{F}_q\backslash\{b,c\}$，那么对于任意近最大距离可分$(1)$ 列 *TGRS* 码，汉明重量为 $q-1-k$ 的码字总数 A_{q-1-k} 为

$$A_{q-1-k}=\sum_{i|q-1}(-1)^{k-1+\lfloor\frac{k-1}{i}\rfloor}\binom{\frac{q-1}{i}-1}{\lfloor\frac{k-1}{i}\rfloor}\sum_{d|\gcd(i,\gcd(s,q-1))}d\mu\left(\frac{i}{d}\right).$$

证明。 根据定义II.9，容易知道

$$\mathcal{C}_1(\boldsymbol{\lambda},b,c)=\left\{\boldsymbol{c}_f=(f(\alpha_1),f(\alpha_2),\ldots,f(\alpha_{q-2}),f(b)-\lambda f(c))\,|f(x)\in\mathbb{F}_q^k[x]\right\},$$

其中 $\lambda\in\mathbb{F}_q^*$. 对于 为方便起见，我们设 $\mathcal{I}=\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{q-2}\}$。那么 $\mathrm{wt}(\boldsymbol{c}_f)=q-1-k$ 当且仅当

$$\#\{\alpha_i\in\mathcal{I}|f(\alpha_i)=0\}=k \text{ and } f(b)-\lambda f(c)\neq 0$$

or

$$\#\{\alpha_i\in\mathcal{I}|f(\alpha_i)=0\}=k-1 \text{ and } f(b)-\lambda f(c)=0.$$

如果 $f(b)-\lambda f(c)\neq 0$，那么

$$\#\{\alpha_i\in\mathcal{I}|f(\alpha_i)=0\}=k,$$

这意味着 $f(x)\in\mathbb{F}_q^k[x]$ 有 k 个互异根，这与假设矛盾，因此， $A_{q-1-k}=0$ 在这种情况下。如果 $f(b)-\lambda f(c)=0$，那么

$$\#\{\alpha_i\in\mathcal{I}|f(\alpha_i)=0\}=k-1,$$

因此，

$$\begin{aligned}A_{q-1-k}=&\#\left\{\mathbb{F}_q^k[x]\cap\left\{f(x)=\rho\prod_{\alpha_i\in\mathcal{J}}(x-\alpha_i)\,|\#\mathcal{J}=k-1,\mathcal{J}\subseteq\mathcal{I},f(b)=\lambda f(c),\rho\in\mathbb{F}_q^*\right\}\right\}\\=&\#\left\{\mathbb{F}_q^k[x]\cap\left\{f(x)=\rho\prod_{\alpha_i\in\mathcal{J}}(x-\alpha_i)\,|\#\mathcal{J}=k-1,\mathcal{J}\subseteq\mathcal{I},\prod_{\alpha_i\in\mathcal{J}}\frac{b-\alpha_i}{c-\alpha_i}=\lambda,\rho\in\mathbb{F}_q^*\right\}\right\}\\=&\#\left\{(\rho,\mathcal{J})|\#\mathcal{J}=k-1,\mathcal{J}\subseteq\mathcal{I},\prod_{\alpha_i\in\mathcal{J}}\frac{b-\alpha_i}{c-\alpha_i}=\lambda,\rho\in\mathbb{F}_q^*\right\}\\=&(q-1)\#\left\{\mathcal{J}|\#\mathcal{J}=k-1,\mathcal{J}\subseteq\mathcal{I},\prod_{\alpha_i\in\mathcal{J}}\frac{b-\alpha_i}{c-\alpha_i}=\lambda\right\}.\end{aligned}$$

对于 $\alpha_i \in \mathcal{J}$，根据 $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I} = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} = \mathbb{F}_q \backslash \{b, c\}$，我们有

$$\left\{ \frac{b-\alpha_i}{c-\alpha_i} | \alpha_i \in \mathcal{J} \right\} \subseteq \mathbb{F}_q^* \backslash \{1\}.$$

此外，很容易证明映射

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{I} &\longrightarrow \mathbb{F}_q^* \backslash \{1\} \\ \alpha &\longmapsto \frac{b-\alpha}{c-\alpha} \end{aligned}$$

是双射。因此，根据 $\mathbb{F}_q^* = \langle \omega \rangle$，我们可以令 $\frac{b-\alpha_i}{c-\alpha_i} = \omega^t$，$t \in \{1, 2, \ldots, q-2\}$，以及 $\lambda = \omega^s$，$s \in \{0, 1, \ldots, q-2\}$。此外，

$$\begin{aligned} A_{q-1-k} =& (q-1) \# \left\{ \mathcal{J} | \# \mathcal{J} = k-1, \mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}, \prod_{\alpha_i \in \mathcal{J}} \frac{b-\alpha_i}{c-\alpha_i} = \lambda \right\} \\ =& (q-1) \# \left\{ \mathcal{M} | \# \mathcal{M} = k-1, \mathcal{M} \subseteq \{1, 2, \ldots, q-2\}, \prod_{t \in \mathcal{M}} \omega^t = \omega^s \right\} \\ =& (q-1) \# \left\{ \mathcal{M} | \# \mathcal{M} = k-1, \mathcal{M} \subseteq \{1, 2, \ldots, q-2\}, \omega^{\sum\limits_{t \in \mathcal{M}} t} = \omega^s \right\} \\ =& (q-1) \# \left\{ \mathcal{M} | \# \mathcal{M} = k-1, \mathcal{M} \subseteq \{1, 2, \ldots, q-2\}, \sum_{t \in \mathcal{M}} t \equiv s \pmod{q-1} \right\}. \end{aligned}$$

因此，根据引理II.22，我们有

$$\begin{aligned} A_{q-1-k} =& (q-1) N\left(\mathbb{Z}_{q-1} \backslash \{0\}, k-1, s\right) \\ =& \sum_{i | \exp(\mathbb{Z}_{q-1})} (-1)^{k-1+\left\lfloor \frac{k-1}{i} \right\rfloor} \binom{\frac{q-1}{i}-1}{\left\lfloor \frac{k-1}{i} \right\rfloor} \sum_{d | \gcd(i, e(s))} \mu\left(\frac{i}{d}\right) \#G[d]. \end{aligned}$$

注意，$\exp(\mathbb{Z}_{q-1}) = q-1$，

$$e(s) = \max\{d : d \mid q-1,\ s \in d\mathbb{Z}_{q-1}\} = \gcd(s, q-1).$$

由 $i \mid q-1$ 和 $d \mid i$，我们有 $d \mid q-1$，因此，

$$\#\mathbb{Z}_{q-1}[d] = \#\{h \in \mathbb{Z}_{q-1} \mid dh \equiv 0 \pmod{q-1}\} = \gcd(d, q-1) = d.$$

因此，

$$A_{q-1-k} = \sum_{i | q-1} (-1)^{k-1+\left\lfloor \frac{k-1}{i} \right\rfloor} \binom{\frac{q-1}{i}-1}{\left\lfloor \frac{k-1}{i} \right\rfloor} \sum_{d | \gcd(i, \gcd(s, q-1))} d\mu\left(\frac{i}{d}\right).$$

□

VI. 若干类线性码的非 GRS 性质

本节基于（$\mathcal{L}$，$\mathcal{P}$）-TGRS 码的非 GRS 性质，确定以下四类线性码在多种条件下相应的非 GRS 性质：$\mathcal{C}_{k,\ell}$（$\mathcal{L}$，$\mathcal{P}$，$\boldsymbol{A}_{m\times m}$，$\boldsymbol{B}$）、$\mathcal{C}_h$（$\eta$，$\boldsymbol{b}$）、$\mathcal{C}_h$（$\eta$，$\boldsymbol{b}$，$\delta$）以及 $\mathcal{C}_s$（$\boldsymbol{\lambda}$，$\boldsymbol{b}$，c，$\mathcal{L}$，$\mathcal{P}$，$\boldsymbol{B}$）。

引理 VI.1。 在任意坐标位置对 *GRS* 码进行缩短和删 *puncture* 码所得的码都是 *GRS* 码。

引理 VI.1 意味着，非 GRS 码的（列）扩展码不可能是 GRS 码。

注意到，码 $\mathcal{C}_{k,\ell}(\mathcal{L}, \mathcal{P}, \boldsymbol{A}_{m\times m}, \boldsymbol{B})$、$\mathcal{C}_h(\eta, \boldsymbol{b})$、$\mathcal{C}_h(\eta, \boldsymbol{b}, \delta)$ 和 $\mathcal{C}_s(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{b}, c, \mathcal{L}, \mathcal{P}, \boldsymbol{B})$ 都是通过向码 $\mathcal{C}(\mathcal{L}, \mathcal{P}, \boldsymbol{B})$ 中添加一些列向量得到的，因此，我们只关注 $\mathcal{C}(\mathcal{L}, \mathcal{P}, \boldsymbol{B})$ 的非 GRS 性质。

接下来，我们总结一些关于 $\mathcal{C}(\mathcal{L}, \mathcal{P}, \boldsymbol{B})$ 的非 GRS 性质的已有研究，并得到码 $\mathcal{C}_{k,\ell}(\mathcal{L}, \mathcal{P}, \boldsymbol{A}_{m\times m}, \boldsymbol{B})$、$\mathcal{C}_h(\eta, \boldsymbol{b})$、$\mathcal{C}_h(\eta, \boldsymbol{b}, \delta)$ 以及 $\mathcal{C}_s(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{b}, c, \mathcal{L}, \mathcal{P}, \boldsymbol{B})$ 的非 GRS 性质。

引理 VI.2. 假设 $b_{i,j} = 0$ 只要 $(i, j) \notin \mathcal{P} \times \mathcal{L}$。若满足以下条件之一，则 $\mathcal{C}(\mathcal{L}, \mathcal{P}, \boldsymbol{B})$ 是非 *GRS*。

(1)（定理 5, [11]） $n \geq 2k$、 $\varepsilon \geq 2k$和 $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{(k-\ell)\times\ell} & \mathbf{0}_{(k-\ell)\times(n-k-\ell)} \\ \boldsymbol{B}^{(3)}_{\ell\times\ell} & \mathbf{0}_{\ell\times(n-k-\ell)} \end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{B}^{(3)}_{\ell\times\ell} = \begin{pmatrix} b_{k-\ell} & & & \\ & \ddots & & \\ & & b_{k-\ell+1,0} & b_{k-\ell+1,1} \\ & & & b_{k-1} \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} \ddots & & & \\ & b_{k-1,0} & b_{k-1,1} & \cdots & b_{k-1,\ell-1} \end{pmatrix}$，

$b_{k-j,\ell-j} \in \mathbb{F}_q^*$ 对于 $1 \leq j \leq \ell$、 $0 < \ell < k$ 和

$$\varepsilon = \begin{cases} 2k+2\ell-2, & \text{if } k \geq 2\ell+2 \text{ and } n > 2k+2\ell-2; \\ n-1, & \text{if } k \geq 2\ell+2 \text{ and } n \leq 2k+2\ell-2; \\ 3k-3, & \text{if } k < 2\ell+2 \text{ and } n > 2k+2\ell-2; \\ n+k-2\ell-2, & \text{if } k < 2\ell+2 \text{ and } n \leq 2k+2\ell-2. \end{cases}$$

(2)（定理5.3, [17]） $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{(k-1)\times(\ell+1)} & \mathbf{0}_{(k-1)\times(n-k-\ell-1)} \\ \boldsymbol{\eta}_{\ell+1} & \mathbf{0}_{1\times(n-k-\ell-1)} \end{pmatrix}$ 满足 $\boldsymbol{\eta}_{\ell+1} = (\eta_0, \cdots, \eta_\ell) \in \mathbb{F}_q^{\ell+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$，并且满足以下条件之一：

(2。1) $2k > n > k+\ell+2$ 和 $1 + \sum_{t=0}^{\ell} \eta_t S_{t+1} \neq 0$;

(2。2) $2k > n \geq k+\ell+2 \geq k+3$ 和 $1 + \sum_{t=0}^{\ell} \eta_t S_{t+1} = 0$。

(3) (Theorem 5.1, [31]) $2 < k \leq k+t < \frac{n}{2}$ and $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{h\times t} & 0 & \mathbf{0}_{h\times(n-k-t-1)} \\ \mathbf{0}_{1\times t} & b_{h,t} & \mathbf{0}_{1\times(n-k-t-1)} \\ \mathbf{0}_{(k-h-1)\times t} & 0 & \mathbf{0}_{(k-h-1)\times(n-k-t-1)} \end{pmatrix}$ with $b_{h,t} \in \mathbb{F}_q^*$;

(4)（定理 6.2–6.3, [32]） $3 \leq k \leq n-3$满足 $k < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$或 $k > \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$, $b_{k-2,1}$, $b_{k-1,0} \in \mathbb{F}_q^*$且

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{(k-2)\times 1} & \mathbf{0}_{(k-2)\times 1} & \mathbf{0}_{(k-2)\times n-k-2} \\ 0 & b_{k-2,1} & \mathbf{0}_{1\times(n-k-2)} \\ b_{k-2,0} & 0 & \mathbf{0}_{1\times(n-k-2)} \end{pmatrix};$$

(5)（定理 3.3, [39]） $4 \leq k < n-4$ 和 $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{(k-2)\times 1} & \mathbf{0}_{(k-2)\times 1} & \mathbf{0}_{(k-2)\times n-k-2} \\ b_{k-2,0} & b_{k-2,1} & \mathbf{0}_{1\times(n-k-2)} \\ 0 & 0 & \mathbf{0}_{1\times(n-k-2)} \end{pmatrix}$，满足 $b_{k-2,0}$, $b_{k-2,1} \in \mathbb{F}_q^*$;

(6)（定理 4-5, [6]） $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{h\times 1} & \mathbf{0}_{h\times 1} & \mathbf{0}_{h\times n-k-2} \\ b_{h,0} & b_{h,1} & \mathbf{0}_{1\times(n-k-2)} \\ \mathbf{0}_{(k-h-1)\times 1} & \mathbf{0}_{(k-h-1)\times 1} & \mathbf{0}_{(k-h-1)\times n-k-2} \end{pmatrix}$，满足 $b_{h,0}$, $b_{h,1} \in \mathbb{F}_q^*$ 并且满足以下条件之一,

(6.1) $8 \leq 2k < n$;

(6.2) $2k \geq n \geq k+4$;

(7)（定理 1, [40]） $0 \leq h \leq k-1$, $k+t \leq n \leq q$, $\frac{n}{2} \leq k \leq n-3$,

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{h\times(t-1)} & \mathbf{0}_{h\times 1} & \mathbf{0}_{h\times n-k-t} \\ \mathbf{0}_{1\times(t-1)} & b_{h,t-1} & \mathbf{0}_{1\times(n-k-t)} \\ \mathbf{0}_{(k-h-1)\times(t-1)} & \mathbf{0}_{(k-h-1)\times 1} & \mathbf{0}_{(k-h-1)\times(n-k-t)} \end{pmatrix}, b_{h,t-1} \in \mathbb{F}_q^*$$

并且满足以下条件之一,

(7.1) $n = k+t, 2k \geq n+2$ 和 $3 \leq h \leq k-3$; (7.2) $n = k+t+1$, $2k \geq n+2$ 和 $2 \leq h \leq k-3$; (7.3) $n \geq k+t+2, 2k \geq n, t = 1$ 和 $2 \leq h \leq k-2$; (7.4) $n \geq k+t+2, 2k \geq n+1, t = 2$ 和 $1 \leq h \leq k-3$; (7.5) $n \geq k+t+2, 2k \geq n, t \geq 3$ 和 $h \in \{0, \ldots, k-1\} \setminus \{k-t\}$; (7.6) $n \geq k+t+2, 2k \geq n+1, t \geq 3$ 和 $h = k-t$。

首先，由于 $\mathcal{C}_k$、$_\ell$（$\mathcal{L}$、 $\mathcal{P}$、 $\boldsymbol{A}_{m\times m}$、 $\boldsymbol{B}$）和 $\mathcal{C}_s$（$\boldsymbol{\lambda}$、 $\boldsymbol{b}$、 c、 $\mathcal{L}$、 $\mathcal{P}$、 $\boldsymbol{B}$）是通过将列向量添加到 $\mathcal{C}$（$\mathcal{L}$、 $\mathcal{P}$、 $\boldsymbol{B}$）中得到的，再由引理 VI.1 和引理 VI.2 (1)-(7)，可得如下结论

定理 VI.3。 如果引理 *VI.2* (1)-(7) 中的任一条成立，则 $\mathcal{C}_{k,\ell}$（$\mathcal{L}$、 $\mathcal{P}$、 $\boldsymbol{A}_{m\times m}$、 $\boldsymbol{B}$）和 $\mathcal{C}_s$（$\boldsymbol{\lambda}$、 $\boldsymbol{b}$、 c、 $\mathcal{L}$、 $\mathcal{P}$、 $\boldsymbol{B}$）均为非 *GRS*。

注 VI.4。 对于 $s = 1$和 $v_1 = \cdots = v_n = 1$, 由引理 *VI.2* (3) 结合 $t = 0$和定理 *VI.3*，相应的行列 *TRS* 码对于 $3 \leq k < n/2$是非 *GRS* 码。这通过 *puncturing* 提供了一个直接证明，无需使用 *[2,* 定理 *62]*中所采用的额外 *Schur* 平方计算。

其次，由于 $\mathcal{C}_h(\eta, \boldsymbol{b})$ 和 $\mathcal{C}_h(\eta, \boldsymbol{b}, \delta)$ 是通过将列向量从 $\mathcal{C}(\mathcal{L}, \mathcal{P}, \boldsymbol{B})$ 添加到

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{h\times(\ell+1)} & \mathbf{0}_{h\times(n-k-\ell-1)} \\ \boldsymbol{b} & \mathbf{0}_{1\times(n-k-\ell-1)} \\ \mathbf{0}_{(k-h-1)\times(\ell+1)} & \mathbf{0}_{(k-h-1)\times(n-k-\ell-1)} \end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{b} = (b_0, b_1, \ldots, b_\ell) \in \mathbb{F}_q^{\ell+1} \setminus \{\mathbf{0}_{\ell+1}\}$。接着，根据引理 VI.1 和引理 VI.2 （2）-（3）和（5）-（7），我们得到如下结论

定理 VI.5。 若引理 *VI.2* (2)-(3) 和 (5)-(7) 中的某一条成立，则 $\mathcal{C}_h(\eta, \boldsymbol{b})$ 和 $\mathcal{C}_h(\eta, \boldsymbol{b}, \delta)$ 均为非 *GRS*。

注 VI.6。 对于 $\ell = 1$, $b_0 = 0$, $b_1 \in \mathbb{F}_q^*$ 和 $\eta = 1$， $\mathcal{C}_h(\eta, \boldsymbol{b})$ 的非 *GRS* 性由引理 *VI.2* (3) 结合$t = 1$，或由(7.4) 结合 $t = 2$，在相应条件下可得。对于 $h \leq k-2$，其二重扩展码也为非 *GRS*。这些结论可通过 *puncturing* 直接得出，无需使用 *[36,* 定理 *3.2* 和 *3.3]*中所用的 *Schur* 平方计算。

VII. 结论

本文主要关注已知非 GRS 型线性码的校验矩阵构造，并介绍了一类非 GRS 型线性码，即 $(\mathcal{L}, \mathcal{P})$-TGRL 码。主要贡献总结如下。

- 给出三类（$\mathcal{L}, \mathcal{P}$）-TGRL 码的校验矩阵（定理 III.1、定理 III.3、定理 III.5、定理 IV.12），由 [21] 引入的码的生成方法及其扩展码（定理 III.7、定理 IV.14），由 [24] 引入的两类列 TGRS 码（定理 IV.6、定理 IV.7、），（$\mathcal{L}, \mathcal{P}$, 1）-行列 TRS 码的一个特殊子类（定理 IV.9），以及由 [34] 引入的 MGRS 码（定理 IV.17）。
- 给出一类一般 TGRL 码为最大距离可分的充要条件（定理 V.1）。
- 证明由 (1) 引入的 TGRS 码要么是最大距离可分码，要么是近最大距离可分码；此外，给出该码为近最大距离可分码的充要条件（定理 V.4）。此外，通过利用有限阿贝尔群的子集和，我们确定了一类近最大距离可分 (1)-列 TGRS 码的特殊子类的重量分布。
- 确定若干类线性码的非 GRS 性质（定理 VI.3、定理 VI.5）。未来的工作可以考虑利用这些校验矩阵设计译码算法，研究其
h完整维数、确定深洞，并刻画所考虑码的自同构群。

参考文献

[1] Abdukhalikov K, Ding C, Verma G K. 一些非广义 Reed-Solomon MDS 码的构造[J]. Discrete Mathematics, 2026, 349(10): 115202.[2] Bhagat A K, Singh H, Sarma R. 行列扭 Reed-Solomon 码[J]. arXiv 预印本 arXiv:2509.06919, 2025.[3]Beelen P, Puchinger S, n´e Nielsen J R. 扭 Reed-Solomon 码[C]//2017 IEEE 信息论国际研讨会 (ISIT). IEEE, 2017: 336-340.[4]Chen H. 从任意亏格代数曲线构造许多非 Reed-Solomon 型 MDS 码。IEEE 信息论汇刊, 2024, 70(7): 4856-4864.[5] Cheng H, Zhu S. 两次扩展的 TGRS 码[J]. 通信数学进展, 2026, 24: 35-60.[6] Cheng H, Zhu S. 一类双重扭广义 Reed-Solomon 码及其扩展码[J]. 电子与信息学报, 2026, 48(3): 1322–1332.[7] Ding, Y., Li, Y., Zhu, S. 四个新的维数为 4 的 NMDS 码族及其应用。Finite Fields and Their Applications, 2024, 99: 102495.[8] Dodunekov, S. M., Landjev, I. N. 一些小有限域上的近 MDS 码。Discrete Mathematics, 2000, 213(1-3): 55-65.[9] Fan, C., Wang, A., Xu, L. 维数为 3 的新型 NMDS 码类。Designs, Codes and Cryptography, 2024, 92: 397-418.[10] Gu H, Lei H, Zhang J. 扭 Reed-Solomon 码的两种变体，arXiv 预印本 arXiv: arXiv:2609.16188, 2026.[11] Hu Z, Wang L, Li N, et al. 关于 (L, P)-扭曲广义 Reed-Solomon 码[J]. IEEE 信息论汇刊, 2025.[12] Huffman, W. C., Pless, V. 纠错码基础。剑桥：剑桥大学出版社, 2003.[13] Huang, D.,Yue, Q., Niu, Y., Li, X.: 来自扭曲广义 Reed–Solomon 码的 MDS 或 NMDS 自对偶码。Des. Codes Cryptogr. 89(9), 2195–2209 (2021).[14] Jin, L., Ma, L., Xing, C. 新型非 Reed–Solomon MDS 码族。IEEE 信息论汇刊, 2026, 72(2): 985–993.[15] Lao H, Chen H, Chee Y M, et al. MDS 码的最大 Hermitian hull 维数界及具有显式 Hermitian hull 的 MDS 码[J]. IEEE 信息论汇刊, 2026.[16] Lei H, Gu H, Zhang J. 关于扭 Roth-Lempel 码，arXiv 预印本 arXiv: arXiv: arXiv:2609.17304, 2026.[17] Liang Z, Jia C, Huang D, et al. 多重扭广义 Reed-Solomon 码：结构、性质与构造[J]. arXiv 预印本 arXiv:2511.03398, 2025.[18]Liang, Z., Liao, Q. GRL 码成为 MDS、几乎最大距离可分或自对偶码的等价条件。arXiv 预印本 arXiv:2506.03874, 2025.[19] Li, F., Chen, Y., Chen, H. 非 Reed-Solomon 型循环 MDS 码。IEEE 信息论汇刊, 2025.

[20] Li F, Jiang R, Liu Y. 新型 MDS 和自对偶广义Roth-Lempel码及其深洞：F. Li 等人[J]. Designs, Codes and Cryptography, 2025, 93(11): 5079-5096.[21] Li Y, Zhu S, Sun Z. 两类扩展扭曲GRS码的覆盖半径和深洞及其应用[J]. IEEE 信息论汇刊, 2025, 71(5): 3516-3530.[22] Li Y, Sun Z, Zhu S. 一族非 GRS MDS 码或 NMDS 码的线性码[J]. IEEE通信汇刊, 2025.[23] Li Y, Lu Z, LingS, etal. 一种基于深洞构造非 GRS MDS-NMDS 码的框架及其应用[J]. arXiv 预印本 arXiv:2605.12133, 2026.[24] Liu W, Luo J, Wang P, et al. 作为 MDS 码的列扭曲Reed-Solomon码[J]. IEEE 信息论汇刊, 2026.[25] Liu, S., Liu, H., Chen, B. 基于系统生成矩阵构造非广义 Reed-Solomon MDS 码[R]. arXiv 预印本 arXiv:2507.20559, 2025.[26] Liu S, Liu H, Oggier F. 非广义 Reed-Solomon MDS 码的构造[J]. IEEE 信息论汇刊, 2026.[27] Ma, Q., Kai, X., Zhu, S. NMDS 码的扩展码。Finite Fields and Their Applications, 2026, 114: 102844.[28]Ron M Roth 和 Abraham Lempel. 一种非 Reed-Solomon 型 MDS 码的构造。IEEE 信息论汇刊, 35(3):655–657, 1989.[29] Wang P, Liu W, Luo J, et al. 来自椭圆曲线的非 Reed-Solomon 型 MDS 码。IEEE 信息论汇刊, 2026, 72(9): 6551-6557.[30] Ma J, Wang J, Ding Y. 由扩展扭 Reed-Solomon 码的扩展码构造的 MDS 和 NMDS 码[J]. Cryptography and Communications, 2026, 18(3): 951-962.[31] Sui J, Zhu X, Shi X. 通过扭 Reed–Solomon 码构造 MDS 和近 MDS 码。Designs, Codes and Cryptography, 2022, 90(8): 1937-1958.[32] Sui J, Yue Q, Li X, et al. 通过扭曲广义 Reed-Solomon 码构造的 MDS、近 MDS 或 2-MDS 自对偶码[J]. IEEE 信息论汇刊, 2022, 68(12): 7832-7841.[33] Sun Z, Ding C, Chen T. 一些线性码的扩展码[J]. Finite Fields and Their Applications, 2024, 96: 102401.[34] Wang G, Liu H, Luo J. 非 GRS MDS 码的新构造、GRS 码的恢复与判定算法[J]. IEEE 信息论汇刊, 2026.[35] Wang Y, Chen Y, Yan T. 来自扩展扭曲广义 Reed-Solomon 码的 MDS 和 NMDS 码[J]. arXiv 预印本 arXiv:2605.23329, 2026.[36] Zhang M, Yang S, Zheng Y. 来自扩展 TGRS 码的非 GRS 型 MDS 和几乎最大距离可分码[J]. arXiv 预印本 arXiv:2604.05682, 2026.[37] Gu, H., Zhu, Z., Zhang, J. HRS码的 Schur平方维数[R]. arXiv 预印本 arXiv:2604.17864, 2026.[38] Zhu C, Liao Q. (+)-扩展扭曲广义 Reed-Solomon 码[J]. Discrete Mathematics, 2024, 347(2): 113749.[39] Zhu C, Liao Q. 一类双重扭曲广义 Reed-Solomon 码[J]. Finite Fields and Their Applications, 2024, 95: 102395.[40] Zhu C, Liao Q. 扭曲广义 Reed-Solomon 码及其扩展码的非 GRS 性质[J]. arXiv 预印本 arXiv:2204.11955, 2022.[41] Zhu R, Jin L. 扭曲 GRS 码和 Roth–Lempel 码的高效译码[J]. IEEE 信息论汇刊, 2026.[42] Zhi, Y., Zhu, S. 新型非 GRS 型 MDS 码和 NMDS 码。Discrete Mathematics, 2025, 348(5): 114436.[43] Wang G, Liu H, Luo J. 来自扭曲 GRS 码的 MDS 和近乎MDS码的改进译码算法[J]. IEEE 信息论汇刊, 2025.[44] Wan, R., Zhu, S. 通过删减广义Reed–Solomon码构造具有灵活 ℓ-MDS 的自对偶码 ℓ 。IEEE 信息论汇刊, 2026, 72(2): 961-984.[45] Wang Y, Chen Y, Yan T. 来自扩展扭曲广义 Reed-Solomon 码的 MDS 和 NMDS 码[J]. arXiv 预印本 arXiv:2605.23329, 2026.

附录 A 定理 V.1 中 $G_i(i=1,2,3)$ 的行列式的计算**计算** $\det(\boldsymbol{G}_1)$。

$$
\begin{aligned}
\det(\boldsymbol{G}_1) &= \prod_{i=1}^{k} v_i \cdot \det \begin{pmatrix} 1+\sum_{j=0}^{\ell} b_{0,j}\alpha_1^{k+j} & \cdots & 1+\sum_{j=0}^{\ell} b_{0,j}\alpha_k^{k+j} \\ \alpha_1+\sum_{j=0}^{\ell} b_{1,j}\alpha_1^{k+j} & \cdots & \alpha_k+\sum_{j=0}^{\ell} b_{1,j}\alpha_k^{k+j} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^{k-1}+\sum_{j=0}^{\ell} b_{k-1,j}\alpha_1^{k+j} & \cdots & \alpha_k^{k-1}+\sum_{j=0}^{\ell} b_{k-1,j}\alpha_k^{k+j} \end{pmatrix} \\
&= \prod_{i=1}^{k} v_i \cdot \det \begin{pmatrix} 1+\sum_{j=0}^{\ell} b_{0,j}\sum_{s=0}^{k-1} f_{j,s}^{(k)}\alpha_1^{s} & \cdots & 1+\sum_{j=0}^{\ell} b_{0,j}\sum_{s=0}^{k-1} f_{j,s}^{(k)}\alpha_k^{s} \\ \alpha_1+\sum_{j=0}^{\ell} b_{1,j}\sum_{s=0}^{k-1} f_{j,s}^{(k)}\alpha_1^{s} & \cdots & \alpha_k+\sum_{j=0}^{\ell} b_{1,j}\sum_{s=0}^{k-1} f_{j,s}^{(k)}\alpha_k^{s} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^{k-1}+\sum_{j=0}^{\ell} b_{k-1,j}\sum_{s=0}^{k-1} f_{j,s}^{(k)}\alpha_1^{s} & \cdots & \alpha_k^{k-1}+\sum_{j=0}^{\ell} b_{k-1,j}\sum_{s=0}^{k-1} f_{j,s}^{(k)}\alpha_k^{s} \end{pmatrix} \\
&= \prod_{i=1}^{k} v_i \cdot \det \left(\begin{pmatrix} 1+\sum_{j=0}^{\ell} b_{0,j}f_{j,0}^{(k)} & \sum_{j=0}^{\ell} b_{0,j}f_{j,1}^{(k)} & \cdots & \sum_{j=0}^{\ell} b_{0,j}f_{j,k-1}^{(k)} \\ \sum_{j=0}^{\ell} b_{1,j}f_{j,0}^{(k)} & 1+\sum_{j=0}^{\ell} b_{1,j}f_{j,1}^{(k)} & \cdots & \sum_{j=0}^{\ell} b_{1,j}f_{j,k-1}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{j=0}^{\ell} b_{k-1,j}f_{j,0}^{(k)} & \sum_{j=0}^{\ell} b_{k-1,j}f_{j,1}^{(k)} & \cdots & 1+\sum_{j=0}^{\ell} b_{k-1,j}f_{j,k-1}^{(k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 & & \alpha_k \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^{k-1} & & \alpha_k^{k-1} \end{pmatrix} \right) \\
&= \prod_{i=1}^{k} v_i \cdot \det\left(\boldsymbol{I}_k + \widetilde{\boldsymbol{B}_1}\boldsymbol{F}_1\right) \cdot \prod_{1\le j<i\le k} (\alpha_i-\alpha_j),
\end{aligned}
$$

其中

$$
\widetilde{\boldsymbol{B}_1} = \begin{pmatrix} b_{0,0} & \cdots & b_{0,\ell} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{k-1,0} & \cdots & b_{k-1,\ell} \end{pmatrix}, \boldsymbol{F}_1 = \begin{pmatrix} f_{0,0}^{(k)} & \cdots & f_{0,k-1}^{(k)} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{\ell,0}^{(k)} & \cdots & f_{\ell,k-1}^{(k)} \end{pmatrix}.
$$

$\det(\boldsymbol{G}_{2i})$ **的计算**。

$$
\begin{aligned}
\det(\boldsymbol{G}_{2i}) &= \prod_{i=1}^{k-1} v_i \cdot \det \begin{pmatrix} 1+\sum_{j=0}^{\ell} b_{0,j}\alpha_1^{k+j} & \cdots & 1+\sum_{j=0}^{\ell} b_{0,j}\alpha_{k-1}^{k+j} & 0 \\ \alpha_1+\sum_{j=0}^{\ell} b_{1,j}\alpha_1^{k+j} & \cdots & \alpha_{k-1}+\sum_{j=0}^{\ell} b_{1,j}\alpha_{k-1}^{k+j} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \\ \alpha_1^{k-3}+\sum_{j=0}^{\ell} b_{k-3,j}\alpha_1^{k+j} & \cdots & \alpha_{k-1}^{k-3}+\sum_{j=0}^{\ell} b_{k-3,j}\alpha_{k-1}^{k+j} & 0 \\ \alpha_1^{k-2}+\sum_{j=0}^{\ell} b_{k-2,j}\alpha_1^{k+j} & \cdots & \alpha_{k-1}^{k-2}+\sum_{j=0}^{\ell} b_{k-2,j}\alpha_{k-1}^{k+j} & a_{1i} \\ \alpha_1^{k-1}+\sum_{j=0}^{\ell} b_{k-1,j}\alpha_1^{k+j} & \cdots & \alpha_{k-1}^{k-1}+\sum_{j=0}^{\ell} b_{k-1,j}\alpha_{k-1}^{k+j} & a_{2i} \end{pmatrix} \\
&= \prod_{i=1}^{k-1} v_i \cdot \left(a_{2i}\cdot\det(\boldsymbol{G}_{2i}^{(1)}) - a_{1i}\cdot\det(\boldsymbol{G}_{2i}^{(2)})\right),
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
\det(\boldsymbol{G}_{2i}^{(1)}) &= \det\begin{pmatrix}
1+\sum_{j=0}^{\ell} b_{0,j}\alpha_1^{k+j} & \cdots & 1+\sum_{j=0}^{\ell} b_{0,j}\alpha_{k-1}^{k+j} \\
\alpha_1+\sum_{j=0}^{\ell} b_{1,j}\alpha_1^{k+j} & \cdots & \alpha_{k-1}+\sum_{j=0}^{\ell} b_{1,j}\alpha_{k-1}^{k+j} \\
\vdots & & \vdots \\
\alpha_1^{k-3}+\sum_{j=0}^{\ell} b_{k-3,j}\alpha_1^{k+j} & \cdots & \alpha_{k-1}^{k-3}+\sum_{j=0}^{\ell} b_{k-3,j}\alpha_{k-1}^{k+j} \\
\alpha_1^{k-2}+\sum_{j=0}^{\ell} b_{k-2,j}\alpha_1^{k+j} & \cdots & \alpha_{k-1}^{k-2}+\sum_{j=0}^{\ell} b_{k-2,j}\alpha_{k-1}^{k+j}
\end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix}
1+\sum_{j=0}^{\ell} b_{0,j}\sum_{s=0}^{k-2} f_{j+1,s}^{(k-1)}\alpha_1^{s} & \cdots & 1+\sum_{j=0}^{\ell} b_{0,j}\sum_{s=0}^{k-2} f_{j+1,s}^{(k-1)}\alpha_{k-1}^{s} \\
\alpha_1+\sum_{j=0}^{\ell} b_{1,j}\sum_{s=0}^{k-2} f_{j+1,s}^{(k-1)}\alpha_1^{s} & \cdots & \alpha_{k-1}+\sum_{j=0}^{\ell} b_{1,j}\sum_{s=0}^{k-2} f_{j+1,s}^{(k-1)}\alpha_{k-1}^{s} \\
\vdots & & \vdots \\
\alpha_1^{k-2}+\sum_{j=0}^{\ell} b_{k-2,j}\sum_{s=0}^{k-2} f_{j+1,s}^{(k-1)}\alpha_1^{s} & \cdots & \alpha_{k-1}^{k-2}+\sum_{j=0}^{\ell} b_{k-2,j}\sum_{s=0}^{k-2} f_{j+1,s}^{(k-1)}\alpha_{k-1}^{s}
\end{pmatrix} \\
&= \det\left(\begin{pmatrix}
1+\sum_{j=0}^{\ell} b_{0,j}f_{j+1,0}^{(k-1)} & \sum_{j=0}^{\ell} b_{0,j}f_{j+1,1}^{(k-1)} & \cdots & \sum_{j=0}^{\ell} b_{0,j}f_{j+1,k-2}^{(k-1)} \\
\sum_{j=0}^{\ell} b_{1,j}f_{j+1,0}^{(k-1)} & 1+\sum_{j=0}^{\ell} b_{1,j}f_{j+1,1}^{(k-1)} & \cdots & \sum_{j=0}^{\ell} b_{1,j}f_{j+1,k-2}^{(k-1)} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\sum_{j=0}^{\ell} b_{k-2,j}f_{j+1,0}^{(k-1)} & \sum_{j=0}^{\ell} b_{k-2,j}f_{j+1,1}^{(k-1)} & \cdots & 1+\sum_{j=0}^{\ell} b_{k-2,j}f_{j+1,k-2}^{(k-1)}
\end{pmatrix}\begin{pmatrix}
1 & \cdots & 1 \\
\alpha_1 & & \alpha_{k-1} \\
\vdots & & \vdots \\
\alpha_1^{k-2} & & \alpha_{k-1}^{k-2}
\end{pmatrix}\right) \\
&= \det\left(\boldsymbol{I}_{k-1}+\widetilde{\boldsymbol{B}_2}\boldsymbol{F}_2\right)\cdot\prod_{1\le j<i\le k-1}(\alpha_i-\alpha_j)
\end{aligned}
$$

with

$$
\widetilde{\boldsymbol{B}_2}=\begin{pmatrix} b_{0,0} & \cdots & b_{0,\ell} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{k-2,0} & \cdots & b_{k-2,\ell}\end{pmatrix},\boldsymbol{F}_2=\begin{pmatrix} f_{1,0}^{(k-1)} & \cdots & f_{1,k-2}^{(k-1)} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{\ell+1,0}^{(k-1)} & \cdots & f_{\ell+1,k-2}^{(k-1)}\end{pmatrix},
$$

and

$$
\begin{aligned}
&\det(\boldsymbol{G}_{2i}^{(2)}) \\
&= \det \begin{pmatrix}
1+\sum_{j=0}^{\ell} b_{0,j}\alpha_1^{k+j} & \cdots & 1+\sum_{j=0}^{\ell} b_{0,j}\alpha_{k-1}^{k+j} \\
\alpha_1+\sum_{j=0}^{\ell} b_{1,j}\alpha_1^{k+j} & \cdots & \alpha_{k-1}+\sum_{j=0}^{\ell} b_{1,j}\alpha_{k-1}^{k+j} \\
\vdots & & \vdots \\
\alpha_1^{k-3}+\sum_{j=0}^{\ell} b_{k-3,j}\alpha_1^{k+j} & \cdots & \alpha_{k-1}^{k-3}+\sum_{j=0}^{\ell} b_{k-3,j}\alpha_{k-1}^{k+j} \\
\alpha_1^{k-1}+\sum_{j=0}^{\ell} b_{k-1,j}\alpha_1^{k+j} & \cdots & \alpha_{k-1}^{k-1}+\sum_{j=0}^{\ell} b_{k-1,j}\alpha_{k-1}^{k+j}
\end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix}
1+\sum_{j=0}^{\ell} b_{0,j}\sum_{s=0}^{k-2} f_{j+1,s}^{(k-1)}\alpha_1^{s} & \cdots & 1+\sum_{j=0}^{\ell} b_{0,j}\sum_{s=0}^{k-2} f_{j+1,s}^{(k-1)}\alpha_{k-1}^{s} \\
\alpha_1+\sum_{j=0}^{\ell} b_{1,j}\sum_{s=0}^{k-2} f_{j+1,s}^{(k-1)}\alpha_1^{s} & \cdots & \alpha_{k-1}+\sum_{j=0}^{\ell} b_{1,j}\sum_{s=0}^{k-2} f_{j+1,s}^{(k-1)}\alpha_{k-1}^{s} \\
\vdots & & \vdots \\
\alpha_1^{k-3}+\sum_{j=0}^{\ell} b_{k-3,j}\sum_{s=0}^{k-2} f_{j+1,s}^{(k-1)}\alpha_1^{s} & \cdots & \alpha_{k-1}^{k-3}+\sum_{j=0}^{\ell} b_{k-3,j}\sum_{s=0}^{k-2} f_{j+1,s}^{(k-1)}\alpha_{k-1}^{s} \\
\sum_{s=0}^{k-2} f_{0,s}^{(k-1)}\alpha_1^{s}+\sum_{j=0}^{\ell} b_{k-1,j}\sum_{s=0}^{k-2} f_{j+1,s}^{(k-1)}\alpha_1^{s} & \cdots & \sum_{s=0}^{k-2} f_{0,s}^{(k-1)}\alpha_{k-1}^{s}+\sum_{j=0}^{\ell} b_{k-1,j}\sum_{s=0}^{k-2} f_{j+1,s}^{(k-1)}\alpha_{k-1}^{s}
\end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix}
1+\sum_{j=0}^{\ell} b_{0,j}f_{j+1,0}^{(k-1)} & \sum_{j=0}^{\ell} b_{0,j}f_{j+1,1}^{(k-1)} & \cdots & \sum_{j=0}^{\ell} b_{0,j}f_{j+1,k-3}^{(k-1)} & \sum_{j=0}^{\ell} b_{0,j}f_{j+1,k-2}^{(k-1)} \\
\sum_{j=0}^{\ell} b_{1,j}f_{j+1,0}^{(k-1)} & 1+\sum_{j=0}^{\ell} b_{1,j}f_{j+1,1}^{(k-1)} & \cdots & \sum_{j=0}^{\ell} b_{1,j}f_{j+1,k-3}^{(k-1)} & \sum_{j=0}^{\ell} b_{1,j}f_{j+1,k-2}^{(k-1)} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
\sum_{j=0}^{\ell} b_{k-3,j}f_{j+1,0}^{(k-1)} & \sum_{j=0}^{\ell} b_{k-3,j}f_{j+1,1}^{(k-1)} & \cdots & 1+\sum_{j=0}^{\ell} b_{k-3,j}f_{j+1,k-3}^{(k-1)} & \sum_{j=0}^{\ell} b_{k-3,j}f_{j+1,k-2}^{(k-1)} \\
f_{0,0}^{(k-1)}+\sum_{j=0}^{\ell} b_{k-1,j}f_{j+1,0}^{(k-1)} & f_{0,1}^{(k-1)}+\sum_{j=0}^{\ell} b_{k-1,j}f_{j+1,1}^{(k-1)} & \cdots & f_{0,k-3}^{(k-1)}+\sum_{j=0}^{\ell} b_{k-1,j}f_{j+1,k-3}^{(k-1)} & f_{0,k-2}^{(k-1)}+\sum_{j=0}^{\ell} b_{k-1,j}f_{j+1,k-2}^{(k-1)}
\end{pmatrix} \\
&\quad \cdot \det \begin{pmatrix}
1 & \cdots & 1 \\
\alpha_1 & & \alpha_{k-1} \\
\vdots & & \vdots \\
\alpha_1^{k-3} & & \alpha_{k-1}^{k-3} \\
\alpha_1^{k-2} & & \alpha_{k-1}^{k-2}
\end{pmatrix} \\
&= \det\left(\boldsymbol{T}+\widetilde{\boldsymbol{B}}_3\boldsymbol{F}_2\right)\cdot \prod_{1\le j<i\le k-1}(\alpha_i-\alpha_j)
\end{aligned}
$$

with

$$
\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\
f_{0,0}^{(k-1)} & f_{0,1}^{(k-1)} & \cdots & f_{0,k-3}^{(k-1)} & f_{0,k-2}^{(k-1)}
\end{pmatrix},\ \widetilde{\boldsymbol{B}}_3=\begin{pmatrix}
b_{0,0} & \cdots & b_{0,\ell} \\
\vdots & & \vdots \\
b_{k-3,0} & \cdots & b_{k-3,\ell} \\
b_{k-1,0} & \cdots & b_{k-1,\ell}
\end{pmatrix},\ \boldsymbol{F}_2=\begin{pmatrix}
f_{1,0}^{(k-1)} & \cdots & f_{1,k-2}^{(k-1)} \\
\vdots & & \vdots \\
f_{\ell+1,0}^{(k-1)} & \cdots & f_{\ell+1,k-2}^{(k-1)}
\end{pmatrix}.
$$

计算$\det(\boldsymbol{G}_3)$。

$$\det(\boldsymbol{G}_3)=\prod_{i=1}^{k-2}v_i\cdot\det\begin{pmatrix}1+\sum_{j=0}^{\ell}b_{0,j}\alpha_1^{k+j} & \cdots & 1+\sum_{j=0}^{\ell}b_{0,j}\alpha_{k-2}^{k+j} & 0 & 0\\ \alpha_1+\sum_{j=0}^{\ell}b_{1,j}\alpha_1^{k+j} & \cdots & \alpha_{k-2}+\sum_{j=0}^{\ell}b_{1,j}\alpha_{k-2}^{k+j} & 0 & 0\\ \vdots & & \vdots & & \\ \alpha_1^{k-3}+\sum_{j=0}^{\ell}b_{k-3,j}\alpha_1^{k+j} & \cdots & \alpha_{k-2}^{k-3}+\sum_{j=0}^{\ell}b_{k-3,j}\alpha_{k-2}^{k+j} & 0 & 0\\ \alpha_1^{k-2}+\sum_{j=0}^{\ell}b_{k-2,j}\alpha_1^{k+j} & \cdots & \alpha_{k-2}^{k-2}+\sum_{j=0}^{\ell}b_{k-2,j}\alpha_{k-2}^{k+j} & a_{11} & a_{12}\\ \alpha_1^{k-1}+\sum_{j=0}^{\ell}b_{k-1,j}\alpha_1^{k+j} & \cdots & \alpha_{k-2}^{k-1}+\sum_{j=0}^{\ell}b_{k-1,j}\alpha_{k-2}^{k+j} & a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$$

$$=\prod_{i=1}^{k-2}v_i\cdot\det(\boldsymbol{A}_{2\times2})\cdot\det\begin{pmatrix}1+\sum_{j=0}^{\ell}b_{0,j}\sum_{s=0}^{k-3}f_{j+2,s}^{(k-2)}\alpha_1^s & \cdots & 1+\sum_{j=0}^{\ell}b_{0,j}\sum_{s=0}^{k-3}f_{j+2,s}^{(k-2)}\alpha_{k-2}^s\\ \alpha_1+\sum_{j=0}^{\ell}b_{1,j}\sum_{s=0}^{k-3}f_{j+2,s}^{(k-2)}\alpha_1^s & \cdots & \alpha_{k-2}+\sum_{j=0}^{\ell}b_{1,j}\sum_{s=0}^{k-3}f_{j+2,s}^{(k-2)}\alpha_{k-2}^s\\ \vdots & & \vdots\\ \alpha_1^{k-3}+\sum_{j=0}^{\ell}b_{k-3,j}\sum_{s=0}^{k-3}f_{j+2,s}^{(k-2)}\alpha_1^s & \cdots & \alpha_{k-2}^{k-3}+\sum_{j=0}^{\ell}b_{k-3,j}\sum_{s=0}^{k-3}f_{j+2,s}^{(k-2)}\alpha_{k-2}^s\end{pmatrix}$$

$$=\prod_{i=1}^{k-2}v_i\cdot\det(\boldsymbol{A}_{2\times2})$$

$$\cdot\det\left(\begin{pmatrix}1+\sum_{j=0}^{\ell}b_{0,j}f_{j+2,0}^{(k-2)} & \sum_{j=0}^{\ell}b_{0,j}f_{j+2,1}^{(k-2)} & \cdots & \sum_{j=0}^{\ell}b_{0,j}f_{j+2,k-3}^{(k-2)}\\ \sum_{j=0}^{\ell}b_{1,j}f_{j+2,0}^{(k-2)} & 1+\sum_{j=0}^{\ell}b_{1,j}f_{j+2,1}^{(k-2)} & \cdots & \sum_{j=0}^{\ell}b_{1,j}f_{j+2,k-3}^{(k-2)}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \sum_{j=0}^{\ell}b_{k-3,j}f_{j+2,0}^{(k-2)} & \sum_{j=0}^{\ell}b_{k-3,j}f_{j+2,1}^{(k-2)} & \cdots & 1+\sum_{j=0}^{\ell}b_{k-3,j}f_{j+2,k-3}^{(k-2)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \cdots & 1\\ \alpha_1 & & \alpha_{k-2}\\ \vdots & & \vdots\\ \alpha_1^{k-3} & & \alpha_{k-2}^{k-3}\end{pmatrix}\right)$$

$$=\det\left(\boldsymbol{I}_{k-2}+\widetilde{\boldsymbol{B}}_4\boldsymbol{F}_3\right)\cdot\prod_{i=1}^{k-2}v_i\cdot\prod_{1\le j<i\le k-2}(\alpha_i-\alpha_j)\cdot\det(\boldsymbol{A}_{2\times2}),$$

其中

$$\widetilde{\boldsymbol{B}_4}=\begin{pmatrix}b_{0,0} & \cdots & b_{0,\ell}\\ \vdots & & \vdots\\ b_{k-3,0} & \cdots & b_{k-3,\ell}\end{pmatrix},\boldsymbol{F}_3=\begin{pmatrix}f_{2,0}^{(k-2)} & \cdots & f_{2,k-3}^{(k-2)}\\ \vdots & & \vdots\\ f_{\ell+2,0}^{(k-2)} & \cdots & f_{\ell+2,k-3}^{(k-2)}\end{pmatrix}.$$

APPENDIX B
EXAMPLES OF SECTION V-A

例 B.1. 存在许多最大距离可分 $(\mathcal{L},\mathcal{P})$-*TGRL* 码。为简洁起见，我们仅在下表 *II* 中列出若干参数选择，并固定 $\boldsymbol{v}=\mathbf{1}$，这些结果可通过 *Magma* 程序验证。并且 ω 表示$\mathbb{F}_q$的默认本原元。

表 II 最大距离可分（$\mathcal{L}$, $\mathcal{P}$）-TGRL 码示例

q	n	k	ℓ	$\boldsymbol{A}_{2\times 2}$	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{\alpha}$	参数
3^4	7	4	1	$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\2&1&0\\2&1&0\end{pmatrix}$	$(\omega^{77}, 0, \omega^{43}, \omega^{17}, \omega^{20}, \omega^{59}, \omega^{19})$	$[9,4,6]_{3^4}$
5^3	8	5	2	$\begin{pmatrix}2 & 2\\ 4 & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$	$(\omega^{38}, \omega^{46}, \omega^{6}, \omega^{123}, \omega^{102}, \omega^{97}, \omega^{22}, \omega^{111})$	$[10,5,6]_{5^3}$
7^3	7	4	2	$\begin{pmatrix}2 & 5\\ 4 & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&2\\1&1&3\end{pmatrix}$	$(\omega^{185}, \omega^{303}, \omega^{240}, \omega^{193}, \omega^{127}, \omega^{248}, \omega^{246})$	$[9,4,6]_{7^3}$
11^2	8	4	3	$\begin{pmatrix}1 & 5\\ 4 & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2&1&1&2\\1&2&1&2\\1&1&2&3\\1&1&3&5\end{pmatrix}$	$(\omega^{111}, \omega^{19}, \omega^{62}, \omega^{83}, \omega^{103}, 2, \omega^{17}, \omega^{85})$	$[10,4,7]_{11^2}$
13^2	8	4	3	$\begin{pmatrix}1 & 5\\ 2 & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2&1&1&2\\1&2&1&2\\1&1&2&3\\1&1&3&5\end{pmatrix}$	$(\omega^{90}, \omega^{148}, \omega^{118}, \omega^{95}, \omega^{63}, \omega^{122}, \omega^{121}, \omega^{137})$	$[10,4,7]_{13^2}$
17^3	8	4	3	$\begin{pmatrix}2 & 5\\ 2 & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2&1&1&2\\3&2&1&2\\1&4&2&3\\1&2&3&5\end{pmatrix}$	$(\omega^{2674}, \omega^{4355}, \omega^{3459}, \omega^{2774}, \omega^{1820}, \omega^{3551}, \omega^{3518}, \omega^{3983})$	$[10,4,7]_{17^3}$
19^2	8	4	3	$\begin{pmatrix}4 & 5\\ 2 & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2&1&1&2\\3&2&1&2\\1&4&2&3\\1&2&3&5\end{pmatrix}$	$(\omega^{216}, \omega^{76}, \omega^{283}, \omega^{190}, \omega^{47}, \omega^{134}, \omega^{352}, \omega^{113})$	$[10,4,7]_{19^2}$
23^2	8	4	3	$\begin{pmatrix}4 & 5\\ 2 & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2&1&1&2\\3&2&1&2\\1&4&2&3\\1&2&3&5\end{pmatrix}$	$(\omega^{22}, \omega^{177}, \omega^{135}, \omega^{357}, \omega^{40}, \omega^{478}, \omega^{502}, 13)$	$[10,4,7]_{23^2}$

附录 C
A定理 示例 V.5

例 C.1. 设 $q=3^2$, $\mathbb{F}_q^*=\langle\omega\rangle$ 满足 $\omega^2+2\omega+2=0$, $k=5$, $\lambda=\omega$, $b=0$, $c=1$ 且 $\alpha_i=\omega^i(1\le i\le q-2)$。则相应的(1)列*TGRS*码的生成矩阵如下:

$$\boldsymbol{G}_1(\omega,0,1)=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1&1&1-\omega\\ \omega&\omega^2&\omega^3&\omega^4&\omega^5&\omega^6&\omega^7&-\omega\\ \omega^2&(\omega^2)^2&(\omega^3)^2&(\omega^4)^2&(\omega^5)^2&(\omega^6)^2&(\omega^7)^2&-\omega\\ \omega^3&(\omega^2)^3&(\omega^3)^3&(\omega^4)^3&(\omega^5)^3&(\omega^6)^3&(\omega^7)^3&-\omega\\ \omega^4&(\omega^2)^4&(\omega^3)^4&(\omega^4)^4&(\omega^5)^4&(\omega^6)^4&(\omega^7)^4&-\omega\end{pmatrix}.$$

根据 *Magma* 程序，由 $\boldsymbol{G}_1(\omega,0,1)$ 生成的线性码是近最大距离可分码，其参数为 $[8,5,3]_9$，重量分布为

$$A(x)=1+32x^3+400x^4+2560x^5+9984x^6+23072x^7+23000x^8.$$

这与定理 *V.5*给出的结果一致，即

$$\begin{aligned}A_3=&\sum_{i|8}(-1)^{4+\lfloor\frac{4}{i}\rfloor}\binom{\frac{8}{i}-1}{\lfloor\frac{4}{i}\rfloor}\sum_{d|\gcd(i,\gcd(1,8))}d\mu\left(\frac{i}{d}\right)\\ =&\sum_{i|8}(-1)^{4+\lfloor\frac{4}{i}\rfloor}\binom{\frac{8}{i}-1}{\lfloor\frac{4}{i}\rfloor}\mu(i)\\ =&(-1)^{4+\lfloor\frac{4}{1}\rfloor}\binom{\frac{8}{1}-1}{\lfloor\frac{4}{1}\rfloor}\mu(1)+(-1)^{4+\lfloor\frac{4}{2}\rfloor}\binom{\frac{8}{2}-1}{\lfloor\frac{4}{2}\rfloor}\mu(2)+(-1)^{4+\lfloor\frac{4}{4}\rfloor}\binom{\frac{8}{4}-1}{\lfloor\frac{4}{4}\rfloor}\mu(4)+(-1)^{4+\lfloor\frac{4}{8}\rfloor}\binom{\frac{8}{8}-1}{\lfloor\frac{4}{8}\rfloor}\mu(8)\\ =&(-1)^8\binom{7}{4}\mu(1)+(-1)^6\binom{3}{2}\mu(2)+(-1)^5\binom{1}{1}\mu(4)+(-1)^4\binom{-1}{0}\mu(8)\\ =&32.\end{aligned}$$