arXiv:2611.32235v1 [math.FA] 24 Nov 2026

阻止狄利克雷循环性的极性卡尔松零集

BARTOSZ MALMAN

Abstract. Chen、Fang 和 Guo 的工作 [CFG26]最终表明，Brown-Shields 猜想是错误的。在本文中[1],我们构造了单位圆 $\mathbb{T}$ 上的一个极性卡尔松集 E，它具有这样的性质：狄利克雷空间中任何在 E 上消失的赫尔德连续函数都是非循环的。

1. 化归为点求值估计及相关讨论。令 $\mathcal{D}$ 为单位圆盘上的狄利克雷空间，并赋予范数 $\|f\|_{\mathcal{D}}^2 = |f(0)|^2 + \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2\, dA(z)$，其中 dA为归一化面积测度。在 $\mathbb{T}$上，令 m 为归一化勒贝格测度，并对每个可测集 $B \subseteq \mathbb{T}$记 $|B| = m(B)$。

命题 1。存在一个对数容量为零的紧卡尔松集 $E \subset \mathbb{T}$ 和一个数值常数 $C > 0$，使其具有以下性质。若 $h \in C(\mathbb{T}) \cap \mathcal{D}$ 在 E 上消失，并满足距离估计

$$|h(t)| \le C_h\, dist(t, E)^{1/2}, \quad t \in \mathbb{T},$$

then

$$|h(0)|^2 \le C \int_{\mathbb{D}} |h'(z)|^2\, dA(z). \tag{2}$$

特别是，(2) 中的估计不涉及常数 C_h。[2]

Carleson 集的定义如下，紧接在（10）之后。本文致力于证明命题 1。对于 $\alpha \in (0,\ 1)$，令 $C^\alpha(\mathbb{T})$ 表示 $\mathbb{T}$ 上指数为 α 的 H¨older 正则函数空间，即满足形如 $|f(t) - f(s)| \le C_{f,\ \alpha}|t-s|^\alpha$ 的估计的函数，其中某个常数 $C_{f,\ \alpha} > 0$。于是，对于在 E上消失的 $h \in C^{1/2}(\mathbb{T})$，命题 1 中的距离估计成立。如果 $h \in C^\alpha(\mathbb{T})$ 在 E 上消失，且整数 k 满足 $k\alpha \ge 1/2$，那么对于 h^k 和 ph^k，距离估计成立，其中 p 是任意多项式。

推论 2。 在命题 1 中集合 E 上消失的每个外函数 $f \in C^\alpha(\mathbb{T}) \cap \mathcal{D}$ 在$\mathcal{D}$中都是非循环的。

证明。 令 k 为满足 $k\alpha \ge 1/2$的整数，并设 $g = f^k$。由于 f 有界，我们有 $g \in \mathcal{D}$。根据推论前的段落，我们有

$$|p(0)g(0)|^2 \le C \int_{\mathbb{D}} |(p(z)g(z))'|^2 dA(z)$$

对于任意多项式 p。由于

$$\int_{\mathbb{D}} |(p(z)g(z))'|^2 dA(z) = \int_{\mathbb{D}} |(p(z)g(z) - 1)'|^2 dA(z) \le \|pg - 1\|_{\mathcal{D}}^2$$

我们推得

$$|p(0)g(0)|^2 \le C\|pg - 1\|_{\mathcal{D}}^2$$

并且我们看到，不可能有 $pg \to 1$ 属于 $\mathcal{D}$，因为此时上式左端趋于 1，而右端趋于 0。因此， g 是非循环的。根据 [EKMR14，定理 9.1。7]，当且仅当 f 是循环的时， $g = f^k$ 才是循环的。□

给定一个满足 $|E| = 0$的 Carleson 集 E，存在一个外函数 $f \in C^{1/2}(\mathbb{T}) \cap \mathcal{D}$，其边界零点集$\{z \in \mathbb{T} :\ f(z) = 0\}$ 恰好是 E。参见 [EKMR14，定理 4.4。3], 或 [TW70]，其中给出了 $C^\infty(\mathbb{T}) \cap \mathcal{D}$ 中的示例。对于命题 1 中构造的特定 E，任意这样的函数在 $\mathcal{D}$中都是非循环的。这应当与 Brown 和 Cohn 在 [BC85] 中的构造展示了一个 $C(\mathbb{T}) \cap \mathcal{D}$ 循环函数，该函数在任意给定的紧极集 $E \subset \mathbb{T}$ 上都为零。因此，同一个集合 E 正好是两个连续

[1]本文中的所有实质性结果均由 Oracle 提出，在本例中即 ChatGPT 6.0 Astra 模型。但本文并非由她撰写。[2]我们立即指出，对 C_h 的依赖会神奇地消失，这是在 (13) 中 $p \to \infty$ 取极限时发生的；该式用到了与 E 相关的迭代不等式。

外狄利克雷函数的边界零点集，其中一个是循环函数，另一个是非循环函数。由此可知，若将 $C^\alpha(\mathbb{T})$ 替换为更大的类 $C(\mathbb{T})$，则推论 2 不成立。

2. **问题的核心**。

2.1. 卡尔森积分。 对于圆弧 $I \subseteq \mathbb{T}$ 和非零函数 $f \in \mathcal{D}$，考虑在 I上的卡尔森积分，即

$$\operatorname{Carl}_I(f) = \int_I \int_{\mathbb{T}} \frac{(|f(t)|^2 - |f(s)|^2)(\log|f(t)|^2 - \log|f(s)|^2)}{|t-s|^2}\, dm(s)\, dm(t). \tag{3}$$

根据 [EKMR14, 定理 7.4.1]，，对于外函数 f，我们有恒等式 $\operatorname{Carl}_{\mathbb{T}}(f) = 2\int_{\mathbb{D}} |f'|^2\, dA$。我们指出，即使对于非外函数 $f \in \mathcal{D}$，我们也会使用上述卡尔森积分。事实上，下面命题 3 中的估计仍然适用。这一点会起到一定作用，尽管作用不大。

2.2. 主要估计。 对于由 $\mathcal{I}$ 个内部互不相交的区间组成的族 $\mathbb{T}$，我们引入一个记号，表示该族上 $|f|^2$ 的平均值之和：

$$\mathcal{T}_{\mathcal{I}}(f) = \sum_{I \in \mathcal{I}} \frac{1}{|I|} \int_I |f|^2\, dm. \tag{4}$$

下一个命题是 [CFG26, 定理 11.1] 的一个变体。阅读下面红框中的内容时，参照图 1 可能会有所帮助。

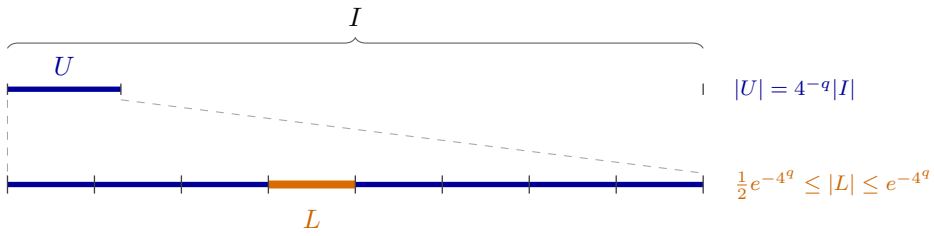


FIGURE 1. 下排显示了对 U 的细分。在构造我们的 Carleson 集E时，将对每个 L 递归地应用相同的步骤。

命题 3。 设 $I \subseteq \mathbb{T}$ 为一个区间，且 q 为一个较大的正整数。设 U 为 I 中长度为 $4^{-q}|I|$ 的最左侧子区间。将 U 划分为长度相等的区间 L，使得

$$\frac{e^{-4^q}}{2} \le |L| \le e^{-4^q}. \tag{5}$$

设有限族 $\mathcal{I}'$ 由该划分中的所有区间 L 构成。那么，对于每个 $f \in C(\mathbb{T}) \cap \mathcal{D}$，都有

$$\frac{1}{|I|}\int_I |f|^2\, dm \le 16\pi^2 \cdot \operatorname{Carl}_I(f) + \frac{e^{-4^q/2}4^q}{|I|}\mathcal{T}_{\mathcal{I}'}(f). \tag{6}$$

证明。 首先注意到，对于 a, $b>0$，我们有

$$a \le \frac{4}{4^q}(a-b)(\log a - \log b) + e^{4^q/2}b. \tag{7}$$

事实上，如果 $a \le e^{4^q/2}b$，则不等式显然成立，因为右侧的第一项非负。否则 $a > e^{4^q/2}b$，取对数并整理可得 $\frac{(\log a - \log b)}{4^q} > 1$。由于$e^{4^q/2} > 2$，不等式 $a > e^{4^q/2}b$ 还推出 $2(a-b) \ge a$。然后，将所得到的两个不等式相乘即可得到（7）。

在 (7) 中取 $a = |f(t)|^2$ 和 $b = |f(s)|^2$，并对 $t \in I$ 和 $s \in U$ 积分。我们得到

$$|U|\int_I |f|^2 dm \le \frac{4}{4^q}\int_I\int_U (|f(t)|^2 - |f(s)|^2)(\log|f(t)|^2 - \log|f(s)|^2)\, dm(s)\, dm(t) + e^{4^q/2}|I|\int_U |f|^2 dm. \tag{8}$$

在右侧的第一个积分项中，我们将被积函数乘以 $\frac{4\pi^2|I|^2}{|t-s|^2}$；由于 $|t-s| < 2\pi|I|$，且 t, $s \in I$，因此该因子大于 1。随后利用被积函数的非负性，将 s 积分的区间从 U 扩展至 $\mathbb{T}$。对于第二个积分项，我们利用 U 是区间 $L \in \mathcal{I}'$ 与 (5) 的并集这一事实，得到

$$e^{4^q/2}|I|\int_U |f|^2 dm = e^{4^q/2}|I|\sum_{L\in\mathcal{I}'}\int_L |f|^2 dm \le e^{-4^q/2}|I|\mathcal{T}_{\mathcal{I}'}(f).$$

将这些估计代入 (8)，再除以 $|I|\cdot|U|$，得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{|I|}\int_I |f|^2\,dm &\le \frac{16\pi^2|I|}{4^q\cdot|U|}\operatorname{Carl}_I(f) + \frac{e^{-4^q/2}}{|U|}\mathcal{T}_{\mathcal{I}'}(f)\\ &= 16\pi^2\operatorname{Carl}_I(f) + \frac{e^{-4^q/2}4^q}{|I|}\mathcal{T}_{\mathcal{I}'}(f).\end{aligned}$$

□

推论 4。 设 $\mathcal{I}=\{I_1,\dots,I_s\}$ 是 $\mathbb{T}$ 中长度相等且内部互不相交的有限区间族。对每个 $I_j\in\mathcal{I}$，令 $\mathcal{I}'_j(q)$ 为命题 3 中构造的区间族，并且所有这些区间族中的区间长度均相同；令 $\mathcal{I}'(q)$ 为这些区间族的并。对所有充分大的 q，对于任意 $f\in C(\mathbb{T})\cap\mathcal{D}$，都有

$$\mathcal{T}_{\mathcal{I}}(f) \le 16\pi^2\operatorname{Carl}_{\mathbb{T}}(f) + \frac{1}{4}\mathcal{T}_{\mathcal{I}'(q)}(f). \tag{9}$$

给定 $\epsilon>0$，对所有充分大的 q，$\bigcup_{L\in\mathcal{I}'(q)}L$ 的容量小于 ϵ.

证明。取 q 足够大，使得 $\frac{e^{-4^q/2}4^q}{|I_j|}<1/4$。区间 I_j 的内部互不相交，因此由（3）的可加性，$\sum_{j=1}^s \operatorname{Carl}_{I_j}(f) \le \operatorname{Carl}_{\mathbb{T}}(f)$。将（6）对 j 求和，得到（9）。区间族 $\mathcal{I}'_j(q)$ 由包含于同一个长度为 $4^{-q}|I_j|$ 的区间 U_j 内的区间组成。因此，$\cup_{L\in\mathcal{I}'_j(q)}L$ 的容量随 $q\to\infty$ 趋于 0。容量结论随即成立，因为这样的区间族 $\mathcal{I}'_j(q)$ 只有有限多个。□

3. Carleson 集的构造 E。

3.1. *Carleson* 集。

对于有限或可数的圆弧集 $\mathcal{G}$，Carleson 熵为

$$\kappa(\mathcal{G}) = \sum_{G\in\mathcal{G}} |G|\log(e/|G|). \tag{10}$$

紧集 $E\subset\mathbb{T}$ 满足 $|E|=0$，若 $\kappa(\mathcal{G}(E))<\infty$，其中 $\mathcal{G}(E)$ 是构成补集 $\mathbb{T}\setminus E$ 的极大连通区间族。

我们有如下**合并定律**：如果 $\mathcal{G}'$ 中的每个区间都是 $\mathcal{G}$ 中区间的不交并（例如，除去一个零测集，并且 $\mathcal{G}$ 中的每个区间在合并时只使用一次），那么 $\kappa(\mathcal{G}')\le\kappa\,\mathcal{G}$。这立即由不等式 $\phi(a+b)\le\phi\,a+\phi(b)$ 对于 $\phi(t)=t\log(e/t)$ 得出。

3.2. 命题 1的证明。

我们将 E 构造为推论 4 中出现的各族区间并集的交集，并迭代估计式 (9) 以证明 (2)。最后，我们验证 E 是 Carleson 集。该构造是 [CFG26 第 11 节3] 中所给构造的一种变体。

设 $\mathcal{I}_1=\{\mathbb{T}\}$。在每一步 $n\ge 2$，应用[3] 推论 4 于 $\mathcal{I}_{n-1}=\mathcal{I}$，得到 $\mathcal{I}_n=\mathcal{I}'$，选择 q_n 使得 $\bigcup_{L\in\mathcal{I}_n}L$ 的容量趋于 0，并且有

$$\mathcal{T}_{\mathcal{I}_{n-1}}(f) \le 16\pi^2\operatorname{Carl}_{\mathbb{T}}(f) + \frac{1}{4}\mathcal{T}_{\mathcal{I}_n}(f) \tag{11}$$

如果我们将区间 L 取为闭区间（这是可以的），那么

$$E=\bigcap_{n\ge1}\Big(\bigcup_{L\in\mathcal{I}_n}L\Big)$$

显然是一个闭极集。每个 $L\in\mathcal{I}_n$ 的左端点都保留到 E。这立即由 $\mathcal{I}_n$的构造得出。

证明命题中关于 h 所述的 (2)。如果函数 $h\in C(\mathbb{T})$ 满足 $|h(t)|\le C_h\cdot\operatorname{dist}(t,E)^{1/2}$，其中某个常数为 $C_h>0$，那么由于每个 $L\in\mathcal{I}_n$ 都与 E相交，我们有 $\operatorname{dist}(t,E)\le 2\pi|L|$（对于 $t\in L$），从而 $|h(t)|\le C_h 2\pi\sqrt{|L|}$ 对于 $t\in L$成立。根据 (4)，我们得到

$$\mathcal{T}_{\mathcal{I}_n}(h) \le C_h^2 4\pi^2\sum_{L\in\mathcal{I}_n}|L| \le 4\pi^2C_h^2. \tag{12}$$

[3]在步骤 $n=2$ 我们有 $I=\mathbb{T}$，因此没有端点。令命题 3 中的 U 等于 $\{e^{i2\pi x}\in\mathbb{T}:\ x\in[0,4^{-q_2}]\}$.

最后一个不等式源于区间 L 和 $|\mathbb{T}| = 1$ 的内部不相交性。迭代（11）并利用（12），我们得到对于任意 $p \geq 2$，有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{T}} |h|^2\, dm &\leq 16\pi^2 \left(\sum_{j=0}^{p-2} 4^{-j} \right) \operatorname{Carl}_{\mathbb{T}}(h) + \frac{\mathcal{T}_{\mathcal{I}_p}(h)}{4^{p-1}} \\ &\leq C \operatorname{Carl}_{\mathbb{T}}(h) + \frac{4\pi^2 C_h^2}{4^{p-1}}\end{aligned} \tag{13}$$

其中 C 是某个（有限的）数值常数。令 $p \to \infty$，代入（13）式可得 $\int_{\mathbb{T}} |h|^2\, dm \leq C\, \mathsf{Carl}_{\mathbb{T}}(h)$。若 $h = IQ$ 是将 h 分解为内因子 I 和外因子 Q 的内外因子分解，则在 $\mathbb{T}$ 上几乎处处有 $|h| = |Q|$，因此 $\int_{\mathbb{T}} |h|^2\, dm = \int_{\mathbb{T}} |Q|^2\, dm$，且 $\mathsf{Carl}_{\mathbb{T}}(h) = \mathsf{Carl}_{\mathbb{T}}(Q)$。此外，利用对于外函数 Q 有 $\mathsf{Carl}_{\mathbb{T}}(Q) = 2\int_{\mathbb{D}} |Q'|^2\, dA$，我们得到

$$\begin{aligned}|h(0)|^2 \leq \int_{\mathbb{T}} |h|^2\, dm &\leq C \operatorname{Carl}_{\mathbb{T}}(Q) \\ &= 2C \int_{\mathbb{D}} |Q'(z)|^2\, dA(z) \\ &\leq 2C \int_{\mathbb{D}} |h'(z)|^2\, dA(z).\end{aligned}$$

第二行使用了（3）式之后的注记，最后一行使用了以下事实：除以内因子可以使狄利克雷积分 [EKMR14, Corollary 7.6.3] 只能减小。这就证明了（2）。

剩下需要验证的是，E 确实是一个 Carleson 集。对于 $I \in \mathcal{I}_n$，根据图 1，我们有 $I \setminus \left(\bigcup_{I' \in \mathcal{I}_{n+1}, I' \subset I} I' \right) = I \setminus U$。$\mathcal{G}(E)$ 中的每个区间，除去端点后，都是区间 $I \setminus U$、$I \in \mathcal{I}_n$、$n \geq 1$ 的可数个互不相交并集。根据合并定律，只需估计区间 $I \setminus U$ 的 Carleson 熵之和。对于每个 I，$I \setminus U$ 的 Carleson 熵为 $|I \setminus U| \log(e/|I \setminus U|) \leq |I| \log(e/|I|)$。

设 N_n 为 $\mathcal{I}_n$中的区间数，ℓ_n 为它们的公共长度。根据上文，每个$I \in \mathcal{I}_n$ 对 $\mathcal{G}(E)$的熵的贡献不超过 $\ell_n \log(e/\ell_n)$。因此，要证明 E 是一个 Carleson 集，只需证明

$$\sum_{n \geq 1} N_n \ell_n \log(e/\ell_n) < \infty. \tag{14}$$

对于 $n \geq 2$，$N_n \ell_n$ 与 $N_{n-1}\ell_{n-1}$ 的比值，就是图 1 中每个父区间 $I \in \mathcal{I}_{n-1}$ 被蓝色区间 U 覆盖的比例。因此

$$\frac{N_n \ell_n}{N_{n-1}\ell_{n-1}} = 4^{-q_n}. \tag{15}$$

由 (5) 可得 $\ell_n \geq e^{-4^{q_n}}/2$，因此

$$\log(e/\ell_n) \leq 2 + 4^{q_n} \leq 2 \cdot 4^{q_n}.$$

因此，

$$N_n \ell_n \log(e/\ell_n) \leq 2 N_{n-1} \ell_{n-1}.$$

但由 (15) 可知，$N_n \ell_n$ 关于 n显然是几何递减的。因此，最后显示的不等式表明 (14) 成立。证明完毕。

致谢。作者感谢 Linus Bergqvist 和 Daniel Seco 对稿件提出的宝贵意见，并感谢 Adem Limani 就 Carleson 集在狄利克雷循环性问题中的作用与作者进行讨论。

References

[BC85] L. Brown 和 W. Cohn，《狄利克雷空间中的循环向量示例》，*Proc. Amer. Math. Soc.* **95**(1985)，第 1 期，42–46 页。[CFG 26] B. Chen、X. Fang 和 F. Guo，《Brown–Shields 猜想：两个逼近定理和一个反例》，arXiv:2611.16997（2026）。[EKMR14] O. El-Fallah、K. Kellay、J. Mashreghi 和 T. Ransford，*A primer on the Dirichlet space*，剑桥数学论丛，第 203 卷，剑桥大学出版社，剑桥，2014 年。[TW70] B. A. Taylor 和 D. L. Williams，《具有光滑边界值的解析函数环中的理想》，*Canad. J. Math.***22**（1970），第 6 期，1266–1283 页。

Institutionen för ekonomi och matematik、Mälardalens Universitet、721 23 Västerås、Sweden*Email address*: bartosz.malman@mdu.se