arXiv:2611.32244v1 [math.MG] 24 Nov 2026

一个锐利的多边形芬斯勒–哈德维格不等式

Beniamin Bogosel*

2026年11月24日

摘要

对于每一个面积为 A、边长为 $a_1, \dots, a_n$ 的简单 n 边形，我们证明

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \geq 4\tan\frac{\pi}{n}\,A + c_n \sum_{i<j}(a_i - a_j)^2, \qquad c_n = 1 - \frac{\tan(\pi/n)}{\tan(\pi/(n-1))},$$

约定 $c_3 = 1$，因此当 $n = 3$ 时，恰为芬斯勒–哈德维格不等式。系数 c_n 无法进一步改进，且等式仅在正多边形的情形下成立。极值构型与正则 n 边形相去甚远：当一个边趋于零、其余边趋于正则（$n-1$）边形的边时，该常数可以逼近（当 $n = 3$ 时则为一条双倍线段）。证明结合了这样一个经典事实：给定边长时，圆内接多边形的面积最大；并利用半中心角进行二变量最小化。我们还计算了近正则多边形的较大最优系数，并证明边长与顶点半径的联合稳定性估计中的最佳常数按 n^2 增长。

关键词。多边形等周不等式；芬斯勒–哈德维格不等式；边长方差；圆内接多边形；最佳常数。

数学学科分类（2020）。52A40, 51M16, 26D05。

1 引言

设 P为一个周长为 L、面积为 A、边长为 $a_1, \dots, a_n$ 的凸 n 边形。多边形等周不等式为

$$L^2 \geq 4n\tan\frac{\pi}{n}\,A, \tag{1.1}$$

等式当且仅当该多边形为正则 n 边形时成立；例如，参见 [12]。由柯西–施瓦茨不等式可知，$L^2 \leq n\sum_i a_i^2$，因此 (1.1) 推出较弱的估计

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \geq 4\tan\frac{\pi}{n}\,A. \tag{1.2}$$

对于三角形，Finsler和Hadwiger的一项经典结果通过一个衡量三角形偏离等边程度的项，强化了 (1.2)： [4]

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}\,A + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2.$$

*阿拉德奥雷尔·弗拉伊库大学精确科学学院，阿拉德，罗马尼亚。电子邮箱：beniamin.bogosel@uav.ro。

近来，Giugiuc、Dao 和 Altintas [6, 定理 1.1]发现了四边形的对应结果，其中六个边长差的平方之和前的系数为 $1-1/\sqrt{3}$。

这促使 Dao [2] 提出疑问：对每个 n，是否都成立同形式的强化不等式？其中提出的系数 $\tan(\pi/n)-\tan(\pi/(n+2))$ 对三角形而言已经过大，正如 Pinelis 在其回答中指出的那样。本文确定了每个 $n\geq 3$ 对应的最优系数（定理2.1）。颇令人意外的是，极值多边形远非正则多边形。该常数可由一类圆内接多边形逼近，其中一条边趋于零；其极限在 $n\geq 4$ 时为正则（$n-1$）边形，在 $n=3$时为双倍线段。若将范围限制在接近正则 n边形的多边形，最优系数则严格更大，即为 $1/[n\cos^2(\pi/n)]$ （命题 5.1）。

第二个动机来自定量稳定性。Indrei 和 Nurbekyan [9] 证明，等周亏量同时控制边长方差以及顶点到其重心距离的方差。Indrei [8, 随后在推论 1.2] 中进一步加入了凸多边形重心角的面积加权方差。结合经典的径向方差不等式，我们的尖锐边长估计使这些界都变得完全显式（第5.3节）。对于三角形，面积、周长与边长离散度之间的最优非线性关系已在 [1]中得到。

此前在相关问题中已用到圆内接多边形的圆心角。Ku 和 Ku [11] 推导了面积公式，并给出了适用于包括具有两种不同边长的圆内接多边形在内的多个族的等周不等式的改进。Hitt 和 Zhang [7, 第 5] 节利用圆心角的主序来比较内接于同一圆的多边形的周长。据我们所知，$\sum_{i<j}(a_i-a_j)^2$ 前的最优系数此前仅对 $n=3$ 和 $n=4$已知。

2 主要结果

简单的 n边形是由 n 个互异顶点构成的多边形若尔当曲线；即使相邻的边共线，这些顶点仍按其标签分别计数。其面积即为封闭区域的面积。凸 n边形是围成凸区域的简单 n边形。令

$$\tau_n=\tan\frac{\pi}{n}\quad(n\geq 3),\qquad \tau_2=+\infty,$$

并将 τ_n/τ_2 视为零。此约定仅用于将情形 $n=3$ 纳入下文的一般公式，此时公式给出 $c_3=1$。

定理2.1。 对于每个凸 n边形 P，其边长为 a_1、……、a_n，面积为 A，

$$\sum_{i=1}^{n}a_i^2\geq 4\tau_n A+c_n\sum_{i<j}(a_i-a_j)^2,\qquad c_n=1-\frac{\tau_n}{\tau_{n-1}}. \tag{2.1}$$

系数 c_n 是可能的最大值。当且仅当 P 为正则图形时，等式成立。

在给出细节之前，我们先解释 c_n 的由来。边长固定时，多边形内接于圆时面积最大。因此，我们可以只考虑圆内接多边形，并用其半中心角来描述；这些角构成一个单纯形。若保持两个角的和不变而移动它们，最坏情形总是在这两个角相等或其中一个角变为零时出现。如此反复后，只剩下具有 m 个相等角和 $n-m$ 个零角的构型。取等情形为$m=n-1$：一个有一个顶点被重复计数的正$n-1$边形，或者在 $n=3$ 时为一条双倍线段。

推论 2.2（简单多边形）。 每个简单 n边形都满足 （2.1），且最优系数相同。等式恰好在正多边形的情形下成立。

证明。 其思路是在不改变 P 边长的情况下将其凸化。根据 Erdős–Nagy 定理，经过有限次口袋翻转，可将 P 变为凸多边形 P_c [3, 定理 1.1]。这一版本的定理会在有序顶点列表中追踪平坦顶点，并允许它们出现在凸化后的结果中 [3, 第 2 节和第 4 节.2]。翻转会将一段边界链关于其支撑线反射，同时保持其余边界不变。每条带标记的边都保持其长度不变，而封闭区域则增加了口袋及其镜像（边界除外），因此每次翻转都会严格增大面积。将定理2.1应用于 P_c ，即可得到 P的式 (2.1)。若等式成立，则没有发生任何翻转，因此回到凸情形下的等号情形。最后，凸情形的尖锐性族由简单多边形构成，因此该系数仍是最优的。

□

用等周亏量和边长方差来表述定理2.1通常更为自然。令

$$D(P)=\sum_{i<j}(a_i-a_j)^2, \qquad \delta_n(P)=L^2-4n\tau_n A,$$
$$V(P)=\sum_{i=1}^{n}\left(a_i-\frac{L}{n}\right)^2, \qquad \sigma_s^2(P)=\frac{1}{n}V(P).$$

直接计算可得

$$D(P)=n\sum_i a_i^2-L^2=nV(P), \tag{2.2}$$

因此，定理2.1可改写如下。

推论 2.3。 对于任意正面积的简单 n边形，

$$\delta_n(P)\geq\gamma_n D(P), \qquad \gamma_n=nc_n-1=(n-1)-n\frac{\tau_n}{\tau_{n-1}}>0. \tag{2.3}$$

等价地，

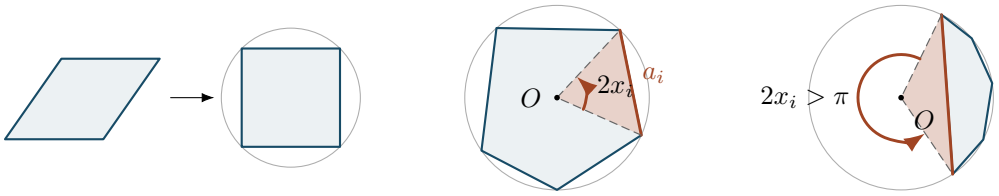
$$V(P)\leq\frac{\delta_n(P)}{n\gamma_n}, \qquad \sigma_s^2(P)\leq\frac{\delta_n(P)}{n^2\gamma_n}. \tag{2.4}$$

系数 γ_n 最大，而(2.4) 中的两个倒数系数最小。当且仅当多边形为正则多边形时，等式成立。

事实上，从(2.1)的左边减去右边并乘以 n，得到 $\delta_n(P)-(nc_n-1)D(P)$，从而证明了等价性。对于 $n=3$， $\gamma_3=2$。对于 $n\geq 4$，其正性源于 $x\tan(\pi/x)$ 严格递减（当 $x>2$ 时）：其导数为 $\tan u-u\sec^2 u<0$，其中 $u=\pi/x\in(0,\pi/2)$。

3 循环化简与二变量最小化

第一步是经典结论：在所有具有给定边长的多边形中，圆内接多边形的面积最大。更准确地说，由于 P 具有正面积，每条边都严格短于其余各边长度之和。按边界顺序排列的满足这一性质的边长，唯一确定一个圆内接多边形，且在等距变换意义下唯一 [10, 定理1.1]。根据经典的割线多边形定理 [10, 定理1.5], ，它在具有这些边的多边形中面积最大，并且



相同的边长　　正向三角形　　负向三角形

图1：循环化简与有向面积。左图中，正方形在边长与菱形相同的条件下面积最大。中图中，高亮的三角形对式 (3.2) 作正贡献；右图中则作负贡献，因为逆时针间隙大于 π。

只有圆内接多边形能够取得该最大值。当 P 具有连续的共线边时，结论仍然成立。由于 A 在（2.1）中具有正系数，用其圆内接对应多边形替换 P 只会使不等式更难成立，因此只需讨论圆内接多边形（图1）。

设 R 为外接圆半径，并令 $2x_i$ 表示从第 i 个顶点到下一个顶点的逆时针角间隙。于是

$$0 < x_i < \pi, \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i = \pi, \qquad a_i = 2R\sin x_i. \tag{3.1}$$

注意，外心不一定在多边形内部；此时，其中一个 x_i 大于 $\pi/2$ （见图1右图）。若将外心与一条边构成的每个三角形都按符号计入，通常的面积公式仍然成立：

$$A = \frac{R^2}{2}\sum_i \sin(2x_i) = R^2 \sum_i \sin x_i \cos x_i. \tag{3.2}$$

将（2.1）两边之差除以 $4R^2$，并利用（2.2），我们得到 n

$$\Phi_c(x) = c\left(\sum_i \sin x_i\right)^2 - \sum_i \left[(nc-1)\sin^2 x_i + \tau_n \sin x_i \cos x_i\right] \tag{3.3}$$

其中 $c = c_n$。因此，定理2.1归结为证明 $\Phi_{c_n} \geq 0$。为方便起见，我们允许出现趋于零的角（它们对应于退化多边形），并在紧单纯形上进行研究

$$\Delta_n = \left\{ x \in [0,\pi]^n : \sum_i x_i = \pi \right\}.$$

引理3.1 （二变量最小化）。 固定 $n \geq 3$ 和 $c > 0$。在 Δ_n 上，Φ_c 存在一个如下形式的极小点

$$x^{(m)} = \left(\underbrace{\pi/m, \ldots, \pi/m}_{m \text{ entries}}, 0, \ldots, 0\right) \quad \textit{for some } 1 \leq m \leq n. \tag{3.4}$$

此外，任何至少有三个正坐标的极小点，其所有正坐标都相等。

证明。 由紧致性可知最小值存在。其策略是每次调整两个坐标，同时保持它们的和不变，并证明 Φ_c 关于某个适当参数是凹的。固定除两个坐标 x, y 之外的所有坐标，并固定它们的和 $p = x + y$。若 $p > 0$，记作

$$x = \frac{p}{2} + d, \qquad y = \frac{p}{2} - d, \qquad z = \cos d.$$

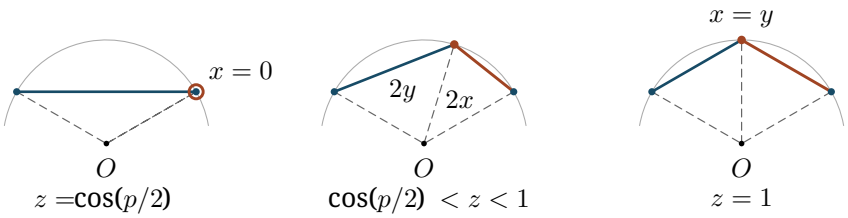


图2：固定角 $2p$的弧的端点时，连续间隙对应的双角切片。在可行区间的两个端点处，中间顶点会与一个端点重合（左），或将弧二等分（右）。

由于 $0 \le p \le \pi$，可行区间为 $\cos(p/2) \le z \le 1$ （图2）。令 r 表示其余坐标的正弦之和。这一对坐标的贡献满足

$$\begin{aligned} \sin x + \sin y &= 2\sin(p/2)z, \\ \sin^2 x + \sin^2 y &= 1 - \cos p\,(2z^2 - 1), \\ \sin x \cos x + \sin y \cos y &= \sin p\,(2z^2 - 1). \end{aligned}$$

代入（3.3）可得

$$\Phi_c = \alpha z^2 + \beta z + \eta, \tag{3.5}$$

其中 η 与 z 无关，并且

$$\begin{aligned} \alpha &= 4c\sin^2(p/2) + 2(nc-1)\cos p - 2\tau_n \sin p, \\ \beta &= 4cr\sin(p/2) \ge 0. \end{aligned} \tag{3.6}$$

现在的关键观察如下。在变量 $t = z^2 = \cos^2 d$中，该切片变为 $\alpha t + \beta\sqrt{t} + \eta$在 $[\cos^2(p/2), 1]$上，这是凹函数，因为 $\beta \ge 0$；当 $\beta > 0$时则为严格凹函数。凹函数在端点处取得最小值，因此我们可以令 x, y 中的一个为零，或令二者相等。

假设某个全局极小值点至少有三个正坐标。任取其中两个正坐标 x， y，我们有 $p < \pi$ and $r > 0$，因此 $\beta > 0$。若 $x \ne y$，则 t 位于该区间内部，这与严格凹性矛盾。因此，这类极小点的所有正坐标都相等。

若某个极小点恰有两个正坐标，则 $p = \pi$ and $r = 0$。该截面在 $[0, 1]$ 上是仿射的，且端点处可取得相同的最小值，此时要么只有一个正坐标，要么有两个相等的正坐标。只有一个正坐标的极小点本身已具有所需形式。由于坐标之和为 π，这就证明了 (3.4)。□

注 3.2（两个正坐标）。 在单纯形的一条边上，直接代入可得

$$\Phi_c(x, \pi - x, 0, \dots, 0) = 2\big(1 - (n-2)c\big)\sin^2 x.$$

若 $1 - (n-2)c = 0$，则此限制为常数。特别地，对于 $n = 3$ 和 $c = c_3 = 1$，此类边上的每个点的取值均为零，包括正坐标不相等的点。引理3.1仅断言可以选取一个正坐标相等的极小点；要刻画每个极小点，则要求至少有三个正坐标。这些边界构型的面积为零，因此不会产生定理2.1中的其他等号情形。

4 最优系数的证明

根据引理3.1，只需检验 Φ_c 在 n 点 $x^{(m)}$处的符号。在 $x^{(1)}$处（对应于一个完全退化多边形）， Φ_c 为零。对于 $m \ge 2$，将 $x^{(m)}$ 代入（3.3）可得

$$\Phi_c(x^{(m)}) = m \sin^2 \frac{\pi}{m} \left(1 - c(n-m) - \tau_n \cot \frac{\pi}{m}\right). \tag{4.1}$$

$m = n$ 的值对每个 c 都为零，这正如预期，因为 $x^{(n)}$ 是正多边形。对于 $2 \le m < n$，该值非负当且仅当

$$c \le c_{n,m} := \frac{1 - \tau_n/\tau_m}{n-m}. \tag{4.2}$$

因此，最优系数为 $\min_{2\le m<n} c_{n,\,m}$。下一个引理表明，该最小值在 $m = n-1$ 处取得。

Le引理 4.1。对于 $n \ge 3$ 和 $2 \le m < n$， $c_{n,\,m} \ge c_{n,\,n-1}$，若 $m < n-$，则不等式为严格不等式 1.

证明。定义 $h(t)$ =cot(π/t)，其中 $t \ge 2$。由 $u = \pi/t$，

$$h''(t) = -\frac{2u^3}{\pi^2 \sin^2 u}(1 - u\cot u) < 0 \qquad (t > 2), \tag{4.3}$$

bec因为对于 $0 < u < \pi/2$，$\tan u > u$。因此， h 在 $[2,\infty)$ 上严格凹。由于 $\tau_n h(n) =$ 1,

$$c_{n,m} = \tau_n \frac{h(n) - h(m)}{n-m} \ge \tau_n\big(h(n) - h(n-1)\big) = c_{n,n-1}.$$

严格凹性对 $m < n-1$ 给出严格不等式。 □

定理*2.1*的证明。取 $c = c_n = c_{n,\,n-1} > 0$。引理 4.1 和 (4.1) 表明，对于每个 m，$\Phi_{c_n}(x^{(m)}) \ge 0$。因此，引理 3.1 蕴含 $\Phi_{c_n} \ge 0$ 在 Δ_n上成立。根据第3节开头的循环化简，这就证明了任意凸 n 边形都满足 (2.1)。

设等式成立。面积比较中的等式首先迫使 P 为圆内接多边形。于是 (3.1) 中的所有坐标均为正。由于 Φ_{c_n} 的全局最小值为零，引理 3.1 的最后一个断言蕴含 $x_1 = \cdots = x_n = \pi/n$。因此， P 为正多边形。反之，直接代入可得正多边形满足等式。

为说明尖锐性，考虑外接圆半径为 1 且具有半中心角的圆内接多边形

$$x_1 = \cdots = x_{n-1} = \frac{\pi - \varepsilon}{n-1}, \qquad x_n = \varepsilon, \qquad 0 < \varepsilon < \frac{\pi}{n}. \tag{4.4}$$

T它们是严格凸的，并且当 $\varepsilon \downarrow 0$ 时趋于 $x^{(n-1)}$（图3）。对于 $c > c_n$，(4.1) 给出 s

$$\Phi_c(x^{(n-1)}) = -(n-1)\sin^2 \frac{\pi}{n-1}\,(c - c_n) < 0.$$

由连续性可知，对于足够小的 $\varepsilon > 0$， Φ_c 仍为负，因此将 c_n 替换为 c 后的 (2.1) 对这些真正的凸多边形不成立。因此， c_n 是最优的。 □

从几何上看，对于 $n \ge 4$，序列 (4.4) 收敛到一个正则 $(n-1)$ 边形，其中有一个重复顶点。对于 $n = 3$，它收敛到一条沿两个方向遍历的线段，其极限边长为 (2,2, 0)。无论哪种情况，极限边长缺损都是 4(n –1) sin$^2(\pi/(n-1)) > 0$，因此极限并非等边。由此，同一序列也表明推论 2.3 中的常数是最优的。

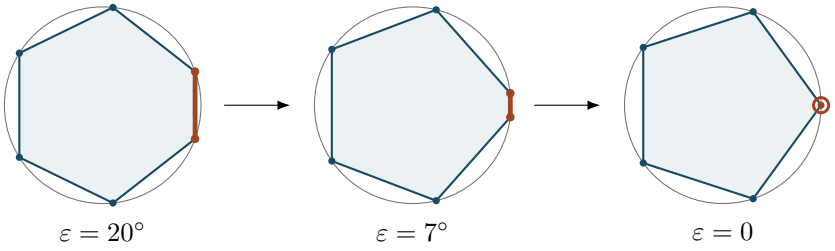


图3： $n = 6$的尖锐性族 (4.4)。随着长度为 $2\sin\varepsilon$ 的粗弦缩短至零，五条等弦趋近于正五边形的边。

5 局部尖锐性与联合稳定性

5.1 特殊情形与渐近行为

对于 $n = 3$，我们有 $c_3 = 1$ 和 $\gamma_3 = 2$，从而恢复了芬斯勒–哈德维格不等式。对于$n = 4$,

$$c_4 = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad \gamma_4 = 3 - \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

为直接与 [6, 定理 1.1], 比较，令 $Q = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ 和 $T = ab + ac + ad + bc + bd + cd$。由于 $D = 3Q - 2T$，(2.1) 化为

$$A \le \frac{T}{3+\sqrt{3}} - \frac{Q}{2(\sqrt{3}+1)^2},$$

这正是他们的表述。

当 n较大时，尖锐系数的渐近行为为 $1/n$。更准确地说，对正切函数作泰勒展开可得

$$\gamma_n = \frac{2\pi^2}{3n^2} + \frac{\pi^2}{3n^3} + O(n^{-4}), \qquad c_n = \frac{1}{n} + \frac{2\pi^2}{3n^3} + O(n^{-4}).$$

两种边长方差归一化方式的系数满足

$$\frac{1}{n\gamma_n} \sim \frac{3n}{2\pi^2}, \qquad \frac{1}{n^2\gamma_n} \longrightarrow \frac{3}{2\pi^2}. \tag{5.1}$$

5.2 正则多边形附近的局部系数

命题 5.1. 当凸的 n 边形 P 满足 $D(P) > 0$ 并在相似变换意义下趋近于正则的 n 边形时，尖锐边长商的下极限为

$$\liminf_{P \to P_{\mathrm{reg}}} \frac{\sum_i a_i^2 - 4\tau_n A}{D(P)} = c_n^{\mathrm{loc}} := \frac{1}{n\cos^2(\pi/n)} > c_n.$$

证明. 对于圆内接多边形，记作 $x_i = \pi/n + h_i$，其中 $\sum_i h_i = 0$。记 $H = \sum_i h_i^2$，对 (3.3) 作泰勒展开可得

$$\Phi_c(x) = \big(1 - nc\cos^2(\pi/n)\big)H + O(H^{3/2}).$$

事实上，$\sum_i \sin x_i$、$\sum_i \sin^2 x_i$ 和 $\sum_i \sin x_i \cos x_i$ 中的二次项分别为$-\frac{1}{2}\sin(\pi/n)H$、$\cos(2\pi/n)H$ 和 $-\sin(2\pi/n)H$。根据 Φ_c的定义，$\Phi_0 = (\sum_i a_i^2 - 4\tau_n A)/(4R^2)$，且 $\Phi_0 - \Phi_1 = D(P)/(4R^2)$。因此，当圆内接多边形趋近于正则多边形时，比值趋于 $1/[n\cos^2(\pi/n)]$。

对于趋近于正多边形的任意序列，将 $L=1$ 归一化，使得 $a_i \to 1/n$。方程 $\sum_i \arcsin(a_i/(2R)) = \pi$ 在 $R = 1/[2n\sin(\pi/n)]$ 附近对所有足够接近 $1/n$ 的此类边长都有解。这由隐函数定理推出，因为在那里每个反正弦的自变量都严格介于零和一之间，且关于 R 的导数为负。由此得到的圆内接多边形的半角趋近于 π/n。其面积在给定边长下达到最大，因此其比值是原多边形比值的下界。正多边形的圆内接扰动实现了这个极限值。

对于严格比较，固定 $x_3 = \cdots = x_n = \pi/n$ 和 $x_1 + x_2 = 2\pi/n$。在 $c = c_n$处，令$f(t)$ 表示 $t = \cos^2 d$中的这一截面。引理3.1的证明给出了严格凹性。由于两个端点的值均非负，且 $f(1) = 0$，因此每个内部 t_0都满足 $f(t_0) > 0$。于是左导数满足

$$f'_-(1) \le \frac{f(1) - f(t_0)}{1 - t_0} < 0.$$

由于 $t = 1 - d^2 + O(d^4)$，且 $H = 2d^2$ 在这一截面上，二次系数 $1 - nc_n\cos^2(\pi/n) = -f'_-(1)/2$ 严格为正。 $\square$

当 n较大时，局部系数与全局系数之间的差距很小。展开$\sec^2(\pi/n)$，并与 c_n 的展开式进行比较，可得 $c_n^{\mathrm{loc}} - c_n = \pi^2/(3n^3) + O(n^{-4})$。

5.3 边的恢复与径向稳定性

设 $v_1, \dots, v_n$为 P的顶点，令 $g = n^{-1}\sum_i v_i$为它们的重心，并设

$$r_i = |v_i - g|, \qquad \bar r = \frac{1}{n}\sum_i r_i, \qquad \sigma_r^2(P) = \frac{1}{n}\sum_i (r_i - \bar r)^2.$$

Fisher、Ruoff 和 Shilleto 的经典径向方差不等式 [5, 第 35], 页，由 Indrei 和 Nurbekyan [9, 第 3.1 节，公式 (3.1)–(3.2)], 记录，其给出简单多边形的

$$8n^2 \sin^2\frac{\pi}{n}\,\sigma_r^2(P) \le \delta_n(P) + n^2\sigma_s^2(P). \tag{5.2}$$

(5.2) 的右侧仍包含边长方差，而这正是推论 2.3 所控制的。结合起来，它们给出了一个完全显式的联合稳定性估计。

推论 5.2。对于每个简单 n边形，

$$\sigma_s^2(P) + \sigma_r^2(P) \le C_n\delta_n(P), \qquad C_n = \frac{1}{n^2\gamma_n} + \frac{1+\gamma_n^{-1}}{8n^2\sin^2(\pi/n)}. \tag{5.3}$$

证明。由 (2.4)，$n^2\sigma_s^2(P) \le \gamma_n^{-1}\delta_n(P)$。代入 (5.2) 得

$$\sigma_r^2(P) \le \frac{1+\gamma_n^{-1}}{8n^2\sin^2(\pi/n)}\,\delta_n(P).$$

加上边长界即可证明 (5.3)。 $\square$

特别是，推论 5.2 为 Indrei 和 Nurbekyan 的估计提供了一个明确的常数 [9, 推论 1.3]。利用 (5.1) 和 $n\sin(\pi/n) \to \pi$，我们可见 C_n 呈二次增长：

$$C_n \sim \frac{3n^2}{16\pi^4}. \tag{5.4}$$

下一个命题表明，这一增长率无法进一步提高。

命题 5.3. 令 $C_n^\star$ 为使得对所有简单 n 边形， $\sigma_s^2(P)+\sigma_r^2(P)\le C\delta_n(P)$ 成立的常数 C 的下确界。对于某个绝对常数 $\kappa>0$，且对所有充分大的 n，

$$\kappa n^2 \le C_n^\star \le C_n = O(n^2).$$

The 即使将不等式限制为严格凸圆 n边形，下界仍然成立 *s.*

证明。 上界由（5.4）得出。对于下界，其思路是将大约一半的顶点聚集在正多边形的一个顶点附近。所得多边形几乎是一个边数更少的正多边形，因此其亏量很小，但其顶点到重心的距离却非常不均匀。具体而言，固定 $n\ge 6$，令 $m=\lfloor n/2\rfloor$，并取单位圆上一个有一个顶点位于 1 的正 m边形。在圆上 1 的附近添加 $n-m$ 个顶点。当这些顶点趋近于 1 时，周长趋近于 $L_m = 2m\sin(\pi/m)$，而面积趋近于 $L_m^2/(4m\tau_m)$。因此，极限亏量为

$$L_m^2\left(1-\frac{n\tau_n}{m\tau_m}\right)\sim\frac{4\pi^4}{n^2}.$$

极限顶点重心为 $g=(n-m)/n$。这 $n-m$ 个重复顶点的半径为$1-g\le 1/2$，并且至少有 $\lfloor m/2\rfloor$ 个正则顶点位于闭左半平面内，且半径至少为 1。由方差的两两公式可得

$$\sigma_r^2 \ge \frac{(n-m)\lfloor m/2\rfloor}{4n^2}\ge\frac{1}{56}.$$

对于每个固定的 n，选取额外顶点，使它们彼此不同且充分接近 1，从而 $\sigma_r^2\ge 1/112$，并且亏量与其极限值之差至多为 n^{-2}。这便得到严格凸的圆内接多边形，其中 $\delta_n = O(n^{-2})$，且 σ_r^2 有一个一致的正下界，从而证明所需的下界。 □

对于非凸多边形，亏量还可以控制 P 与其凸化之间的距离。令 P_c 如推论 2.2 的证明中所述。由于封闭区域彼此嵌套且边长保持不变，

$$|P\triangle P_c| = A(P_c)-A(P)=\frac{\delta_n(P)-\delta_n(P_c)}{4n\tau_n}\le\frac{\delta_n(P)}{4n\tau_n}.$$

将此结果与 (5.3) 结合可得

$$|P\triangle P_c|+\sigma_s^2(P)+\sigma_r^2(P)\le\left(\frac{1}{4n\tau_n}+C_n\right)\delta_n(P),$$

从而为简单多边形重新得到 Indrei 和 Nurbekyan 的定理 1.1 及其推论 1.2[9]，并给出一个显式常数。

注 5.4（亏量的最优阶）。 对于固定周长下正则 n边形的非等边循环扰动，命题 5.1 中的计算给出

$$\frac{\delta_n(P)}{n^2\sigma_s^2(P)}\longrightarrow nc_n^{\mathrm{loc}}-1=\tan^2(\pi/n)>0.$$

由于当 $\delta_n(P)\to 0$ 时，该比值趋于一个正的有限极限，因此不可能存在形如 $\sigma_s^2\le C\,\delta_n^\theta$ with $\theta>1$ 的界。从这个意义上说，亏量的线性依赖是最优的。

声明与陈述

资助。 本研究未获得任何资助。

利益冲突。 作者声明，其不存在需要披露的相关财务或非财务利益。

数据可用性。 本研究未生成或分析任何数据集。

人工智能辅助。 OpenAI 的 ChatGPT 和 Codex 协助进行了探索性计算、核查证明步骤、核对参考文献，以及起草和修订稿件。作者对最终内容负责。

参考文献

[1] Beniamin Bogosel。最优芬斯勒–哈德维格不等式。数学研究成果，80 (3)：文章 88，2025 年。doi：10.1007/s00025-025-02405-6。[2] Thanh Oai Dao。带有 n- 多边形的等周不等式强化版本。MathOverflow，问题 299056，2018年。网址 https://mathoverflow.net/questions/ 299056。发布于2018年4月30日；包含 Iosif Pinelis 于2018年7月10日发布的回答。访问于2026年10月28日。[3] Erik D. Demaine、Blaise Gassend、Joseph O'Rourke 和 Godfried T. Toussaint。所有多边形都能有限次翻转……对吧？载于 J. Goodman、J. Pach 和 R. Pollack 编，离散与计算几何综述：二十年后，当代数学第453卷，第231–255页。美国数学会，2008年。网址 https://erikdemaine.org/papers/Flips_DCG20/。[4] Paul Finsler 和 Hugo Hadwiger。三角形中的若干关系。*Commentarii Mathe-matici Helvetici*，10：316–326，1937年。doi：10.1007/BF01214300。[5] J. Chris Fisher、D. Ruoff 和 J. Shilleto。垂直多边形。美国数学月刊，92(1)：23–37，1985年。doi：10.1080/00029890.1985.11971529。[6] Leonard Mihai Giugiuc、Thanh Oai Dao 和 Kadir Altintas。一个与凸四边形的边长和面积有关的不等式。国际几何学杂志，7(1)：81–86，2018年。网址 https://ijgeometry.com/wp-content/uploads/2018/04/81-86. pdf。[7] L. Richard Hitt 和 Xin-Min Zhang。多边形的动力几何。数学基础，56(1)：21–37，2001年。doi：10.1007/S000170050086。[8] Emanuel Indrei。多边形等周亏量的一个尖锐下界。美国数学会会刊，144(7)：3115–3122，2016年。doi：10.1090/proc/ 12947。[9] Emanuel Indrei 和 Levon Nurbekyan。论多边形等周不等式的稳定性。数学进展，276：62–86，2015年。doi：10.1016/j.aim.2015.02.013。[10] Hana Kouřimská、Lara Skuppin 和 Boris Springborn。具有给定边长的圆内接多边形的变分原理。载于 Alexander I. Bobenko 编，离散微分几何进展，第177–195页。施普林格，柏林、海德堡，2016年。doi：10.1007/978-3-662-50447-5_5。

[11] Hsu-Tung Ku 和 Mei-Chin Ku。解析等周不等式。《数学不等式与应用》，3(4)：459–472，2000年。网址 https://files.ele-math.com/ articles/mia-03-45.pdf。

[12] Dingyi Tang。离散 Wirtinger 型与等周型不等式。澳大利亚数学学会通报，43(3):467–474，1991。doi：10.1017/S0004972700029312。