闵可夫斯基（s,q）弦测度问题

JIAN-YANG ZHANG

Abstract. 受 Lutwak–Xi–Yang–Zhang 关于弦测度的工作启发，我们引入由一族新的几何不变量变分所产生的（s,q）弦测度，这族不变量称为（s,q）弦积分。当 $s=1$ 时，（s,q）弦测度可还原为弦测度。我们研究相应的（s,q）弦测度闵可夫斯基问题。

arXiv:2611.32248v1 [math.MG] 24 Nov 2026

1. Introduction

全文中，$n \geq 2$。$\mathbb{R}^n$ 上的欧几里得内积和范数分别记为 $x \cdot y$ 和 $|x| = (x \cdot x)^{1/2}$。我们用 o 表示原点，用 $\mathbb{S}^{n-1}$ 表示 $\mathbb{R}^n$中的单位球面，用 B^n 表示以原点为中心的欧几里得单位球，并用 V 表示 n维体积；令 $\omega_n = V(B^n)$。对于 $u \in \mathbb{S}^{n-1}$，令 $u^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot u = 0\}$。凸体 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中具有非空内部的紧凸子集。凸体类、内部包含 o 的凸体类以及原点对称凸体类（即 $K = -K$）分别记为 $\mathcal{K}^n$、$\mathcal{K}^n_o$ 和 $\mathcal{K}^n_e$。我们用 $\mathrm{SL}(n)$表示 $\mathbb{R}^n$上行列式为 1 的线性变换群。令 $\mathcal{H}^k$ 为 $k \geq 0$的 k维豪斯多夫测度。除非另有说明，在 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上的积分均相对于 $\mathcal{H}^{n-1}$进行。对于 $\mathbb{S}^{n-1}$上的有限博雷尔测度 μ，记 $|\mu| = \mu(\mathbb{S}^{n-1})$。

经典闵可夫斯基问题询问有限博雷尔测度 μ 在 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上满足什么必要且充分的条件，才能使得

$$\mu = S(K, \cdot),$$

其中 $K \subset \mathbb{R}^n$ 是一个凸体，而 $S(K,\cdot)$ 是 K的表面积测度。闵可夫斯基 [37, 38], 开创了这一问题的研究，他处理了给定测度为离散测度或具有连续密度的情形。后来，亚历山德罗夫 [1]以及独立开展研究的 Fenchel–Jessen [20] 处理了任意有限博雷尔测度的情形。从解析的角度来看，这一问题相当于求解一个 Monge–Amp`ere 方程。其解的正则性理论极具挑战性，并推动了大量相关研究；例如参见尼伦伯格 [39], 、程–丘 [17], 、卡法雷利 [10, 11, 12], 及其中的参考文献。关于经典布伦–闵可夫斯基理论及其历史背景，请参阅施奈德的著作 [42] 。

令 h_0，f 为 $\mathbb{S}^{n-1}$上的连续函数，并假设 Wulff形 $[h_0]$ 是一个凸体；Wulff形的定义见（2.1）。亚历山德罗夫的方法是变分性的，并且关键依赖于以下公式

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} V([h_0 + tf]) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(v)\, dS([h_0], v); \tag{1.1}$$

参见 [1]。公式 (1.1) 将闵可夫斯基问题归结为一个优化问题，并确定了将表面积测度视为体积泛函的微分。这一公式的一个关键特点是

日期：2026年11月25日。2020 数学主题分类。52A40、52A20、35J96。关键词和短语。闵可夫斯基问题。作者的研究得到国家自然科学基金委员会资助，资助编号为12322103。 1

其导数是双侧的，并且无需对凸体作光滑性或严格凸性的假设，该公式仍然成立。

同样的变分方法也适用于其他几何不变量。Jerison [31] 研究了静电容量一阶变分所产生的容性测度，并为相应的闵可夫斯基问题确立了存在性与正则性结果。Huang–Lutwak–Yang– Zhang [29] 证明，对偶拟混合体积的变分会产生对偶曲率测度，由此确定了对偶Brunn–Minkowski理论所依托的几何测度，并提出了相应的对偶闵可夫斯基问题。这些例子阐明了这样一条原则：自然几何不变量的变分公式会产生几何测度，并为研究相应的闵可夫斯基问题提供自然框架。

然而，并非每个自然几何不变量都具有同样稳健的变分公式。设 $K, L \subset \mathbb{R}^n$ 为凸体，并令 $K + L = \{x + y : x \in K,\ y \in L\}$ 表示它们的闵可夫斯基加法。记 $S(K) = \mathcal{H}^{n-1}(\partial K)$为 K的表面积。表面积在闵可夫斯基加法下的一阶变分为

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0^+} S(K + tL) = (n-1)\int_{\mathbb{S}^{n-1}} h_L(v)\, dS_{n-2}(K, v), \tag{1.2}$$

其中， h_L 是 L 的支撑函数，而 $S_{n-2}(K, \cdot)$是 K的第$(n-2)$个面积测度；参见 [42]。与(1.1)不同，(1.2)中的导数是单侧的，并且沿凸体的闵可夫斯基加法来表述。关于面积测度的闵可夫斯基问题称为克里斯托费尔–闵可夫斯基问题。关于克里斯托费尔问题的解，参见 Firey [21], Berg [2], Grinberg-Zhang[24] 和 Goodey-Yaskin-Yaskina [23]。关于使用偏微分方程方法研究克里斯托费尔–闵可夫斯基问题及相关问题的成果，参见 Guan–Guan [25], Guan–Li–Li [26], Guan–Ma[27], 和 Guan–Ma–Zhou [28]。然而，一般的克里斯托费尔–闵可夫斯基问题仍未解决。

最近，Lutwak–Xi–Yang–Zhang [36]运用变分方法研究积分几何中的弦积分。令 $\mathscr{L}^n$ 表示 $\mathbb{R}^n$中直线的仿射格拉斯曼流形，并赋予其归一化的不变测度。对于 $q \geq 0$，凸体 K 的第 q个弦积分为

$$I_q(K) = \int_{\mathscr{L}^n} |K \cap \ell|^q\, d\ell,$$

其中， $|K \cap \ell|$ 表示弦 $K \cap \ell$的长度。分别利用克罗夫顿体积公式、柯西表面积公式和庞加莱-哈德维格公式（见 [40, 41]），可得

$$I_1(K) = V(K), \qquad I_0(K) = \frac{\omega_{n-1}}{n\omega_n} S(K), \qquad I_{n+1}(K) = \frac{n+1}{\omega_n} V(K)^2.$$

因此，弦积分将体积和表面积作为特例。对于 $q > 0$，Lutwak–Xi–Yang–Zhang 建立了关于 I_q的稳健亚历山德罗夫型变分公式，从而引出了弦测度 $F_q(K, \cdot)$。他们提出并解决了相应的闵可夫斯基问题。此外，在对 K作出适当正则性假设的条件下，当 $q \to 0^+$ 时，$F_q(K, \cdot)$ 的极限测度为

$$\frac{(n-1)\omega_{n-1}}{n\omega_n} S_{n-2}(K, \cdot).$$

凸体的弦积分也可以通过 X-射线函数表示。对于$u \in \mathbb{S}^{n-1}$ 和 $y \in u^\perp$，定义

$$X_K(y, u) = \mathcal{H}^1\big(K \cap (y + \mathbb{R}u)\big).$$

那么，对于 $q>0$,

$$I_q(K)=\frac{1}{n\omega_n}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\int_{u^\perp}X_K(y,u)^q\,dy\,du.$$

对于 $q=0$，内积分由 $\mathrm{vol}_{n-1}(K|u^\perp)$ 取代；参见 [36]。

受这一表示启发，我们引入（s,q）-弦积分。对于 $q>0$ 和$s\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$，定义

$$\Psi_{s,q}(K)=\frac{1}{n\omega_n}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\left(\int_{u^\perp}X_K(x,u)^q\,dx\right)^s du.$$

当 $q=0$ 时，令

$$\Psi_{s,0}(K)=\frac{1}{n\omega_n}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\mathrm{vol}_{n-1}(K|u^\perp)^s\,du.$$

完整定义见定义 2.1。当 $s=1$, $\Psi_{1,q}(K)$ 是 K 的弦积分$I_q(K)$。

我们还为凸体 K 引入一种新的几何测度，称为（s,q）-弦测度 $F_{s,q}(K,\cdot)$；参见定义 2.3。以下列表表明，（s,q）-弦测度涵盖了许多重要几何测度作为特例。

- 当 $q=1$ 时，我们有

$$F_{s,1}(K,\cdot)=V(K)^{s-1}S(K,\cdot).$$

  特别地，$F_{1,\,1}(K,\,\cdot)$ 是经典的表面积测度。
- 当 $s=1$ 时，$(s,\ q)$-弦测度可还原弦测度

$$F_{1,q}(K,\cdot)=F_q(K,\cdot),\qquad q>0.$$

- 当 $s=n/(q-1)$ 时，$(s,\ q)$-弦测度可还原 Xi–Zhao [44] 引入的分数阶仿射面积测度（差一个归一化因子）：

$$F_{\frac{n}{q-1},q}(K,\cdot)=\frac{2}{\omega_n}F^{(a)}_{q-1}(K,\cdot),\qquad q>0,\quad q\neq1.$$

我们的第一个结果表明，对于 $q>0$，$\Psi_{s,\,q}(K)$ 的变分导出 $(s,\ q)$-弦测度$F_{s,\,q}(K,\,\cdot)$。对于紧集 Ω，令 $C(\Omega)$ 表示 Ω 上实值连续函数的集合，并令 $C^+(\Omega)$ 表示 $C(\Omega)$ 中正函数的集合。令 $o(t,\ \cdot)\in C(\Omega)$ 表示满足 $o(t,\ \cdot)/t\to0$ 一致收敛于 $t\to0$ 的连续函数。

定理 1.1。设 $q>0$、$s\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$，且 $\Omega\subset\mathbb{S}^{n-1}$ 为紧集，并且不包含于任何闭半球。设 h_0、$g\in C(\Omega)$。假设对于充分小的 $\delta>0$ 和 $|t|<\delta$，*Wulff*形 $K_t=[h_t]$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的凸体，其中

$$h_t=h_0+tg+o(t,\cdot)\qquad on\ \Omega.$$

Then

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\Psi_{s,q}(K_t)=s\int_\Omega g(v)\,dF_{s,q}(K_0,v).$$

利用这一变分公式，我们研究了与 $F_{s,q}(K,\cdot)$ 相关的闵可夫斯基问题，并得到了以下结果。

定理 1.2。令 $q>0$ 和 $s\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ 满足 $(n+q-1)\,s\neq1$。如果 μ 是定义在 $\mathbb{S}^{n-1}$上的非零有限博雷尔测度，则存在一个凸体 K，使得

$$F_{s,q}(K,\cdot)=\mu$$

当且仅当 μ 不集中在 $\mathbb{S}^{n-1}$ 的任何闭半球上，并且

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} v\, d\mu(v) = o. \tag{1.3}$$

当 $s < 0$ 时，我们为 $(s,\ q)$-弦积分建立了一个 Brunn–Minkowski型不等式；见定理 4.6。利用这一不等式，我们证明了解在平移意义下是唯一的；见推论 4.8。

经典闵可夫斯基问题的一个重要推广是 L_p 闵可夫斯基问题，该问题由 Lutwak [33] 提出。$p = 1$ 的情形是经典闵可夫斯基问题。$p > 1$ 的存在性、唯一性、正则性及离散版本在一系列工作中得到了发展；例如，参见 [34, 35, 30, 18]。$p < 1$ 的范围更为微妙，因为唯一性可能失效，并且解的性质强烈依赖于 p以及所给定的测度。在这一范围内，[32, 9, 15, 46, 4, 13, 3]建立了各种存在性、非唯一性和正则性结果。特别地，当 $p = 0$ 时，相应的问题就是对数闵可夫斯基问题。它要求确定有限博雷尔测度 μ 在 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上满足的充要条件，使得

$$d\mu(v) = h_K(v)\, dS(K, v)$$

对于某个 $K \in \mathcal{K}^n_o$。对数闵可夫斯基问题与对数布伦–闵可夫斯基不等式 [6] 密切相关。参见 [7, 45, 5, 16, 14] 关于对数闵可夫斯基问题的研究。

受上述内容启发，我们引入（$s,\ q$）-弦测度的 L_p 扩展（见定义 3.7）以及相应的 L_p 闵可夫斯基问题。在光滑情形下，相应的测度方程化为一个非局部 Monge–Amp`ère 方程（3.7）。$p = 1$ 和 $p = 0$ 两种情形分别对应于（$s,\ q$）-弦测度的通常闵可夫斯基问题和对数闵可夫斯基问题。我们研究后者在偶情形下的情况，并得到以下结果。

定理 1.3。设 $q \geq 1$ 和 $s > 0$ 满足 $(q-1)\, s \in [0, n]$，并设 μ 是 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上的一个非零偶有限博雷尔测度。假设

$$\frac{\mu(\xi \cap \mathbb{S}^{n-1})}{|\mu|} < \frac{ks + \min\{k, (q-1)s\}}{(n+q-1)s}$$

对于每个 $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ 以及每个 k 维线性子空间 $\xi \subset \mathbb{R}^n$，存在一个关于原点对称的凸体 K，使得

$$d\mu(v) = h_K(v)\, dF_{s,q}(K, v).$$

定理 1.3 将 [36] 中的弦测度对数闵可夫斯基问题的结果推广到了（$s,\ q$）-弦测度。其证明中的一个关键要素是引理 5.3 建立的（$s,\ q$）-椭球的弦估计。参数 s 出现在（$s,\ q$）-弦积分中，给该估计带来了相当大的困难。我们使用 Gardner–Zhang [22], 引入的星体 $S_{q-1}(K)$，以及 $S_{q-1}(K)$ 的仿射协变性（见（2.5）和（2.6）），来克服这些困难。

本文安排如下。第2节介绍必要的预备知识。第3节证明定理 1.1，并确立 (s, q)-弦测度的有限性、平移不变性、齐次性和质心性质。第4节证明定理 1.2。第5节证明定理 1.3。最后，第6节在对 ∂K 满足适当正则性假设的条件下，研究 $F_{s,q}(K, \cdot)$ 在 $q \to 0^+$ 时的渐近行为。

2. Preliminaries

我们继续采用上文引入的约定。 $K \subset \mathbb{R}^n$ 在 $u^\perp$ 上的正交投影记为 $K|u^\perp$。若 $A \subset \mathbb{R}^n$ 包含于某个 m 维仿射子空间中，则 $\mathrm{vol}_m(A)$ 表示其 m 维勒贝格测度。 $\mathbb{R}^n$ 中 k 维线性子空间构成的格拉斯曼流形记为 $G_{n,k}$。若有限博雷尔测度 μ 在 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上的质心位于原点，则

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} v\, d\mu(v) = o.$$

若其不集中于任何闭半球上

$$\mu(\{v \in \mathbb{S}^{n-1} : v \cdot u \geq 0\}) < |\mu| \qquad \text{for every } u \in \mathbb{S}^{n-1}.$$

$K \in \mathcal{K}^n$ 的质心定义为

$$c(K) = \frac{1}{V(K)} \int_K x\, dx.$$

对于 $A, B \subset \mathbb{R}^n$ 和 $t > 0$，令

$$A + B = \{a + b : a \in A,\ b \in B\},$$

and

$$tB = \{tb : b \in B\}.$$

我们用 $A + x = A + \{x\}$ 表示 $x \in \mathbb{R}^n$。若存在某个 $t > 0$ 和 $x \in \mathbb{R}^n$，使得 K, L 满足 $K = tL + x$，则凸体 K, L 位似；若 $t = 1$，则它们互为平移体。

对于紧凸集 K，其支撑函数 $h_K : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}$ 为

$$h_K(v) = \max\{x \cdot v : x \in K\}, \qquad v \in \mathbb{S}^{n-1}.$$

其沿方向 $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ 的宽度函数为

$$w_K(u) = h_K(u) + h_K(-u).$$

对于紧凸集 K_i， $K \subset \mathbb{R}^n$，序列 (K_i) 在豪斯多夫度量下收敛到 K，当且仅当

$$\|h_{K_i} - h_K\|_\infty = \max_{u \in \mathbb{S}^{n-1}} |h_{K_i}(u) - h_K(u)| \longrightarrow 0.$$

投影体 ΠK 是 $K \in \mathcal{K}^n$ 的一个关于原点对称的凸体，其支撑函 n

$$h_{\Pi K}(u) = \mathrm{vol}_{n-1}(K|u^\perp), \qquad u \in \mathbb{S}^{n-1}.$$

对于 $K \in \mathcal{K}^n$ 和 $x \in \partial K$，若向量 $v \in \mathbb{S}^{n-1}$ 满足以下条件，则称其为 ∂K 在 x 处的外单位法向量

$$x \cdot v = h_K(v).$$

令 $\partial' K$ 表示 K 中具有唯一外单位法向量的边界点集合。众所周知 [42, 定理 2.2。5]，

$$\mathcal{H}^{n-1}(\partial K \setminus \partial' K) = 0.$$

对于 $x \in \partial' K$， K 的高斯映射 $\nu_K(x)$ 定义为 ∂K 在 x 处的唯一外单位法向量。表面积测度 $S(K, \cdot)$ 定义为

$$S(K, \omega) = \mathcal{H}^{n-1}(\nu_K^{-1}(\omega)),$$

其中， $\omega \subset \mathbb{S}^{n-1}$ 是任意博雷尔集。

设 $\Omega \subset \mathbb{S}^{n-1}$ 为紧集，且不包含在任何闭半球内。对于 $f \in C(\Omega)$，由 f 生成的 Wulff形为

$$[f] = \bigcap_{v\in\Omega} \{x \in \mathbb{R}^n : v \cdot x \le f(v)\}. \tag{2.1}$$

每当 $[f]$ 非空时， $h_{[f]} \le f$ 在 Ω 上。若 $K = [f] \in \mathcal{K}^n$，则对 $S(K,\cdot)$-几乎处处的 $v \in \Omega$，有 $h_K(v) = f(v)$。若 $K \in \mathcal{K}^n$ 且 $\Omega = \mathbb{S}^{n-1}$，则 $[h_K] = K$。

关于原点的星形集 Q 是一个紧集，其与每条从 o 出发的射线的交集都是一个线段，且其中一个端点位于 o。若 K 是关于原点的星形集，则其径向函数为

$$\rho_K(u) = \max\{t \ge 0 : tu \in K\}, \qquad u \in \mathbb{S}^{n-1}.$$

若星形集的径向函数在 $\mathbb{S}^{n-1}$上为正且连续，则称其为星体。更一般地，若 $y \in K$ 且 $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{o\}$，则 K 相对于y 的广义径向函数为

$$\rho_{K,y}(x) = \max\{t \ge 0 : y + tx \in K\}.$$

我们回顾一下，凸体 K 的 X-射线为

$$X_K(y,u) = \mathcal{H}^1\big(K \cap (y + \mathbb{R}u)\big), \qquad y \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{S}^{n-1}.$$

若 $z \in K \cap (y + \mathbb{R}u)$，则

$$X_K(y,u) = \rho_{K,z}(u) + \rho_{K,z}(-u). \tag{2.2}$$

$q > 0$ 和 $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ 的方向弦积分 $I_q(K,u)$ 定义为

$$I_q(K,u) = \int_{u^\perp} X_K(x,u)^q \, dx.$$

对于 $q = 0$，令

$$I_0(K,u) = \mathrm{vol}_{n-1}(K|u^\perp).$$

对于 $x_0 \in \mathbb{R}^n$，令 $x_0|u^\perp$ 为 x_0 在 $u^\perp$上的正交投影。由于

$$X_{K+x_0}(y,u) = X_K(y - x_0|u^\perp, u),$$

通过变量替换，我们得到

$$I_q(K,u) = I_q(K + x_0, u). \tag{2.3}$$

令 $\lambda > 0$。那么我们有

$$I_q(\lambda K,u) = \lambda^{n+q-1} I_q(K,u). \tag{2.4}$$

函数 $u \mapsto I_q(K,u)$ 在 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上对 $q \ge 0$ 为正且连续；关于 $q > 0$，参见 [22]。对于 $K \in \mathcal{K}^n$ 和 $q \in [0,\infty) \setminus \{1\}$，Gardner-Zhang [22] 引入了星体 $S_{q-1}K$，其定义为

$$\rho_{S_{q-1}K}(u) = I_q(K,u)^{1/(q-1)}, \qquad u \in \mathbb{S}^{n-1}. \tag{2.5}$$

星体 $S_{q-1}K$ 具有仿射协变性。对于 $\phi \in \mathrm{SL}(n)$、 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 和 $\lambda > 0$,

$$S_{q-1}(\phi K + x_0) = \phi S_{q-1}K, \qquad S_{q-1}(\lambda K) = \lambda^{(n+q-1)/(q-1)} S_{q-1}K, \tag{2.6}$$

参见 [44]。

现在我们定义（s, q）-弦积分。

定义 **在 2.1 节中，**令 $K \in \mathcal{K}^n$、 $q \ge 0$ 和 $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$。 K 的 (s,q)-弦积分为

$$\Psi_{s,q}(K) = \frac{1}{n\omega_n} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} I_q(K,u)^s \, du. \tag{2.7}$$

由于 $K \in \mathcal{K}^n$, $\Psi_{s,\ q}(K)$ 为正且有限。由 (2.3) 可知，$\Psi_{s,\ q}(K)$ 是平移不变的。($s,\ q$)-弦积分关于豪斯多夫度量也是连续的。事实上，设 $K_i \to K$ 在豪斯多夫度量下成立。由于 (s, q)-弦积分是平移不变的，将所有物体平移一个固定点后，我们可以假设 $K \in \mathcal{K}^n_o$。因此存在一些数$\varepsilon_i \to 0^+$ ，使得对所有充分大的 i,

$$(1-\varepsilon_i)K \subset K_i \subset (1+\varepsilon_i)K.$$

方向弦积分的包含下的单调性和齐次性随后给出，对 $u \in \mathbb{S}^{n-1}$一致地,

$$(1-\varepsilon_i)^{n+q-1} I_q(K,u) \le I_q(K_i,u) \le (1+\varepsilon_i)^{n+q-1} I_q(K,u).$$

由此可知 f 事实，上述$\Psi_{s,\ q}$ 的连续性是显然的。$\Psi_{s,\ q}$ 还具有以下齐次性 y.

引理 2.2。 设 $\lambda > 0$、 $q \ge 0$、 $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$和 $K \in \mathcal{K}^n$。则

$$\Psi_{s,q}(\lambda K) = \lambda^{(n+q-1)s} \Psi_{s,q}(K).$$

证明。 该断言直接由（2.4）和定义 2.1 得出。 □

现在我们定义 (s,q)-弦测度。

定义 2.3. 设 $q > 0$、 $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 和 $K \in \mathcal{K}^n$。 K 的(s,q)-弦测度是定义在 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上的博雷尔测度，其定义为

$$F_{s,q}(K,\omega) = \frac{q}{n\omega_n} \int_{\nu_K^{-1}(\omega)} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} I_q(K,u)^{s-1} X_K(y,u)^{q-1}\, du\, d\mathcal{H}^{n-1}(y) \tag{2.8}$$

对每个博雷尔集 $\omega \subset \mathbb{S}^{n-1}$。

注 2.4. 设

$$A_K = \{(y,u) \in \partial' K \times \mathbb{S}^{n-1} : X_K(y,u) = 0\}.$$

对于每个 $y \in \partial' K$, $A_K(y) = \{u \in \mathbb{S}^{n-1} : (y,u) \in A_K\}$ 包含于 $\mathbb{S}^{n-1} \cap \nu_K(y)^\perp$ 中，而后者的球面测度为零。因此，对于每个博雷尔集 $\omega \subset \mathbb{S}^{n-1}$,

$$\int_{\nu_K^{-1}(\omega)} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \mathbf{1}_{A_K}(y,u)\, du\, d\mathcal{H}^{n-1}(y) = 0.$$

因此，积分 (2.8) 可以在满足 $X_K(y,u) > 0$ 的那些对 (y,u) 上进行，而不改变其值。

设 $K \in \mathcal{K}^n$ 和 $z \in K$。对于 $q > -1$，第 q 个对偶拟混合体积定义为取值于 $[0,+\infty]$ 的

$$\widetilde{V}_q(K,z) = \frac{1}{n\omega_n} \int_{S_z^+(K)} \rho_{K,z}(u)^q\, du,$$

其中

$$S_z^+(K) = \{u \in \mathbb{S}^{n-1} : \rho_{K,z}(u) > 0\}.$$

当 $o \in K$ 时，记为

$$\widetilde{V}_q(K) = \widetilde{V}_q(K,o).$$

如果 $q > 0$，则

$$\widetilde{V}_q(K,z) = \frac{q}{n\omega_n} \int_K |x-z|^{q-n}\, dx. \tag{2.9}$$

利用极坐标即可得到这一恒等式。为方便后文讨论，我们的定义比通常的对偶混合体积归一化多一个因子 $1/\omega_n$ 。

对于 $q>0$，Lutwak–Xi–Yang–Zhang 在 [36] 中定义的弦测度 $F_q(K,\cdot)$为

$$F_q(K,\omega)=\frac{2q}{n\omega_n}\int_{\nu_K^{-1}(\omega)}\int_{S_z^+(K)}\rho_{K,z}(u)^{q-1}\,du\,d\mathcal{H}^{n-1}(z) \tag{2.10}$$

对每个博雷尔集 $\omega\subset\mathbb{S}^{n-1}$。

当 $s=1$ 时，$(s,\ q)$-弦测度还原为弦测度，即

$$F_{1,q}(K,\cdot)=F_q(K,\cdot).$$

事实上，对每个 $z\in\partial' K$，集合 $S_z^+(K)$ 和 $-S_z^+(K)$ 构成 $\mathbb{S}^{n-1}$ 的一个划分，除去一个球面测度为零的集合。因此，由 (2.2) 以及变量替换 $u\mapsto -u$,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}X_K(z,u)^{q-1}\,du&=\int_{S_z^+(K)}\rho_{K,z}(u)^{q-1}\,du+\int_{-S_z^+(K)}\rho_{K,z}(-u)^{q-1}\,du\\&=2\int_{S_z^+(K)}\rho_{K,z}(u)^{q-1}\,du.\end{aligned}$$

将此恒等式代入含有 $s=1$ 的 (2.8)，即可得到 (2.10)。

3. The variational formula for the (s,q)-chord integral

本节证明定理 1.1，并记录 $F_{s,q}(K,\cdot)$ 的若干基本性质。首先要证明，对于每个凸体 K，$F_{s,q}(K,\cdot)$ 确实是一个有限博雷尔测度。我们需要以下定理。

定理 3.1 (定理 3.3, [44])。设 $K\in\mathcal{K}^n$ 和 $q>0$。如果 ∂K 在 $u\in\mathbb{S}^{n-1}$ 中无直线段，则

$$I_q(K,u)=\frac{q}{n+q-1}\int_{\partial K}X_K(z,u)^{q-1}\big(z\cdot\nu_K(z)\big)\,d\mathcal{H}^{n-1}(z).$$

如果 ∂K 不包含任何平行于 u 的非平凡线段，我们称其在方向 $u\in\mathbb{S}^{n-1}$ 上无直线段。对于凸体，∂K 在几乎处处的方向上都无直线段。

引理 3.2。设 $K\in\mathcal{K}^n$、$q>0$ 和 $s\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$。则

$$F_{s,q}(K,\mathbb{S}^{n-1})<\infty.$$

证明。对定义 2.3 直接进行变量替换可知，$F_{s,q}(K,\mathbb{S}^{n-1})$ 在 K 的平移下保持不变。因此，不妨设 $K\in\mathcal{K}_o^n$。于是存在一个常数 $c_0>0$ 使得

$$y\cdot\nu_K(y)\geq c_0 \tag{3.1}$$

对几乎处处的 $\mathcal{H}^{n-1}$，有 $y\in\partial K$。由于函数 $u\longmapsto I_q(K,\ u)^{s-1}$ 连续且为正，因此存在一个常数 $C>0$，使得

$$I_q(K,u)^{s-1}\leq C\qquad\text{for every } u\in\mathbb{S}^{n-1}. \tag{3.2}$$

由定义 2.3 和 (3.2)，可得

$$\begin{aligned}F_{s,q}(K,\mathbb{S}^{n-1})&=\frac{q}{n\omega_n}\int_{\partial K}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}I_q(K,u)^{s-1}X_K(y,u)^{q-1}\,du\,d\mathcal{H}^{n-1}(y)\\&\leq\frac{qC}{n\omega_n}\int_{\partial K}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}X_K(y,u)^{q-1}\,du\,d\mathcal{H}^{n-1}(y).\end{aligned} \tag{3.3}$$

由 (3.1),

$$1\leq\frac{y\cdot\nu_K(y)}{c_0}$$

对于 $\mathcal{H}^{n-1}$-几乎处处的 $y \in \partial K$。因此

$$\begin{aligned} F_{s,q}(K,\mathbb{S}^{n-1}) &\leq \frac{qC}{n\omega_n c_0}\int_{\partial K}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} X_K(y,u)^{q-1}\big(y\cdot\nu_K(y)\big)\,du\,d\mathcal{H}^{n-1}(y) \\ &= \frac{qC}{n\omega_n c_0}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\int_{\partial K} X_K(y,u)^{q-1}\big(y\cdot\nu_K(y)\big)\,d\mathcal{H}^{n-1}(y)du, \end{aligned} \tag{3.4}$$

其中，最后一个等式由 Tonelli 定理得出。对于几乎处处的 $u \in \mathbb{S}^{n-1}$，定理 3.1 适用。我们得到

$$F_{s,q}(K,\mathbb{S}^{n-1}) \leq \frac{(n+q-1)C}{n\omega_n c_0}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} I_q(K,u)\,du.$$

最后， $I_q(K,\cdot)$ 在 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上连续。因此，

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} I_q(K,u)\,du < \infty.$$

由此可得

$$F_{s,q}(K,\mathbb{S}^{n-1}) < \infty,$$

如所声称。 □

In o为证明定理 1.1，我们将使用以下稳健变分公式 .

定理 3.3 （定理 3.7, [44]）。 设 $q > 0$ ，并令 K_t 如定理 *1.1* 中所定义。则对于几乎处处的 $u \in \mathbb{S}^{n-1}$,

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} I_q(K_t,u) = q\int_{\partial K_0} g(\nu_{K_0}(z))X_{K_0}(z,u)^{q-1}\,d\mathcal{H}^{n-1}(z).$$

定理 *1.1* 的证明。 泛函 $\Psi_{s、q}$ 以及每个方向弦积分都是平移不变的。经过平移后，不妨设 $K_0 \in \mathcal{K}_o^n$; 等价地， $h_0 \in C^+(\Omega)$。由于 g是连续的，存在一个常数 $c > 0$ ，使得对于所有充分小的 $|t|$,

$$(1-c|t|)K_0 \subset K_t \subset (1+c|t|)K_0.$$

由 I_q 关于包含关系的单调性以及（2.4），对于 s 的任一符号，

$$\begin{aligned} \left|\frac{I_q(K_t,u)^s - I_q(K_0,u)^s}{t}\right| &\leq \left|\frac{I_q((1+c|t|)K_0,u)^s - I_q((1-c|t|)K_0,u)^s}{t}\right| \\ &= \left|\frac{(1+c|t|)^{(n+q-1)s} - (1-c|t|)^{(n+q-1)s}}{t}\right| I_q(K_0,u)^s. \end{aligned}$$

注意到存在 $C_0 > 0$ ，使得对于充分小的 $|t| \neq 0$,

$$\left|\frac{(1+c|t|)^{(n+q-1)s} - (1-c|t|)^{(n+q-1)s}}{t}\right| \leq C_0.$$

由于 $I_q(K_0,\ \cdot)^s$ 可积，因此由控制收敛定理和定理 3.3 可得

$$\begin{aligned} \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\Psi_{s,q}(K_t) &= \frac{sq}{n\omega_n}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} I_q(K_0,u)^{s-1}\int_{\partial K_0} g(\nu_{K_0}(z))X_{K_0}(z,u)^{q-1}\,d\mathcal{H}^{n-1}(z)\,du \\ &= \frac{sq}{n\omega_n}\int_{\partial K_0} g(\nu_{K_0}(z))\int_{\mathbb{S}^{n-1}} I_q(K_0,u)^{s-1}X_{K_0}(z,u)^{q-1}\,du\,d\mathcal{H}^{n-1}(z) \\ &= s\int_\Omega g(v)\,dF_{s,q}(K_0,v). \end{aligned}$$

这里最后一个等式用到了定义 2.3，以及 Wulff形 $K_0 = [h_0]$ 的表面积测度集中在 Ω 上这一事实。□

下面的定理表明，可以从 $F_{s,q}(K,\cdot)$ 恢复 $\Psi_{s,q}(K)$。

定理3.4。设 $K \in \mathcal{K}^n$、$q > 0$ 和 $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$。则

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} h_K(v)\, dF_{s,q}(K,v) = (n+q-1)\Psi_{s,q}(K).$$

证明。我们应用定理 1.1，其中

$$\Omega = \mathbb{S}^{n-1}, \qquad h_0 = h_K, \qquad g = h_K,$$

and

$$h_t = (1+t)h_K.$$

由于

$$h_t = h_K + t h_K,$$

定理 1.1 给出

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \Psi_{s,q}((1+t)K) = s\int_{\mathbb{S}^{n-1}} h_K(v)\, dF_{s,q}(K,v). \tag{3.5}$$

另一方面，根据引理 2.2,

$$\Psi_{s,q}((1+t)K) = (1+t)^{(n+q-1)s}\Psi_{s,q}(K).$$

在 $t = 0$ 处求导，得到

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \Psi_{s,q}((1+t)K) = (n+q-1)s\,\Psi_{s,q}(K). \tag{3.6}$$

比较 (3.5) 和 (3.6)，并利用 $s \neq 0$，得到

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} h_K(v)\, dF_{s,q}(K,v) = (n+q-1)\,\Psi_{s,q}(K).$$

这就证明了该定理。□

下面的命题表明，$(s,\ q)$-弦测度是平移不变的。

命题 3.5。设 $K \in \mathcal{K}^n$，$q > 0$，且 $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$。则

$$F_{s,q}(K + x_0, \cdot) = F_{s,q}(K,\cdot) \qquad \textit{for every } x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

证明。令 $\Omega = \mathbb{S}^{n-1}$ 和 $h_0 = h_K$ 取自定理 1.1。则对每个 $g \in C(\mathbb{S}^{n-1})$,

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \Psi_{s,q}(K_t) = s\int_{\mathbb{S}^{n-1}} g(v)\, dF_{s,q}(K,v).$$

取 $h_0 = h_{K+x_0}$，得到

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \Psi_{s,q}(K_t + x_0) = s\int_{\mathbb{S}^{n-1}} g(v)\, dF_{s,q}(K+x_0,v).$$

由于 $\Psi_{s,\ q}$ 是平移不变的,

$$\Psi_{s,q}(K_t + x_0) = \Psi_{s,q}(K_t).$$

因此，上述两个恒等式与 $s \neq 0$ 一起推出

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} g(v)\, dF_{s,q}(K+x_0,v) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} g(v)\, dF_{s,q}(K,v)$$

对每个 $g \in C(\mathbb{S}^{n-1})$ 均成立。因此结论得证。 □

现在我们证明，(s,q)-弦测度的质心位于原点。

定理 3.6。设 $K \in \mathcal{K}^n$、$q>0$ 和 $s \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$。则

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} v\, dF_{s,q}(K,v) = o.$$

证明。令 $x_0 \in \mathbb{R}^n$。根据定理3.4，$\Psi_{s,q}$ 的平移不变性，以及命题 3。 5,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} h_K(v)\, dF_{s,q}(K,v) &= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} h_{K+x_0}(v)\, dF_{s,q}(K+x_0,v)\\ &= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \big(h_K(v)+x_0\cdot v\big)\, dF_{s,q}(K,v).\end{aligned}$$

因此

$$x_0 \cdot \int_{\mathbb{S}^{n-1}} v\, dF_{s,q}(K,v) = 0.$$

由于 x_0 是任意的，$F_{s,\,q}(K,\,\cdot)$ 的质心位于原点。 □

现在我们引入 L_p $(s,\ q)$-弦测度。

定义 3.7。设 $K \in \mathcal{K}_o^n$, $q>0$, $s \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ 和 $p \in \mathbb{R}$。$L_p\,(s,q)$-弦测度定义为

$$dF_{p,s,q}(K,v) = h_K(v)^{1-p}\, dF_{s,q}(K,v), \qquad v \in \mathbb{S}^{n-1}.$$

由定理 1.1，我们得到以下关于 L_p $(s,\ q)$-弦测度的变分公式。

定理 3.8。设 $q>0$, $p \in \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$，并设 $\Omega \subset \mathbb{S}^{n-1}$ 是紧的，且不包含于任何闭半球中。设 $h_0 \in C^+(\Omega)$ 和 $g \in C(\Omega)$。假设当 $|t|$, $K_t = [h_t] \in \mathcal{K}_o^n$ 足够小时，且

$$\begin{cases} h_t^p = h_0^p + tg + o(t,\cdot), & p \neq 0,\\ \log h_t = \log h_0 + tg + o(t,\cdot), & p = 0. \end{cases}$$

Then

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \Psi_{s,q}(K_t) = \begin{cases} \dfrac{s}{p}\displaystyle\int_\Omega g(v)\, dF_{p,s,q}(K_0,v), & p \neq 0,\\ s\displaystyle\int_\Omega g(v)\, dF_{0,s,q}(K_0,v), & p = 0. \end{cases}$$

我们有以下关于 L_p $(s,\ q)$-弦测度的齐次性。

命题 3.9。设 $\lambda>0$、$q>0$、$s \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ 和 $K \in \mathcal{K}^n$。那么

$$F_{s,q}(\lambda K,\cdot) = \lambda^{(n+q-1)s-1} F_{s,q}(K,\cdot).$$

因此，对于 $K \in \mathcal{K}_o^n$ 和 $p \in \mathbb{R}$,

$$F_{p,s,q}(\lambda K,\cdot) = \lambda^{(n+q-1)s-p} F_{p,s,q}(K,\cdot).$$

证明。设 $\omega \subset \mathbb{S}^{n-1}$ 是一个博雷尔集。由于

$$\nu_{\lambda K}(\lambda z) = \nu_K(z)$$

对于几乎每个 $\mathcal{H}^{n-1}$ $z \in \partial K$，且

$$d\mathcal{H}^{n-1}(\lambda z) = \lambda^{n-1} d\mathcal{H}^{n-1}(z),$$

由定义 2.3 可得

$$F_{s,q}(\lambda K,\omega)=\frac{q}{n\omega_n}\int_{\nu_K^{-1}(\omega)}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} I_q(\lambda K,u)^{s-1}X_{\lambda K}(\lambda z,u)^{q-1}\,du\,\lambda^{n-1}d\mathcal{H}^{n-1}(z).$$

由（2.4）及

$$X_{\lambda K}(\lambda z,u)=\lambda X_K(z,u),$$

我们得到

$$F_{s,q}(\lambda K,\omega)=\lambda^{(n+q-1)s-1}F_{s,q}(K,\omega).$$

由于 ω 是任意的,

$$F_{s,q}(\lambda K,\cdot)=\lambda^{(n+q-1)s-1}F_{s,q}(K,\cdot).$$

最后，由于 $h_{\lambda K}=\lambda h_K$，我们得到

$$F_{p,s,q}(\lambda K,\cdot)=\lambda^{(n+q-1)s-p}F_{p,s,q}(K,\cdot).$$

结论得证。 □

命题 3.10。 如果 $K\in\mathcal{K}_e^n$，则 $F_{s,\,q}(K,\,\cdot)$ 对于每个 $q>0$ 和 $s\neq 0$ 都是偶函数。

证明。 设 $\omega\subset\mathbb{S}^{n-1}$ 为博雷尔集。由于 $K=-K$,

$$\nu_K(-y)=-\nu_K(y)\quad\text{and}\quad X_K(-y,u)=X_K(y,u)$$

对于 $\mathcal{H}^{n-1}$-几乎处处的 $y\in\partial K$。因此

$$\nu_K^{-1}(-\omega)=-\nu_K^{-1}(\omega).$$

利用定义 2.3 和变量替换 $y=-z$，我们得到

$$\begin{aligned}F_{s,q}(K,-\omega)&=\frac{q}{n\omega_n}\int_{\nu_K^{-1}(\omega)}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} I_q(K,u)^{s-1}X_K(-z,u)^{q-1}\,du\,d\mathcal{H}^{n-1}(z)\\&=F_{s,q}(K,\omega).\end{aligned}$$

因此 $F_{s,\,q}(K,\,\cdot)$ 是偶函数。 □

现在我们表述关于（s，q）-弦测度的 L_p 闵可夫斯基问题。给定 $q>0$、$s\neq 0$、$p\in\mathbb{R}$ 以及定义在 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上的有限博雷尔测度 μ，确定何时存在一个凸体 K 使得

$$F_{p,s,q}(K,\cdot)=\mu,$$

其中 $K\in\mathcal{K}_o^n$。

假设 $d\mu(v)=f(v)\,dv$。我们需要找到一个正函数 $h\in C^2(\mathbb{S}^{n-1})$，使得对每个 $v\in\mathbb{S}^{n-1}$,

$$\nabla_S^2h(v)+h(v)I>0\qquad\text{on } v^\perp,$$

其中 ∇_S^2h 是球面 Hessian，I 是 $v^\perp$ 上的单位矩阵。令 $K_h=[h]$ 并

$$x_h(v)=\nabla_Sh(v)+h(v)v\in\partial K_h.$$

那么 m 测度方程 $F_{p,\,s,\,q}(K_h,\,\cdot)=\mu$ 变为非局部 Monge–Amp`ere 方程 n

$$\frac{q}{n\omega_n}h(v)^{1-p}\left[\int_{\mathbb{S}^{n-1}} I_q(K_h,u)^{s-1}X_{K_h}\big(x_h(v),u\big)^{q-1}\,du\right]\det\big(\nabla_S^2h(v)+h(v)I\big)=f(v).\qquad(3.7)$$

4. Minkowski problems for $(s,\ q)$-chord measures

对于 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上的非零有限博雷尔测度 μ 和 $f \in C^+(\mathbb{S}^{n-1})$，记作

$$\langle f, \mu\rangle = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} f\, d\mu.$$

定义零次齐次泛函 $\Phi_{s,q,\mu}:\ \mathcal{K}_o^n \to (0,\infty)$ 如下：

$$\Phi_{s,q,\mu}(K) = \frac{\Psi_{s,q}(K)^{1/((n+q-1)s)}}{\langle h_K, \mu\rangle}.$$

引理 4.1. 设 $q>0$ 和 $s \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ 满足 $(n+q-1)s \neq 1$，且 μ 是 $\mathbb{S}^{n-1}$上的非零有限博雷尔测度。若 $\Phi_{s,q,\mu}$ 在 $\mathcal{K}_o^n$中存在极大化者，则存在 $K \in \mathcal{K}_o^n$ 使得

$$F_{s,q}(K,\cdot) = \mu.$$

证明. 设 $K_0 \in \mathcal{K}_o^n$ 是 $\Phi_{s,q,\mu}$的极大化者。对于 $g \in C(\mathbb{S}^{n-1})$，取 $h_t = h_{K_0} + tg$ 和 $K_t = [h_t]$，其中 $|t|$充分小，使得 $h_t > 0$。定义

$$\varphi(t) = \frac{\Psi_{s,q}(K_t)^{1/((n+q-1)s)}}{\langle h_t, \mu\rangle}.$$

由于 $h_{K_t} \le h_t$ 和 μ 非负，

$$\varphi(t) \le \Phi_{s,q,\mu}(K_t) \le \Phi_{s,q,\mu}(K_0) = \varphi(0).$$

因此 $\varphi'(0) = 0$。定理 1.1 给出

$$\begin{aligned} 0 = {} & \frac{\Psi_{s,q}(K_0)^{(1-(n+q-1)s)/((n+q-1)s)}}{(n+q-1)\langle h_{K_0}, \mu\rangle} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} g(v)\, dF_{s,q}(K_0, v) \\ & - \frac{\Psi_{s,q}(K_0)^{1/((n+q-1)s)}}{\langle h_{K_0}, \mu\rangle^2} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} g(v)\, d\mu(v). \end{aligned}$$

由于这对每个 $g \in C(\mathbb{S}^{n-1})$ 都成立，

$$\frac{\langle h_{K_0}, \mu\rangle}{(n+q-1)\Psi_{s,q}(K_0)} F_{s,q}(K_0,\cdot) = \mu.$$

令 $\lambda > 0$ 使得

$$\lambda^{(n+q-1)s-1} = \frac{\langle h_{K_0}, \mu\rangle}{(n+q-1)\Psi_{s,q}(K_0)}.$$

令 $K = \lambda K_0$。于是，命题 3.9 表明 K 满足 $F_{s,q}(K,\cdot) = \mu$。 □

定理 *1.2* 的证明。 假设 μ 不集中在任何闭半球上，且满足 (1.3)。考虑

$$\sup\{\Phi_{s,q,\mu}(K) : K \in \mathcal{K}_o^n\}.$$

由于 $\int_{\mathbb{S}^{n-1}} v\, d\mu(v) = o$，并且 $\Psi_{s,q}$ 是平移不变的，因此 $\Phi_{s,q,\mu}$ 也具有平移不变性。因此，我们可以选取 $\Phi_{s,q,\mu}$ 的一个极大化序列 (K_i)，使得对每个 i 都有 $c(K_i) = o$。由 $\Phi_{s,q,\mu}$ 的零次齐次性，我们还可以对 (K_i) 进行归一化，使得

$$\Psi_{s,q}(K_i) = 1.$$

在此归一化下，(K_i) 是以下问题的极小化序列

$$\inf\left\{\langle h_K, \mu\rangle : K \in \mathcal{K}_o^n,\ \Psi_{s,q}(K) = 1\right\}.$$

选取 $a>0$，使得 $\Psi_{s,q}(aB^n)=1$。舍去 (K_i) 的有限项后，我们可以假设

$$\langle h_{K_i},\mu\rangle \le \langle h_{aB^n},\mu\rangle + 1 = a|\mu| + 1.$$

Let

$$R_i = \max_{u\in\mathbb{S}^{n-1}} \rho_{K_i}(u) = \rho_{K_i}(u_i)$$

对某个 $u_i\in\mathbb{S}^{n-1}$。由于 $[o,R_iu_i]\subset K_i$,

$$R_i(v\cdot u_i)_+ = h_{[o,R_iu_i]}(v) \le h_{K_i}(v),$$

其中 $(t)_+=\max\{t,0\}$。因此

$$R_i\int_{\mathbb{S}^{n-1}}(u_i\cdot v)_+\,d\mu(v)\le a|\mu|+1.$$

连续函数

$$u\longmapsto\int_{\mathbb{S}^{n-1}}(u\cdot v)_+\,d\mu(v)$$

由于 μ 不集中在一个闭半球上，$\mathbb{S}^{n-1}$ 上严格为正。因此存在一个常数 $c>0$，使得

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}}(u\cdot v)_+\,d\mu(v)\ge c \qquad \text{for every } u\in\mathbb{S}^{n-1}.$$

因此 $R_i\le(a|\mu|+1)/c$，所以 (K_i) 一致有界。根据布拉施克选择定理，存在一个子序列（仍记为 (K_i)），其在豪斯多夫度量下收敛于一个紧凸集 K_0。

我们断言 K_0 具有非空内部。否则，存在 $e\in\mathbb{S}^{n-1}$ 使得 $w_{K_0}(e)=0$，从而 $w_{K_i}(e)\to 0$。对于 $u\cdot e\ne 0$，K_i 中每条平行于 u 的弦都满足

$$X_{K_i}(x,u)\le\frac{w_{K_i}(e)}{|u\cdot e|}.$$

由于对某个与 i无关的 $R>0$，$K_i\subset RB^n$，

$$\begin{aligned} I_q(K_i,u) &\le \mathrm{vol}_{n-1}(K_i|u^\perp)\left(\frac{w_{K_i}(e)}{|u\cdot e|}\right)^q\\ &\le \omega_{n-1}R^{n-1}\left(\frac{w_{K_i}(e)}{|u\cdot e|}\right)^q. \end{aligned}$$

因此，对于几乎所有 $u\in\mathbb{S}^{n-1}$，$I_q(K_i,u)\to 0$。对于 $s>0$，由于

$$I_q(K_i,u)\le\omega_{n-1}R^{n-1}(2R)^q,$$

控制收敛给出 $\Psi_{s,q}(K_i)\to 0$，矛盾。若 $s<0$，则对几乎所有 u，$I_q(K_i,u)^s\to+\infty$，由法图引理可得 $\liminf_i \Psi_{s,q}(K_i)=+\infty$，再次矛盾。因此 $K_0\in\mathcal{K}^n$。

$\Psi_{s,q}$ 的豪斯多夫连续性给出 $\Psi_{s,q}(K_0)=1$。由于质心关于豪斯多夫度量连续，$c(K_0)=o$；特别地，$K_0\in\mathcal{K}^n_o$。因为 $\Phi_{s,q,\mu}$ 关于豪斯多夫度量连续，并且 (K_i) 是 $\Phi_{s,q,\mu}$的极大化序列，所以我们有

$$\Phi_{s,q,\mu}(K_0)=\sup\{\Phi_{s,q,\mu}(K):K\in\mathcal{K}^n_o\}.$$

因此，由引理 4.1 可得一个满足条件的膨胀 K of K_0

$$F_{s,q}(K,\cdot)=\mu.$$

反过来，假设对于某个 $K\in\mathcal{K}^n$，有 $F_{s,q}(K,\cdot)=\mu$，并定义

$$B_K(z)=\frac{q}{n\omega_n}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} I_q(K,u)^{s-1}X_K(z,u)^{q-1}\,du,\qquad z\in\partial K.$$

Then

$$F_{s,q}(K,\omega)=\int_{\nu_K^{-1}(\omega)} B_K(z)\,d\mathcal{H}^{n-1}(z)$$

对每个博雷尔集 $\omega\subset\mathbb{S}^{n-1}$。引理 3.2 给出：对 $\mathcal{H}^{n-1}$-几乎处处的 z，$B_K(z)<\infty$。为证明 $B_K(z)$ 的正性，固定 $z\in\partial K$，取 $a\in\operatorname{int}K$，并取满足 $B(a,r)=\{x\in\mathbb{R}^n:|x-a|<r\}\subset K$ 的 $r>0$，令

$$u_0=\frac{a-z}{|a-z|}.$$

对足够小的球面邻域 U 中的每个 u，直线 $z+\mathbb{R}u$ 与 $B(a,r)$ 相交于一条非退化线段。因此，$X_K(z,u)>0$ 于 U，从而当其有限时，$B_K(z)>0$。于是，若 $F_{s,q}(K,\omega)=0$，则 $S(K,\omega)=0$。因此，$S(K,\cdot)$ 关于 $F_{s,q}(K,\cdot)$ 绝对连续。由于面积测度不集中于任何闭半球，$F_{s,q}(K,\cdot)$ 也不集中于任何闭半球。最后，定理 3.6 给出

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} v\,dF_{s,q}(K,v)=o.$$

这证明了必要性，并完成了证明。 □

接下来我们建立唯一性证明中所用的不等式。经典的布伦–明可夫斯基不等式表明，对于 K，$L\in\mathcal{K}^n$ 和 $0<\lambda<1$，

$$V((1-\lambda)K+\lambda L)\geq V(K)^{1-\lambda}V(L)^{\lambda},\tag{4.1}$$

等号成立当且仅当 K 和 L 互为平移体；参见 [42]。

设 $u\in\mathbb{S}^{n-1}$。对于 $y\in K|u^{\perp}$，定义沿方向 u 的上、下图函数为

$$\bar{\ell}_u(K,y)=\max\{t\in\mathbb{R}:y+tu\in K\},\qquad \underline{\ell}_u(K,y)=-\min\{t\in\mathbb{R}:y+tu\in K\}.$$

Then

$$K=\{y+tu:y\in K|u^{\perp},\ -\underline{\ell}_u(K,y)\leq t\leq\bar{\ell}_u(K,y)\},$$

且这两个图函数在 $K|u^{\perp}$上都是凹函数。对于 $y\in K|u^{\perp}$，我们有

$$X_K(y,u)=\bar{\ell}_u(K,y)+\underline{\ell}_u(K,y).\tag{4.2}$$

我们将使用 Pr´ekopa–Leindler 不等式及其等号成立条件。

定理 4.2 (Pr´ekopa–Leindler–Dubuc [19])。设 $0<\lambda<1$，且 $f,g,h:\ \mathbb{R}^m\to[0,\infty)$ 是满足以下条件的可积函数

$$h((1-\lambda)x+\lambda y)\geq f(x)^{1-\lambda}g(y)^{\lambda}$$

对所有 $x,y\in\mathbb{R}^m$ 均成立。则

$$\int_{\mathbb{R}^m}h\geq\left(\int_{\mathbb{R}^m}f\right)^{1-\lambda}\left(\int_{\mathbb{R}^m}g\right)^{\lambda}.$$

此外，假设 $\int_{\mathbb{R}^m}f>0$ 和 $\int_{\mathbb{R}^m}g>0$。当且仅当存在$a>0$、$z\in\mathbb{R}^m$以及一个对数凹函数 H，使得几乎处处成立等号，

$$h=H,\qquad f(x)=a^{-\lambda}H(x-\lambda z),\qquad g(x)=a^{1-\lambda}H(x+(1-\lambda)z).$$

引理 4.3。设 K、$L\in\mathcal{K}^n$、$0<\lambda<1$、$u\in\mathbb{S}^{n-1}$和 $K_\lambda=(1-\lambda)K+\lambda L$。那么，对于所有$x$、$y\in u^\perp$,

$$X_{K_\lambda}((1-\lambda)x+\lambda y,u)\geq X_K(x,u)^{1-\lambda}X_L(y,u)^\lambda.$$

证明。如果 $x\notin K|u^\perp$ 或 $y\notin L|u^\perp$，那么右端为零，结论显然成立。因此，设 $x\in K|u^\perp$ 且 $y\in L|u^\perp$。

记作

$$X_K(x,u)=\bar{\ell}_u(K,x)+\underline{\ell}_u(K,x),\qquad X_L(y,u)=\bar{\ell}_u(L,y)+\underline{\ell}_u(L,y).$$

由于

$$x+\bar{\ell}_u(K,x)u\in K,\qquad y+\bar{\ell}_u(L,y)u\in L,$$

我们有

$$(1-\lambda)x+\lambda y+\big((1-\lambda)\bar{\ell}_u(K,x)+\lambda\bar{\ell}_u(L,y)\big)u\in K_\lambda.$$

Thus

$$\bar{\ell}_u(K_\lambda,(1-\lambda)x+\lambda y)\geq(1-\lambda)\bar{\ell}_u(K,x)+\lambda\bar{\ell}_u(L,y).$$

同理,

$$\underline{\ell}_u(K_\lambda,(1-\lambda)x+\lambda y)\geq(1-\lambda)\underline{\ell}_u(K,x)+\lambda\underline{\ell}_u(L,y).$$

将这些不等式相加，得到

$$X_{K_\lambda}((1-\lambda)x+\lambda y,u)\geq(1-\lambda)X_K(x,u)+\lambda X_L(y,u).$$

最后，由加权算术-几何平均不等式,

$$(1-\lambda)X_K(x,u)+\lambda X_L(y,u)\geq X_K(x,u)^{1-\lambda}X_L(y,u)^\lambda.$$

引理得证。 □

引理 4.4. 对于任意 $K\in\mathcal{K}^n$ 和 $u\in\mathbb{S}^{n-1}$，函数 $x\mapsto X_K(x,u)$ 在$u^\perp$上是对数凹的。

证明。设 $x,y\in u^\perp$ 和 $0<\lambda<1$。若 $x\notin K|u^\perp$ 或 $y\notin K|u^\perp$，则

$$X_K(x,u)^{1-\lambda}X_K(y,u)^\lambda=0,$$

因此，对数凹性不等式显然成立。

现在假设 $x,y\in K|u^\perp$。由 (4.2)，可得

$$\begin{aligned}X_K((1-\lambda)x+\lambda y,u)&\geq(1-\lambda)X_K(x,u)+\lambda X_K(y,u)\\&\geq X_K(x,u)^{1-\lambda}X_K(y,u)^\lambda,\end{aligned}$$

其中第二个不等式是加权算术-几何平均不等式。

因此， $x\mapsto X_K(x,u)$ 在 $u^\perp$ 上是对数凹的。 □

定理 4.5。设 $K,L\in\mathcal{K}^n$, $s<0$, $q>0$ 和 $0<\lambda<1$。则

$$\Psi_{s,q}((1-\lambda)K+\lambda L)\leq\Psi_{s,q}(K)^{1-\lambda}\Psi_{s,q}(L)^\lambda.\tag{4.3}$$

当且仅当 K 和 L 是平移体时，等号成立。

证明。令 $K_\lambda=(1-\lambda)K+\lambda L$，并固定 $u\in\mathbb{S}^{n-1}$。由引理 4.3 和定理 4.2，可得

$$I_q(K_\lambda,u)\geq I_q(K,u)^{1-\lambda}I_q(L,u)^\lambda.\tag{4.4}$$

由于 $s<0$,

$$I_q(K_\lambda,u)^s\leq I_q(K,u)^{(1-\lambda)s}I_q(L,u)^{\lambda s}.$$

对上述不等式进行积分，得

$$\begin{aligned}\Psi_{s,q}(K_\lambda) &= \frac{1}{n\omega_n}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} I_q(K_\lambda,u)^s\,du\\ &\le \frac{1}{n\omega_n}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} I_q(K,u)^{(1-\lambda)s} I_q(L,u)^{\lambda s}\,du\\ &\le \left(\frac{1}{n\omega_n}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} I_q(K,u)^s\,du\right)^{1-\lambda}\left(\frac{1}{n\omega_n}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} I_q(L,u)^s\,du\right)^{\lambda}\\ &= \Psi_{s,q}(K)^{1-\lambda}\Psi_{s,q}(L)^{\lambda}.\end{aligned}$$

由此，我们证明了所需的不等式。

若 K 和 L 是平移体，则由 $\Psi_{s,\ q}$的平移不变性可知等号成立。反过来，假设等号成立。这意味着对几乎处处的 u，式 (4.4) 中等号成立。固定这样一个方向。将定理 4.2 中的等号情形应用于

$$f(x) = X_K(x,u)^q,\quad g(x) = X_L(x,u)^q,\quad h(x) = X_{K_\lambda}(x,u)^q.$$

引理 4.4 表明 h 是对数凹的。因此存在 $a>0$ 和 $z\in u^\perp$，使得在 $u^\perp$上几乎处处有:

$$X_K(x,u) = a^{-\lambda/q}X_{K_\lambda}(x-\lambda z,u),$$

and

$$X_L(x,u) = a^{(1-\lambda)/q}X_{K_\lambda}(x+(1-\lambda)z,u).$$

在 $u^\perp$ 上积分可得

$$V(K) = a^{-\lambda/q}V(K_\lambda),\qquad V(L) = a^{(1-\lambda)/q}V(K_\lambda).$$

因此

$$V(K_\lambda) = V(K)^{1-\lambda}V(L)^{\lambda}.$$

(4.1) 中等号成立意味着 K 和 L 是平移体。 □

定理 4.6. 设 K、$L\in\mathcal{K}^n$、$s<0$ 和 $q>0$。则

$$\Psi_{s,q}(K+L)^{1/((n+q-1)s)} \ge \Psi_{s,q}(K)^{1/((n+q-1)s)} + \Psi_{s,q}(L)^{1/((n+q-1)s)}. \tag{4.5}$$

等号成立当且仅当 K 和 L 位似。

证明. 设 $\alpha = (n+q-1)s<0$，并令

$$a = \Psi_{s,q}(K)^{1/\alpha},\qquad b = \Psi_{s,q}(L)^{1/\alpha},\qquad \widetilde{K} = K/a,\qquad \widetilde{L} = L/b.$$

由引理 2.2，$\Psi_{s,q}(\widetilde{K}) = \Psi_{s,q}(\widetilde{L}) = 1$。当 $\lambda = b/(a+b)$ 时，

$$(1-\lambda)\widetilde{K} + \lambda\widetilde{L} = \frac{K+L}{a+b}.$$

由定理 4.5 得

$$\Psi_{s,q}\left(\frac{K+L}{a+b}\right) \le 1.$$

由于 $1/\alpha<0$，齐次性得出（4.5）。

等式 (4.5) 成立等价于定理 4.5 对 K 和 L 成立等号，因此 K，L 是平移体。这意味着 K 和 L位似。反向结论可直接由平移不变性和齐次性得出。 □

定理4.7。 设 $q>0$、 $s<0$ 和 K、 $L\in\mathcal{K}^n$。若

$$F_{s,q}(K,\cdot)=F_{s,q}(L,\cdot),$$

于是 K 和 L 是平移体。

证明。 令 $K_t=K+tL$ 对于 $t\geq 0$，并置 $\alpha=(n+q-1)s<0$。由定理1.1和定理3.4,

$$\begin{aligned}\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0^+}\Psi_{s,q}(K_t)^{1/\alpha}&=\frac{1}{n+q-1}\Psi_{s,q}(K)^{(1-\alpha)/\alpha}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}h_L(v)\,dF_{s,q}(K,v)\\&=\frac{1}{n+q-1}\Psi_{s,q}(K)^{(1-\alpha)/\alpha}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}h_L(v)\,dF_{s,q}(L,v)\\&=\Psi_{s,q}(K)^{(1-\alpha)/\alpha}\Psi_{s,q}(L).\end{aligned}\tag{4.6}$$

另一方面，定理 4.6 给出

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0^+}\Psi_{s,q}(K_t)^{1/\alpha}\geq\Psi_{s,q}(L)^{1/\alpha}.\tag{4.7}$$

由于 $(1-\alpha)/\alpha<0$，(4.6) 和 (4.7) 蕴含 $\Psi_{s,\,q}(K)\leq\Psi_{s,\,q}(L)$。交换 K 和 L 的角色可得

$$\Psi_{s,q}(K)=\Psi_{s,q}(L).\tag{4.8}$$

定义

$$f(t)=\Psi_{s,q}(K+tL)^{1/\alpha}-\Psi_{s,q}(K)^{1/\alpha}-t\Psi_{s,q}(L)^{1/\alpha}.$$

定理 4.6 给出 $f(t)\geq 0$，且 f在 $[0,\infty)$ 上是凹的。(4.6) 和 (4.8) 给出 $f(0)=f'(0^+)=0$。凹性蕴含 $f\leq 0$，因此 $f\equiv 0$。定理 4.6 中的等号表明，对于 $\lambda>0$ 和 $x_0\in\mathbb{R}^n$， $K=\lambda L+x_0$。(4.8) 表明 $\lambda=1$，因此 K 和 L 是平移体。□

利用定理 1.2 和定理4.7，可得以下推论。

推论 4.8。 设 $q>0$、 $s<0$，且 μ 是 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上的非零有限博雷尔测度。那么，存在唯一的凸体（相差一个平移），满足

$$F_{s,q}(K,\cdot)=\mu$$

当且仅当 μ 不集中于任何闭半球，且

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}}v\,d\mu(v)=o.$$

5. The logarithmic Minkowski problem for $(s,\ q)$-chord measures

本节研究关于原点对称的情形下的对数闵可夫斯基问题。设 μ 是 $\mathbb{S}^{n-1}$上的非零有限博雷尔测度。对于 $K\in\mathcal{K}_o^n$，定义熵

$$E_\mu(K)=-\frac{1}{|\mu|}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\log h_K(v)\,d\mu(v).$$

设 $q\geq 1$ 和 $s>0$。如果 μ 满足子空间质量不等式，则称其满足

$$\frac{\mu(\xi\cap\mathbb{S}^{n-1})}{|\mu|}<\frac{ks+\min\{k,(q-1)s\}}{(n+q-1)s}\tag{5.1}$$

对于每个 $k\in\{1,\dots,n-1\}$ 和每个 $\xi\in G_{n,\,k}$。

令 e_1，……， e_n 为 $\mathbb{R}^n$ 的标准正交基。对于 $0<\delta<1/\sqrt{n}$，定义

$$\Omega_{k,\delta}=\left\{v\in\mathbb{S}^{n-1}:|v\cdot e_k|\geq\delta,\ |v\cdot e_j|<\delta\text{ for all }j>k\right\},\qquad k=1,\dots,n.\tag{5.2}$$

这些集合构成 $\mathbb{S}^{n-1}$ 的一个划分。令 $\xi_0=\{o\}$ 和

$$\xi_k=\operatorname{span}\{e_1,\dots,e_k\},\qquad k=1,\dots,n.$$

在 [7] 中已证明

$$\lim_{\delta\to 0^+}\mu(\Omega_{k,\delta})=\mu\big((\xi_k\setminus\xi_{k-1})\cap\mathbb{S}^{n-1}\big),\tag{5.3}$$

因此

$$\lim_{\delta\to 0^+}\sum_{j=1}^{k}\mu(\Omega_{j,\delta})=\mu(\xi_k\cap\mathbb{S}^{n-1}).\tag{5.4}$$

我们还将用到以下引理。

引理 5.1 (引理 4.1, [8])。 设 $\lambda_1,\dots,\lambda_m\in[0,1]$ 满足 $\sum_{j=1}^m\lambda_j=1$，且令 $a_1\le\cdots\le a_m$。假设 $0=\sigma_0\le\sigma_1\le\cdots\le\sigma_m=1$ 且

$$\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\le\sigma_k,\qquad k=1,\dots,m.$$

Then

$$\sum_{k=1}^{m}\lambda_k a_k\ge\sum_{k=1}^{m}(\sigma_k-\sigma_{k-1})a_k.$$

对于 $\beta\in\mathbb{R}$，令 $\lceil\beta\rceil$ 表示大于或等于 β 的最小整数。我们首先建立以下熵估计。

引理 5.2。 令 $q\ge 1$ 和 $s>0$，设 $\beta=(q-1)s$，假设 $\beta\in[0,n]$，并置 $m=$最大值$\{1,\lceil\beta\rceil\}$。令 μ 为满足 (5.1)的非零有限博雷尔测度。设有序正交归一基 $(e_{1l},\dots,e_{nl})$ 收敛于 $(e_1,\dots,e_n)$。令 $\epsilon_0>0$，并令

$$E_l=\left\{x\in\mathbb{R}^n:\sum_{k=1}^{n}\frac{(x\cdot e_{kl})^2}{a_{k,l}^2}\le 1\right\},$$

其中

$$0<a_{1,l}\le\cdots\le a_{n,l},\qquad a_{n,l}\ge\epsilon_0.$$

则存在 $l_0\in\mathbb{N}$、 $t_0>0$和 $c_0\in\mathbb{R}$，使得对每个 $l\ge l_0$,

$$\begin{aligned}E_\mu(E_l)\le&-\frac{s+1}{(n+q-1)s}\log\left(\prod_{k=1}^{m-1}a_{k,l}\right)-\frac{\beta+s+1-m}{(n+q-1)s}\log a_{m,l}\\&-\frac{s}{(n+q-1)s}\log\left(\prod_{k=m+1}^{n}a_{k,l}\right)+t_0\log a_{1,l}+c_0.\end{aligned}\tag{5.5}$$

空乘积解释为1。

证明。 对于划分 (5.2)，令

$$\lambda_{k,\delta}=\frac{\mu(\Omega_{k,\delta})}{|\mu|},\qquad k=1,\dots,n.$$

由（5.4）和（5.1）可知，存在 $t_0>0$ 和 $\delta_0\in$（0，$1/\sqrt{n}$）使得

$$\sum_{j=1}^{k}\lambda_{j,\delta_0}<\frac{ks+\min\{k,\beta\}}{(n+q-1)s}-t_0,\qquad k=1,\dots,n-1.$$

定义

$$\sigma_0 = 0, \qquad \sigma_k = \frac{ks + \min\{k, \beta\}}{(n+q-1)s} - t_0 \quad (1 \le k \le n-1), \qquad \sigma_n = 1.$$

令 t_0 充分小，则 $0 = \sigma_0 \le \sigma_1 \le \cdots \le \sigma_n = 1$。

由于 $m = \max\{1, \lceil \beta \rceil\}$，直接计算可得

$$\sigma_1 - \sigma_0 = \frac{\min\{s+1, s+\beta\}}{(n+q-1)s} - t_0,$$

并且，对于 $2 \le k \le n-1$,

$$\sigma_k - \sigma_{k-1} = \begin{cases} \dfrac{s+1}{(n+q-1)s}, & k < m, \\ \dfrac{\beta + s + 1 - m}{(n+q-1)s}, & k = m, \\ \dfrac{s}{(n+q-1)s}, & k > m. \end{cases}$$

此外,

$$\sigma_n - \sigma_{n-1} = \frac{s + \beta - \min\{n-1, \beta\}}{(n+q-1)s} + t_0.$$

当 $m = 1$ 或 $m = n$ 时，这些公式同样成立。

由于 $(e_{1l}, \ldots, e_{nl}) \to (e_1, \ldots, e_n)$，存在 $l_0 \in \mathbb{N}$，使得对每个 $l \ge l_0$,

$$|e_{kl} - e_k| < \frac{\delta_0}{2}, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

对于 $v \in \Omega_{k,\delta_0}$，由于 $a_{k,l} e_{kl} \in E_l$，我们得到

$$\begin{aligned} h_{E_l}(v) &\ge |v \cdot a_{k,l} e_{kl}| \\ &\ge a_{k,l} \big(|v \cdot e_k| - |v \cdot (e_{kl} - e_k)| \big) \\ &\ge \frac{\delta_0}{2} a_{k,l}. \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} E_\mu(E_l) &= -\frac{1}{|\mu|} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \log h_{E_l}(v)\, d\mu(v) \\ &\le -\sum_{k=1}^{n} \lambda_{k,\delta_0} \log \left(\frac{\delta_0}{2} a_{k,l} \right) \\ &= -\log \frac{\delta_0}{2} - \sum_{k=1}^{n} \lambda_{k,\delta_0} \log a_{k,l}. \end{aligned}$$

由于

$$\log a_{1,l} \le \cdots \le \log a_{n,l},$$

引理 5.1 得出

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_{k,\delta_0} \log a_{k,l} \ge \sum_{k=1}^{n} (\sigma_k - \sigma_{k-1}) \log a_{k,l}.$$

因此

$$E_\mu(E_l) \le -\log \frac{\delta_0}{2} - \sum_{k=1}^{n} (\sigma_k - \sigma_{k-1}) \log a_{k,l}.$$

将上述公式代入 $\sigma_k - \sigma_{k-1}$，我们得到

$$\begin{aligned}-\sum_{k=1}^{n}(\sigma_k-\sigma_{k-1})\log a_{k,l} = & -\frac{s+1}{(n+q-1)s}\sum_{k=1}^{m-1}\log a_{k,l}\\ & -\frac{\beta+s+1-m}{(n+q-1)s}\log a_{m,l}\\ & -\frac{s}{(n+q-1)s}\sum_{k=m+1}^{n}\log a_{k,l}\\ & +t_0\log a_{1,l}-t_0\log a_{n,l}.\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}E_\mu(E_l)\le & -\frac{s+1}{(n+q-1)s}\log\left(\prod_{k=1}^{m-1}a_{k,l}\right)-\frac{\beta+s+1-m}{(n+q-1)s}\log a_{m,l}\\ & -\frac{s}{(n+q-1)s}\log\left(\prod_{k=m+1}^{n}a_{k,l}\right)+t_0\log a_{1,l}-t_0\log a_{n,l}-\log\frac{\delta_0}{2}.\end{aligned}$$

最后，由于 $a_{n,\ l}\ge\epsilon_0$，

$$-t_0\log a_{n,l}\le -t_0\log\epsilon_0.$$

Let

$$c_0=-t_0\log\epsilon_0-\log\frac{\delta_0}{2}.$$

我们有

$$\begin{aligned}E_\mu(E_l)\le & -\frac{s+1}{(n+q-1)s}\log\left(\prod_{k=1}^{m-1}a_{k,l}\right)-\frac{\beta+s+1-m}{(n+q-1)s}\log a_{m,l}\\ & -\frac{s}{(n+q-1)s}\log\left(\prod_{k=m+1}^{n}a_{k,l}\right)+t_0\log a_{1,l}+c_0.\end{aligned}$$

这就是（5.5）。 □

接下来，我们给出椭球的（s， q）-弦估计。

引理 5.3. 设 $q>1$ 和 $s>0$，并令 $\beta=(q-1)s$。假设 $\beta\in(0,\ n)\setminus\mathbb{Z}$，并令$m=\lceil\beta\rceil$。设 $e_1,\dots,e_n$ 为一组标准正交基，并且

$$E=\left\{x\in\mathbb{R}^n:\sum_{k=1}^{n}\frac{(x\cdot e_k)^2}{a_k^2}\le 1\right\},\qquad 0<a_1\le\cdots\le a_n\le 1. \tag{5.6}$$

Then

$$\Psi_{s,q}(E)\le c_{s,q,n}\left(\prod_{k=1}^{m-1}a_k\right)^{s+1}a_m^{\beta+s+1-m}\left(\prod_{k=m+1}^{n}a_k\right)^{s},$$

其中 $c_{s,q,n}$ 是一个仅依赖于 s, q, n的常数。

证明。 设 ϕ是满足以下条件的矩阵： $\phi e_k=a_k e_k$对于 $k=1,\dots,n$，因此 $E=\phi B^n$。由于

$$\phi=(\det\phi)^{1/n}\frac{\phi}{(\det\phi)^{1/n}},$$

$S_{q-1}E$ (2.6) 的仿射协变性和齐次性给出

$$S_{q-1}E = (\det\phi)^{1/(q-1)}\phi S_{q-1}B^n.$$

由旋转对称性，$S_{q-1}B^n = c_{q,n}B^n$ 对于某个 $c_{q,n} > 0$。由于 $\beta = (q-1)s$,

$$\begin{aligned}\Psi_{s,q}(E) &= \frac{1}{n\omega_n}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \rho_{S_{q-1}E}(u)^\beta\, du\\ &= c_{q,n}^\beta(\det\phi)^s\frac{1}{n\omega_n}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\rho_E(u)^\beta\, du\\ &= c_{q,n}^\beta(a_1\cdots a_n)^s\widetilde{V}_\beta(E).\end{aligned} \tag{5.7}$$

Set

$$D = \left\{x\in\operatorname{span}\{e_1,\dots,e_{m-1}\} : \sum_{k=1}^{m-1}\frac{(x\cdot e_k)^2}{a_k^2}\le 1\right\},$$

$$J = [-a_m, a_m]e_m,$$

and

$$Y = \left\{y\in\operatorname{span}\{e_{m+1},\dots,e_n\} : \sum_{k=m+1}^{n}\frac{(y\cdot e_k)^2}{a_k^2}\le 1\right\}.$$

若 $m = 1$，则令 $D = \{o\}\subset\mathbb{R}^0$；若 $m = n$，则令 $Y = \{o\}\subset\mathbb{R}^0$。我们采用约定 $\mathrm{vol}_0(\{o\}) = 1$，并且空乘积等于 1。

显然，

$$E\subset D\times J\times Y.$$

由于 $\beta > 0$，由 (2.9) 得

$$\begin{aligned}\widetilde{V}_\beta(E) &\le \frac{\beta}{n\omega_n}\int_D\int_J\int_Y |(x,t,y)|^{\beta-n}\, dy\, dt\, dx\\ &\le \frac{\beta}{n\omega_n}\mathrm{vol}_{m-1}(D)\int_J\int_Y |(t,y)|^{\beta-n}\, dy\, dt,\end{aligned} \tag{5.8}$$

其中最后一行由 $\beta - n < 0$ 和 $|(x,t,y)|\ge|(t,y)|$ 得到。此外，

$$\mathrm{vol}_{m-1}(D) = \omega_{m-1}\prod_{k=1}^{m-1}a_k.$$

首先假设 $m\le n-1$。由于 $a_k\le 1$，我们有 $Y\subset B^{n-m}$，并且

$$|(t,y)|\ge\frac{|t|+|y|}{2}.$$

在 $\{e_{m+1},\dots,e_n\}$ 张成空间中使用极坐标，我们得到

$$\int_J\int_Y |(t,y)|^{\beta-n}\, dy\, dt\le 2^{n-\beta}(n-m)\omega_{n-m}\int_{-a_m}^{a_m}\int_0^1 (r+|t|)^{\beta-n}r^{n-m-1}\, dr\, dt.$$

由于 $r\le r+|t|$,

$$(r+|t|)^{\beta-n}r^{n-m-1}\le(r+|t|)^{\beta-m-1}.$$

由于 $m-1<\beta<m$,

$$\begin{aligned}\int_0^1 (r+|t|)^{\beta-m-1}\,dr &= \frac{|t|^{\beta-m}-(1+|t|)^{\beta-m}}{m-\beta}\\ &\le \frac{|t|^{\beta-m}}{m-\beta}.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\int_J\int_Y |(t,y)|^{\beta-n}\,dy\,dt &\le \frac{(n-m)\omega_{n-m}2^{n-\beta}}{m-\beta}\int_{-a_m}^{a_m}|t|^{\beta-m}\,dt\\ &= \frac{(n-m)\omega_{n-m}2^{n-\beta+1}}{(m-\beta)(\beta+1-m)}a_m^{\beta+1-m}.\end{aligned}\tag{5.9}$$

将其与（5.8）结合，得到

$$\widetilde{V}_\beta(E)\le C_1\left(\prod_{k=1}^{m-1}a_k\right)a_m^{\beta+1-m},$$

其中

$$C_1=\frac{\beta\omega_{m-1}(n-m)\omega_{n-m}2^{n-\beta+1}}{n\omega_n(m-\beta)(\beta+1-m)}.$$

若 $m=n$，则 $Y=\{o\}$ 且

$$\int_J |t|^{\beta-n}\,dt=\frac{2a_n^{\beta-n+1}}{\beta-n+1},$$

因此我们有

$$\widetilde{V}_\beta(E)\le C_2\left(\prod_{k=1}^{n-1}a_k\right)a_n^{\beta+1-n},$$

其中

$$C_2=\frac{2\beta\omega_{n-1}}{n\omega_n(\beta-n+1)}.$$

因此，在所有情形下，都存在一个常数 $C_{\beta,\ n}>0$，它仅取决于 β 和 n，使得

$$\widetilde{V}_\beta(E)\le C_{\beta,n}\left(\prod_{k=1}^{m-1}a_k\right)a_m^{\beta+1-m}.$$

将其代入（5.7），得到

$$\begin{aligned}\Psi_{s,q}(E) &\le c_{s,q,n}(a_1\cdots a_n)^s\left(\prod_{k=1}^{m-1}a_k\right)a_m^{\beta+1-m}\\ &= c_{s,q,n}\left(\prod_{k=1}^{m-1}a_k\right)^{s+1}a_m^{\beta+s+1-m}\left(\prod_{k=m+1}^{n}a_k\right)^s,\end{aligned}$$

其中 $c_{s,\ q,\ n}=c_{q,\ n}^{\beta}C_{\beta,\ n}$ 仅取决于 s，q，n，因为 $\beta=(q-1)s$。引理得证。 □

对于 $0<s_1\le s_2$，H¨older 不等式给出

$$\Psi_{s_1,q}(K)\le\Psi_{s_2,q}(K)^{s_1/s_2}.\tag{5.10}$$

对于非零有限博雷尔测度 μ，定义 $L_{s,q,\mu}:\mathcal{K}_e^n\to\mathbb{R}$ 为

$$L_{s,q,\mu}(K)=E_\mu(K)+\frac{1}{(n+q-1)s}\log\Psi_{s,q}(K).$$

该泛函是 0 次齐次的，并且关于豪斯多夫度量连续。对于 $K\in\mathcal{K}_o^n$，令

$$R_K=\max\{|x|:x\in K\},\qquad r_K=\max\{r>0:rB^n\subset K\}.$$

引理 5.4. 设 $q\geq 1$ 和 $s>0$，并假设 $(q-1)s\in[0,n]$。设 μ 是满足 (5.1) 的非零偶有限博雷尔测度。若 $(K_l)\subset\mathcal{K}_e^n$ 是满足 $R_{K_l}=1$ 和$r_{K_l}\to 0$的序列，则

$$\liminf_{l\to\infty}L_{s,q,\mu}(K_l)=-\infty.$$

证明。设 E_l 是 K_l的约翰椭球。由于 K_l 关于原点对称，约翰定理给出

$$E_l\subset K_l\subset\sqrt{n}\,E_l;\tag{5.11}$$

见 [42]。记

$$E_l=\left\{x\in\mathbb{R}^n:\sum_{k=1}^n\frac{(x\cdot e_{kl})^2}{a_{k,l}^2}\leq 1\right\},$$

其中 $0<a_{1,l}\leq\cdots\leq a_{n,l}$ 且 $(e_{1l},\dots,e_{nl})$ 是一个有序标准正交基。取子列并对 (K_l) 和 (E_l) 重新编号后，不妨设 $(e_{1l},\dots,e_{nl})$ 收敛到标准正交基 $(e_1,\dots,e_n)$。由 (5.11)，

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\leq a_{n,l}\leq 1,\qquad a_{1,l}\longrightarrow 0.$$

由于 E_μ 在包含关系下递减，而 $\Psi_{s,q}$ 在包含关系下递增，

$$L_{s,q,\mu}(K_l)\leq E_\mu(E_l)+\frac{1}{(n+q-1)s}\log\Psi_{s,q}(E_l)+\frac{1}{2}\log n.\tag{5.12}$$

设 $\beta=(q-1)s$。首先，假设 $\beta\notin\mathbb{Z}$，并令 $m=\lceil\beta\rceil$。由引理 5.2，存在与 l 无关的 $t_1>0$ 和 $c_1\in\mathbb{R}$，使得对于所有充分大的 l，

$$\begin{aligned}E_\mu(E_l)\leq&-\frac{s+1}{(n+q-1)s}\log\left(\prod_{k=1}^{m-1}a_{k,l}\right)-\frac{\beta+s+1-m}{(n+q-1)s}\log a_{m,l}\\&-\frac{s}{(n+q-1)s}\log\left(\prod_{k=m+1}^{n}a_{k,l}\right)+t_1\log a_{1,l}+c_1.\end{aligned}$$

另一方面，引理 5.3 给出

$$\begin{aligned}\frac{1}{(n+q-1)s}\log\Psi_{s,q}(E_l)\leq&\frac{s+1}{(n+q-1)s}\log\left(\prod_{k=1}^{m-1}a_{k,l}\right)+\frac{\beta+s+1-m}{(n+q-1)s}\log a_{m,l}\\&+\frac{s}{(n+q-1)s}\log\left(\prod_{k=m+1}^{n}a_{k,l}\right)+\frac{\log c_{s,q,n}}{(n+q-1)s}.\end{aligned}$$

将这两个不等式相加，得到

$$E_\mu(E_l)+\frac{1}{(n+q-1)s}\log\Psi_{s,q}(E_l)\leq t_1\log a_{1,l}+c_1+\frac{\log c_{s,q,n}}{(n+q-1)s}.$$

因此，由于 $a_{1l}\to 0$ 以及（5.12），

$$\liminf_{l\to\infty} L_{s,q,\mu}(K_l)=-\infty.$$

现在假设 $\beta\in\{1,\dots,n-1\}$。根据引理 5.2，取 $m=\beta$，存在 $t_2>0$ 和 $c_2\in\mathbb{R}$，它们与 l 无关，使得对所有充分大的 l，

$$E_\mu(E_l)\le -\frac{s+1}{(n+q-1)s}\log\left(\prod_{k=1}^{m}a_{k,l}\right)-\frac{1}{n+q-1}\log\left(\prod_{k=m+1}^{n}a_{k,l}\right)+t_2\log a_{1,l}+c_2.$$

现在令 $\beta_1=(q-1)s_1$，其中 $s_1>s$ 的选取使得 $m<\beta_1<m+1$。由式 (5.10) 以及将引理 5.3 应用于 $\Psi_{s_1,\,q}(E_l)$，可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{(n+q-1)s}\log\Psi_{s,q}(E_l)\le{}&\frac{s_1+1}{(n+q-1)s_1}\log\left(\prod_{k=1}^{m}a_{k,l}\right)+\frac{\beta_1+s_1-m}{(n+q-1)s_1}\log a_{m+1,l}\\&+\frac{1}{n+q-1}\log\left(\prod_{k=m+2}^{n}a_{k,l}\right)+C_1,\end{aligned}$$

其中 C_1 是与 l 无关的常数。将前两个估计相加，得到

$$\begin{aligned}E_\mu(E_l)+\frac{1}{(n+q-1)s}\log\Psi_{s,q}(E_l)\le{}&\frac{1}{n+q-1}\left(\frac{1}{s_1}-\frac{1}{s}\right)\sum_{k=1}^{m}\log a_{k,l}\\&+\frac{\beta_1-m}{(n+q-1)s_1}\log a_{m+1,l}+t_2\log a_{1,l}+C_3,\end{aligned}$$

其中 C_3 是与 l 无关的常数。由于 $\beta_1>m$ 和 $a_{m+1,\,l}\le 1$，

$$\frac{\beta_1-m}{(n+q-1)s_1}\log a_{m+1,l}\le 0,$$

因此可以舍去这一项。此外，$s_1>s$ 意味着

$$\frac{1}{s_1}-\frac{1}{s}<0.$$

由于

$$\log a_{1,l}\le\log a_{k,l},\qquad k=1,\dots,m,$$

我们有

$$\left(\frac{1}{s_1}-\frac{1}{s}\right)\sum_{k=1}^{m}\log a_{k,l}\le m\left(\frac{1}{s_1}-\frac{1}{s}\right)\log a_{1,l}.$$

因此，

$$E_\mu(E_l)+\frac{1}{(n+q-1)s}\log\Psi_{s,q}(E_l)\le\left[t_2+\left(\frac{1}{s_1}-\frac{1}{s}\right)\frac{m}{n+q-1}\right]\log a_{1,l}+C_3.\tag{5.13}$$

现在我们选择 s_1，使其充分接近 s，从而

$$t_2+\left(\frac{1}{s_1}-\frac{1}{s}\right)\frac{m}{n+q-1}>0.$$

因此，(5.13) 的右端趋于 $-\infty$。(5.12) 于是给出

$$\liminf_{l\to\infty} L_{s,q,\mu}(K_l)=-\infty.$$

最后，假设 $(q-1)s \in \{0, n\}$。在这两种情况下，引理 5.2 都给出与 l 无关的常数 $t_0 > 0$ 和 $c_0 \in \mathbb{R}$，使得对于所有充分大的 l，

$$E_\mu(E_l) \le -\frac{1}{n} \log \left(\prod_{k=1}^{n} a_{k,l} \right) + t_0 \log a_{1,l} + c_0. \tag{5.14}$$

如果 $(q-1)s = 0$，那么 $q = 1$ 和

$$\Psi_{s,1}(E_l) = V(E_l)^s = \omega_n^s \left(\prod_{k=1}^{n} a_{k,l} \right)^s.$$

如果 $(q-1)s = n$，由 (5.7) 可得

$$\begin{aligned} \Psi_{s,q}(E_l) &= c_{q,n}^n \left(\prod_{k=1}^{n} a_{k,l} \right)^s \frac{1}{n\omega_n} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \rho_{E_l}(u)^n \, du \\ &= c_{q,n}^n \left(\prod_{k=1}^{n} a_{k,l} \right)^{s+1}. \end{aligned}$$

由于 $(n+q-1)s = ns$ 当 $(q-1)s = 0$ 且 $(n+q-1)s = n(s+1)$ 当 $(q-1)s = n$ 时，两种情况下均有

$$\frac{1}{(n+q-1)s} \log \Psi_{s,q}(E_l) = \frac{1}{n} \log \left(\prod_{k=1}^{n} a_{k,l} \right) + C, \tag{5.15}$$

其中 C 是一个与 l 无关的常数。将 (5.14) 和 (5.15) 与 (5.12) 结合，可得

$$L_{s,q,\mu}(K_l) \le t_0 \log a_{1,l} + C + c_0 + \frac{1}{2} \log n \longrightarrow -\infty \qquad \text{as } l \to \infty.$$

证明至此完成。 □

定理 5.5. 设 $q \ge 1$ 和 $s > 0$ 满足 $(q-1)s \in [0, n]$。若 μ 是满足 (5.1) 的非零偶有限博雷尔测度，则存在 $K_0 \in \mathcal{K}_e^n$ 使得

$$L_{s,q,\mu}(K_0) = \sup\{L_{s,q,\mu}(K) : K \in \mathcal{K}_e^n\}.$$

证明. 设 (K_l) 是 $L_{s,q,\mu}$ 的极大化序列。由于 $E_\mu(B^n) = 0$，序列 $(L_{s,q,\mu}(K_l))$ 有下界。由 $L_{s,q,\mu}$ 的零次齐次性，我们可以将 (K_l) 归一化，使得 $R_{K_l} = 1$。我们声称 r_{K_l} 有一个正的下界。否则，存在一个子序列，仍记为 (K_l)，使得 $r_{K_l} \to 0$。于是引理 5.4 将推出

$$\liminf_{l \to \infty} L_{s,q,\mu}(K_l) = -\infty,$$

这与序列 $(L_{s,q,\mu}(K_l))$ 有下界这一事实矛盾。根据布拉施克选择定理，进一步的一个子序列收敛到一个体 $K_0 \in \mathcal{K}_e^n$。$L_{s,q,\mu}$ 的豪斯多夫连续性表明

$$L_{s,q,\mu}(K_0) = \sup\{L_{s,q,\mu}(K) : K \in \mathcal{K}_e^n\}.$$

证明至此完成。 □

定理 *1.3* 的证明。根据定理 5.5，令 $K_0 \in \mathcal{K}_e^n$ 为 $L_{s,\,q,\,\mu}$ 的极大化者。对于偶函数 $g \in C(\mathbb{S}^{n-1})$，定义

$$h_t = h_{K_0} e^{tg}, \qquad K_t = [h_t].$$

当 $|t|$ 充分小时， h_t 为正且为偶函数，并且 $K_t \in \mathcal{K}_e^n$。令

$$\varphi(t) = -\frac{1}{|\mu|}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \log h_t \, d\mu + \frac{1}{(n+q-1)s}\log \Psi_{s,q}(K_t).$$

由于 $h_{K_t} \le h_t$,

$$\varphi(t) \le L_{s,q,\mu}(K_t) \le L_{s,q,\mu}(K_0) = \varphi(0).$$

因此 $\varphi'(0) = 0$。根据定理 3.8，令 $p = 0$，可得

$$-\frac{1}{|\mu|}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} g(v)\, d\mu(v) + \frac{1}{(n+q-1)\Psi_{s,q}(K_0)}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} g(v) h_{K_0}(v)\, dF_{s,q}(K_0, v) = 0.$$

此恒等式对每个偶连续 g 都成立。 μ 和测度 $h_{K_0}F_{s,\,q}(K_0,\ \cdot)$ 均为偶测度，后者由命题 3.10 得出。因此

$$\frac{|\mu|}{(n+q-1)\Psi_{s,q}(K_0)} h_{K_0}(v)\, dF_{s,q}(K_0, v) = d\mu(v).$$

选择 $\lambda > 0$ ，使得

$$\lambda^{(n+q-1)s} = \frac{|\mu|}{(n+q-1)\Psi_{s,q}(K_0)}.$$

根据命题 3.9， $K = \lambda K_0$ 满足

$$d\mu(v) = h_K(v)\, dF_{s,q}(K, v).$$

这就证明了该定理。 □

6. The asymptotic behavior of (s,q)-chord measures

本节研究当 $q \to 0^+$ 时，(s,q)-弦测度的渐近行为。我们首先回顾混合体积和混合面积测度。若 $K_1, \dots, K_m$ 是紧凸集，且 $\lambda_1, \dots, \lambda_m \ge 0$，则

$$V(\lambda_1 K_1 + \cdots + \lambda_m K_m) = \sum_{i_1,\dots,i_n=1}^{m} \lambda_{i_1}\cdots\lambda_{i_n} V(K_{i_1}, \dots, K_{i_n}),$$

其中 $V(K_{i_1}, \dots, K_{i_n})$ 是混合体积，它非负、对称，并且对每个变量都是多线性的。混合体积有如下表示:

$$V(K_1, \dots, K_n) = \frac{1}{n}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} h_{K_1}(v)\, dS(K_2, \dots, K_n; v), \tag{6.1}$$

其中 $S(K_2, \dots, K_n; \cdot)$ 是混合面积测度。记

$$S_{n-2}(K, L; \cdot) = S(\underbrace{K, \dots, K}_{n-2 \text{ times}}, L; \cdot),$$

且 $n-2$ 阶面积测度 $S_{n-2}(K, \cdot)$ 定义为

$$S_{n-2}(K, \cdot) = S_{n-2}(K, B^n; \cdot).$$

根据多重线性，混合体积和混合面积测度可扩展到支撑函数的线性张成。因此，当 $f_1, \dots, f_n$ 是支撑函数之差时，我们可以定义 $V(f_1, \dots, f_n)$ 和 $S(f_1, \dots, f_{n-1}; \cdot)$；见 [42, 第5节2]。为后文使用，我们还回顾混合

判别式。设 $A_1,\dots,A_m$ 为对称 $d\times d$ 矩阵，且 $\lambda_1,\dots,\lambda_m\geq 0$。混合判别式 D 定义为

$$\det(\lambda_1 A_1+\cdots+\lambda_m A_m)=\sum_{i_1,\dots,i_d=1}^{m}\lambda_{i_1}\cdots\lambda_{i_d}\,\mathrm{D}(A_{i_1},\dots,A_{i_d}). \tag{6.2}$$

对于 $f\in C^2(\mathbb{S}^{n-1})$，令

$$\overline{f}(x)=|x|\,f\left(\frac{x}{|x|}\right),\qquad x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}.$$

对于 $v\in\mathbb{S}^{n-1}$，$D^{\overline{2}}f(v)|_{v^\perp}$ 表示欧几里得海森矩阵在 $v^\perp$ 上的限制。若 K_2、……、K_n具有 C^2 边界且具有正高斯曲率，则

$$dS(K_2,\dots,K_n;v)=\mathrm{D}\big(D^2\overline{h_{K_2}}(v)|_{v^\perp},\dots,D^2\overline{h_{K_n}}(v)|_{v^\perp}\big)\,dv; \tag{6.3}$$

参见 [42]。

在本节中，固定 $s\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$。我们引入关于原点对称的带状体 $\mathbb{P}_sK$，其定义为

$$h_{\mathbb{P}_sK}(v)=\int_{\mathbb{S}^{n-1}}|v\cdot u|h_{\Pi K}(u)^{s-1}\,du,\qquad v\in\mathbb{S}^{n-1}. \tag{6.4}$$

定义 6.1。设 $K\in\mathcal{K}^n$。K 的 s-面积测度定义为

$$S^s_{n-2}(K,\omega)=\frac{n-1}{2n\omega_n}S_{n-2}(K,\mathbb{P}_sK;\omega)$$

对于每个博雷尔集 $\omega\subset\mathbb{S}^{n-1}$。

当 $s=1$、$\mathbb{P}_1K=2\omega_{n-1}B^n$ 时，从而

$$S^1_{n-2}(K,\cdot)=\frac{(n-1)\omega_{n-1}}{n\omega_n}S_{n-2}(K,\cdot).$$

Xi–Zhao [44] 引入了仿射面积测度，在我们的记号下，其定义为

$$S^{(a)}_{n-2}(K,\cdot)=\frac{n-1}{4n}S_{n-2}(K,\mathbb{P}_{-n}K;\cdot).$$

因此，当 $s=-n$ 时，

$$S^{-n}_{n-2}(K,\cdot)=\frac{2}{\omega_n}S^{(a)}_{n-2}(K,\cdot).$$

因此，s-面积测度也可以在相差一个乘法常数的意义下恢复仿射面积测度。我们的主要结果如下。

定理 6.2。设 $K\in\mathcal{K}^n$ 具有 C^2 边界，并处处具有正高斯曲率。则对于每个博雷尔集 $\omega\subset\mathbb{S}^{n-1}$，

$$\lim_{q\to 0^+}F_{s,q}(K,\omega)=S^s_{n-2}(K,\omega).$$

在适当的正则性假设下，对于 $z\in\partial K$，令 $\kappa_K(z)$ 表示 ∂K 在 z 处的高斯曲率。若 u 是 ∂K 在 z 处的单位切向量，令 $\kappa_K(z,\ u)$ 表示沿 u 方向的法曲率。

推论 6.3 (推论 4.2, [44])。设 $K\in\mathcal{K}^n$ 具有 C^2 边界，且处处具有正高斯曲率。令 $u\in\mathbb{S}^{n-1}$。对于每个博雷尔集 $\omega\subset\mathbb{S}^{n-1}$，

$$S_{n-2}(K,[-u,u];\omega)=\frac{2}{n-1}\int_{\omega\cap u^\perp}\frac{\kappa_K(z(v),u)}{\kappa_K(z(v))}\,d\mathcal{H}^{n-2}(v),$$

其中 $z(v)\in\partial K$ 是外单位法向量为 v的唯一点。

Let

$$\mathcal{I}=\{(u,v)\in\mathbb{S}^{n-1}\times\mathbb{S}^{n-1}:u\cdot v=0\}.$$

对于 $\mathcal{I}$ 上的每个可积函数 H，我们有

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\int_{\mathbb{S}^{n-1}\cap u^{\perp}}H(u,v)\,d\mathcal{H}^{n-2}(v)\,du=\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\int_{\mathbb{S}^{n-1}\cap v^{\perp}}H(u,v)\,d\mathcal{H}^{n-2}(u)\,dv,\tag{6.5}$$

参见 [43, 定理 7.1.1。]

定理 6.4。 假设 $K\in\mathcal{K}^n$ 具有 C^2 边界且处处具有正高斯曲率。那么，对于每个博雷尔集 $\omega\subset\mathbb{S}^{n-1}$,

$$S^s_{n-2}(K,\omega)=\frac{1}{n\omega_n}\int_{\nu_K^{-1}(\omega)}\int_{\mathbb{S}^{n-1}\cap\nu_K(z)^{\perp}}h_{\Pi K}(u)^{s-1}\kappa_K(z,u)\,d\mathcal{H}^{n-2}(u)\,d\mathcal{H}^{n-1}(z).$$

证明。 将 $K[n-2]$写作 K 的 $n-2$ 个副本，根据定义 6.1、(6.1)、(6.4) 以及混合体积的对称性，对于每个凸体 L,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}h_L(v)\,dS^s_{n-2}(K,v)&=\frac{n-1}{2\omega_n}V(L,K[n-2],\mathbb{P}_sK)\\&=\frac{n-1}{2\omega_n}V(\mathbb{P}_sK,K[n-2],L)\\&=\frac{n-1}{2n\omega_n}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}h_{\mathbb{P}_sK}(v)\,dS_{n-2}(K,L;v)\\&=\frac{n-1}{2n\omega_n}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}h_{\Pi K}(u)^{s-1}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}|v\cdot u|\,dS_{n-2}(K,L;v)\,du\\&=\frac{n-1}{2\omega_n}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}h_{\Pi K}(u)^{s-1}V([-u,u],K[n-2],L)\,du\\&=\frac{n-1}{2\omega_n}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}h_{\Pi K}(u)^{s-1}V(L,K[n-2],[-u,u])\,du\\&=\frac{n-1}{2n\omega_n}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}h_{\Pi K}(u)^{s-1}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}h_L(v)\,dS_{n-2}(K,[-u,u];v)\,du.\end{aligned}$$

由于支撑函数的线性张成在 $C(\mathbb{S}^{n-1})$ 中稠密（参见 [42]），前述恒等式可推广至每个 $\varphi\in C(\mathbb{S}^{n-1})$,

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\varphi(v)\,dS^s_{n-2}(K,v)=\frac{n-1}{2n\omega_n}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}h_{\Pi K}(u)^{s-1}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\varphi(v)\,dS_{n-2}(K,[-u,u];v)\,du.$$

因此，对于每个博雷尔集 $\omega\subset\mathbb{S}^{n-1}$,

$$S^s_{n-2}(K,\omega)=\frac{n-1}{2n\omega_n}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}S_{n-2}(K,[-u,u];\omega)\,h_{\Pi K}(u)^{s-1}\,du.$$

利用推论 6.3 和 (6.5),

$$\begin{aligned}S^s_{n-2}(K,\omega)&=\frac{1}{n\omega_n}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\int_{\mathbb{S}^{n-1}\cap u^{\perp}}\mathbf{1}_\omega(v)\frac{\kappa_K(z(v),u)}{\kappa_K(z(v))}\,d\mathcal{H}^{n-2}(v)h_{\Pi K}(u)^{s-1}\,du\\&=\frac{1}{n\omega_n}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\mathbf{1}_\omega(v)\frac{1}{\kappa_K(z(v))}\int_{\mathbb{S}^{n-1}\cap v^{\perp}}\kappa_K(z(v),u)h_{\Pi K}(u)^{s-1}\,d\mathcal{H}^{n-2}(u)\,dv.\end{aligned}$$

最后，利用变量替换 $v=\nu_K(z)$，我们完成了证明。 □

在适当的正则性假设下，我们有如下变分公式$\Psi_{s,\ 0}$。

定理 6.5. 假设 $K \in \mathcal{K}^n$ 具有 C^2 边界，且处处具有正高斯曲率。设 $g \in C^2(\mathbb{S}^{n-1})$、 $h_t = h_K + tg$ 和 $K_t = [h_t]$。那么，

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \Psi_{s,0}(K_t) = s \int_{\mathbb{S}^{n-1}} g(v)\, dS^s_{n-2}(K, v).$$

证明. 由于 K 具有 C^2 边界和正高斯曲率，当 $|t|$充分小时， h_t 是K_t 的支撑函数。由柯西投影公式可得

$$\mathrm{vol}_{n-1}(K_t|u^\perp) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} |u\cdot v| \det\big(D^2\overline{h_t}(v)|_{v^\perp}\big)\, dv; \tag{6.6}$$

参见 [42]。对于矩阵或凸体 A 以及整数 $r \geq 0$，我们用 $A[r]$ 表示 A的 r 个副本。对 (6.6) 求导，并使用 (6.2) 和 (6.1)，

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathrm{vol}_{n-1}(K_t|u^\perp) &= \frac{n-1}{2}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} |u\cdot v|\, \mathrm{D}\big(D^2\overline{h_K}(v)|_{v^\perp}[n-2], D^2\overline{g}(v)|_{v^\perp}\big)\, dv\\
&= \frac{n(n-1)}{2} V([-u,u], K[n-2], g)\\
&= \frac{n-1}{2}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} g(v)\, dS_{n-2}(K, [-u,u]; v)\\
&= \int_{\mathbb{S}^{n-1}\cap u^\perp} g(v)\frac{\kappa_K(z(v),u)}{\kappa_K(z(v))}\, d\mathcal{H}^{n-2}(v).
\end{aligned}$$

对$\Psi_{s,\ 0}$ 求导并使用 (6.5)，即可得到

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \Psi_{s,0}(K_t) &= \frac{s}{n\omega_n}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \mathrm{vol}_{n-1}(K|u^\perp)^{s-1}\int_{\mathbb{S}^{n-1}\cap u^\perp} g(v)\frac{\kappa_K(z(v),u)}{\kappa_K(z(v))}\, d\mathcal{H}^{n-2}(v)\, du\\
&= \frac{s}{n\omega_n}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{g(v)}{\kappa_K(z(v))}\int_{\mathbb{S}^{n-1}\cap v^\perp} \mathrm{vol}_{n-1}(K|u^\perp)^{s-1}\kappa_K(z(v),u)\, d\mathcal{H}^{n-2}(u)\, dv\\
&= \frac{s}{n\omega_n}\int_{\partial K} g(\nu_K(z))\int_{\mathbb{S}^{n-1}\cap \nu_K(z)^\perp} h_{\Pi K}(u)^{s-1}\kappa_K(z,u)\, d\mathcal{H}^{n-2}(u)\, d\mathcal{H}^{n-1}(z)\\
&= s\int_{\mathbb{S}^{n-1}} g(v)\, dS^s_{n-2}(K, v),
\end{aligned}$$

其中最后一个等式由定理 6.4 得出。 □

以下渐近引理是证明定理 6.2 的关键步骤。

引理 6.6. 设 $K \in \mathcal{K}^n$ 具有 C^2 边界且处处具有正高斯曲率。那么，对于每个 $z \in \partial K$，

$$\lim_{q\to 0^+} q\int_{\mathbb{S}^{n-1}} I_q(K,u)^{s-1}X_K(z,u)^{q-1}\, du = \int_{\mathbb{S}^{n-1}\cap \nu_K(z)^\perp} h_{\Pi K}(\theta)^{s-1}\kappa_K(z,\theta)\, d\mathcal{H}^{n-2}(\theta).$$

证明。 设 $\epsilon > 0$。由于所涉及的被积函数在平移下保持不变，将 K替换为 $K - z$后，我们可以假设 $z = o$，其中 o 是原点。由于 K 具有 C^2 边界，存在一个标准正交基 $(e_1, \dots, e_n)$，使得 $e_n = -\nu_K(o)$，并且在 o的某个邻域内，边界 ∂K 可以表示为下列函数的图像

$$y_n = f(y') = \frac{1}{2}(\kappa_1 y_1^2 + \cdots + \kappa_{n-1}y_{n-1}^2) + o(|y'|^2), \tag{6.7}$$

其中 $y=(y',y_n)=(y_1,\dots,y_{n-1},y_n)$，而 κ_i 是 K 在 o 处的主曲率。

设 $\lambda>0$ 满足 $\operatorname{diam}(\lambda K)\le 1$。由于 $X_{\lambda K}(\cdot,\cdot)\le 1$，函数 $I_q(\lambda K,\cdot)$ 随着 $q\downarrow 0$ 增大，而其极限为 $I_0(\lambda K,\cdot)=h_{\Pi\lambda K}$。由于 $I_q(\lambda K,\cdot)$ 和 $I_0(\lambda K,\cdot)$ 在单位球面上连续，根据 Dini 定理，$I_q(\lambda K,\cdot)\to I_0(\lambda K,\cdot)$ 一致收敛。由方向弦积分的齐次性可知，当 $q\to 0^+$ 时，$I_q(K,\cdot)\to I_0(K,\cdot)=h_{\Pi K}$ 一致成立。因此，对于充分小的 q，函数 $I_q(K,\cdot)$ 一致地有上界且与 0 保持正距离。由此一致收敛性和一致有界性，我们可以取充分小的 $q>0$，使得

$$\left|I_q(K,u)^{s-1}-h_{\Pi K}(u)^{s-1}\right|<\epsilon,\qquad u\in\mathbb{S}^{n-1}. \tag{6.8}$$

由于，对于 $u\in\mathbb{S}^{n-1}$，

$$X_K(o,u)=\rho_K(u)\quad \text{if } u\cdot e_n>0,$$

and

$$X_K(o,u)=\rho_K(-u)\quad \text{if } u\cdot e_n<0,$$

且 $I_q(K,-u)=I_q(K,u)$，我们有

$$q\int_{\mathbb{S}^{n-1}} I_q(K,u)^{s-1}X_K(o,u)^{q-1}\,du=2q\int_{\{u\in\mathbb{S}^{n-1}:u\cdot e_n>0\}} I_q(K,u)^{s-1}\rho_K(u)^{q-1}\,du. \tag{6.9}$$

在 o 的邻域内，其中 (6.7) 表示 ∂K，我们有

$$\nu_K(y)=\frac{(\nabla f(y'),-1)}{\sqrt{1+|\nabla f(y')|^2}},\qquad d\mathcal{H}^{n-1}(y)=\sqrt{1+|\nabla f(y')|^2}\,dy'.$$

设 $y'=r\theta$，其中 $r>0$ 且 $\theta\in\mathbb{S}^{n-2}$。

由于 $f(r\theta)=O(r^2)$，

$$\frac{(r\theta,f(r\theta))}{\sqrt{r^2+f(r\theta)^2}}=\frac{(\theta,f(r\theta)/r)}{\sqrt{1+f(r\theta)^2/r^2}}\longrightarrow(\theta,0)$$

当 $r\to 0^+$ 时，关于 θ 一致成立。由 $h_{\Pi K}^{s-1}$ 在 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上的连续性一致性，存在 $\delta>0$，使得只要 $r<\delta$，

$$\left|h_{\Pi K}\left(\frac{(r\theta,f(r\theta))}{\sqrt{r^2+f(r\theta)^2}}\right)^{s-1}-h_{\Pi K}(\theta,0)^{s-1}\right|<\epsilon. \tag{6.10}$$

在 o 的邻域中，我们有

$$\rho_K(u)u=y=(y',f(y')). \tag{6.11}$$

此外，

$$\rho_K(u)^n\,du=|y\cdot\nu_K(y)|\,d\mathcal{H}^{n-1}(y),\qquad y'\cdot\nabla f(y')=2f(y')+o(|y'|^2).$$

因此

$$\rho_K(u)^n\,du=\big(f(y')+o(|y'|^2)\big)\,dy'. \tag{6.12}$$

Let

$$D_1=\left\{\frac{(r\theta,f(r\theta))}{|(r\theta,f(r\theta))|}:\theta\in\mathbb{S}^{n-2},\ 0<r<\delta\right\},$$
$$D_2=\{u\in\mathbb{S}^{n-1}:u\cdot e_n>0\}\setminus D_1.$$

其中 $\delta>0$ 足够小，因此所选取的局部图在 $|y'|<\delta$ 上有定义，并包含 $\partial K\cap B(o,\ \delta)$。如果 $0<\rho_K(u)<\delta$，那么对于某个 $0<r<\delta$，$\rho_K(u)u=(r\theta,\ f(r\theta))$，因此 $u\in D_1$。所以，对于每个 $u\in D_2$，都有 $\rho_K(u)\ge\delta$。

我们首先估计 D_1 上的积分。由（6.8）和（6.12）可得,

$$\begin{aligned}
&q\int_{D_1} I_q(K,u)^{s-1}\rho_K(u)^{q-1}\,du\\
&\le q\int_{D_1}\big(h_{\Pi K}(u)^{s-1}+\epsilon\big)\rho_K(u)^{q-1}\,du\\
&= q\int_{\mathbb{S}^{n-2}}\int_0^{\delta}\left(h_{\Pi K}\left(\frac{(r\theta,f(r\theta))}{|(r\theta,f(r\theta))|}\right)^{s-1}+\epsilon\right)\\
&\qquad\qquad\times|(r\theta,f(r\theta))|^{q-1-n}\big(f(r\theta)+o(r^2)\big)r^{n-2}\,dr\,d\mathcal{H}^{n-2}(\theta).
\end{aligned}$$

由于

$$\kappa_K\left(o,(\theta,0)\right)=\kappa_1((\theta,0)\cdot e_1)^2+\cdots+\kappa_{n-1}((\theta,0)\cdot e_{n-1})^2,$$

我们有

$$f(r\theta)=\frac{1}{2}r^2\kappa_K\left(o,(\theta,0)\right)+o(r^2).$$

因此

$$\begin{aligned}
&q\int_{D_1} I_q(K,u)^{s-1}\rho_K(u)^{q-1}\,du\\
&\le q\int_{\mathbb{S}^{n-2}}\int_0^{\delta}\left(h_{\Pi K}\left(\frac{(r\theta,f(r\theta))}{|(r\theta,f(r\theta))|}\right)^{s-1}+\epsilon\right)\\
&\qquad\times\left(1+\frac{r^2\kappa_K(o,(\theta,0))^2}{4}+o(r^2)\right)^{\frac{q-1-n}{2}}\left(\frac{\kappa_K(o,(\theta,0))}{2}+o(1)\right)r^{q-1}\,dr\,d\mathcal{H}^{n-2}(\theta).
\end{aligned}$$

令 $\epsilon\in(0,\ 1)$ 充分小。由于

$$1+\frac{r^2\kappa_K(o,(\theta,0))^2}{4}+o(r^2)=1+\frac{f(r\theta)^2}{r^2}\ge 1,$$

我们可以选取 $\delta>0$ 使得

$$1-\epsilon\le\left(1+\frac{r^2\kappa_K(o,(\theta,0))^2}{4}+o(r^2)\right)^{\frac{q-1-n}{2}}\le 1 \tag{6.13}$$

对于 $0<r<\delta$ 和 $0<q\le 1$，关于 θ 一致成立。此外,

$$\frac{\kappa_K(o,(\theta,0))}{2}-\epsilon\le\frac{\kappa_K(o,(\theta,0))}{2}+o(1)\le\frac{\kappa_K(o,(\theta,0))}{2}+\epsilon \tag{6.14}$$

对于 $0<r<\delta$，关于 θ 一致成立。

利用 (6.13) 和 (6.14) 的上界以及 (6.10)，我们得到，当 $q>0$充分小时,

$$\begin{aligned}
&q\int_{D_1} I_q(K,u)^{s-1}\rho_K(u)^{q-1}\,du\\
&\le q\int_{\mathbb{S}^{n-2}}\int_0^{\delta}\big(h_{\Pi K}(\theta,0)^{s-1}+2\epsilon\big)\left(\frac{\kappa_K(o,(\theta,0))}{2}+\epsilon\right)r^{q-1}\,dr\,d\mathcal{H}^{n-2}(\theta)\\
&=\delta^q\int_{\mathbb{S}^{n-2}}\big(h_{\Pi K}(\theta,0)^{s-1}+2\epsilon\big)\left(\frac{\kappa_K(o,(\theta,0))}{2}+\epsilon\right)d\mathcal{H}^{n-2}(\theta).
\end{aligned}$$

由于当 $u \in D_2$ 且 $K,\cdot$ 时， $\rho_K(u) \geq \delta > 0$ 对充分小的 q 一致有界，因此我们有

$$\lim_{q\to 0^+} q \int_{D_2} I_q(K,u)^{s-1}\rho_K(u)^{q-1}\,du = 0.$$

令 $q \to 0^+$，然后令 $\epsilon \to 0^+$，可得

$$\limsup_{q\to 0^+} q \int_{\{u\in\mathbb{S}^{n-1}:u\cdot e_n>0\}} I_q(K,u)^{s-1}\rho_K(u)^{q-1}\,du \leq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{S}^{n-2}} h_{\Pi K}(\theta,0)^{s-1}\kappa_K(o,(\theta,0))\,d\mathcal{H}^{n-2}(\theta). \tag{6.15}$$

类似地，利用 (6.8)、(6.10)、(6.13) 和 (6.14) 中相应的下界，可得

$$\liminf_{q\to 0^+} q \int_{\{u\in\mathbb{S}^{n-1}:u\cdot e_n>0\}} I_q(K,u)^{s-1}\rho_K(u)^{q-1}\,du \geq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{S}^{n-2}} h_{\Pi K}(\theta,0)^{s-1}\kappa_K(o,(\theta,0))\,d\mathcal{H}^{n-2}(\theta). \tag{6.16}$$

将 (6.15) 和 (6.16) 与 (6.9) 结合，可得

$$\lim_{q\to 0^+} q \int_{\mathbb{S}^{n-1}} I_q(K,u)^{s-1}X_K(o,u)^{q-1}\,du = \int_{\mathbb{S}^{n-2}} h_{\Pi K}(\theta,0)^{s-1}\kappa_K(o,(\theta,0))\,d\mathcal{H}^{n-2}(\theta).$$

证明至此完成。 □

回顾广义控制收敛定理：若 $f_j \to f$ 和 $\phi_j \to \phi$ 几乎处处成立， $|f_j| \leq \phi_j$，函数 ϕ_j 和 ϕ 可积，且 $\int \phi_j \to \int \phi$，则 f 可积，并且 $\int f_j \to \int f$。

定理 *6.2* 的证明。由于 K 的内部非空， $I_q(K,\cdot)$ 和 $h_{\Pi K}(\cdot)$ 均有正的上下界。结合 $I_q(K,\cdot)$ 当 $q \to 0^+$时一致地 $\to h_{\Pi K}(\cdot)$ 这一事实可知，存在 $C > 0$ ，使得对每个 $z \in \partial K$,

$$\begin{aligned} q\int_{\mathbb{S}^{n-1}} I_q(K,u)^{s-1}X_K(z,u)^{q-1}\,du &\leq Cq\int_{\mathbb{S}^{n-1}} X_K(z,u)^{q-1}\,du \\ &= 2n\omega_n Cq\,\widetilde{V}_{q-1}(K,z). \end{aligned}$$

由 [36, 推论 4.14] 可知

$$\lim_{q\to 0^+}\int_{\nu_K^{-1}(\omega)} q\widetilde{V}_{q-1}(K,z)\,d\mathcal{H}^{n-1}(z) = \int_{\nu_K^{-1}(\omega)}\lim_{q\to 0^+} q\widetilde{V}_{q-1}(K,z)\,d\mathcal{H}^{n-1}(z).$$

因此，广义控制收敛定理、引理 6.6 和定理 6.4 推出

$$\begin{aligned} \lim_{q\to 0^+} F_{s,q}(K,\omega) &= \frac{1}{n\omega_n}\int_{\nu_K^{-1}(\omega)}\int_{\mathbb{S}^{n-1}\cap\nu_K(z)^\perp} h_{\Pi K}(u)^{s-1}\kappa_K(z,u)\,d\mathcal{H}^{n-2}(u)\,d\mathcal{H}^{n-1}(z) \\ &= S^s_{n-2}(K,\omega). \end{aligned}$$

证明至此完成。 □

AI DISCLOSURE

本文撰写期间，人工智能工具仅用于检查证明和语法。所有证明均由作者撰写，作者对论文内容承担全部责任。

References

.[1] A. D. Aleksandrov，关于凸体的表面积函数（关于《论凸体混合体积理论》一文的注记），Rec. Math. N.S. [Mat. Sbornik] 6(48) (1939), 167–174.[2] C. Berg，凸体与球势，Mat.-Fys. Medd. Danske Vid. Selsk. 37 (1969), no. 6, 64 pp.[3] G. Bianchi, K. J. B¨or¨oczky, and A. Colesanti， L_p 闵可夫斯基问题中 $p < 1$的光滑性，J. Geom. Anal. 30 (2020), no. 1, 680–705.[4] G. Bianchi, K. J. B¨or¨oczky, A. Colesanti, and D. Yang， L_p $-n < p < 1$的-Minkowski问题，Adv. Math. 341 (2019), 493–535.[5] K. J. B¨or¨oczky, P. Heged˝us, and G. Zhu，关于离散对数闵可夫斯基问题，Int. Math. Res. Not. IMRN 2016 (2016), no. 6, 1807–1838.[6] K. J. B¨or¨oczky, E. Lutwak, D. Yang, and G. Zhang，对数 Brunn–Minkowski不等式，Adv. Math. 231 (2012), no. 3–4, 1974–1997.[7] K. J. B¨or¨oczky, E. Lutwak, D. Yang, and G. Zhang，对数闵可夫斯基问题，J. Amer. Math. Soc. 26 (2013), no. 3, 831–852.[8] K. J. B¨or¨oczky, E. Lutwak, D. Yang, G. Zhang, and Y. Zhao，对称凸体的对偶闵可夫斯基问题，Adv. Math. 356 (2019), Paper No. 106805, 30 pp.[9] K. J. B¨or¨oczky and H. T. Trinh，平面 L_p $0 < p < 1$的-Minkowski问题，Adv. in Appl. Math. 87 (2017), 58–81.[10] L. A. Caffarelli，完全非线性方程解的内部先验估计，Ann. of Math. (2) 130 (1989), no. 1, 189–213.[11] L. A. Caffarelli，Monge–Amp `ere方程的黏性解的局部化性质及其严格凸性，Ann. of Math. (2) 131 (1990), no. 1, 129–134.[12] L. A. Caffarelli，Monge–Amp `ere方程解的内部 $W^{2,p}$ 估计，Ann. of Math. (2) 131 (1990), no. 1, 135–150.[13] W. Chen，具有不一定为正的数据的 L_p 闵可夫斯基问题，Adv. Math. 201 (2006), no. 1, 77–89.[14] S. Chen, Y. Feng, and W. Liu， $\mathbb{R}^3$中对数闵可夫斯基问题解的唯一性，Adv. Math. 411 (2022), part A, Paper No. 108782, 18 pp.[15] S. Chen, Q.-R. Li, and G. Zhu，关于 L_p Monge–Amp `ere方程，J. Differential Equations 263 (2017), no. 8, 4997–5011.[16] S. Chen, Q.-R. Li, and G. Zhu，非对称测度的对数闵可夫斯基问题，Trans. Amer. Math. Soc. 371 (2019), no. 4, 2623–2641.[17] S. Y. Cheng and S. T. Yau，关于 n维闵可夫斯基问题解的正则性，Comm. Pure Appl. Math. 29 (1976), no. 5, 495–516.[18] K.-S. Chou and X.-J. Wang， L_p-Minkowski问题与中心仿射几何中的闵可夫斯基问题，Adv. Math. 205 (2006), no. 1, 33–83.[19] S. Dubuc，凸性判据与积分不等式，Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 27 (1977), no. 1, 135–165.[20] W. Fenchel and B. Jessen，集合函数与凸体，Danske Vid. Selskab Mat.-Fys. Medd. 16 (1938), no. 3, 1–31.[21] W. J. Firey，一般凸体的克里斯托费尔问题，Mathematika 15 (1968), no. 1, 7–21.[22] R. J. Gardner and G. Zhang，仿射不等式与径向平均体，Amer. J. Math. 120 (1998), no. 3, 505–528.[23] P. Goodey, V. Yaskin, and M. Yaskina，克里斯托费尔问题的傅里叶变换方法，Trans. A mer. Math. Soc. 363 (2011), no. 12, 6351–6384.[24] E. Grinberg and G. Zhang，卷积、变换与凸体，Proc. London Math. Soc. (3) 78 (1999), no. 1, 77–115.[25] B. Guan and P. Guan，具有指定曲率的凸超曲面，Ann. of Math. (2) 156 (2002), no. 2, 655–673.[26] P. Guan, J. Li, and Y. Y. Li，具有指定曲率测度的超曲面，Duke Math. J. 161 (2012), no. 10, 1927–1942.[27] P. Guan andX.-N. Ma，Christoffel–Minkowski问题 I：Hessian方程解的凸性，Invent. Math. 151 (2003), no. 3, 553–577.

[28] P. Guan、X.-N. Ma 和 F. Zhou，《Christoffel–Minkowski问题》III：可容许解的存在性与凸性，《Comm. Pure Appl. Math.》59（2006），第9期，1352–1376。[29] Y. Huang、E. Lutwak、D. Yang 和 G. Zhang，对偶Brunn–Minkowski理论中的几何测度及其相关闵可夫斯基问题，《Acta Math.》216（2016），第2期，325–388。[30] D. Hug、E. Lutwak、D. Yang 和 G. Zhang，关于多胞体的 L_p 闵可夫斯基问题，《Discrete Comput. Geom.》33（2005），第4期，699–715。[31] D. Jerison，静电容量的一个闵可夫斯基问题，《Acta Math.》176（1996），第1期，1–47。[32] H. Jian、J. Lu 和 X.-J. Wang，L_p-闵可夫斯基问题解的不唯一性，《Adv. Math.》281（2015），845–856。[33] E. Lutwak，Brunn–Minkowski–Firey理论 I：混合体积与闵可夫斯基问题，《J. Differential Geom.》38（1993），第1期，131–150。[34] E. Lutwak 和 V. Oliker，关于闵可夫斯基问题推广形式的解的正则性，《J. Differential Geom.》41（1995），第1期，227–246。[35] E. Lutwak、D. Yang 和 G. Zhang，关于 L_p-闵可夫斯基问题，《Trans. Amer. Math. Soc.》356（2004），第11期，4359–4370。[36] E. Lutwak、D. Xi、D. Yang 和 G. Zhang，积分几何中的弦测度及其闵可夫斯基问题，《Comm. Pure Appl. Math.》77（2024），第7期，3277–3330。[37] H. Minkowski，关于凸多面体的一般定理，《Nachr. Ges. Wiss. G¨ottingen》（1897），198–219。[38] H. Minkowski，体积与表面积，《Math. Ann.》57（1903），第4期，447–495。[39] L. Nirenberg，大范围微分几何中的 Weyl 问题与闵可夫斯基问题，《Comm. Pure Appl. Math.》6（1953），第3期，337–394。[40] D. Ren，《积分几何专题》，World Scientific，新加坡，1994。[41] L. A. Santal´o，《积分几何与几何概率》，第2版，Cambridge Mathematical Library，Cambridge University Press，剑桥，2004。[42] R. Schneider，《凸体：布伦–闵可夫斯基理论》，第2版扩充版，Encyclopedia of Mathematics and its Applications，第151卷，Cambridge University Press，剑桥，2014。[43] R. Schneider 和 W. Weil，《随机几何与积分几何》，Probability and Its Applications，Springer，柏林，2008。[44] D. Xi 和 Y. Zhao，分数仿射面积测度，《J. Eur. Math. Soc.》，即将出版。[45] G. Zhu，多胞体的对数闵可夫斯基问题，《Adv. Math.》262（2014），909–931。[46] G. Zhu，关于 L_p 闵可夫斯基问题的多胞体情形（$p < 0$），《Indiana Univ. Math. J.》66（2017），第4期，1333–1350。

Department of Mathematics, Shanghai University, Shanghai 200444, China电子邮件地址：3203927393@qq.com