Hochschild 运算及 Morita 型稳定等价的其他不变量

SHENGYONG PAN

摘要。我们研究交换环 R 上由双模张量恒等式定义的稳定等价。对于 R-分裂正合结构，这些恒等式保持正次数 Hochschild 同调和带有杯积、Gerstenhaber 括号以及在素特征下的受限幂的正次数 Hochschild 上同调不变。三角比较还将相对奇异 Hochschild 上链复形识别为 B_∞-代数。对于代数闭域上的有限维 Frobenius 代数的约化对，且 Nakayama 自同构可对角化时，我们构造相容的 Frobenius 泛函，并比较所有次数上的 Tate–Hochschild BV 算子。

对于 R 上的平坦代数，我们给出一个比较带标记结合变形的 Hochschild 上同调判据。该判据适用于双伴随 Morita 型对，并且通过约化适用于任意域上的有限维代数之间的所有 Morita 型稳定等价。我们通过使用公共三角变形或提升双侧倾斜复形，比较特征零下的 Bezrukavnikov–Ginzburg 映射。我们还比较局部 Artin 环上的带标记模变形及其增广泛环。

进一步的应用涉及完美域上的连通外自同构群概形、普通代数 K-理论中商映射的核，以及增强相对奇点范畴的非连通 K-理论。我们在亨泽尔诺特局部环上构造了双伴随代表元，并为几乎 ν-稳定的导出等价构造了相对稳定张量函子。我们还回答了 Abe 和 Hoshino 提出的一个问题，即在固定余维下 Gorenstein 条件的保持性问题。

arXiv:2611.32253v2 [math.RT] 25 Nov 2026

目录

1. 引言 1致谢 42. 相对稳定范畴 43. 无伴随的 Hochschild 同调与上同调 54. 相对 Gerstenhaber 括号 115. Frobenius 代数的 Tate–Hochschild BV 算子 206. 代数与模的变形 237. 连通外自同构群 338. 代数 K-理论与相对奇点范畴 379. 伴随正规化 4510. 自内射维数与内射对象的保持性 5311. 个体 Gorenstein 维数 5612. 普通稳定张量等价的刚性 6213. 相对 Frobenius 范畴与导出等价 6514. 几乎 ν-稳定导出等价在 Artin基环上 69附录 A. Abe–Hoshino 代数与基环上的投射性 75附录 B. 可分张量函子与 Gorenstein 投射模 77参考文献 78

1. 引言

设 R 为交换环， A 和 B 为 R-代数。在域上定义 Morita 型稳定等价的一对双模，在稳定

2020 数学主题分类。 16E10,16E40, 16G10,18G25.关键词与短语。 Morita 型稳定等价，Noether 代数，Hensel 环，几乎 ν-稳定导出等价，相对稳定范畴，Gorenstein 维数，Hochschild 上同调，外自同构群，代数 K 理论。

模范畴上给出互为逆的张量函子。在 R 上，同样的恒等态射给出相对于 R-分裂序列的正合结构的相对稳定范畴之间的等价。本文利用这些恒等态射比较 Hochschild 运算、变形函子、外自同构群、代数 K-理论以及同调维数。

约定。 除非另有说明， R 是交换诺特环。每个 R-代数 A都是有限生成的 R-模，且其结构映射的像包含于 $Z(A)$中。所有双模都是 R-中心的，也就是说，它们的两个 R-作用相同。

我们用 A-Mod表示所有左 A-模构成的范畴，用 A-mod表示其由有限生成模构成的全子范畴，并用 A-proj表示有限生成投射左 A-模构成的范畴。令 $\mathscr{D}(A)$为 $= D(A\text{-Mod})$，并用 $K^b(A\text{-proj})$表示 A-proj的有界同伦范畴。普通内射分解取自 A-Mod。

我们将右 A-模视为左 A^{op}-模。对于一个 A-B-双模 X，记号 X^{op}表示作用为 $b^{\mathrm{op}}xa^{\mathrm{op}} = axb$的 B^{op}-A^{op}-双模。

设 A 和 B 为 R-代数。我们使用以下 Morita 型双模恒等式。

$$\begin{gathered} {}_AM_B \text{ 和 } {}_BN_A \text{ 在每一侧都是有限生成投射，} \\ M \otimes_B N \simeq A \oplus P, \qquad N \otimes_A M \simeq B \oplus Q, \\ P \in (A \otimes_R A^{\mathrm{op}})\text{-proj}, \qquad Q \in (B \otimes_R B^{\mathrm{op}})\text{-proj}. \end{gathered} \tag{MT}$$

我们将 (MT) 称为直和项恒等式。我们还考虑稳定化恒等式，它断言这两个张量积在相对稳定双模范畴中同构于正则双模。

对于每个左 A-模 X，模 $P \otimes_A X$ 都是 $A \otimes_R X$的有限个副本的有限直和的直和项。因此，$P \otimes_A X$ 是相对投射的， Q也同样如此。由此可知，这两个张量函子在相对稳定范畴 [58, 40]之间诱导出互逆等价。若 R 是一个域，这些就是通常的稳定模范畴。若 A 在 R上是投射的，则对于在 R上投射的 A-模，相对投射性与通常的投射性一致。

1.1. **Hochschild 不变量**。 对于域上的有限维代数，Liu 和 Xi 证明了正次数 Hochschild 同调的不变性 [42, 定理 4。4], 而 Pan 和 Zhou 证明了稳定 Hochschild 上同调环的不变性 [48, 定理 1。2]。在第 3 节中，我们给出交换基环上的相应普通比较和相对比较。在环同构的证明中，我们证明了张量函子像中的正次数类所对应的非对角分量均为零。命题 3.10利用这一消失结果修正了 [48,定理 1。2]中的压缩论证。

在定理 4.5 中，我们证明，在稳定化恒等式下， A 和 B 的正次数相对 Hochschild 上同调是同构的，并且其杯积、Gerstenhaber 括号以及素特征下的受限幂也相应同构。证明利用了这样一个事实：映射到 $\mathrm{Ext}^n_{A\otimes_R B^{\mathrm{op}},\mathrm{rel}}(M, M)$ 中的两个特征映射具有相同的像。来自带有非对角双模 M 的三角代数的限制保持 brace 运算，并诱导出所需的比较映射。

Briggs 和 Rubio y Degrassi 证明了自内射代数的受限李代数结构不变性，以及 Iwanaga–Gorenstein 代数在充分高次数下的该不变性 [13]。Wang 证明了奇异 Hochschild 上同调中相应的 Gerstenhaber 不变性 [68, 定理 6。2]。我们的比较在域上适用于每个正的普通次数，并在交换环上适用于每个正的相对次数。小节 4.7中的一个秩七例子表明，投射中心可能不是 Gerstenhaber 李理想。

对于域上的代数，Chen、Li 和 Wang 证明了带层级的 Morita 型奇异等价保持 B_∞ 奇异 Hochschild 复形的同伦类型 [16, 定理9.6和命题9。7]。在定理4.8中，我们利用 R-分裂正合结构证明了交换环上的相对版本。推论5.4 表明，在此处考虑的 Frobenius 情形下，奇异比较的上同调映射与 Tate 转移一致。

1.2. **BV 算子与变形**。 König、Liu 和 Zhou 在 [34, 定理 10。7]的假设下比较了对称代数的 BV 结构。对于 Nakayama 自同构可对角化的 Frobenius 代数，Itagaki 、 Sanada 和 Usui 在 Tate–Hochschild 上同调 [29]中构造了 BV 结构。在定理5.1中，我们证明：如果 Frobenius 泛函是

相容的，在第5节的假设下，推论 5.3表明，可以指定一个泛函，并通过将初始泛函乘以一个中心单位来选择另一个泛函。这保持了 Nakayama 自同构不变。负次数中的证明使用了扭曲 Hochschild 链映射。在次数 -1 处，我们还在完备复形中确定了范数映射的两个核。

在定理 6.1中，我们通过取三角代数的两个角，比较交换环上平坦代数的带标记结合变形。判据使用了一、二、三次的平方零系数 Hochschild 上同调。双伴随 Morita 型对满足这一判据。通过约化到块，该比较适用于任意域上有限维代数之间的所有 Morita 型稳定等价。关于其与 Liao–Seol 可容许三元组的关系，以及双模奇异范畴中的相应比较，参见小节4.2。在特征零时，角限制还会将共同三角变形的 Bezrukavnikov–Ginzburg 映射映到其两个角对应的映射上（命题 6.2）。对于交换环上平坦代数之间的标准导出等价，我们提升其双侧倾斜复形，以比较幂零系数扩张上的带标记变形。通过提升相容复形系统，该比较可推广到完备系数环。提升的核给出了微分分次代数同伦范畴中两个 Bezrukavnikov–Ginzburg 映射的比较（定理 6.4）。

我们还研究交换局部 Artin 环上的模变形。定理6.8利用剩余模的 Gorenstein 射影性，将域上的万有变形环比较推广到在 Artin 基环上标记的提升。对于在其湮灭子商环上自由的模，在通常的稳定自同态假设下，相应的函子在该商环上可由原表示。例6.11 计算了混合特征基环上秩为一和二的模之间的比较。例6.10表明，即使测试环在原基环上自由，回到原测试范畴后，可胚代表性仍可能失效。

1.3. **外自同构群与代数 K理论**。Rouquier 证明了自内射代数的连通外自同构群具有不变性 [57, 定理 4.15] ，并在 [56, 定理 4.3]中处理了群概形结构。对于约化对，误差双模作为其包络代数上的模是投射且内射的 [15, 引理 4.1(3)]。我们利用这一性质，在代数族中以及局部 Artin 环上分裂误差直和项。因此，在完美域上，Morita 型稳定等价在外自同构群概形的单位连通分支之间诱导出一个同构（推论7.8）。定理7.7 中的切空间同构与关于HH^1的比较一致。因此，它在每一阶都保持可积性。关于可积导子和合同子群的早期比较，参见 [39, 定理 5.1 和引理 5.2]以及 [14, 定理 2]。

设 A 和 B 是域上的有限维代数。我们证明，Morita 型稳定等价能够识别映射 $K_i(A) \to K_i(A/\operatorname{rad} A)$ 和 $K_i(B) \to K_i(B/\operatorname{rad} B)$的核（定理8.1）。若两个商映射都有环截面，则它们的同伦纤维等价（定理8.4）。特别地，对于分裂代数，当且仅当这些代数具有相同数目的简单模同构类时，其普通 K-理论谱等价。例8.10表明，由定义双模诱导的普通 K-理论映射可能不是同构。

在交换环上，我们证明，稳定化恒等式在 R-分裂正合结构下诱导增强相对奇点范畴之间的等价，进而诱导其非连通 K-理论之间的等价（定理8.12）。在域上，增强的比较也可由 Chen、Liu 和 Wang 的张量诱导 dg 提升 [17, 命题 3.1 和引理 32]。

König、Liu 和 Zhou 证明了稳定循环同调在域上的不变性 [34, 定理 9。9]我们在命题 8.6 中给出了一种相对构造。我们还将根基滤过应用于 dg 加性对应，并得到根基混合复形纤维的比较映射（推论 8.8）。定理 8.9 给出了基环上具有分裂滤过的幂零理想的一个版本。

1.4. **伴随函子、同调维数与张量实现**。 对于亨泽尔诺特局部环，我们为满足 Morita 型恒等式的偶构造双伴随代表元，其中允许误差双模相对投射，且代数在基环上有限。关于域和 Artin 环上的相关构造，参见 [15, 引理 4.1]和 [74, 引理 3.11]。

直和项恒等式与双伴随性，结合 [43, 引理 4.2 和命题 45] 以及 [18, 定理 32]中的论证，可比较各个同调维数。对于原始偶， [61] 中的回缩论证表明，左右自内射维数分别相等。同样的收缩也表明，各个投射维数分别相等。在第11节，我们给出一个判据，用以确定原始偶是否保持各个 Gorenstein 投射维数。

对于 Artin环上的几乎 ν-稳定导出等价，Hu 和 Xi 构造了一个普通稳定等价，并且在域上证明了该等价由 Morita 型稳定等价诱导 [27, 定理 3.7 和 5。3]。定理 14.1 将双模恒等式推广到在基环上为投射的 Artin 代数，并给出了相对稳定张量实现。定理 11.18 记录了普通稳定函子下各个 Gorenstein 投射维数相等这一结论，该结论源于已知结果。对于普通稳定范畴，我们还给出了一个局部判据，说明在何种条件下诱导稳定等价的中心张量函子是 Morita 等价（推论 12.4）。

Abe 和 Hoshino 在 [2, 例 4.6], 之后提出疑问：基环 Ext 群的集中性是否足以保证在导出等价下保持固定余维的 Gorenstein 条件。我们在定理 13.6中肯定地回答了这一问题。证明沿正则参数约化倾斜复形，并利用 Artin局部基环上的自内射性比较。

本文结构如下。第2节回顾相对稳定范畴，并约定双模记号。第3 节和4节比较 Hochschild 同调、上同调及其运算，说明对压缩论证的修正，并比较相对奇异 Hochschild 上链。第5节构造相容的 Frobenius 泛函，并将奇异比较映射与 Tate–Hochschild BV传递联系起来。第6节研究带标记结合变形和 Bezrukavnikov–Ginzburg 映射。小节6.2 还比较 Koszul对偶下的分次变形。小节6.3研究局部 Artin 环上的模变形与可胚代表性。第7 节和8节将双模恒等式应用于外自同构、代数 KK理论、稳定循环同调和加性根纤维。

第9节构造双伴随代表元，并将张量比较映射应用于第10 节和11节的同调维数。第12节专门讨论普通稳定张量函子。第13 节和14节讨论由导出等价产生的相对稳定等价，包括 Rouquier 和 Zimmermann 的构造。小节13.3证明倾斜复形自同态代数的余维结论。最后，附录A和B给出有关基底上的投射性和可分张量函子的例子。

致谢

本研究得到北京市自然科学基金（项目编号：1262017、1252011）的资助。

2. 相对稳定范畴

本节回顾 Rouquier 和 Zimmermann 在构造中使用的相对稳定范畴（第 13 节）。全文中， R 是交换诺特环，所有代数都是 R上的有限模，所有模都是有限生成的，所有双模都是 R-中心的。

对于一个 R-代数 A，记 $A^e = A \otimes_R A^{\mathrm{op}}$ 并令

$$\mathscr{P}_R(A) = \mathrm{add}\{A \otimes_R V : V \in R\text{-mod}\}, \qquad \mathscr{I}_R(A) = \mathrm{add}\{\mathrm{Hom}_R(A, V) : V \in R\text{-mod}\}.$$

它们分别是相对于 R-分裂正合结构而言的 A-mod 中的投射对象和内射对象。典范满同态 $A \otimes_R X \to X$和单态射 $X \to \mathrm{Hom}_R(A, X)$ 是 R-分裂的。因此，这个正合范畴有足够多的投射对象和内射对象。我们定义加性商

$$A\text{-}\underline{\mathrm{mod}}_R = (A\text{-mod})/[\mathscr{P}_R(A)], \tag{2.1}$$

其中 $[\mathscr{P}_R(A)]$ 表示所有经过 $\mathscr{P}_R(A)$中的对象因子分解的映射所构成的理想。我们将（2.1）称为R-相对稳定范畴；见 [40, 第 2] 节。其定义不要求 $\mathscr{P}_R(A) = \mathscr{I}_R(A)$。

在本文中，“相对”始终指所显示的 R-分裂正合结构及类$\mathscr{P}_R(A)$。若 R 是一个域，则 $\mathscr{P}_R(A) = A$-投射，因此 (2.1) 是普通稳定模范畴。

以下陈述使用明确的双模恒等式以及指定的相对投射模类。

2.1. **双模恒等式与相对稳定等价。**

命题 2.1. 设 ${}_AM_B$ 在两侧都是投射的。假设存在双模同构

$$M \otimes_B N \simeq A \oplus P, \qquad N \otimes_A M \simeq B \oplus Q, \qquad P \in A^e\text{-proj}, \quad Q \in B^e\text{-proj}. \tag{2.2}$$

那么， $N \otimes_A -$ 和 $M \otimes_B -$ 保持 R-分裂短正合列以及相对投射模。它们诱导出逆加性等价

$$A\text{-}\underline{\mathrm{mod}}_R \simeq B\text{-}\underline{\mathrm{mod}}_R.$$

如果将 (2.2)替换为稳定化恒等式，则相同的结论仍然成立

$$\begin{aligned}(M \otimes_B N) \oplus P_1 &\simeq A \oplus P_2,\\ (N \otimes_A M) \oplus Q_1 &\simeq B \oplus Q_2,\end{aligned} \qquad P_i \in A^e\text{-proj}, \quad Q_i \in B^e\text{-proj}. \tag{2.3}$$

证明。 由于 N_A 是有限生成投射模， $N \otimes_A -$ 与到 R-模的限制函子的复合，是有限个限制函子有限直和的直和项。因此，一个 R-线性分裂在张量化之后仍诱导出一个分裂：将该有限直和上的分裂与此直和项的包含映射和投影复合即可。于是， $N \otimes_A -$ 保持 R-分裂短正合列。同样的结论也适用于 $M \otimes_B -$。

对于 $V \in R$-模，

$$N \otimes_A (A \otimes_R V) \simeq N \otimes_R V$$

作为 B-模，它是相对 R-投射的，因为 ${}_BN$ 是若干个 B 的有限直和中的一个直和项。因此，这些函子保留相对投射对象，并下降到商范畴。

对于每个 $X \in A$-模， P 在 A^e 上的投射性意味着

$$P \otimes_A X \in \mathrm{add}(A \otimes_R X) \subseteq \mathscr{P}_R(A).$$

事实上，将 P 到有限自由 A^e-模的一个分裂包含映射与 X 在 A上作张量。因此，自然分解

$$M \otimes_B N \otimes_A X \simeq X \oplus (P \otimes_A X)$$

在相对稳定范畴上诱导出与恒等函子的自然同构。另一个复合函子可类似处理。在（2.3）的条件下，再次进行张量化即可得到这些自然同构，因为额外的相对投射直和项在商范畴中消失。□

3. 无需伴随的 Hochschild 同调与上同调

设 R 是一个交换环， A 和 B 是含单位元的中心 R-代数。我们在所指环上的全体模范畴和双模范畴中进行讨论。令 $A^e = A \otimes_R A^{\mathrm{op}}$ 和$B^e = B \otimes_R B^{\mathrm{op}}$。我们假设 M 和 N 在两侧都是有限生成投射的，并满足以下条件。

$$\begin{gathered}{}_AM_B \text{ and } {}_BN_A \text{ are projective on both sides,}\\ M \otimes_B N \simeq A \oplus P, \qquad N \otimes_A M \simeq B \oplus Q,\\ P \in A^e\text{-proj}, \qquad Q \in B^e\text{-proj}.\end{gathered} \tag{HH-MT}$$

这里的“投射双模”是指在所指示的包络代数上投射。以下结果既不要求张量函子具有伴随性，也不要求其保持内射对象。代数不必是 R上的投射对象，且张量函子不必在普通稳定模范畴之间诱导逆等价。

3.1. **非域基环上的两种约定**。我们将包络代数上的普通导出函子，与通过 R-相对巴构造计算的 Hochschild（上）同调区分开来。记

$$\mathrm{HH}^n_{\mathrm{abs}}(A/R) = \mathrm{Ext}^n_{A^e}(A, A), \qquad \mathrm{HH}^{\mathrm{abs}}_n(A/R; X) = \mathrm{Tor}^{A^e}_n(A, X),$$

并在 $X = A$ 时省略 X。在 Tor 表达式中，A 上的右 A^e-作用为 $x(a \otimes b^{\mathrm{op}}) = bxa$。下标“abs”指的是在 A^e 上的普通 Ext 和 Tor；它并不表示将基变换为 $\mathbb{Z}$ 后的 Hochschild 同调。

对于一个 R-代数 C，R-分裂正合结构下的 C-模由限制到 R 后分裂的短正合列组成。其投射对象是 $C \otimes_R V$ 模的直和项。将相应的相对导出函子记为 $\mathrm{Ext}^{n}_{C,\ \mathrm{rel}}$ 和 $\mathrm{Tor}^{C\ \mathrm{rel}}_{n}$，并置

$$\mathrm{HH}^n_{\mathrm{rel}}(A/R) = \mathrm{Ext}^n_{A^e,\mathrm{rel}}(A, A), \qquad \mathrm{HH}^{\mathrm{rel}}_n(A/R; X) = \mathrm{Tor}^{A^e,\mathrm{rel}}_n(A, X).$$

增广 bar 复形

$$\cdots \longrightarrow A \otimes_R A \otimes_R A \otimes_R A \longrightarrow A \otimes_R A \otimes_R A \longrightarrow A \otimes_R A \longrightarrow A$$

是一个由相对投射 A^e-模组成的 R-分裂分解。因此，这些相对群就是由通常的 R-相对 Hochschild 链复形和上链复形计算得到的群。它们的 Yoneda 乘积与杯积一致。

如果 A 在 R 上是投射的，则此 bar 分解的每一项也都是在 A^e 上投射的。在这种情况下，这两种理论一致，包括它们的上同调乘积。当 A 在 R 上不是投射的时，它们可能不同。这两种记号都不表示 Shukla 上同调，也不表示由导出包络代数定义的 Hochschild 上同调。

对于两种约定均成立的陈述中，ε 表示 abs 或 rel 中的任一个。记号 $\mathrm{Ext}^{n}_{C、\ \mathrm{abs}}$和 $\mathrm{Tor}^{C\ \mathrm{abs}}_{n}$ 表示普通 Ext 和 Tor。

3.2. **张量函子与相对正合性**。

引理 3.1。 在 (HH-MT)下，双模 P 和 Q 在两侧都是投射的。函子

$$F = N \otimes_A - \otimes_A M : A^e\text{-Mod} \longrightarrow B^e\text{-Mod},$$
$$G = M \otimes_B - \otimes_B N : B^e\text{-Mod} \longrightarrow A^e\text{-Mod}$$

是正合的，保持普通投射双模、R-分裂短正合列以及相对 R-投射双模。它们向普通有界导出范畴，或向由 R-分裂正合结构给出的有界导出范畴的扩张都是忠实的。

证明。由于 ${}_BN$ 是投射的，${}_A(M \otimes_B N)$ 是 ${}_AM$的有限个副本的有限直和项。在右侧进行类似论证可得 $M \otimes_B N$，从而 P，在两侧都是投射的。关于 Q 的论证相同。M 和 N 的单侧投射性证明了 F 和 G的正合性。

存在一个双模同构

$$F(A^e) \simeq {}_BN \otimes_R M_B.$$

由于 ${}_BN$ 和 M_B 是投射对象，右侧是 $B \otimes_R B$的有限个副本的有限直和的直和项，因此是 B^e-投射的。这证明了 F保持普通投射对象；对 G 的证明相同。只有分裂单射参与张量化，因此不需要 R 上的平坦性。

如果 T_C 是有限生成投射右 C-模，那么其底层 R-模函子 $T \otimes_C -$是限制函子 C-模到 $\to R$-模的有限直和的收缩。因此，它将一个 R-分裂短正合列映为一个 R-分裂短正合列。通过将有限直和上的一个分裂与定义该收缩的包含映射和投影复合，即可得到一个分裂。同样的论证也适用于另一侧的张量化。应用两次可证明F 和 G 保持 R-分裂正合列。此外，

$$F(A^e \otimes_R V) \simeq N \otimes_R V \otimes_R M$$

是 $B^e \otimes_R V$的有限个副本的有限直和的直和项。因此，F 和 G 也保持相对投射对象。

令 $U = M \otimes_B N \simeq A \oplus P$。固定的双模分解给出了正合函子的一个同构

$$GF \simeq \mathrm{Id} \oplus K_A, \qquad K_A(X) = (P \otimes_A X) \oplus (X \otimes_A P) \oplus (P \otimes_A X \otimes_A P). \tag{3.1}$$

类似地， $FG \simeq \mathrm{Id} \oplus K_B$。这些同构可下降到两个导出范畴。若 $F(f) = 0$，则 $GF(f) = 0$，其在单位元直和项上的分量为 f。因此 $f = 0$。同样的论证证明了 G的忠实性。诱导的导出函子未必是满的。□

3.3. **正 Hochschild 同调。** 我们首先通过投射分解建立循环Tor比较。

引理 3.2。 设 ${}_AM_B$ 和 ${}_BN_A$ 为双模，且 N 在两侧均为投射模，并令 $C = A \otimes_R B^{\mathrm{op}}$。通过 $n\,(a \otimes b^{\mathrm{op}}) = bna$，将 N 视为右 C-模。对于任意 ε 和每个 $n \geq 0$，存在同构

$$\mathrm{HH}_n^{\varepsilon}(A/R; M \otimes_B N) \simeq \mathrm{Tor}_n^{C,\varepsilon}(N, M) \simeq \mathrm{HH}_n^{\varepsilon}(B/R; N \otimes_A M). \tag{3.2}$$

证明。 对于普通Tor，取一个投射 C-分解 $L_\bullet \to M$。由于 ${}_BN$ 和 N_A 为投射模，二者均为

$$L_\bullet \otimes_B N \longrightarrow M \otimes_B N, \qquad N \otimes_A L_\bullet \longrightarrow N \otimes_A M$$

精确的增广复形。若 $L_i = C$，则其项分别变为 $A \otimes_R N$ 和 $N \otimes_R B$。前者是 A^e-投射的，因为 N_A 是投射模；后者是 B^e-投射的，因为 ${}_BN$ 是投射模。取直和项即可证明对每个投射 L_i 都有相同结论。因此，这些分别是相应包络代数上的普通投射分解。

对于每个 A–B双模 L，都有自然的迹同构。

$$A \otimes_{A^e} (L \otimes_B N) \longrightarrow N \otimes_C L, \qquad a \otimes (l \otimes n) \longmapsto na \otimes l,$$

and

$$B \otimes_{B^e} (N \otimes_A L) \longrightarrow N \otimes_C L, \qquad b \otimes (n \otimes l) \longmapsto n \otimes lb.$$

它们的逆将 $n \otimes l$映至 $1 \otimes (l \otimes n)$和 $1 \otimes (n \otimes l)$，分别如此。逐次作用于 $L_\bullet$，这些是链复形之间的同构。取同调得到通常约定下的（3.2）。

对于相对Tor，选取一个 R-分裂的 M 相对投射 C-模分解。与 N 在 A 或 B 上进行张量化，依据引理 R3.1中的收缩论证，保留其-分裂正合性。项 $C \otimes_R V$变为 $A \otimes_R N \otimes_R V$或 $N \otimes_R B \otimes_R V$，它在相应的包络代数上是相对投射的。现在，同样的迹同构比较相对分解并证明相对断言。□

定理 3.3。 假设 (HH-MT)。对于每个 $n > 0$ 以及每个约定 ε 存在一个R-模同构

$$\mathrm{HH}_n^{\varepsilon}(A/R) \simeq \mathrm{HH}_n^{\varepsilon}(B/R).$$

无需对代数作伴随或 R-投射性假设。

证明。 普通的包络代数投射模也是相对投射的。因此，对于 $n > 0$,

$$\mathrm{Tor}_n^{A^e,\varepsilon}(A, P) = 0, \qquad \mathrm{Tor}_n^{B^e,\varepsilon}(B, Q) = 0.$$

利用（HH-MT）中的两个分解和引理3.2，我们得到

$$\begin{aligned} \mathrm{HH}_n^{\varepsilon}(A/R) &\simeq \mathrm{HH}_n^{\varepsilon}(A/R; A \oplus P) \\ &\simeq \mathrm{HH}_n^{\varepsilon}(A/R; M \otimes_B N) \\ &\simeq \mathrm{HH}_n^{\varepsilon}(B/R; N \otimes_A M) \\ &\simeq \mathrm{HH}_n^{\varepsilon}(B/R; B \oplus Q) \simeq \mathrm{HH}_n^{\varepsilon}(B/R). \end{aligned}$$

□

3.4. **张量化下正上同调的像。** Q 的投射性并不蕴含对于 $n > 0$有 $\mathrm{Ext}_{B^e}^n(B,\ Q) = 0$。因此，仅凭投射性并不能消除 $\mathrm{Ext}_{B^e}^n(B \oplus Q,\ B \oplus Q)$ 中的非对角元。我们将证明 F的像中类所需的消失性。

我们将 $\alpha :\ X \to Y[n]$ 记作普通导出范畴或 R分裂正合结构的导出范畴中的一个 Ext 类。等价地，也可以用 Yoneda 扩张和正合函子来表述这些论证。

引理 3.4。 设 E 是一个 A^e投射双模，并且作为左 A模是投射的。令$n>0$ 和 $\alpha\in \mathrm{HH}^n_\varepsilon(A/R)$。对于双模映射 $u\colon\ A\to E$ 和 $v\colon\ E\to A$，有

$$u[n]\alpha=0,\qquad \alpha v=0.$$

因此，态射 $\mathrm{diag}(\alpha,0)\colon\ A\oplus E\to (A\oplus E)[n]$ 在适当的移位下与 $A\oplus E$ 的每个零次数端同态交换。

证明。 对右侧进行 E 张量化是一个正合函子，因为 ${}_AE$ 是投射的。根据上面的收缩论证，对于 R- 分裂正合结构它也是正合的。映射 u 定义了以下函子之间的自然变换

$$-\otimes_A u:\mathrm{Id}=-\otimes_A A\longrightarrow -\otimes_A E$$

它们作用于 A^e-模。将此自然变换逐次数应用于复形，并传递到导出范畴，得到导出函子之间的自然变换。应用于α时，自然性给出

$$u[n]\alpha=(\alpha\otimes_A E)u.$$

类 $\alpha\otimes_A E$ 属于 $\mathrm{Ext}^n_{A^e,\ \varepsilon}(E,\ E)=0$，因为 E 在两种正合结构中都是投射的。这证明了第一个消失性结论。第二个结论直接由 $\mathrm{Ext}^n_{A^e,\ \varepsilon}(E,\ A)=0$得到。

最后， A 的每个双模端同态都是由 $Z(A)$中的一个元素进行乘法得到的。这种乘法延拓为 A^e-模上恒等函子的一个自然端同态，因此与每个 Ext 类交换。在 $A\oplus E$的分块矩阵端同态中，两个非对角线交换恒等式由上述消失性结论推出，而左上角恒等式则由中心性推出。□

引理 3.5。 固定分解 $F(A)=B\oplus Q$，其中包含映射为 $i_B\colon\ B\to F(A)$，投影为$p_B\colon\ F(A)\to B$。对于每个 $n>0$和 $\alpha\in\mathrm{HH}^n_\varepsilon(A/R)$，存在唯一的 $\phi_n(\alpha)\in\mathrm{HH}^n_\varepsilon(B/R)$ 使得

$$F(\alpha)=i_B[n]\phi_n(\alpha)p_B,\qquad \phi_n(\alpha)=p_B[n]F(\alpha)i_B. \tag{3.3}$$

特别地，映射 $F(\alpha)$ 在此分解下的非对角元均为零。对于 G，类似的断言也成立。

证明。 由（3.1），

$$GF(A)\simeq A\oplus E_A,\qquad E_A=P\oplus P\oplus(P\otimes_A P).$$

双模 E_A 在两侧都是投射的，并且是 A^e-投射的。对于后一个断言， $P\otimes_A P$是 $A\otimes_R P$的有限直和的直和项，而 $A\otimes_R P$是 A^e-投射的，因为 P_A是投射的。

由于 K_A 是正合的且 $K_A(A)=E_A$ 是投射的，态射 $K_A(\alpha)$ 属于 $\mathrm{Ext}^n_{A^e,\varepsilon}(E_A,E_A)=0$。因此，在上述自然分解中，

$$GF(\alpha)=\mathrm{diag}(\alpha,0).$$

令 $e=i_Bp_B\in\mathrm{End}_{B^e}(F(A))$。引理 3.4表明 $GF(\alpha)$与 $G(e)$可交换。由于 G在相关导出范畴上是忠实的，因此可得

$$F(\alpha)e=e[n]F(\alpha).$$

将 $F(\alpha)$ 限制到其源直和项 Q 上所得为零，因为 Q 是投射的，且 $n>0$。因此$F(\alpha)=F(\alpha)e=e[n]F(\alpha)$，这正是（3.3）。通过与 $p_B[n]$和 i_B复合即可得唯一性。□

3.5. 正上同调代数与稳定零次部分。 令 $Z^{\mathrm{pr}}(A)$表示 $Z(A)$中由那些可经普通投射 A^e-模分解的双模自同态 $A\to A$ 组成的理想。在任一种上同调约定下，此理想都会湮灭正上同调。事实上，若 $z\colon\ A\to T\to A$，其中 T 是普通投射的，且 α 具有正次数，则 $\alpha z=0$，因为 $\mathrm{Ext}^{>0}_{A^e,\varepsilon}(T,A)=0$。零次作用的中心性还给出 $z\alpha=0$。因此，我们可以构造分次代数

$$\overline{\mathrm{HH}}^*_\varepsilon(A/R)=\mathrm{HH}^*_\varepsilon(A/R)/Z^{\mathrm{pr}}(A), \tag{3.4}$$

其中商仅改变零次部分。允许经由所有相对 R-投射双模进行分解，也会得到相同的零次理想。事实上，乘法 $A^e\to A$ 是一个 R-分裂满同态。从相对投射双模出发的映射可以经由它提升，因此每个

这样的 A 自同态的分解都已可经由普通自由双模A^e；参见引理 9.3。投射中心理想相等，并不意味着当 A不是 R上的投射模时，普通 Hochschild 上同调与相对 Hochschild 上同调在正次数上相同。

定理 3.6。 假设 (HH-MT)。对于每个 $\varepsilon \in \{\mathrm{abs},\mathrm{rel}\}$ ，存在一个分次R-代数的同构

$$\overline{\mathrm{HH}}^*_\varepsilon(A/R) \simeq \overline{\mathrm{HH}}^*_\varepsilon(B/R).$$

特别地，

$$\bigoplus_{n>0} \mathrm{HH}^n_\varepsilon(A/R) \simeq \bigoplus_{n>0} \mathrm{HH}^n_\varepsilon(B/R)$$

作为正分次的、通常没有单位元的 R-代数。因此，该同构保持每个正上同调群以及所有正次数类的乘积。

证明。 从（

$$i_B : B \to F(A), \quad p_B : F(A) \to B, \qquad i_A : A \to G(B), \quad p_A : G(B) \to A$$

HH-MT）中的分解中选取分裂映射。对于正次数，利用（ ϕ 3.3）定义 ψ ；利用 G 以及第二对分裂映射定义。正合函子保持 Yoneda 乘积。由于每个正$F(\alpha)$ 都支集于 B-直和项上，压缩在此像上是乘法的。因此， ϕ 是正上同调上的同态，对于 ψ亦然。

在零次情形定义

$$\phi_0([a]) = [p_B F(a) i_B], \qquad \psi_0([b]) = [p_A G(b) i_A].$$

由于 F 和 G 保持普通投射双模不变，这些映射模掉投射中心后是良定义的。对于两个零次数端同态，将它们的乘积进行压缩与将各自的压缩相乘之间的差分别经过 Q或 P。因此，它在商中为零。对于含有正次数因子的乘积，乘法性由分块对角恒等式（3.3）得到。因此 ϕ 和 ψ 是（3.4）中分次代数的同态。

还需证明它们互为逆。将 GF（A） $= A \oplus E_A$在（3.1）中的自然分裂映射记为

$$i : A \longrightarrow GF(A), \qquad p : GF(A) \longrightarrow A.$$

还有另一对分裂映射

$$j = G(i_B) i_A : A \longrightarrow GF(A), \qquad q = p_A G(p_B) : GF(A) \longrightarrow A, \qquad qj = 1_A.$$

对于 α 的正次数情形，令 $\gamma = \psi\phi$（α）。自然分解给出 GF（α） $= i[n]\alpha p$。先对 F 再对 G 应用引理3.5 ，得到另一种表达式 GF（α） $= j[n]\gamma q$。用 $q[n]$ 和 j 进行压缩，得到

$$\gamma = (qi)[n]\alpha(pj).$$

令 $u = qi$ 和 $v = pj$。它们是 $Z(A)$中的元素，因此 $u[n]\alpha = \alpha u$。此外

$$uv = qi\,pj = qj - q(1 - ip)j = 1_A - z, \qquad z = q(1 - ip)j \in Z^{\mathrm{pr}}(A),$$

因为 $1 - ip$ 是到普通投射直和项 E_A上的投影。因此

$$\gamma = \alpha uv = \alpha(1_A - z) = \alpha.$$

交换 A 和 B 即可证明，在正次数下 $\phi\psi$ =Id。

对于零次数端同态 a ，仍有 $\psi_0\phi_0([a]) = [qGF(a)j]$。现在，自然分解将 $GF(a)$写成 diag(a, $K_A(a)$）。其第二分量可经由 E_A分解，因此模 $Z^{\mathrm{pr}}(A)$后为零。因此

$$[qGF(a)j] = [uav] = [a(1_A - z)] = [a].$$

对 B 作同样的论证，即可证明零次下的逆恒等式，并完成证明。 □

注记 3.7。 一般而言，压缩并不能将 $\mathrm{Ext}^{\geq 0}_{B^e}$（$B \oplus Q$， $B \oplus Q$）与 $\mathrm{Ext}^{\geq 0}_{B^e}$（$B$， B）对应起来，而且 Q 不一定是内射的。引理 3.5断言，对于类 F（α），非对角分量均消失。导出函子的自然直和项分解保证了忠实性。为了比较 Gerstenhaber 括号，我们还需要第 4 节中的公共像和三角上链论证。保留 Batalin–Vilkovisky 算子并不是这一论证的结果。

3.6. **零次与迁移映射。**

例 3.8。 令 R 为任意非零交换环，置 $A = R$ 和 $B = R \times R$，并取$M = (R,\ R)$，其带有按坐标定义的右 B 作用以及标量左 A 作用。取 $N = (R,\ R)^{\mathrm{t}}$，其带有按坐标定义的左 B 作用以及标量右 A 作用。这些双模在两侧都是投射的。于是有

$$M \otimes_B N \simeq R \oplus R = A \oplus P, \qquad P = R \in A^e\text{-proj}.$$

将 e_1，e_2 记为 B 的两个中心幂等元，此外还有

$$N \otimes_A M \simeq B \oplus Q, \qquad Q = (Be_1 \otimes_R e_2B) \oplus (Be_2 \otimes_R e_1B),$$

且 Q 是 B^e-投射的。因此，(HH-MT) 成立，即使两个代数都是作为 R的投射模。尽管如此

$$\mathrm{HH}^0(A/R) = R, \qquad \mathrm{HH}^0(B/R) = R \oplus R,$$

对于 HH_0, 也会出现相同的差异，因为两个代数都是交换的。在两种约定下，这一区别都成立。它们的稳定中心均为零，这与定理3.6相符。

对于有限维自内射代数，Pogorzały 的比较映射 [50] 在正次数上保持 Yoneda 乘积。其稳定态射表述具有

$$\underline{\mathrm{End}}_{A^e}(A) = Z(A)/Z^{\mathrm{pr}}(A)$$

在零次情形中则并非如此，而普通 Hochschild 上同调具有 $\mathrm{HH}^0(A) = Z(A)$。因此，不应将稳定表述理解为通常中心的不变性。 [51, 第 1], 节中也明确体现了这一点，其中 syzygy 轨道代数被描述为普通 Hochschild 上同调的一个商。Yoneda 乘积比较和轨道代数结果本身都不能单独给出与 Gerstenhaber 括号的相容性。

Liu 和 Xi 证明了域上有限维代数的正次数同调不变性，见[42, 定理 4.4]；上面的循环 Tor 论证直接证明了在当前基环上的相应比较结果。Xi 的定理 [71, 定理 4.2] 假设 Artin 代数在基环上是投射的，并且存在伴随型稳定等价。对于域上的任意有限维代数，Pan 和 Zhou 随后证明了稳定 Hochschild 上同调分次环的保持性，且不需要伴随型假设，见 [48, 定理 1.2]。前述证明适用于任意交换基环，并将普通包络代数 Ext 与相对 bar 上同调明确区分开来。将其特化到域上，便可恢复这些已知的不变性结果。

Bouc 构造了与适当的单侧投射双模相关的同调传递[12]；其复合、可加性以及投射双模的正次数消失性质记录于 [34, 命题 2。1]这些性质已足以在域上得到正次数同调不变性，而无需伴随。Linckelmann 在 [38, 第 2] 节中定义了交换环上对称代数的上同调传递，并使用伴随映射和对称化形式。上述证明中使用的压缩映射直接由（HH-MT）定义，无需这些额外数据。要将它们与规范化上同调传递相对应，还需要单独进行比较。

推论 3.9。 若 A 和 B 作为 R-模是投射的，且满足(HH-MT)，则它们通常的包络代数定义与相对巴定义一致。按照惯用记号，对每个 $n > 0$,

$$\mathrm{HH}_n(A/R) \simeq \mathrm{HH}_n(B/R), \qquad \mathrm{HH}^n(A/R) \simeq \mathrm{HH}^n(B/R),$$

并且上同调中的这些同构构成正分次代数的同构；将零次部分替换为稳定中心后，该同构可延拓为一个同构。无需伴随型假设。

3.7. **对 Pan–Zhou 压缩论证的修正。** Pan–Zhou 的分次代数不变性定理 [48, 定理 1。2] 在其原始假设下成立。对于导出范畴中带有投射直和项的双模的任意分次自同态，其证明中的断言 1 和 3 需要修正。我们在证明中所用的张量像上证明乘法性和逆恒等式。

假设（HH-MT），并使用上面的函子 F、G。令 $i_B\colon\ B \to F(A)$ 和 $p_B\colon\ F(A) \to B$为直和项 B 在 $F(A) \simeq B \oplus Q$中的分裂映射。定义

$$\phi_n(\alpha) = p_B[n]F(\alpha)i_B \qquad (n > 0), \qquad \phi_0([a]) = [p_BF(a)i_B].$$

使用 G 和分裂映射 i_A、p_A 定义 ψ，其中直和项为 A，且 $G(B) \simeq A \oplus P$。

命题3.10. 假设 (HH-MT) 并令 $\varepsilon \in \{$绝对,相对$\}$。压缩映 ps

$$\overline{\mathrm{HH}}^*_\varepsilon(A/R) \xrightarrow{\phi} \overline{\mathrm{HH}}^*_\varepsilon(B/R), \qquad \overline{\mathrm{HH}}^*_\varepsilon(B/R) \xrightarrow{\psi} \overline{\mathrm{HH}}^*_\varepsilon(A/R)$$

是分次 R-代数的良定义同态，并满足 $\psi\phi = 1$ 和 $\phi\psi = 1$。

证明。由引理 3.5，对于 $n > 0$，有 $F(\alpha) = i_B[n]\phi_n(\alpha)p_B$。设 α 和 β 的次数分别为 n 和m。若 $m + n > 0$，在两个张量像之间插入 $i_B p_B$ 不会改变压缩后的复合。事实上，若 $n > 0$，则 $F(\alpha)i_B$通过 $i_B[n]$分解；若 $m > 0$，则 $p_B[m]F(\beta)$通过 p_B分解。因此

$$p_B[m+n]F(\beta)[n]F(\alpha)i_B = \big(p_B[m]F(\beta)i_B\big)[n]\, p_B[n]F(\alpha)i_B.$$

当其中一个次数为零时，这个等式也使用了所指明的代表元。对于两个次数为零的因子 a，b，其差为

$$p_BF(b)F(a)i_B - (p_BF(b)i_B)(p_BF(a)i_B) = p_BF(b)(1 - i_Bp_B)F(a)i_B.$$

它通过 Q分解。此外，F 将投射双模映为投射双模，因此 ϕ_0 在模掉 $Z^{\mathrm{pr}}(B)$后是良定义的。对 ψ也可作同样的推理。恒等式 $p_Bi_B = 1_B$ 和$p_Ai_A = 1_A$ 表明两种压缩都保持单位元。

对于连续的压缩，令 i、p 为 A 自然分解中的分裂映射$GF(A) \simeq A \oplus E_A$（3.1）的分裂映射。置

$$j = G(i_B)i_A, \qquad q = p_AG(p_B), \qquad u = qi, \qquad v = pj.$$

由于 $qj = 1_A$，有

$$uv = 1_A - z, \qquad z = q(1 - ip)j \in Z^{\mathrm{pr}}(A).$$

事实上，$1 - ip$ 经由射影直和项 E_A 分解。对于 $n > 0$，自然分解给出 $GF(\alpha) = i[n]\alpha p$，因此

$$\psi_n\phi_n(\alpha) = q[n]GF(\alpha)j = u[n]\alpha v = \alpha(1_A - z) = \alpha.$$

这里，u、v 是 A 的双模自同态。它们的作用是中心的，并且 $Z^{\mathrm{pr}}(A)$ 湮灭正上同调。在零次中，$GF(a)$ 在 E_A 上的分量只贡献一个经由 E_A分解的映射。因此

$$\psi_0\phi_0([a]) = [uav] = [a(1_A - z)] = [a].$$

交换 A和 B 即可证明另一个逆恒等式。 □

4. 相对 Gerstenhaber 括号

令 R 为任意交换环。我们使用全体模范畴，如第3节所述。记$\mathrm{HH}^n_R(A)$ 为$\mathrm{HH}^n_{\mathrm{rel}}(A/R)$，其由相对 Hochschild 上链复形计算。本节中的所有相对 Ext 群均相对于 R-分裂正合结构而言。Gerstenhaber 括号通过上链插入来定义。

我们首先证明，第3.6 定理中的正次数同构保持 Gerstenhaber 括号。我们利用三角代数的限制像，并借助两个特征映射到混合双模 Ext 群中的内射性及其像相等性，将其图识别出来。随后我们讨论稳定化恒等式以及素特征下的受限幂。

定理 4.1。 假设 (HH-MT)。压缩同构

$$\phi_n(\alpha) = p_B[n](N \otimes_A \alpha \otimes_A M)i_B, \qquad n > 0,$$

第*3.6* 定理中的

$$\phi_{m+n-1}([\alpha,\beta]_A) = [\phi_m(\alpha), \phi_n(\beta)]_B \quad (\alpha \in \mathrm{HH}^m_R(A),\ \beta \in \mathrm{HH}^n_R(A),\ m, n > 0).$$

因此，$\mathrm{HH}^{>0}_R(A)$ 与$\mathrm{HH}^{>0}_R(B)$ 作为非幺 *Gerstenhaber* 代数是同构的。该结论既不要求在 R 上具有投射性，也不要求张量函子具有伴随性或保持内射对象。这些函子不必在普通稳定模范畴之间诱导等价。

如果 A 和 B 是 R 上的投射模，则对于正次数中的普通 $\mathrm{Ext}^*_{A^e}(A,A)$ 和$\mathrm{Ext}^*_{B^e}(B,B)$，同样的断言也成立。特别地，对于任意域上有限维代数之间的经典 *Morita* 型稳定等价，该结论也成立。

4.1. **两个特征作用具有相同的像**。置 $C = A \otimes_R B^{\mathrm{op}}$。正合张量定义了映射

$$a_n : \mathrm{HH}^n_R(A) \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_{C,\mathrm{rel}}(M,M), \qquad a_n(\alpha) = \alpha \otimes_A M,$$
$$b_n : \mathrm{HH}^n_R(B) \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_{C,\mathrm{rel}}(M,M), \qquad b_n(\beta) = M \otimes_B \beta.$$

这些是 Yoneda 扩张上的映射，或者等价地说，是所示正合结构的导出范畴上的映射。这里的所有张量函子都保持 R-分裂的合流，这是由引理 3.1 中的收缩论证得到的。

引理 4.2。对于每个 $n > 0$，映射 a_n、b_n 都是内射的，并且

$$a_n = b_n \phi_n. \tag{4.1}$$

特别地，它们的像相同，并且

$$\ker(a_n - b_n) = \{(\alpha, \phi_n(\alpha)) : \alpha \in \mathrm{HH}^n_R(A)\}.$$

公共像可能是 $\mathrm{Ext}^n_{C,\mathrm{rel}}(M,M)$ 的一个真子模。

证明。 $- \otimes_A M$与 $- \otimes_B N$的复合是 Id $\oplus(- \otimes_A P)$。因此，第一个函子在 Ext 群上诱导单射。这证明了 a_n的内射性。在左侧进行张量化可证明 b_n的内射性。

考虑

$$L = N \otimes_A - : C\text{-Mod} \longrightarrow B^e\text{-Mod}.$$

它与 $M \otimes_B -$ 的复合包含恒等函子作为一个自然直和项，因为$M \otimes_B N = A \oplus P$。因此， L_* 在所有相关的相对 Ext 群上都是单射。对于 $\alpha \in \mathrm{HH}^n_R(A)$，令$\beta = \phi_n(\alpha)$。引理 3.5 给出

$$L_*(a_n(\alpha)) = N \otimes_A \alpha \otimes_A M = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{on } N \otimes_A M = B \oplus Q.$$

这个双模的固定分解还给出

$$L_*(b_n(\beta)) = (N \otimes_A M) \otimes_B \beta = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & Q \otimes_B \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

最后一个等式由 $\mathrm{Ext}^n_{B^e,\mathrm{rel}}(Q,Q) = 0$ 对 $n > 0$成立得出，因为 Q 是相对投射的。 L_* 的单射性证明了(4.1)。由于 ϕ_n 是同构，像相同。最后， $a_n(\alpha) = b_n(\beta)$ 蕴含 $b_n(\phi_n(\alpha) - \beta) = 0$，而 b_n 的单射性证明了所述的核公式。□

4.2. **相对三角比较**。设

$$T = \begin{pmatrix} A & M \\ 0 & B \end{pmatrix}, \qquad e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad f = 1 - e.$$

Guccione–Guccione [22, 定理 1] 建立了交换基环上的相对三角长正合列。我们描述其映射，并验证角限制与 Gerstenhaber 括号的相容性。

Keller [32, 第 4 节。5] 采用了一种三角比较，其角限制映射保持B_∞ 结构。对于在基环上投射的三角代数，Hermann [24, 第 6] 证明了其与严格 Gerstenhaber 结构的相容性。在稳定导出范畴中，相应的三角比较被用于 [13]。这里的附加步骤是公共像恒等式（4.1），它刻画了正次数压缩映射的图。下面的相对巴构造提供了所需的角比较，而无需基环上的投射性。

Keller 可容许三元组与奇异比较。 Liao 和 Seol [41] 给出了微分分次代数的 Keller 三角比较的直和版本。他们的可容许条件包括：从两个代数到混合双模相应的单侧微分分次自同态代数的弱锥幂零拟同构，以及部分 Hochschild 复形的正合性。随后，这两个限制在直和 Hochschild

上同调上诱导出 Gerstenhaber 同构。他们将该比较应用于有限维李代数的包络代数和 Chevalley–Eilenberg 代数，从而得到 Duflo–Kontsevich 同构。

对于普通代数以及 (M,N) 这一 Morita 型稳定等价的定义对，作用映射 $A \to \mathrm{End}_{B^{\mathrm{op}}}(M)$ 是集中在零次的代数之间的映射。若它是拟同构，则 M 将成为一个 Morita 双模。事实上，B_B 是 $N \otimes_A M$的一个直和项，而后者根据 N_A的投射性，是 M_B 的有限个副本的有限直和的一个直和项。因此， M_B是一个投射生成元，而自同态代数条件给出一个 Morita 等价。定理 6.1 的变形比较使用了在一次、二次和三次中的两个三角限制，并取所有平方零系数。

在双模奇异范畴中也存在一个比较映射。设 A, B 在某个域上是有限维的，并置 $C = A \otimes_k B^{\mathrm{op}}$。记 $\mathrm{End}^{\mathrm{dg}}{}_{\mathrm{sg}\,D}(X)$ 为 X 在 D的微分分次奇异范畴中的自同态复形。正合张量函子给出微分分次代数之间的一串拟同构

$$\mathrm{End}^{\mathrm{dg}}_{\mathrm{sg},A^e}(A) \longrightarrow \mathrm{End}^{\mathrm{dg}}_{\mathrm{sg},C}(M) \longleftarrow \mathrm{End}^{\mathrm{dg}}_{\mathrm{sg},B^e}(B).$$

对于第一个箭， $-\otimes_A M$ 和 $-\otimes_B N$ 保留完美双模复形，并下降到微分分次商范畴。在由关于 A 左侧副本完美的复形所表示对象构成的全子范畴上，复合函子在奇异范畴中同构于恒等态射。事实上，误差项 $X \otimes_A P$是有限个 $X \otimes_k A$的直和的收缩；当 A^e 在左侧完美时，它关于 X 是完美的。另一个复合函子的情形也可用同样的论证，采用 Q 即可。这给出了 A 和 M 的自同态复形在所有次数上的上同调同构。对于第二个箭，在关于 B右侧副本完美的复形上使用函子 $M \otimes_B -$ 和 $N \otimes_A -$ 。对于 brace 运算，我们使用第4.6节中的奇异 Hochschild 上链比较。

引理 4.3。存在一个长正合列

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow \mathrm{HH}^n_R(T) &\xrightarrow{r_n=(r_A,r_B)} \mathrm{HH}^n_R(A) \oplus \mathrm{HH}^n_R(B) \\ &\xrightarrow{a_n - b_n} \mathrm{Ext}^n_{C,\mathrm{rel}}(M,M) \longrightarrow \mathrm{HH}^{n+1}_R(T) \longrightarrow \cdots . \end{aligned} \tag{4.2}$$

两个角映射 r_A、r_B 保留杯积和 *Gerstenhaber* 括号。这些断言不要求 T、 A、 B 或 M 是关于 R 的投射模。

证明。 考虑以下 T-双模短正合列

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow Te \otimes_A M \otimes_B fT &\xrightarrow{(+,-)} (Te \otimes_A eT) \oplus (Tf \otimes_B fT) \\ &\xrightarrow{\mathrm{mult}} T \longrightarrow 0. \end{aligned} \tag{4.3}$$

核是右上角 M 的两个副本之差。该正合列作为 R-模的正合列是分裂的。诱导函子

$$\begin{aligned} L_A(X) &= Te \otimes_A X \otimes_A eT, \\ L_B(Y) &= Tf \otimes_B Y \otimes_B fT, \\ L_C(Z) &= Te \otimes_A Z \otimes_B fT \end{aligned}$$

是正合的，并保持 R-分裂合流，因为 M 在两侧都是投射的。它们也保持相对投射对象。例如，

$$L_A(A^e \otimes_R V) \simeq Te \otimes_R V \otimes_R eT$$

是以下对象的有限个副本的有限直和中的一个直和项： $T^e \otimes_R V$，因为 Te和 eT在相应的 T-侧是投射的。关于 L_B 和 L_C 的论证相同。因此，诱导–限制伴随将由（4.3）得到的 Ext 项与（4.2）中的 Ext 项对应起来。到 M 项的两个映射分别由将 Hochschild 扩张在右侧和左侧与 M 张量化诱导。它们符号相反，给出映射 $a_n - b_n$。

为比较括号，令 $E = R \times R$ 通过 $(r,s) \mapsto re + sf$ 作用于 T。此映射未必是单射。T 的 E-相对 bar 分解是在 R-分裂正合结构中的投射分解。事实上，其各项沿幂等元 e, f 分解为双模的直和

$$Te_i \otimes_R V \otimes_R e_jT, \qquad e_i, e_j \in \{e, f\},$$

它们是相对 R-投射的，并且增广 bar 复形具有一个 R-线性收缩同伦。等价地， E 在 R 上的可分性将此分解实现为

由角的可复合序列索引的 R-相对 bar 分解。不要求 R-平坦性。

Thus
$$C_E^n(T,T) = \mathrm{Hom}_{E^e}(T^{\otimes_E n}, T)$$
计算出 $\mathrm{HH}_R^*(T)$。它到通常的 R-相对 Hochschild 上链复形的包含映射是一个拟同构，并保持杯积和 brace 运算。限制到一个纯 A-角，或纯 B-角，也保持这些运算： E-双线性保证上链在纯角上的取值仍位于同一个角中，因此所有插入公式都逐项限制。这些限制诱导映射 r_A， r_B 见（4.2）。特别地，它们保持括号。当这些代数在基环上是投射的时，这种相容性也见 [6, 第372–373]页。这里所需的相对版本由 bar 论证证明。 □

4.3. **与 Gerstenhaber 括号的相容性**。

定理 *4.1* 的证明。 引理 4.2 和 4.3 表明，对于 $n > 0$,
$$\mathrm{im}\, r_n = \{(\alpha, \phi_n(\alpha)) : \alpha \in \mathrm{HH}_R^n(A)\}. \tag{4.4}$$
取 $\alpha \in \mathrm{HH}_R^m(A)$ 和 $\beta \in \mathrm{HH}_R^n(A)$，其中 m， $n > 0$。选取 $x \in \mathrm{HH}_R^m(T)$ 和 $y \in \mathrm{HH}_R^n(T)$，使得
$$r_m(x) = (\alpha, \phi_m(\alpha)), \qquad r_n(y) = (\beta, \phi_n(\beta)).$$
两个限制映射的括号相容性给出
$$r_{m+n-1}([x,y]) = ([\alpha,\beta], [\phi_m(\alpha), \phi_n(\beta)]).$$
由于 $m+n-1 > 0$，这一对属于（4.4）中的图。因此，其第二分量必为 $\phi_{m+n-1}([\alpha,\beta])$，正如所需。对 xy 作同样的论证即可证明杯积相容性，这与定理 3.6一致。

该论证利用图中元素的提升存在性，并不要求 r_n 是内射的，即使对于 $n = 1$也是如此。当 A 和 B 是 R-投射时，它们的相对 bar 分解就是通常的包络代数投射分解，且两种上同调约定（包括括号）一致。 □

4.4. **相对投射误差双模**。

命题 4.4. 定理*4.1* 的相对结论仍然成立，即使将 P, Q 的通常包络代数投射性替换为
$$P \mid A^e \otimes_R V, \qquad Q \mid B^e \otimes_R W$$
对于 R-模 V, W，只要分解 $M \otimes_B N \simeq A \oplus P$和 $N \otimes_A M \simeq B \oplus Q$仍然成立，并且 M, N 在两侧均为投射模。相应的分次环同构的零次部分由 $Z(A)$ 和 $Z(B)$ 对那些可经由相对R-投射双模的映射所取的商给出。

证明。 这些分解表明 P, Q 在两侧都是投射对象，如引理 3.1所示。张量函子 F, G 保持相对投射对象。复合误差中的附加项 $P \otimes_A P$也是相对投射的：若 $P \mid A^e \otimes_R V$，则
$$P \otimes_A P \mid A \otimes_R V \otimes_R P,$$
而后者是 $A^e \otimes_R V$ 的有限个副本的有限直和的直和项，因为 P_A 是投射对象。

引理 3.4 仅使用所选正合结构中的投射性和单侧投射性。因此，其证明、压缩证明以及定理 3.6 中的正次数逆映射证明始终都可使用相对投射对象。逆计算中的核心误差经过一个相对投射对象，因而湮灭正相对 Ext。这证明了正次数中的环同构。随后，共同像论证和图论论证给出括号相容性。 □

4.5. **任意基环上的稳定双模恒等式。**

定理 4.5。 设 R 为任意交换环，且中心双模 ${}_AM_B$、${}_BN_A$ 在两侧都是有限生成投射。假设 $M\otimes_B N\simeq A$ 和 $N\otimes_A M\simeq B$ 分别位于相对 R-投射双模所成的加性商中。则正相对 *Hochschild* 同调具有不变性，并且 $\mathrm{HH}^{\geq 0}_R(A)\simeq \mathrm{HH}^{\geq 0}_R(B)$。后一个同构保持乘积和括号；如果 R 是一个 $\mathbb{F}_p$-代数，则还保持移位偶次数类上的受限幂。若商中的恒等态射使用普通投射双模，则正次数普通 *Hochschild* 同调同样具有不变性。

证明。 稳定同构 $X\simeq Y$ 可提升为同构 $X\oplus E\simeq Y\oplus E'$，其相对投射对象为 E,E'。确实，若 $gf-1_X=ba$ 经由相对投射对象 E'，则 $(f,a)\colon X\to Y\oplus E'$有收缩 $(g,-b)$。补直和项在商中的单位元为零，且为相对投射对象。对普通投射对象也可用同样的推理。记 $U=M\otimes_B N$，$V=N\otimes_A M$，并选取分解

$$U\oplus P_1\simeq A\oplus P_2,\qquad V\oplus Q_1\simeq B\oplus Q_2.$$

对应投射误差项上的正 Tor 消失，因此同调断言由引理 3.2得出。

证明中所有其余 Ext 群均为相对 Ext 群。将一个 R-分裂的脉络与一个诱导双模作张量积，会保留一个 R-线性分裂。通过取直和项，与相对投射对象作张量积对于 R-分裂结构因而是正合的。两个诱导双模的张量积在两端均为诱导双模，因此两个相对投射对象的张量积仍是相对投射对象。当一个因子是相对投射对象，而另一个因子在每一侧都是投射对象时，也有同样的结论，因为后者可在剩余一侧表示为自由模的直和项。

记 F 和 G 为引理 3.1中的双侧张量函子。对于 $n>0$ 和 $\alpha\in\mathrm{HH}^n_R(A)$ 我们证明，$x=F(\alpha)\oplus 0$ 在 $D=F(A)\oplus Q_1$ 上的支集位于 B之上。根据 $D\simeq B\oplus Q_2$展开

$$(U\oplus P_1)\otimes_A-\otimes_A(U\oplus P_1)\simeq(A\oplus P_2)\otimes_A-\otimes_A(A\oplus P_2)$$

可得正合函子的同构 $GF\oplus H_1\simeq \mathrm{Id}\oplus H_2$。 H_1 或 H_2 的每一项都具有一个相对投射的外因子，另一个外因子则是侧投射或相对投射的。特别地，$H_i(A)$ 是相对投射的。反向展开可得 $FG\oplus K_1\simeq \mathrm{Id}\oplus K_2$。每个 K_i 都将侧投射双模和相对投射双模映为相对投射对象。由于$K_1(D)$ 是相对投射的，K_1 在 $\mathrm{Ext}^n_{B^e,\mathrm{rel}}(D,D)$ 上的作用为零。若 $G(\xi)=0$ 属于该群中的一个类，则 $(FG\oplus K_1)(\xi)=0$。它在恒等函子上的分量为 ξ，由此得到内射性。

在 $H_1(A)$ 上添零后，态射 $G(x)$ 在 $A\oplus H_2(A)\oplus G(Q_1)$ 上变为 $\mathrm{diag}(\alpha,0)$。这里 $G(Q_1)$ 是相对投射对象。引理 3.4 适用于这个对角态射，因为其证明仅使用了在 R-分裂结构中与相对投射对象进行张量化的正合性。该对角态射在适当的移位下与 $G(e)\oplus 0$ 交换，其中 e 是 D 的幂等元，其像为 B。刚刚证明的内射性给出 $xe=e[n]x$。由于 Q_2 是相对投射对象，源为 Q_2 的 x 的分量为零。因此，x 是一个类 $\beta\in\mathrm{HH}^n_R(B)$ 的对角延拓。

考虑 M 上的两个特征映射 a_n，b_n。由 $L=N\otimes_A-$ 在 M 的正自 Ext 上诱导的映射 L_* 是内射的：它与 $M\otimes_B-$ 的复合在添入 $P_1\otimes_A-$ 后包含单位元，而 $P_i\otimes_A M$ 是相对投射对象。将 L 应用于 $a_n(\alpha)$ 并在 Q_1 上添零，得到 x。将其应用于 $b_n(\beta)$ 并在 Q_1 上添零，得到 $(V\oplus Q_1)\otimes_B\beta$，因为 $Q_1\otimes_B\beta=0$。在稳定化分解下，这同样是 $\mathrm{diag}(\beta,0)$。因此，$a_n(\alpha)=b_n(\beta)$。对于另一个包含映射，在右侧张量 N，并使用通过交换上文的 A，B 而构造的 G 的压缩。两个特征映射都是内射的：在适当的一侧与 N 张量化，在稳定化投射对象上添入零分量，并利用所得张量作用的正则直和项。因此，它们的公共像定义了一个唯一同构 ϕ_n。

三角正合序列将每个正次数中角限制的像识别为下述映射的图 ϕ_n。与 brace 运算相容的限制给出了定理 4.1 中的乘积和括号断言。在一个 $\mathbb{F}_p$-代数上，将相对上链视为在 $\mathbb{F}_p$ 上的微分分次 brace 代数。移位偶次数类上的限制运算由 p重迭的一元 brace 运算表示，即 [13, 定理 2 和附录 A]。角限制保持该运算。次数为 $n>0$ 的输入具有次数为 $p(n-1)+1>0$的输出。在三角提升上应用该运算，并利用输出次数中的图，即可证明 $\phi_{p(n-1)+1}(\alpha^{[p]})=\phi_n(\alpha)^{[p]}$。 □

对于实际的恒等态射，这就是定理 4.1 中的压缩映射。特别地，限制运算结果适用于正特征下所有经典 Morita 型稳定等价。在一阶中，该运算是一元 p重导子的复合。

注 4.6. Hermann 的奥伯沃尔法赫报告 [23, 第 4 节，第 1363–1364] 引用了稳定 Hochschild 环的结果，并询问适当次数下李代数结构的不变性。所提出的方法使用双 lax 函子，以及关于单位元像的补直和项的 Ext 消失条件。这个问题不同于 Volkov 和 Witherspoon [67]所回答的问题。他们讨论 Hermann 专著中的问题 5.2.15：由扩张范畴中的环定义的括号是否给出 Gerstenhaber 代数结构。当幺半范畴单位元具有投射幂平坦分解时，他们的结果适用。定理 4.1 在所列双模假设下，回答了 2015 年不变性问题的正次数版本。对于通常的正次数结论，该结果不再需要自内射性和 Gorenstein 假设。第 [13, 68] 节所讨论的广义奇异等价或 dg 等价，与此处使用的双模恒等式是不同的输入。

我们的证明利用公共像恒等式（4.1）和上链的角限制，得到了括号相容性。它并未在给定的张量函子上构造双侧结构。所需的消失性质仅对 F 像中的类的非对角分量成立；群 $\mathrm{Ext}^{>0}_{B^e,\,\mathrm{rel}}(B,\ Q)$ 本身不一定为零。

注 4.7。 完整的稳定 Hochschild 环，包括其修正的零次部分，不一定能继承普通 Hochschild 上同调中的 Gerstenhaber 括号。命题 4.10 给出了一个具体的代数：它在其基环上是秩七的自由代数，但其投射中心并不是 Gerstenhaber 李理想。因此，上述正次数范围是必要的。对于域上的对称代数，[34,引理 10。6]中给出了关于投射中心为李理想的结论。

图论论证给出了正上同调上的一个同构。但它并未给出 Hochschild 上链复形之间的 brace 运算或 B_∞ 拟同构：三角限制映射可能具有非零核。第5节比较了 Frobenius 泛函相容时的 Batalin–Vilkovisky 算子。

4.6. **相对奇异 Hochschild 上链。** 我们采用 Chen、Li 和 Wang [16, 第 8.1 节和第 9.2–9.4] 节中的右奇异模型。对于交换环 R 上的中心代数 D，记 $\mathsf{S}_R(D)$ 为所有 D-模组成的有界导出范畴，赋予 R-分裂正合结构后再模掉由其相对投射对象生成的厚子范畴。记 Ω^j_R 为该正合结构中的奇异子。

定理 4.8。 设 A, B 为中心 R-代数，且 M, N 分别为中心的 A-B 双模和 B-A 双模，并且在每一侧均有限生成投射。假设

$$M \otimes_B N \simeq \Omega^{\ell}_R A, \qquad N \otimes_A M \simeq \Omega^{\ell}_R B$$

在分别模掉 R-相对投射双模后所得的加性商中成立，其中某个 $\ell \geq 0$ 满足此条件。令 $T = \left(\begin{smallmatrix} A & M \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right)$。那么两个对角限制

$$C^{\bullet}_{\mathrm{sg,right},R}(A) \xleftarrow{r_A} C^{\bullet}_{\mathrm{sg,right},R\times R}(T) \xrightarrow{r_B} C^{\bullet}_{\mathrm{sg,right},R}(B)$$

是严格的 B_∞ 拟同构。在上同调上，从 B 到 A 的映射将 b 映到唯一的 a，使得 $a \otimes_A M = M \otimes_B b$ 属于 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{S}_R(A\otimes_R B^{\mathrm{op}})}(M, M[d])$。

证明。 令 $E = R \times R$，并使用作用于 T 的两个顶点幂等元。对于对角代数 $_D$，令 $D = D/(R1_D)$。取值于 $D_p = D^{\otimes_R p} \otimes_R D$ 的归一化巴尔上链，次数为 $-p$，其左作用由巴尔微分给出。右奇异复形是它们在以下过渡映射下的余极限：该映射在前面添加一个悬移巴尔项。对于 T，使用 $T/\mathrm{im}(E \to T)$ 以及关于 E 的张量积。单位元插入给出基环上的增广归一化巴尔复形的收缩。T 的各项分解为诱导相对投射对象 $Te_i \otimes_R U \otimes_R e_jT$。[16, 第 8.1] 节的面映射和插入公式使用张量积、单位元映射和 Koszul符号，并给出关于 R 的巴尔微分、过渡映射和 brace 运算。在纯角上，所有中间端点都位于该角，因此两种限制与每种运算及过渡映射均可交换。

令 $C = A \otimes_R B^{\mathrm{op}}$。对混合输入词使用 M 的总巴尔分解 $\mathrm{Bar}_R(A) \otimes_A M \otimes_B \mathrm{Bar}_R(B)$。同时使用通过将两个带增广的$augmented$ 巴尔分解张量化而形成的分解，并将

M 置于中间，项 M 作为增广，正如 [16, 第 9 节。3]。其 p项（省略悬移）为

$$(A \otimes_R \bar{A}^{\otimes p} \otimes_R M) \oplus (M \otimes_R \bar{B}^{\otimes p} \otimes_R B) \oplus \bigoplus_{i+j=p-1} A \otimes_R \bar{A}^{\otimes i} \otimes_R M \otimes_R \bar{B}^{\otimes j} \otimes_R B.$$

两个分解都是 R-分裂的，这是利用与 M 张量的、在两侧线性的 Bar 收缩得到的。根据混合直和项的诱导形式，以及 M 在两个外侧直和项中的单侧投射性，它们的各项都是相对投射对象。第二个分解的第 p 个上同调核的底层模为

$$M_p = (\bar{A}^{\otimes p} \otimes_R M) \oplus \bigoplus_{i+j=p-1} \bar{A}^{\otimes i} \otimes_R M \otimes_R \bar{B}^{\otimes j} \otimes_R B.$$

事实上，在下一个微分的余核中，Bar 关系会将最左侧的系数移至一个以左单位元开头的代表元。混合直和项对以 M 开头的字也给出相同的约化。应用微分并投影到所示模上，即可得到这些单位元代表的逆。这些正是 R-线性的公式，见 [16, 引理 9.8 和等式 (9.9)–(9.10)]。映入此分解的纯左映射和纯右映射给出 $A_p \otimes_A M \to M_p$ 和$M \otimes_B B_p \to M_p$。前者是纯左嵌入。后者使用右 Bar 作用，即通过合并 $M \otimes_R \bar{B}^{\otimes p} \otimes_R B$ 的相邻项得到的交错和，其中包括两个外侧面映射。

可复合三角输入词要么是纯的，要么恰好包含一个来自 M 的项。因此，在 p 阶段，限制到两个纯复形上的映射是逐次分裂满射，其核是移位 $[-1]$ 的混合复形。混合项利用第一个分解计算从 M 到 M_p 在 $-p$ 次的相对 Ext。要计算连接映射，将纯上链延拓为零。在混合词中，这些延拓唯一保留的面映射，是作用于以 M 结尾或开头的词上的外侧作用。它们使用上面的两个余核映射，且符号相反。核上的过渡会在左侧前置一个悬移的条因子，并且在以 M 开头的词上为零。这诱导出混合余核序列的连接映射。具体而言，取一个值在 M_p 中的上链，用左单位元代表将其提升，施加上余边界，再投影到 M_{p+1}。内部面映射两两抵消，而左侧面映射恰好给出前置的因子及悬移符号。对纯项也可作同样的验证。这就是 [16, 式（9.20）–（9.22）和引理 9.12] 的计算；以上所有分裂和计算都在 R 上进行。

在 R-分裂正合结构中，对于模 X，Y 有

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{S}_R(D)}(X, Y[d]) \simeq \varinjlim_p \mathrm{Ext}^{d+p}_{D,\mathrm{rel}}(X, \Omega^p_R Y)$$

带有连接过渡。事实上，$Y \to \Omega^p_R Y[p]$ 具有完美锥。这些映射在从 Y出发的右分母中是共尾的，因为从有界的相对投射对象复形，或其移位或收缩，到 $\Omega^p_R Y[p]$ 的 Hom 在 p 充分大时消失。这种消失既保证了穿过任意分母的因子分解，也保证了分式演算中因子分解的最终相等性。取余极限后，d 次的连接映射，除去核的识别所带来的符号外，等于到 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{s}_R(C)}(M, M[d])$ 的两个张量特征映射之差。

对于第一个特征映射，先对 M 进行右张量，再对 N进行右张量。这些函子保持相对凝聚和相对投射对象。两种复合顺序分别在 $[-\ell]$ 与 A 及其移位之间的 Hom 群，以及 M 与其移位之间的 Hom 群上给出移位。要看出这一点，只需按照定理 4.5的证明，通过添加相对投射对象来稳定每个 syzygy 恒等式。相对投射误差具有以下形式：$D \otimes_R U \otimes_R D$的直和项。将其左张量于一个在左端点上投射的对象后，会得到相对投射双模。巴 syzygy 序列在左侧分裂；将其中间项张量于这些对象后，它们也成为相对投射对象。诱导的移位识别在这些 Hom 群上是自然的，因为所有张量和连接映射都下降到商上。对于 syzygy，这由它们作为诱导巴项的直和项所具有的单边分裂表示，以及 R-分裂张量论证得出。因此，Hom 上的两个复合都是双射，第一个特征映射也因此是双射。对于第二个特征映射，则使用左张量和右端点。

滤余极限是正合的。由于两个特征映射都是双射，三角复形的上同调就是它们的图，并且限制到任一角都是同构。这就证明了定理。

□

注4.9。 在域上，该定理是 [16, 定理9.6 和命题9。7]中的比较映射。相对比较使用分裂正合结构，并直接在 Bar模型上给出其两个严格的角映射。

4.7. 括号与投射中心。将零次替换为稳定中心未必会得到商Gerstenhaber代数。下面的例子在任意非零交换基环上都是自由的。

命题 4.10。设 R 为非零交换环。存在一个 R-代数 A，作为 R-模是秩七的自由模，并且

$$c \in Z^{\mathrm{pr}}(A) \qquad and \qquad \alpha \in \mathrm{HH}^2_R(A),$$

使得

$$[\alpha, c] \neq 0 \quad in\ \mathrm{HH}^1_R(A).$$

这里 $A^e_R = A \otimes_R A^{\mathrm{op}}$, $Z^{\mathrm{pr}}(A)$ 由那些可通过投射 A^e_R-模分解的 A 的双模自同态组成，而 $\mathrm{HH}^*_R(A)$ 是相对于 R-分裂正合列的 *Hochschild* 上同调。由于 A 在 R上是自由的，该上同调与 $\mathrm{Ext}^*_{A^e_R}(A, A)$一致。

因此，分次环

$$\mathrm{HH}^0_{\mathrm{st},R}(A) = Z(A)/Z^{\mathrm{pr}}(A), \qquad \mathrm{HH}^n_{\mathrm{st},R}(A) = \mathrm{HH}^n_R(A) \quad (n > 0)$$

未必继承来自$\mathrm{HH}^*_R(A)$的 *Gerstenhaber* 括号。

证明。 令 Q 的顶点为 0,1，在顶点 0 处有一个环 x ，并有箭

$$a : 0 \longrightarrow 1, \qquad b : 1 \longrightarrow 0.$$

我们按从左到右的顺序相乘路径。等价地，我们的 Peirce约定为

$$e_0 x = x = x e_0, \qquad e_0 a = a = a e_1, \qquad e_1 b = b = b e_0.$$

定义

$$A = RQ/(x^3, xa, bx, ba), \qquad c = ab.$$

存留下来的路径的剩余类构成 R-基

$$e_0,\ e_1,\ x,\ a,\ b,\ x^2,\ c.$$

令 $E = Re_0 \oplus Re_1 \cong R \times R$，并令 J 为箭理想，其基为 x, a, b, x^2, c。因此 $A = E \oplus J$ 作为 E-双模。来自 J 的这个基中两个元素的唯一非零乘积为

$$x \cdot x = x^2, \qquad a \cdot b = c.$$

特别地， $J^3 = 0$。 x 和 c 都属于 $Z(A)$。由于 R 非零且 c 是一个基元素，$c \neq 0$。

我们首先 证明 c 属于投射中心。赋予 $A \otimes_R A$ 其外双模结构 ，

$$r \cdot (u \otimes v) \cdot s = ru \otimes vs.$$

这个双模在 A^e_R上是秩为一的自由模。我们有

$$Ja = 0 = bJ, \qquad e_0 a = a, \qquad be_0 = b, \qquad e_1 a = 0 = b e_1.$$

由此可得

$$ra \otimes b = a \otimes br \qquad (r \in A).$$

因此

$$\iota : A \longrightarrow A \otimes_R A, \qquad \iota(r) = ra \otimes b,$$

是一个双模同态。乘法映射 μ： $A \otimes_R A \to A$ 也 是一个双模同态，并且

$$(\mu\iota)(r) = rab = rc.$$

因此，乘以 c 可经由一个自由的 A^e_R-模分解，所以 $c \in Z^{\mathrm{pr}}(A)$。

接下来我们构造一个霍赫希尔德二余循环。代数 $E \cong R \times R$ 在 R上可分，其可分元为 $e_0 \otimes e_0 + e_1 \otimes e_1$。规范化的 E-相对 Hochschild 上链为

$$C^n_E(A) = \mathrm{Hom}_{E\text{-}E}(J^{\otimes_E n}, A).$$

它们计算 $\mathrm{HH}^*_R(A)$。事实上，归一化的 E-相对 bar 分解的项为 s

$$A \otimes_E J^{\otimes_E n} \otimes_E A,$$

而与通常的 R-相对 bar 分解之间的比较映射是相对投射分解的同伦等价。在这个例子中，每个 $J^{\otimes_E n}$ 的 Peirce 分量都是 R上的自由模。因此，所展示的每一项都是双模 $Ae_i \otimes_R e_j A$ 的有限直和，而这些双模在 A_R^e 上是投射的。因此，同一个分解也计算普通 $\mathrm{Ext}^*_{A_R^e}(A,A)$。这也可以由 A 的 R-自由性推出。

定义一个 E-双模同态

$$f : J \otimes_E J \longrightarrow A$$

by

$$f(x,a) = a, \qquad f(x,c) = c,$$

并将其在 J 的所有其他基元素张量上的取值设为零。这些取值与 Peirce 分量相容，因此定义了一个 E-相对上链。若 $\pi\colon A \to J$ 是沿 E 的投影，则相应的普通 R-双线性 Hochschild 上链为

$$\widetilde{f}(u,v) = f(\pi(u),\pi(v)).$$

我们也用 f 表示此扩张。

对于 u， v， $w \in J$，Hochschild 微分为

$$(df)(u,v,w) = uf(v,w) - f(uv,w) + f(u,vw) - f(u,v)w.$$

第一项消失，因为 f 的每个非零值都是 a 或 c 的倍数，且 $Ja = Jc = 0$。第二项消失，因为 uv 是 x^2 和 c 的线性组合，而 f 的非零值的第一个参数必须是 x。在基元素三元组上，第三项仅在 $(x,\ a,\ b)$ 处非零，此时其值为 $f(x,\ c) = c$。第四项也仅在同一个三元组处非零，此时其值为 $-f(x,\ a)b = -c$。这两个值相互抵消。因此， $df = 0$ 在归一化的 E-相对复形中。等价地， f 关于 π 的扩张是普通 Hochschild 上链复形中的一个上循环：涉及 E 的三元组通过 E-双线性和配平满足微分恒等式。放置

$$\alpha = [f] \in \mathrm{HH}^2_R(A).$$

最后，我们计算括号。将 c 视为 Hochschild 零上链。按照通常的 Gerstenhaber 符号约定，将零上链插入二上链可得

$$[f,c](u) = f(c,u) - f(u,c).$$

因此，一上链 $D = [f,c]$ 满足

$$D(x) = -c, \qquad D(e_0) = D(e_1) = D(a) = D(b) = D(x^2) = D(c) = 0.$$

它是一个导子，这既可由 Hochschild 括号恒等式得出，也可通过直接使用上述乘法表验证。每个内导子都会消去中心元 x。由于$D(x) = -c \neq 0$，导子 D 不是内导子。因此

$$[\alpha, c] = [D] \neq 0 \quad \text{in } \mathrm{HH}^1_R(A).$$

最后，到稳定 Hochschild 分次环的典范投影会消去 c ，并且在一阶上是单位元。若 Gerstenhaber 括号能沿此投影下降，它就会将 $[\alpha, c]$映为与 c的零类的括号，因而映为零。其实际像却是非零类 $[D]$。因此，该括号不能下降到稳定商。□

注 4.11。 取 R 为 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ，得到有限自由 Artin R-代数。取 $R = k[[t]]$ 则得到正维完备诺特局部环上的有限自由代数。因此，对于投射于这两类基环中任一类之上的代数，该障碍依然存在。在零次中添加普通稳定中心，一般并不能将 Gerstenhaber 不变性定理扩展到正次数。这里考虑的商只改变普通 Hochschild 上同调的零次，必须将其与奇异上同调或 Tate–Hochschild 上同调区分开来。 [68]的全次数不变性定理涉及后者；参见第 4节。

5. Frobenius代数的 Tate–Hochschild BV 算子

设 k 为代数闭域。对于有限维 Frobenius 代数 R，固定一个 Frobenius 泛函 λ_R，满足 $\lambda_R(ab)=\lambda_R(b\nu_R(a))$，并令 $\sigma_R=\nu_R^{-1}$。我们假设 ν_R 可对角化。回顾 Itagaki、Sanada 和 Usui 的 BV 算子 [29, 定理 4.5 和推论 4.7]在正次数中对偶于扭曲 Connes 算子。在次数 $-m-1$ 中，它由右扭曲链的特征值为一的部分上的带符号的 Connes 算子给出 $C_m(R,\ R_{\sigma_R})$。当$m=0$时，其在上同调中的定义域是从扭曲 HH_0 到中心的范数的核。

设 A,B没有半单直因子，并设 (M,N) 是定义 Morita 型稳定等价的约化对。令 $E=\mathrm{End}_{B^{\mathrm{op}}}(M)$，并令 $\rho\colon A\to E$ 为左作用。取一个可对角化的线性同构 $\theta: M\to M$，使得

$$\theta(amb)=\sigma_A(a)\theta(m)\sigma_B(b).$$

由 [15, 引理 4.1(1)] 中的双模对偶可得 $D(A)\otimes_A M\simeq M\otimes_B D(B)$，其中 $D=\mathrm{Hom}_k(-,k)$。利用 $D(R)\simeq R_{\nu_R}$，再将所得的半线性映射求逆，即可得到所需的扭曲。其半单部分具有相同的扭曲，因为特征向量的乘法会将广义特征子空间映射到相应移位后的广义特征子空间。

取一个右 B-投射对偶基 (m_i,f_i)，使得 $\theta(m_i)=s_im_i$ 且 $f_i\theta=s_i\sigma_Bf_i$。为构造这样的基，将一个以权重为 s_i 的基为基的自由模映射到 M，其中使用特征向量；然后取共轭作用下某个 B-线性分裂的特征值 1 部分。令

$$\lambda_E(e)=\sum_i s_i^{-1}\lambda_B(f_i(em_i)).$$

这是矩阵泛函 $\lambda_B\mathrm{tr}(D_s^{-1}-)$ 在定义 M 的等变幂等元角上的限制，其中 $D_s=\mathrm{diag}(s_i)$。该矩阵泛函是 Frobenius 泛函，其逆 Nakayama 自同构是逐项施加 σ_B，再与 D_s 做共轭。非对角 Peirce 分量与该角的配对为零，因此限制配对是非退化的。在 $B\oplus M$ 上进行相同构造，会分别限制到其两个角中的 λ_B 和 λ_E。

定理 5.1. 在前述设定下，假设

$$\lambda_A(a)=\lambda_E(\rho(a))=\sum_i s_i^{-1}\lambda_B(f_i(am_i))\qquad(a\in A).\tag{5.1}$$

那么，由 $M\otimes_B-\otimes_B N$ 和稳定正则直项诱导的比较映射 $\Phi:\ \widehat{\mathrm{HH}}^*(B)\xrightarrow{\sim}\widehat{\mathrm{HH}}^*(A)$ 在所有次数上都是 *BV* 代数的同构。

证明. 定义 $\tau\colon E\to A$，使得 $\lambda_A(a\tau(e))=\lambda_E(\rho(a)e)$。结合律和扭曲迹恒等式$\lambda_R(uv)=\lambda_R(\sigma_R(v)u)$ 表明 τ 是一个 A-双模映射。条件 (5.1) 给出 $\tau\rho=1_A$。

令 $S=A^e$、$T=E^e$、$L=T\otimes_S-$ 和 $\pi=\tau\otimes\tau_{\mathrm{op}}$。为 R^e 配备 $\lambda_{R^e}=\lambda_R\otimes\lambda_R$，于是 $\lambda_S\pi=\lambda_T$。自然映射

$$T\otimes_S X\longrightarrow\mathrm{Hom}_S(T,X),\qquad t\otimes x\longmapsto(t'\mapsto\pi(t't)x)$$

是一个同构。对于 $X=S$，与 λ_S 复合，并利用 λ_T 的非退化性。一般断言由 T 作为左侧 S 上的有限投射性推出。因此，L 既是限制的左伴随，也是右伴随。

令 $p\colon\ L(A)=E\otimes_A E\to E$ 为乘法，并令 $j\colon\ E\to L(A)$ 表示在右伴随下对应于 τ 的态射。映射 ρ 是正则双模上 $-\otimes_A M\dashv-\otimes_B N$ 的单位元，这里使用了 $N=\mathrm{Hom}_{B^{\mathrm{op}}}(M,B)$。它是一个稳定同构。在 E 与 B 之间的 Morita 等价下，p 对应于同一伴随的余单位 $N\otimes_A M\to B$，其左端点为 B，因此它也是一个稳定同构。这些伴随下降为两侧均为射影的双模的稳定范畴之间的等价。这里，M_B 是一个投射生成元，因为 B 是 $N\otimes_A M$ 的直和项，并且 N_A 是有限投射的。

令 $u\colon A\to\mathrm{Res}\ L(A)$ 为诱导单位元，$v\colon\mathrm{Res}\,L(A)\to A$为另一个余单位，由$\pi\otimes1$给出。于是 $(\mathrm{Res}\ p)u=\rho$, $vu=1_A$ 以及 $v\,\mathrm{Res}\ j=\tau$。由于 u 是稳定同构，$\mathrm{Res}(pj)$ 在稳定意义下是单位元。限制函子能够检测这一等式：与 p 复合在从 E 出发的稳定映射上是双射；在伴随关系下，这等同于先限制、再与 ρ复合。因此$j=p^{-1}$ 在稳定意义下成立。从 E 到 A 的比较映射是先限制，再通过 ρ 和 τ进行压缩。经过 Morita步骤后，这就是给定的双模比较映射，因为从 B 到E 的 Morita函子在限制之前是 $M\otimes_B-\otimes_B N$。从 A 到 E 的逆是在次数 n由 $[g]\mapsto p[n]L([g])j$ 给出。

对于左 S-模 X，记 $X^\vee=\mathrm{Hom}_S(X,\ S)$。 $Q_\bullet$ 的逐项有限生成投射右分解的对偶给出 X 完全分解的负部分，并通过求值与一个投射分解拼接。存在自然的识别

$$T\otimes_S Q_i^\vee\simeq(Q_i\otimes_S T)^\vee,\qquad (L(X))^\vee\simeq X^\vee\otimes_S T.$$

第一个是有限投射对偶性，第二个则由伴随以及左侧的 S-投射性推出 T。在这些映射下，负 Tate Ext 中的诱导对应于 Tor 上的换环。与 j 作前复合并与 p 作后复合，分别通过 $j^\vee$ 和 p 作用于两个 Tor 变量。事实上，将系数映射提升到投射分解，并逐项应用有限投射对偶性。这些识别与拼接处的求值相容，从而给出次数 -1 [29,命题 2。3]中的求值核比较。

记 γ_x^R为 x 在 $R_{\sigma_R}\simeq\mathrm{Hom}_{R^e}(R,R^e)$中的像。 [29, 引理 2.1] 中的公式给出$\lambda_{R^e}(\gamma_x^R(y))=\lambda_R(xy)$。由伴随性， $\pi j^\vee(\gamma_x^A\otimes 1)=\gamma_x^A\tau$。另一方面，

$$\lambda_S(\pi\gamma^E_{\rho(x)}(y))=\lambda_E(\rho(x)y)=\lambda_A(x\tau(y))=\lambda_S(\gamma_x^A(\tau(y))).$$

到 S 的两个映射都是 S-线性的。将输入乘以 S 中的元素，并利用非退化性，即可证明这两个映射相等。因此，伴随性给出 $j^\vee(\gamma_x^A\otimes 1)=\gamma^E_{\rho(x)}$。此外， $p(1\otimes a\otimes 1)=\rho(a)$。因此，从 A 到 E 的负向比较，在扭曲Hochschild链上是通过对每个因子（包括系数）应用 ρ 诱导的。对于次数 -1 ，根据上述求值比较，此映射保持范数核。具体而言，范数映射的定义域与陪域上的两个映射分别由 $j^\vee\otimes p$ 和 $h\mapsto pL(h)j$诱导。恒等式 $(j^\vee L(\gamma))(y)=L(\gamma)(j(y))$使得求值映射构成的方块在取核之前便已交换。

对于 Morita步骤，设 e 是 Frobenius代数 D 的一个 σ_D-不变满幂等元，置 $H=eDe$ 和 $f=e\otimes e^{\mathrm{op}}$。包络模上的 Morita函子为 $D^ef\otimes_{H^e}-$。乘法将 H 的诱导与 D 相识别，而限制给出 $D^\vee f\simeq H^\vee$。对于 $x\in H$， γ_x^D 支集于 f，且其对 H 的限制取值于 fD^ef。比较受限的 Frobenius 泛函可知，该限制是 γ_x^H。因此，诱导分解上的有限投射对偶性在两个 Tor 变量上给出角包含，包括范数核上的映射。将此计算应用于 $D=\mathrm{End}_{B^{\mathrm{op}}}(B\oplus M)$ 的两个满角。

映射 ρ 以及两个角包含，视为取值于对象为 B 和 M 的范畴中的函子，都保持恒等态射和扭曲。因此，它们在副循环模型中保持面映射、退化映射和循环旋转。在特征值为一的部分上，它们与 Connes 对易。角映射在扭曲 Hochschild 同调上诱导 Morita 同构；由于可对角化性，在特征值为一的部分上也成立。这证明了对于 $n\le -1$，其与 BV 算子对易。

对于正次数，使用系数为 ${}_{\sigma_R}R$ 的左扭曲链，并通过 $\lambda_R(a_0f(a_1,\dots,a_n))$ 与上链配对。同一个副循环图给出了一个与 BV 算子交换的转置比较映射。为确定该映射，令 β_E 在 Morita 等价下对应于 $\beta\in\mathrm{HH}^n(B)$，并令 $\alpha=\Phi(\beta)$。对于 $n>0$ ，引理 4.2 中特征作用相等表明，在 $\mathrm{HH}^n(A,E)$ 中有 $\rho_*(\alpha)=\rho^*(\beta_E)$。将此等式与一个扭曲链配对，并使用 $\lambda_A=\lambda_E\rho$。Morita步骤通过在角链上求值并限制泛函来保持配对。因此，转置映射在正次数时为 Φ 。在零次时，它是在 Morita步骤之后通过 τ 进行压缩，由此诱导出稳定中心比较映射。这证明了该映射在一阶到零次之间交换。该算子在零次时为零。根据定理 6.2]，该比较映射保持乘积。□

注 5.2。 在左扭曲零次链模型中，记 $e=\sum_i e\,m_i f_i$。将由 $M\to B$ 给出的态射 f_i 移过扭曲循环旋转，得到角 $s_i^{-1}f_i(em_i)$ 中的 B 项。因此， λ_E 是 λ_B 经由扭曲 Morita 比较的拉回，并且与等变对偶基无关。相容泛函的存在性将在推论 5.3中确立。

即使对于恒等等价，泛函的选择也很重要。例如，设 $\mathrm{char}\,k\neq 2$ ，并令 C 为定向二循环的根平方为零代数。令 λ_C 在每条箭上的取值为 1，在每个顶点幂等元上的取值为 0。在 $A=C\otimes_k k[x]/(x^2)$ 上置 $\lambda(c_0+c_1x)=\lambda_C(c_1)$，并令 $\lambda'(a)=\lambda((1+x)a)$。这两个泛函的 Nakayama 自同构都交换 C 的两个顶点和两条箭，并固定 x。对于不变导子 $d=x\partial_x$， 一次算子给出 $\Delta_\lambda[d]=1$和 $\Delta_{\lambda'}[d]=1-x$，这是通过计算 $\lambda((\Delta_\lambda d)a)=\lambda(d(a))$ 以及关于 λ'的类似公式得到的。这两个值在 $\mathrm{HH}^0(A)$ 中已经不同。在稳定中心中它们也不同：

在 $S \otimes_k k[x]/(x^2)$ 上乘以 x，对于一个简单的 C-模 S 是非零的。将此模限制到 C 后，它是 $S^{\oplus 2}$，其通过投射对象分解的自同态为零。投射中心中的元素通过一个经由投射对象分解的映射作用于每个模，而从 A 到 C 的限制保持投射对象。

推论 5.3。保持定理 5.1中的代数与双模假设。固定泛函 λ_B、一个定义所指定的 λ_A^0 的初始泛函 ν_A，以及任意一个如上所述的可对角化半线性同构θ 。则 $\lambda_E \circ \rho$ 是 A 上的 *Frobenius* 泛函，其 *Nakayama* 自同构为 ν_A。更准确地说，存在一个中心单位 $z \in Z(A)^\times$，使得

$$\lambda_E(\rho(a)) = \lambda_A^0(az) \qquad (a \in A).$$

因此，对于相容的 *Frobenius* 泛函选择，给定的稳定等价在所有次数上诱导出 *Tate–HochschildBV* 代数的同构。

证明。定义 $\tau\colon\ E \to A$，令 $\lambda_A^0(a\tau(e)) = \lambda_E(\rho(a)e)$。扭曲迹恒等式以及 $\rho\sigma_A = \sigma_E\rho$表明 τ 是一个 A-双模映射。此步骤在施加（5.1）之前即可进行。

记 $M^* = \mathrm{Hom}_{B^{\mathrm{op}}}(M,\ B)$，并通过秩一自同态的求值将 E与 $M \otimes_B M^*$识别。对于 $m \in M$和 $f \in M^*$，等变对偶基给出

$$\begin{aligned}\lambda_A^0(\tau(m \otimes f)) &= \sum_i s_i^{-1}\lambda_B(f_i(m)f(m_i)) \\ &= \sum_i s_i^{-1}\lambda_B\big(f(m_i)\nu_B(f_i(m))\big) \\ &= \lambda_B\big(f(\theta^{-1}m)\big).\end{aligned}$$

最后一个等式由 $\theta^{-1}m = \sum_i s_i^{-1}m_i\nu_B(f_i(m))$ 得出。由于 B 是 Frobenius，映射$M^* \to D(M)$（定义为 $f \mapsto \lambda_B \circ f$）是一个向量空间同构。类似地，$\mathrm{Hom}_A(M,\ A) \to D(M)$（定义为与 λ_A^0 复合）是一个同构。前述恒等式以及 θ的可逆性表明，该 B–A-双模映射

$$M^* \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M, A), \qquad f \longmapsto (m \mapsto \tau(m \otimes f))$$

是一个同构。因此，τ是 $-\otimes_B M^* \dashv -\otimes_A M$的求值余单位。映射 ρ是 $-\otimes_A M \dashv -\otimes_B M^*$的单位元。

取左端点为 A时，这两个张量函子根据 (MT) 在两侧均为射影的双模的稳定范畴上诱导出逆等价。它们保持射影双模，因此两组伴随都可下降到稳定范畴中。于是，τ 和 ρ 在稳定范畴中都是同构。它们的复合是乘以 $z = \tau(1_E) \in Z(A)$，且在稳定意义下可逆。正则双模 A 没有投射直和项，因为这样的直和项会是一个可分直和代数因子。根据引理 9.1，z 是一个实际的单位元。因此，$a \mapsto \lambda_E(\rho(a)) = \lambda_A^0(az)$ 是非退化的。由于 z是中心的，这个泛函与 λ_A^0具有相同的 Nakayama 自同构。现在取 $\lambda_A = \lambda_E\rho$，便得到 (5.1)，于是定理 5.1 适用。□

5.1. **与 Tate 转移的比较**。

推论 5.4. 在定理5.1的假设下，定理$\mathrm{Ho}(B_\infty)$ 中的同构4.8，从 B 到 A的方向，诱导出 Φ，其中采用奇异 *Hochschild* 上同调与 *Tate–Hochschild* 上同调之间的识别。特别地，其上同调映射在每个次数上都与 *Tate BV* 算子交换，包括次数 -1中的范数核。

证明。包络代数是 Frobenius 代数。每个包络代数的稳定范畴都可与其奇点范畴识别，而稳定移位将正则双模的 Hom 群与 Tate Ext 识别。这些识别是通过从稳定模转到奇异商范畴得到的，因此与作用于双模的正合张量函子相交换。令 b 为 B 的一个次数为 d 的类，令 a 为它在奇异角比较下的像。其定义方程为 $a \otimes_A M = M \otimes_B b$。在右侧对其进行张量化，张量因子为 N。设 $V = M \otimes_B N$，并令 $i\colon\ A \to V$及 $p\colon\ V \to A$ 为用于定义 Φ的稳定正则包含映射和投影。系数双模中的张量化具有自然性，因此有

$$a = p[d](a \otimes_A V)i = p[d](M \otimes_B b \otimes_B N)i = \Phi(b).$$

对于第一个等式，可以使用表示 i, p 的实际映射，以及它们在相对导出范畴上、继而在商范畴上诱导的自然变换。这对

每个 d 都成立。定理 5.1 中的负链比较和拼接处的求值交换图，现给出了该映射的 BV 兼容性。此断言比较了上同调算子。 □

6. 代数与模的变形

本节中，基环是交换环 R，平坦的 R-代数不一定在R 上有限，除非另有说明。对于一个 R-平坦代数 D 以及交换环间核为幂零的满射 $S \to R$ ，令 $\mathbf{Def}^{D/R}(S)$ 表示带有标记 $\mathscr{D} \otimes_S R \simeq D$的 S-平坦结合含幺 S-代数 $\mathscr{D}$ 的同构类集合。同构须保持标记。系数环的态射是基于 R的映射，而基变换定义了 $\mathbf{Def}^{D/R}$。当$R = k$ 是域时，我们也将局部 Artin k-代数（其剩余域为 k）上的 $\mathbf{Def}_D$ 记作如此。

设 I 是 S 的一个理想，且 $S/I = R$。基于 S/I^n 的相容变形系统包含相邻约化之间指定的识别映射。如果 S 是 I-进完备的，则形式变形是一个 I-进完备的 S-代数，其约化在 S/I^n上平坦，并带有模 I 的标记。对于形式变形，基变换是完备基变换。

6.1. Morita 型稳定等价。 设 A, B 为 R-平坦代数，且 M 为一个 R-平坦的 A-B 双模。令 $C = A \otimes_R B^{\mathrm{op}}$ 和 $U = \left(\begin{smallmatrix} A & M \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right)$。对于一个 R-模 J，记

$$\mathrm{HH}^n(D/R; J \otimes_R D) = \mathrm{Ext}^n_{D^e}(D, J \otimes_R D), \qquad E^n_J = \mathrm{Ext}^n_C(M, J \otimes_R M).$$

令 a^n_J, b^n_J 表示从 A 和 B 的上同调到 E^n_J 的特征映射，它们分别由与 M 作导出张量得到。系数对象 $(J \otimes_R A) \otimes^{\mathbf{L}}_A M$ 和 $M \otimes^{\mathbf{L}}_B (J \otimes_R B)$ 由于在 R 上平坦，均可与 $J \otimes_R M$ 等同。记 r^n_A, r^n_B 为从 U 的上同调到系数为 $J \otimes_R U$ 时的两个角限制。

定理 6.1。 假设对于每个 R-模 J，两个角限制在一阶上均为满射，在二次上均为双射，在三阶上均为内射。则取角会诱导自然双射

$$\mathrm{Def}_{A/R} \xleftarrow{\sim} \mathrm{Def}_{U/R} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Def}_{B/R}.$$

对于 S/I^n 上带标记变形的相容系统，同样成立这一比较。如果 S 是 I-进完备的，且 I 是有限生成的，那么对于形式变形也成立。

如果对于每个 a^n_J, b^n_J 对 $n = 1$ 都是满射，对 $n = 2$ 是双射，且对 $n = 3$ 是内射，那么 J 就满足限制假设。在这种情况下， $R \ltimes J$ 上的比较映射是 $(b^2_J)^{-1}a^2_J$。特别地，如果 M 属于满足 (HH-MT) 的双伴随对 (M, N)，那么这些条件就成立。对于这样的伴随对， $R \ltimes J$ 上的比较映射是系数取自 J 的二阶压缩映射。

证明。 我们首先记录在 R 的幂零扩张中进行一步 $S' \twoheadrightarrow S$ 时的障碍计算，其中核 J 被 $\ker(S' \to R)$ 消去。在三角情形下，我们使用两个顶点幂等元的提升。它们可以跨越幂零理想提升，而任意两个互补提升都可由一个与 1 同余的单位元共轭得到。左下 Peirce 分量为零，因为它模掉后为零，且该理想是幂零的。因此，顶点的选取不会改变带标记同构类的集合。

令 $\mathscr{D}$ 为 D 的 S-平坦提升。取一个非正半自由微分分次代数分解 $L \to \mathscr{D}$。在三角情形下，令其取自 $S \times S$，其生成元位于两个对角分量和右上分量中。通过在三个分量中选取零次生成元，并添加负次数的生成元以消去上同调中逐次出现的核，即可得到这样的分解。两个角均为角代数的半自由分解，因为离开某个顶点的路径不可能再返回该顶点。

将底层的分次张量代数 L 提升到 S' ，并将其在生成元上的微分提升为导子 $\widetilde{d}$。平方 $\widetilde{d}^2$ 取值于 $J \otimes_S L$。它是复形 $\mathbf{Der}(L, J \otimes_S L)$ 中的二次上循环，其中导子取在系数环上；在三角情形下，它们在顶点上为零。在任意特征下，奇导子的平方都是导子，因为莱布尼茨公式中的两个交叉项相互抵消。此外 $[\widetilde{d}, \widetilde{d}^2] = 0$，并且将 $\widetilde{d}$替换为 $\widetilde{d} + h$会使平方改变 $[d, h]$，因为 $J^2 = 0$。将源约化为 R并利用 $\mathscr{D}$的平坦性，我们将此复形计算为 $\mathbf{Der}(L \otimes_S R, J \otimes_R D)$，差一个拟同构。要看出这一点，半自由代数的非交换微分双模是半自由的，并且可按生成元过滤，而

$J \otimes_S L \to J \otimes_R D$ 是一个拟同构。对于 $L_0 = L \otimes_S R$ 和 $E = R$ 或 $E = R \times R$，序列

$$0 \longrightarrow \Omega^1_{L_0/E} \longrightarrow L_0 \otimes_E L_0 \longrightarrow L_0 \longrightarrow 0$$

分别将二阶和一阶导子次数上的上同调与 $\mathrm{HH}^3(D/R;\ J\otimes_R D)$ 和 $\mathrm{HH}^2(D/R;\ J\otimes_R D)$ 联系起来。这里，E 在 R上可分，而 D 的 R-平坦性使导出包络代数与 D^e相同。在零次上，这些系数下 L_0 的闭导子就是从 D 到 $J \otimes_R D$ 且在 E上消失的导子。这些对应关系与取角运算相容。

~障碍消失后，可以将 d 修正为一个微分。由此得到的 S' 上的自由复形，其上同调集中于零次，且其零次上同调是 S'-平坦的。事实上，对于任意 S'-模 V，滤过 $0 \subseteq JV \subseteq V$的子商都在 S上。将其与自由复形张量化，并利用 $\mathscr{D}$ 的 S-平坦性，可得上同调集中于零次。这就得到了上述两项结论以及约化后的所需对应关系。反过来，对于任意平坦提升，都可以将 L 的增广连同微分逐步提升到该提升上，依次处理各生成元。在零次上，提升所选的像。对于一个次数为 $-q$ 且$q \geq 1$的生成元，将其原微分提升到部分构造的分解的 $1-q$ 次。该提升作为增广复形中一个圈的缺陷，属于约化核的 $2-q$ 次；我们将增广目标置于一阶。这个缺陷是正合增广复形 $J \otimes_S (L \to \mathscr{D})$中的一个圈。取其 $1-q$ 次的原像即可修正该提升。这些次数只涉及已经构造好的生成元。对于两个平坦提升，固定约化上的同构同样可以提升为链映射。选取每个生成元的像，使其约化后对应于 L的该生成元。在零次上修正其增广；在负次数上，则利用目标分解的同一个正合约化核修正链映射方程的缺陷。两个提升的微分之差是一个取值于 $J \otimes_S L$的一阶导子。与 $1+h$ 共轭，其中 h是一个取值于该处的零次导子，可使此差改变一个上余边界。因此，障碍消失当且仅当存在平坦提升；固定约化后的提升类构成一个由 $\mathrm{HH}^2(D/R; J \otimes_R D)$ 作用的挠子。诱导约化上单位元的自同构具有 $1+\delta$的形式，其中 δ 是一个从 D 到 $J \otimes_R D$ 且在 E上消失的导子。

对于任一角，三阶内射性保证：只要该角可提升，就存在三角提升。二次双射性保证：存在唯一的提升类，使其具有指定的约化和角类。角上的映射对在顶点处取零的导子是满射。事实上，一阶满射性可将模内导子的导子类提升；而任一角的内导子都可通过在 $J \otimes_R U$中使用相同的对角元素来提升。这也给出了关于同构的相对结论。给定两个三角约化之间的同构，以及一个与之相容的提升角同构，可用前者来识别这些约化。二次内射性保证存在一个三角同构，提升该识别。它与指定角同构之差是上述类型的导子，而提升该导子即可修正三角同构。沿幂零核的各次幂作归纳，即可证明这些双射。自然性源于取角与基变换可交换。同样的提升论证还可在 S/I^n上构造相容的三角提升和相容的比较同构。对于有限生成的 I，由 [64,标签 09B8]可知，其极限恰好具有给定的约化。

为验证特征映射判据，使用系数取为 $J \otimes_R U$ 的三角长正合列，其中间映射为 $a_J^n - b_J^n$ [32, 第 4 节。5]。对这些系数的正合列可通过将微分分次条形余链分解为两个角和混合串得到。在三角半自由模型中，每个混合串都包含一个非对角项。该项的双边条形分解给出计算 $E_J^\bullet$ 的复形，在混合直和项中移位一位。连接映射是两个张量作用之差，如引理 4.3 所述。等价地，限制到 A 的同伦纤维是特征映射从 B 出发的移位锥，反之亦然。因此，关于 b_J^n 和 a_J^n 的条件分别给出了关于 r_A^n 和 r_B^n 的所述条件。在二次情形下，两个角中的像是 $(b_J^2)^{-1}a_J^2$ 的图。

最后，设 $(M,\ N)$ 是满足条件（HH-MT）的双伴随对。使用双模上的伴随 $-\otimes_B N \dashv \otimes_A M$。在由此得到的 Ext 伴随下，$a_J^n$ 是沿余单位作拉回

$$\epsilon_A : M \otimes_B N \longrightarrow A$$

在$\mathrm{Ext}^n_{A^e}(-, J \otimes_R A)$的第一个变量中。对于两侧均为投射的双模，这两个函子保持投射双模，并且在模掉投射对象后互为逆等价。这由（HH-MT）可知，因为将投射误差双模与此类对象张量化，所得对象仍然是

一个投射双模。伴随关系下降到商上，因此 ϵ_A 在此处可逆。第一个变量中经过投射对象分解的映射，在正次数 Ext 中诱导出零。因此a_J^n 是一个同构，其中 $n>0$；另一侧的伴随关系证明 b_J^n 也同样如此。若$a_J^2(\alpha) = b_J^2(\beta)$，应用 $N\otimes_A -$ 并取 B-分量中的正则 $N\otimes_A M = B\oplus Q$。左侧是 α的压缩，右侧则是 β，如引理 4.2所述。□

推论。 任意域上的有限维代数之间的 *Morita* 型稳定等价，会在带标记结合代数变形函子之间诱导一个自然同构。其切映射是二阶压缩映射。

证明。乘积的带标记变形就是其各因子的带标记变形之乘积。事实上，块幂等元可以提升，而非对角 Peirce 分量由幂零性可知为零。可分因子在每一阶都有唯一的带标记提升类，因为其取任意系数时的正 Hochschild 上同调均为零。将通常投射类应用于推论 9.7 ，可得一个支集位于非可分块之乘积上的约化对。限制到这些乘积后，其两个复合函子都包含正则双模，且其张量函子互为双伴随。因此定理 6.1 适用。将约化混合双模在可分因子上延拓为零，即可得到原代数的三角比较。在可分因子上，取所示系数时的所有正上同调均为零，因此特征映射判据在整个三角代数上也成立。正上同调中的比较不受从该对中省略射影直和项或进行此块约化的影响。事实上，被省略的张量项都是投射的，而可分因子的正上同调为零。因此，压缩将所得比较映射与原对的比较映射对应起来。□

在本小节的其余部分，令 k 为特征零的域，并取前述推论中的有限维三角代数 U。令 $\mathscr{O} = k[[t_1,\dots,t_d]]$，并令 $\mathfrak{m}$ 为其极大理想，且令 $V = (\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)^*$。对于一个特殊纤维为 A的、关于 $\mathscr{A}$ 进完备的平坦变形，Bezrukavnikov 和 Ginzburg 关联了微分分次代数同伦范畴中的一个映射

$$\mathrm{Deform}_{\mathscr{A}} : \mathrm{Sym}(V[-2]) \longrightarrow \mathbf{R}\,\mathrm{Hom}_{A^e}(A,A).$$

我们采用他们关于增广以及特殊纤维同一化 [7, 定理 1.2.3]的约定。

命题 6.2。 相应的形式变形 $\mathscr{A}$，$\mathscr{B}$ 在定理 *6.1* 中可以实现为一个共同形式变形的角 $\mathscr{U}$，该形式变形 U属于三角代数 U。对于这样的选择，两个 *Bezrukavnikov–Ginzburg* 映射是 $\mathrm{Deform}_{\mathscr{U}}$ 与由取角所诱导的两个导出 *dg* 端同态代数上的态射的复合。

证明。 定理 6.1 中的形式比较 $\mathscr{U}$ 给出了具有两个指定标记角的对象。约化在 Artin 商环 $\mathscr{O}$上是有限自由的，因此 $\mathscr{U}$ 在 $\mathscr{O}$上是有限自由的。

为了比较 dg 映射，在构造 [7, (3.1.4)–(3.1.6)]中使用公共的基底分解 $\mathscr{R}\to k$ 和外 dg 代数 Λ 。对于变形 $\mathscr{D}$，定义该映射的 dg 函子由核给出

$$\Theta_{\mathscr{D}}(W) = \big((\mathscr{R}\otimes_{\mathscr{O}}\mathscr{R})\otimes_{\mathscr{O}}\mathscr{D}\big)\otimes_{\Lambda} W.$$

如果 e 是提升顶点之一，则在 $\Theta_{\mathscr{U}}(W)$上取 $e(-)e$，得到 $\Theta_{e\mathscr{U}e}(W)$作为自然 dg 识别。事实上，$e$ 作用于代数因子上，并且与基底分解及外代数作用交换。取角是精确的，并且与到特殊纤维的增广交换。特别地，它将由平凡 Λ-模得到的 distinguished 对象映射为该角所对应的 distinguished 对象。转到导出 dg 端同态后得到

$$\mathrm{Deform}_{\mathscr{A}} = r_A\,\mathrm{Deform}_{\mathscr{U}},$$
$$\mathrm{Deform}_{\mathscr{B}} = r_B\,\mathrm{Deform}_{\mathscr{U}}.$$

这里的 r_A, r_B 由 dg 双模范畴上的角限制诱导。它们的上同调映射就是上文使用的对角限制。□

6.2. **标准导出等价**。我们沿用上文的系数范畴和形式变形约定。令 A, B 为 R-平坦代数。

固定一个由 B-A-双模构成的双侧倾斜复形 X，其逆为 Y。根据导出 Morita 理论 [53, 54, 30]，若 A 和 B 上完美复形的范畴是 R-线性等价的，或者全体模的无界导出范畴是 R-线性等价的，则可以选取这样一对对象。

对于域上的有限维代数，可以从有限维模的有界导出范畴着手。为比较 Bezrukavnikov–Ginzburg 映射，令

$$\Phi_X = X \otimes^{\mathbf{L}}_A (-) \otimes^{\mathbf{L}}_A Y.$$

该识别 $\Phi_X(A) \simeq B$ 诱导出比较映射 $\Phi_{X,*}$ 作用于对角线的导出 dg 端同态代数上。在特征零域上，Keller 的 Hochschild 比较 [32, 第 4 节。6]还通过 dg Lie 判据给出了经典的无穷小比较。

命题 6.3. 设 R，A，B，X，Y如上所述。

(1) 对于具有幂零核的满射 $S \to R$，X 诱导一个自然同构式 m

$$\mathrm{Def}_{A/R} \simeq \mathrm{Def}_{B/R}.$$

对于对应的变形 $\mathscr{A}$、$\mathscr{B}$，存在一个定义在 $\mathscr{B}$ 和 $\mathscr{A}$ 上的双侧倾斜复形，其特殊纤维为 X。

(2) 对于任意满足 $S/I = R$ 的理想 I，该对应关系延拓为关于 S/I^n 上带标记的平坦变形的相容系。若 S 是 I-进完备的，且 I 是有限生成的，则取逆极限给出带标记的形式变形之间的自然双射。若两个形式代数都是 S-平坦的，则双侧倾斜复形存在于 S 上。特别地，当 S 是诺特且完备时，这一点成立。

证明。 取一个有界复形 T，其项为有限生成投射右 A-模，并表示X_A。其自同态复形的上同调 B 仅集中在零次，这一识别由 X上的左作用给出。

首先设 $I = \ker(S \to R)$ 为幂零的。逐步通过 S/I^j 提升 T。在核为$J = I^j/I^{j+1}$ 的步骤中，利用幂等元提升即可提升投射项。微分的分次提升的平方是 $J \otimes_R \mathrm{End}^{\bullet}_A(T)$ [55, 45] 中的二次上循环。由于自同态复形有界且 R-平坦，并表示平坦模 B，该复形的上同调 $J \otimes_R B$仅集中在零次。减去一个具有所示上余边界的一次上链即可得到一个微分。迭代得到 $\mathscr{A}$上的有界投射提升 P。

对于一个由平坦 S-模组成的有界复形 C，假设 $R \otimes_S C$ 的上同调仅集中在零次，且该上同调是 R-平坦的。若 L 是一个 R-模，则根据在 R上的导出张量，$L \otimes_S C$ 的上同调仅集中在零次。对于任意 S-模 L，按 $I^j L$的滤过给出相同的集中性，因为与 C 张量化逐项都是正合的。取 $L = S$，再取任意 L，即可证明 $C \simeq H^0(C)$，且 $H^0(C)$ 是 S-平坦的。特别地，

$$H^0(S' \otimes_S C) \simeq S' \otimes_S H^0(C)$$

对于每个交换的 S-代数 S'。沿着有界复形，利用上循环、边界和上同调的正合列进行下降，可知上循环和边界都是平坦的。

如果 Q 是另一个有界投射提升，则将此论证应用于 $\mathrm{Hom}^{\bullet}_{\mathscr{A}}(P, Q)$。其各项都是 $\mathscr{A}$的有限直和的直和项，并且其特殊纤维在零次表示 B。因此，特殊纤维的一个给定同伦等价可提升为链映射。从 R 进行导出约化对 $\mathscr{D}(S)$是保守的。事实上，如果 $R \otimes^{\mathbf{L}}_S C' = 0$，那么由结合律 (I^j/I^{j+1})，对于每个j都有 $\otimes^{\mathbf{L}}_S C' = 0$，而 S 的有限滤过给出 $C' = 0$。将此应用于锥，即可证明所提升的映射是同伦等价。

令 $H = \mathrm{End}^{\bullet}_{\mathscr{A}}(P)$ 并置 $\mathscr{B} = H^0(H)$。前面的平坦性论证给出了 $\mathscr{B}$的平坦性和基变换。拟同构 $H \leftarrow \tau_{\leq 0} H \to \mathscr{B}$ 给出一个 $\mathscr{B}$-$\mathscr{A}$-复形 $\mathscr{X}$，其底层右复形为 P。由于上循环、边界和上同调的平坦性，这些映射与基变换交换。特殊纤维具有相同的底层右复形，并且其导出自同态上的左作用与 X相同。再对右侧进行 Y后，它变成一个只有零次上同调的复形，并且在该处具有两个正则 B-作用。这将特殊纤维与 X等同起来。

令 $\mathscr{Y} = \mathbf{R}\,\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathscr{X}, \mathscr{A})$。右完美性给出同构 $\mathscr{B} \simeq \mathscr{X} \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathscr{A}} \mathscr{Y}$。另一个求值映射在对 R 作导出约化后是同构，因此由保守性可知它是同构。这些核提升了 X, Y，且彼此互为逆。对于同一个 $\mathscr{A}$，任何此类提升的底层右复形都是 T 的提升，因此其自同态代数给出 $\mathscr{B}$ 的同一标记类。因此，Y 的构造给出逆对应，而 $H^0(H)$ 的公式给出自然性。关于完备离散赋值环上阶的相关提升对应，参见 [21, 命题 3.6]。

现在令 $S_n = S/I^n$ ，并设 $(\mathscr{A}_n)$ 是一个关于 S_n 的相容系。障碍计算给出相容的投射提升 P_n ，且微分相容。令 $H_n = \mathrm{End}^\bullet_{\mathscr{A}_n}(P_n)$ 和 $\mathscr{B}_n = H^0(H_n)$。由 (1)，这些构成一个相容的平坦系。对于两种提升系的选择，Hom 比较映射通过逐步提升给出相容的带标记同伦等价。它们诱导带标记代数系的一个同构。(1) 中的基变换公式证明了这些系上的自然性。

为求逆，置 $K_n = \tau_{\le 0} H_n$，令 (U_n) 为 Y 的右B-复形在 $(\mathscr{B}_n)$ 上的一组投射提升，并置 $W_n = \mathrm{Hom}^\bullet_{\mathscr{A}_n}(P_n,\ \mathscr{A}_n)$。在每个阶段， W_n 是来自 (1) 的逆倾斜核的右复形。因此，通过拟同构 $K_n \to \mathscr{B}_n$， $U_n \simeq W_n$ 在 K_n 上成立。这些同构可以与标记相容地选取。事实上，$\mathscr{B}_n$ 上的两个复形都是同一个倾斜复形的完美提升。它们的 Hom 复形的平坦性论证给出了约化下零次态射的满射性，而同构的提升在保守性下仍为同构。 $\mathscr{A}_n$ 在 W_n 上的左作用给出相容的带标记的同构

$$\mathscr{A}_n \simeq \mathrm{End}_{\mathscr{D}(\mathscr{B}_n)}(U_n).$$

交换 X 和 Y 的角色，即可得到系统上的另一个逆恒等式。

如果 S 是完备的且 I 是有限生成的，则完备代数 $\mathscr{A}$、$\mathscr{B}$ 分别是具有约化 $\mathscr{A}_n$、$\mathscr{B}_n$ 的系统的逆极限，亦即 [64, Tag 09B8]。因此，系统比较映射给出了完备变形的断言。取幂等矩阵的逆极限可知， $P = \lim_{\longleftarrow n} P_n$ 和 $U = \lim_{\longleftarrow n} U_n$ 分别是 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 上由有限生成投射对象构成的有界复形。令 $H = \mathrm{End}^\bullet_{\mathscr{A}}(P) = \lim_{\longleftarrow n} H_n$。由项上的满射性以及 $H^0(H_n)$ 上的满射性，根据逆极限上同调正合列，对于 $i \neq 0$ 有 $H^0(H) = \mathscr{B}$ 和 $H^i(H) = 0$。

假设 $\mathscr{A}$和 $\mathscr{B}$是 S-平坦的。记 $K = \tau_{\le 0} H$并置 $W = \mathrm{Hom}^\bullet_{\mathscr{A}}(P,\ \mathscr{A})$，一个右 dg K-模。受限 K-模 U 到 K_n 的导出基变换通过到 $\mathscr{B}$ 和 $\mathscr{B}_n$的拟同构是 U_n 。由于 $W = \mathbf{R}\lim_{\longleftarrow n} W_n$，伴随给出

$$\mathbf{R}\,\mathrm{Hom}_K(U, W) \simeq \mathbf{R}\varprojlim_n \mathbf{R}\,\mathrm{Hom}_{K_n}(U_n, W_n).$$

由逆极限上同调正合列，相容的同构提升为态射 $U \to W$。该态射是同构，因为 U 和 W 是两个逐项满射系的导出逆极限，且它到 W_n 的复合映射由有限阶段所选的同构给出。映射 $K \to \mathscr{B}$ 如(1)所示给出 $\mathscr{X}$。由 $U \simeq W$，其右对偶 $\mathscr{Y}$在 $\mathscr{B}$ 上是右完美的。 $\mathscr{Y} \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathscr{B}} \mathscr{X}$的底层 S-复形属于由 P生成的 $\mathscr{D}(S)$的厚子范畴。对于 P和 $\mathscr{A}$，由完备性和平坦性逐项成立，映射 $C' \to \mathbf{R}\lim\!\longleftarrow_n\!(S_n \otimes^{\mathbf{L}}_S C')$是同构。此性质在厚运算下封闭。根据(1)，求值映射在约化到每个 S_n 后是同构，因此它在 S上也是同构。另一个求值同构由右 $\mathscr{A}$-完美性推出。当 S 是诺特的，逆极限所需的平坦性由 [70,定理5.11]推出。□

定理 6.4. 设 $R = k$ 是特征零域，并设 $\mathscr{O} = k[[t_1, \ldots, t_d]]$。设 $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ 是命题 6.3中相应的、基于 $\mathscr{O}$ 的带标记形式变形。那么在微分分次代数的同伦范畴中

$$\mathrm{Deform}_{\mathscr{B}} = \Phi_{X,*}\,\mathrm{Deform}_{\mathscr{A}}\,.$$

证明。 由命题 6.3，代数 $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ 是 $\mathscr{O}$-平坦的。它们的约化在 $\mathscr{O}$的局部阿廷商环上是平坦的，因而是自由的，正如 [7, 第 1 节.2]所要求的。对于构造 [7, (3.1.4)–(3.1.6)]中的两个代数，使用相同的 $\mathscr{R}$ 和 Λ。记 $K(W) = (\mathscr{R} \otimes_{\mathscr{O}} \mathscr{R}) \otimes^{\mathbf{L}}_{\Lambda} W$。因此，$\mathscr{D}$的函子由 $K(W) \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathscr{O}} \mathscr{D}$ 表示。对于 $\mathscr{D} = \mathscr{A}, \mathscr{B}$，令 $\mathscr{D}' = \mathscr{R} \otimes_{\mathscr{O}} \mathscr{D}$。通过导出基变换将 $\mathscr{X}, \mathscr{Y}$扩展到 $\mathscr{R}$，并将所得的核记为 $\mathscr{X}'\!, \mathscr{Y}'$。存在自然同构

$$\begin{aligned}\mathscr{X}' \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathscr{A}'} \Theta_{\mathscr{A}}(W) \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathscr{A}'} \mathscr{Y}' &\simeq K(W) \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathscr{O}} (\mathscr{X} \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathscr{A}} \mathscr{Y}) \\ &\simeq \Theta_{\mathscr{B}}(W).\end{aligned}$$

对于第一个同构，选取分解来计算导出张量积，并使用张量积的结合律。两个 $\mathscr{R}$-作用由 $K(W)$ 承载。对于第二个同构，使用求值同构 $\mathscr{X} \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathscr{A}} \mathscr{Y} \simeq \mathscr{B}$。这些同构对于微分分次模型上的 W 是自然的。沿 $\mathscr{R} \to k$ 在两端进行标量扩张，通过导出基变换与这个比较映射相容。两个扩张后的核变为 X 和 Y，因此在特殊

纤维是 Φ_X。对于增广的 Λ-模 k，该识别是由 $X\otimes^{\mathbf{L}}_A Y\simeq B$ 所诱导的对角识别。取导出 dg 端自同态，并按照 [7,(3.2.1)]，中的做法与同一个 Koszul 态射复合，即得所述等式。□

分次 *Koszul* 对偶。对于一个非负分次的 k-代数 D，其齐次分量均为有限维，记 $\mathrm{Def}^{\mathrm{gr}}_D(S)$ 为有限自由齐次分量且带有一个关于 k 的分次标记的分次 S- 代数的同构类。这里，S 是一个交换局部 Artin$k$-代数，剩余域为 k，并置于零次。各同构保持分次与标记。我们采用如下约定：二次对偶会反转一阶双模 [49] 的两侧。

命题 (分次 Koszul 对偶)。设 k 是特征任意的域。设 D 是一个齐次分量均为有限维且具有 $D_0=E=k^r$ 的 *Koszul* 代数。记其二次对偶为 $D^!$。则二次对偶诱导一个自然同构

$$\mathrm{Def}^{\mathrm{gr}}_D\simeq\mathrm{Def}^{\mathrm{gr}}_{D^!}.$$

证明。设 $\mathscr{D}$ 是一个关于 S的带标记分次变形。将顶点幂等元提升到 $\mathscr{D}_0$。由中山引理，非对角 Peirce 分量为零；而在每个对角分量中，提升后的幂等元构成一个 S-基。这给出 $\mathscr{D}_0$ 与 $E_S=S\otimes_k E$ 的同一识别。由于局部环乘积的本原幂等元由其约化确定，因此在给定标记的条件下，该识别是唯一的。令 $V=\mathscr{D}_1$，并令 I 为 $V\otimes_{E_S}V\to\mathscr{D}_2$的核。由逐权的中山引理，$V$ 在 E_S 上生成 $\mathscr{D}$。到 $\mathscr{D}_2$ 的满射在每个 Peirce 分量中都分裂，因此 I 与基变换可交换。满射 $T_{E_S}(V)/(I)\to\mathscr{D}$ 在 k 上约化后是同构，因为 D 是二次的。每个权次的目标都是 S-自由的，因此约化保持该满射的核。由中山引理可得 $\mathscr{D}=T_{E_S}(V)/(I)$。

考虑约化 E_S-bar 复形的权重-w 部分

$$B_n(\mathscr{D})_w=(\mathscr{D}_{>0}^{\otimes_{E_S}n})_w.$$

它是在 bar 次数不超过 w 的有限自由 S-模的有界复形。由 D 的 Koszul 性可知，其约化的同调仅出现在 bar 次数 w。在微分的单位元项处分离出两项可缩复形后，剩下的复形的微分模极大理想为零。因此，它唯一的非零项是在 bar 次数 w 上的自由模。特别地，$H_w(B_\bullet(\mathscr{D})_w)$ 是自由的，并且与任意 Artin 基变换相容，且微分的像是分裂的。

将具有反向双模作用的 $V^\vee=\mathrm{Hom}_S(V,S)$ 写作。在分裂 Peirce 分解中，对张量取对偶会使其因子顺序反转。对于 $w\geq 2$从 $B_w(\mathscr{D})_w$ 到 $B_{w-1}(\mathscr{D})_w$ 的微分，它由分别映入各个直和项的相邻乘法 $V\otimes_{E_S}V\to\mathscr{D}_2$ 构成，并带有 bar 符号。其转置的像是 $I^\perp$ 的各个相邻插入之和。由于该微分的像是分裂的，因此可得

$$\left(T_{E_S}(V^\vee)/(I^\perp)\right)_w\simeq\mathrm{Hom}_S(H_w(B_\bullet(\mathscr{D})_w),S).$$

权重零和权重一中的相同公式分别由 E_S 和 V 得出。因此，二次对偶定义了 $D^!$ 的带标记的分次变形，并且与标量扩张可交换。它将带标记的同构映射为方向相反的带标记同构，因此在同构类上诱导出一个映射。同样的构造也适用于 $D^!$，后者同样是 Koszul 的。双对偶性和 $(I^\perp)^\perp=I$ 恢复带有其标记的 $\mathscr{D}$，并给出逆自然映射。□

在特征零的情形下，若 [32，第 3 节 5] 中零次代数满足可分性假设，该断言同样成立。事实上，在 Keller 的 B_∞ 比较映射中取 Adams 次数为零的上链。在对偶代数上，其齐次元素的上同调次数与 Adams 次数互为相反数。因此，Adams 次数为零的上链具有内部上同调次数零，而其总次数就是其重数。两个移位后的权重零复形及其 Gerstenhaber 括号通过微分分次李拟同构相联系。Maurer–Cartan 方程就是乘法的分次扰动所满足的结合律，而规范作用则是化归为单位元的分次坐标变换。归一化上链固定单位元，并且在 Adams 次数为零时与所有上链拟同构。微分分次李变形判据 [46] 给出了该断言。

即使两个代数都是有限维的，分次限制仍然至关重要。令 Q 具有如下箭：$a:\ 1\to 2$、$b:\ 2\to 3$ 和 $c:\ 1\to 3$。带有路径长度分次的根平方为零代数 $D=kQ/(ba)$ 是 Koszul 代数，而$D^!=kQ^{\mathrm{op}}$ 是路径代数。归一化 Hochschild

复形相对于可分顶点代数 k^3 的 D 具有一维的二次项，其定义为将 $b\otimes a$ 映射到 c的某个倍数。由于两个箭的乘积为零，且每个顶点双线性的一次上链都将箭映射为箭，入微分为零。由于不存在可复合的三箭，三次项为零。因此，$\mathrm{HH}^2(D,\ D)\ \simeq k$，其生成元由 $ba=\epsilon c$ 在 $k[\epsilon]/\ (\epsilon^2)$ 上表示。路径代数 $D^!$ 具有长度为一的双模分解，因此 $\mathrm{HH}^2(D^!,\ D^!)\ =0$。普通带标记变形函子具有不同的切空间。

6.3. **局部 Artin 环上的模变形。** 设 R 是一个剩余域为 k的交换局部 Artin 环，并设 A 是一个有限自由 R-代数。对于一个 R-代数 S 记作 $A_S=S\otimes_R A$。在变形理论中，使用具有指定剩余域的完备局部系数环是标准做法 [62, 8, 9]。Bleher 对块代数的比较映射使用了系数环上的稳定等价 [8, 引理 2.2。2]。这里我们固定一个 A-模，其定义在 R 上，并将特殊纤维标记在整个环上 R。

我们用 $\mathscr{C}_R^{\mathrm{aug}}$ 表示这样的范畴：其对象是完备局部交换诺特R-代数 S，它们的剩余域与 R 相同，均为 k，并配备一个局部 R-代数增广映射$\epsilon_S:\ S\to R$。结构映射 $R\to S$ 在 k上诱导指定的单位映射，而 $R\to S\xrightarrow{\epsilon_S}R$ 是单位元。态射是连续的局部 R-代数同态，它们在 k 上诱导单位映射并与增广映射相容。我们将 $\mathscr{C}_R^{\mathrm{aug}}$，$\mathrm{Art}$ 记为 Artin对象的全子范畴。

定义 6.5。 设 V 是一个 A-模，并且在 R 上有限自由。对于 $S\in\mathscr{C}_R^{\mathrm{aug}}$，$V$ 在 S 上的一个提升是一个二元组 $(L,\ \phi)$，其中 L 是有限 A_S-模，在 S 上自由，并且有一个 A-线性同构 $\phi:\ R\otimes_{S,\ \epsilon_S}L\to V$。如果存在一个 A_S-模同构，使其在沿 ϵ_S 约化后与标记相容，则称两个提升等价。基变换定义了 $\mathscr{C}_R^{\mathrm{aug}}$ 上的函子 $\mathrm{Def}_{A,\ V/R}$。

V 在 R 上的万有变形环是 $\mathscr{C}_{\mathrm{aug}\,R}$ 中的一个对象 $U_R(A,\ V)$，它表示 $\mathrm{Def}_{A,\ V/R}$。因此，万有提升的基变换给出自然双射

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_R^{\mathrm{aug}}}\big(U_R(A,V),S\big)\xrightarrow{\sim}\mathrm{Def}_{A,V/R}(S)\qquad(S\in\mathscr{C}_R^{\mathrm{aug}}).$$

对于 $S\in\mathscr{C}_R^{\mathrm{aug}}$，令 $S_n=S/\mathfrak{m}_S^n$。当 n 足够大时，S 的增广经由 S_n 分解，这是因为 R 的极大理想是幂零的。在将关于 Artin对象的论证应用于完备测试环时，我们使用这些增广商。

引理 6.6. 令 $V_k=k\otimes_R V$。假设 V_k 是 A_k上的 *Gorenstein* 投射模。对于每个有限投射 A-模 P，添加提升 P_S 可得到一个自然双射

$$\mathrm{Def}_{A,V/R}(S)\simeq\mathrm{Def}_{A,V\oplus P/R}(S).$$

证明。 我们先记录此处及下文所用的提升步骤。设 $S'\to S$ 是局部 Artin R-代数之间的一个小扩张，其剩余域为 k，核为 J。设 L' 是带有 $A_{S'}$-作用的 S'-自由模，且 P' 在 $A_{S'}$上有限投射。记 $L_0=k\otimes_{S'}L'$ 和 $P_0=k\otimes_{S'}P'$。将 $\mathrm{Hom}^{A_{S'}}(L',-)$作用于

$$0\longrightarrow J\otimes_k P_0\longrightarrow P'\longrightarrow S\otimes_{S'}P'\longrightarrow 0$$

可知，将映射从 $S\otimes_{S'}L'$提升到 $S\otimes_{S'}P'$的障碍属于 $J\otimes_k\mathrm{Ext}^1_{A_k}(L_0,P_0)$。事实上，用有限自由 $A_{S'}$- 模分解 L'。由每一步在 S' 上的分裂可知，其奇异子是 S'- 自由的。将该分解约化到 k，即可计算系数取 $J\otimes_k P_0$的 Ext 群。反方向的映射（从投射模出发）可由投射性提升。对于剩余域固定的局部 Artin 环之间的任意满射，都可以将其分解为小扩张，因此这些结论可以迭代应用。

现在设 L 是 $V\oplus P$ 上的一个带标记提升。如果 S 是 Artin 环，则前一步将带标记投影提升为 P，因为 $\mathrm{Ext}^1_{A_k}(V_k\oplus P_k,P_k)\ =0$。对于完备的 S，先将投影提升到某个 S_n 上，并令 ϵ_S 通过其分解。同样的消失性允许我们依次将其提升到 S_{n+1}、S_{n+2} 等上。取极限得到一个 A_S-线性映射 $L\to P_S$，因为两个模都是完备环 S 上的有限自由模。由投射性，包含映射 $P\to V\oplus P$ 提升为映射 $P_S\to L$。它们的复合映射在 P 上约化为单位元，因此根据 Nakayama引理它是可逆的。用这个逆映射调整包含映射，即可分裂出 P_S。其核是 S-自由的，并继承来自 V 的标记。如果两个带有 P_S 的提升的直和在保持标记的意义下同构，则该同构在两个 V-提升之间的分量在这些标记下约化为单位元。这

个分量根据 Nakayama引理是可逆的。通过添加 P_S 得到的构造是自然的，因此其在同构类上的逆也是自然的。□

命题 6.7. 若 V_k 是 *Gorenstein* 投射，且标量映射 $k \to \mathrm{End}_{A_k}(V_k)$ 是同构，则$\mathrm{Def}_{A,V/R}$ 有万有变形环。

证明. 令 D 为函子，它将 k-标记的 V_k 在剩余域为 k的局部 Artin R-代数上的自由提升作为对象。对于 S 上的 L，记 $E_S(L) = \mathrm{End}_{A_S}(L)$，并令 $\mathscr{P}_S(L)$ 为所有经由有限生成投射模的映射构成的理想。我们首先证明

$$E_S(L) = S\,1_L + \mathscr{P}_S(L). \tag{6.1}$$

在 $S = k$ 处，这就是稳定自同态假设。对于核为 J的小扩张 $S' \twoheadrightarrow S$ 以及 S'上的一个提升 L'，令 $L = S \otimes_{S'} L'$。若 $L \xrightarrow{a} P \xrightarrow{b} L$ 是一个射影分解，则通过提升幂等元，将 P 提升为一个投射对象 P'。于是

$$a \in \mathrm{im}\big(\mathrm{Hom}_{A_{S'}}(L', P') \to \mathrm{Hom}_{A_S}(L, P)\big),$$
$$b \in \mathrm{im}\big(\mathrm{Hom}_{A_{S'}}(P', L') \to \mathrm{Hom}_{A_S}(P, L)\big).$$

第一个包含映射用到引理 6.6 以及 $\mathrm{Ext}^1_{A_k}(V_k, P_k) = 0$。第二个用到 $P_\prime$的投射性。因此，$\mathscr{P}_{S'}(L') \to \mathscr{P}_S(L)$ 是满射。此外，由于在 S' 上自由，

$$\ker\big(E_{S'}(L') \to E_S(L)\big) = \mathrm{Hom}_{A_{S'}}(L', JL') \simeq J \otimes_k \mathrm{End}_{A_k}(V_k).$$

根据同样的投射提升论证，每个剩余的射影分解都可提升到 S'。将其提升乘以 J 中的一个元素，即可表示核中的相应分解。利用 6.1 在 k 处的结论，我们得到

$$\ker\big(E_{S'}(L') \to E_S(L)\big) \subseteq S'\,1_{L'} + \mathscr{P}_{S'}(L').$$

将 (6.1) 中的两个直和项提升到 S，并利用这个核包含映射，即可证明 (6.1) 在 S' 上成立。归纳过程至此完成。这也证明了自同态上的约化映射是满射。根据中山引理，并对小扩张反复应用，任何如上所述的满射 $S' \twoheadrightarrow S$ 都给出

$$\mathrm{Aut}^1_{A_{S'}}(L') \twoheadrightarrow \mathrm{Aut}^1_{A_S}(S \otimes_{S'} L'), \tag{6.2}$$

其中上标 1 表示该自同构在标记下于 V_k 上诱导单位元。

设 $S_1 \to S_0 \leftarrow S_2$ 是局部 Artin R-代数的图表，其剩余域为 k，且 $S_2 \to S_0$为满射。给定提升 L_1，L_2 以及一个带标记的同构，将它们的约化识别为同一个提升L_0，则粘合得到的模为

$$L_1 \times_{L_0} L_2 \quad \text{over} \quad S_1 \times_{S_0} S_2.$$

通过选取约化到 S_0时相同的基，它是自由的。两个模作用给出了它在 $A_{S_1 \times_{S_0} S_2}$上的作用。在 S_0 上的两个同一化相差一个$\mathrm{Aut}^1_{A_{S_0}}(L_0)$中的元素。根据（6.2），这个差异可以提升到 S_2一侧。因此

$$D(S_1 \times_{S_0} S_2) \xrightarrow{\sim} D(S_1) \times_{D(S_0)} D(S_2), \qquad D(k[\varepsilon]/(\varepsilon^2)) \simeq \mathrm{Ext}^1_{A_k}(V_k, V_k).$$

切 g实 p数是有限维的。施莱辛 g格判据 [62, 定理 2.11] g给出了一个 plete 局部诺特 R代数 U pro-representing D。第 fi x ed 提升 V defi nes $[V] \in D(R)$ corresponding to $\epsilon_U : U \to R$. For $S \in \mathscr{C}^{\mathrm{aug}}_{R,\mathrm{Art}}$, 该纤 re 在此点上的纤维是

$$\mathrm{Def}_{A,V/R}(S) \xrightarrow{\sim} D(S) \times_{D(R)} \{[V]\} \xleftarrow{\sim} \{f : U \to S \mid \epsilon_S f = \epsilon_U\},$$

其中最后一组由连续的局部 R-代数映射组成，它们在 k上诱导单位元。第一个映射遗忘 R 上的标记，并保留 k上的标记。纤维中的提升具有一个 R-标记。两个选择相差一个 $\mathrm{Aut}^1_A(V)$中的元素，并且沿着 ϵ_S 的（6.2）将所得的带标记提升对应起来。

现在令 $S \in \mathscr{C}^{\mathrm{aug}}_R$，并考虑当 n 充分大时的增广商 $S_n = S/\mathfrak{m}_S^n$。一个相容的提升类族具有代表元 L_n，并配有保持标记的选定同构 $S_n \otimes_{S_{n+1}} L_{n+1} \simeq L_n$。选取相容基可得

$$L = \varprojlim_n L_n \simeq S^{\mathrm{rank}_R V} \quad \text{as an } S\text{-module}, \qquad R \otimes_S L \simeq V \quad \text{as an } A\text{-module}.$$

模作用彼此兼容，并定义了 A_S 在 L上的作用。如果两个提升在每个阶段的约化都等价，则可以相容地选取它们在 S_n 上的带标记的同构。事实上，

在层级 n 所需的修正是一个自同构，约化到 R后等于单位元。根据（6.2）它可以提升到层级 $n+1$，且仍在 R上诱导单位元。因此

$$\mathrm{Def}_{A,V/R}(S) \simeq \varprojlim_n \mathrm{Def}_{A,V/R}(S_n) \simeq \varprojlim_n \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_R^{\mathrm{aug}}}(U, S_n) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_R^{\mathrm{aug}}}(U, S).$$

这就证明了关于完备范畴的断言。 □

定理 6.8。设 A、B 是有限自由的 R-代数。设 M 和 N 分别是 R-中心的 A-B 双模和 B-A 双模，且在两侧均有限生成投射，并满足

$$M \otimes_B N \simeq A \oplus P, \qquad N \otimes_A M \simeq B \oplus Q,$$

其中 P、Q 分别在 $A \otimes_R A^{\mathrm{op}}$ 和 $B \otimes_R B^{\mathrm{op}}$上是投射的。设 V如定义 *6.5* 中所述，且 V_k 是 *Gorenstein* 投射，并令 $W = N \otimes_A V$。张量化 N_S 给出一个自然同构

$$\mathrm{Def}_{A,V/R} \simeq \mathrm{Def}_{B,W/R}.$$

如果标量映射 $k \to \mathrm{End}_{\underline{A_k}}(V_k)$ 是同构，那么这就将两个万有变形环识别为增广 R-代数。

证明。模 W 是 R-自由的，因为它是有限个 V 的副本之直和的一个 R-模直和项。在 S 上应用同样的论证可知，张量化一个自由提升会得到一个自由提升，其标记由基变换得到。将双模恒等式基变换到 k 上，可得一个 Morita 型稳定等价。因此，根据定理 11.14， 是 Gorenstein 投射，并且 与 W_k 的稳定自同态环彼此同构。

对于一个提升 L在 A-侧，复合张量函子将 L映至 $L \oplus (P_S \otimes_{A_S} L)$。第二个直和项是 A_S 上的投射模，因为它是有限个 $A_S \otimes_S L$副本的有限直和的直和项。其约化为 $P \otimes_A V$，标记由 L的标记诱导。带标记的投射提升在带标记的同构意义下唯一，因为可以利用投射性提升特殊纤维上的同构，并在约化后检验其可逆性。因此，在等价类上，复合函子等同于添上 $P \otimes_A V$的固定提升。这由引理6.6给出一个双射。以 W为起点，另一个复合函子同样双射地映到 $W \oplus (Q \otimes_B W)$的变形集。因此，从 W 的变形集到 $M \otimes_B W$ 的变形集的映射是内射的，且它与从 V的变形集出发的映射复合后为双射。由此可知，这两个复合映射中的映射都是双射。张量映射与基变换相容，从而得到所需的自然同构。命题6.7 以及概代表对象的唯一性给出环的比较映射。□

对于 $R = k$，泛环就是 [4] 中通常所说的环。对于诱导稳定 Gorenstein 投射模之间等价的带层级 Morita 型奇异等价，其域层面的比较映射已在 [47] 中建立。上述定理讨论的是 R 上的零层级情形，并在标记中保留了 R 上选定的提升。

命题 6.9. 在定理 *6.8*的情形下，允许 V在 R上不是自由模。令 $I = \text{湮灭子}_R(V)$，并令 $R = R/I$，且假设 V 是 R 上的有限自由模。那么 $W = N \otimes_A V$ 是 R 上的有限自由模，且其湮灭子为 I。在增广的 R- 测试环上，通过要求底层 S-模与 $S \otimes_R V$同构来定义提升，并仍带有 R上的标记。所得函子自然地

$$S \longmapsto \mathrm{Def}_{A/IA,V/\bar{R}}(S/IS).$$

张量化将此函子与 W 对应的函子识别起来。如果 V_k 的稳定自同态环上的标量映射是同构，那么增广的 R-测试范畴上的两个函子具有同构的泛环。

证明。由 R 中心性可得包含关系 $\mathrm{Ann}_R(V) \subseteq \mathrm{Ann}_R(W)$。反向包含成立，因为 V 是 $M \otimes_B W$ 的直和项。此外， W 是有限个 V 的直和的 R-模直和项，因此它在 R 上自由。所述类型的 S-模被 IS 消去，并且在 S/IS 上自由。因此，其作用和标记都经由相应的商 代数分解，而两个提升问题中的对象和同构相同。对 R 作基变换保留了定理 6.8 的双模恒等式和投射性假设，因此现在可以得到这些比较。□

例 6.10。 设 $R=k[\pi]/(\pi^2)$ 以及 $A=R[x]/(x^2)$。设 $V=k$ 满足 $xV=0$ 并带有自然的R-作用。命题 6.9 中的固定底层模函子由 $R=k$ 上的$k[[u]]/(u^2)$表示，其增广为 $u\mapsto 0$。沿 $S\mapsto S/\pi S$ 作拉回后，不存在泛增广R-代数，即使要求 R-测试环在 R上自由也是如此。

事实上，令 $S_n=R[t]/(t^n)$，并用 $t\mapsto 0$增广。提升由标量 z 决定，它给出了 x 在秩一 $S_n/\pi S_n$-模上的作用。因此

$$z\in t\,k[t]/(t^n),\qquad z^2=0.$$

模同构保持 z。在 $n=2$ 处的提升 $z=t$ 不能延拓到 $n=3$，因为 t 的任意提升的平方在 $k[t]/(t^3)$中的 t^2 系数都非零。

假设一个增广的 R代数 U 表示该拉回，并令 $J=\ker(U\to R)$。由 $t\mapsto \pi t$ 给出的 S_2 的自同态将每个变形映到平凡变形。由自然性以及在 R上存在唯一变形这一事实，对于每个增广的 $f\colon U\to S_2$ 与此自同态复合后都会湮灭 J。由于 $f(J)\subset Rt$，且 π在 R中的湮灭子为 πR，可得 $f(J)\subset \pi Rt$。商 $S_3\to S_2$将$R+\pi Rt$ 中的 S_3 同构限制为 S_2中的 $R+\pi Rt$ 同构。二者都是子代数，因为 πRt 的平方为零。因此，每个这样的 f 都可提升为增广映射 $U\to S_3$。这与无法提升 $z=t$相矛盾。特别地，在商基环上可胚代表以及在原测试范畴上的不变性，并不必然意味着在该原范畴上可胚代表。

例 6.11. 取 $R=\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ 和 $A=R[x]/(x^3)$。令 $V=A/(x-2)$为一个秩为一的自由 R模。我们给出一个 Morita 型稳定自等价，它将 V 映到一个秩为二的自由 R模 W，并计算两个泛环。

置 $A^e=R[u,v]/(u^3,\ v^3)$，其中 u 在左侧作用，v 在右侧作用，并令

$$K=\ker(A^e\xrightarrow{\mu}A)=(u-v),\qquad h=u^2+uv+v^2.$$

这里，μ 将 u 和 v 映射到 x。作为右 A-模，A^e 是自由的，其基为 $1,u,u^2$，并且

$$(u-v)(a+bu+cu^2)=-va+(a-vb)u+(b-vc)u^2\qquad (a,b,c\in R[v]/(v^3)).$$

因此 $\operatorname{ann}_{A^e}(u-v)=A^eh$，且 $\bar a\mapsto ha$ 将 $A=A^e/(u-v)$ 嵌入 A^e。特别地，存在双模正合列。

$$0\longrightarrow K\longrightarrow A^e\xrightarrow{\mu}A\longrightarrow 0,\qquad 0\longrightarrow A\xrightarrow{\cdot h}A^e\xrightarrow{\cdot(u-v)}K\longrightarrow 0.$$

第一个在两侧均分裂，而 K 在每一侧都是秩为二的自由模。将第一个正合列在右侧与 K 张量。由于作为 A-双模，$A^e\otimes_A K\simeq (A^e)^{\oplus 2}$，对 K 的两个投射表示应用 Schanuel 引理，得到

$$(K\otimes_A K)\oplus A^e\simeq A\oplus (A^e)^{\oplus 2}.$$

包络代数是阿廷代数，因此 Krull–Schmidt 消去给出 $K\otimes_A K\simeq A\oplus A^e$。于是，$(K,\ K)$ 定义了 Morita 型稳定等价。V 到 $k=\mathbb{F}_2$ 的约化是 $k[x]/(x^3)$ 上的非投射单模，其稳定自同态环为 k。它是 Gorenstein 投射的，因为 $k[x]/(x^3)$ 是对称的。

将第一个正合列与 V 张量化，可得

$$W=K\otimes_A V\simeq \ker\bigl(A\xrightarrow{x\mapsto 2}R\bigr)=(x-2)A.$$

对于测试环 $S\in\mathscr{C}_R^{\mathrm{aug}}$，$V$ 的一个带标记提升的秩为一，且 x 通过唯一的标量 $c\in S$ 作用，使得

$$\epsilon_S(c)=2,\qquad c^3=0.$$

代入 $c=2+t$，得到增广泛环

$$U_R(A,V)=(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})[[t]]/(t^3+6t^2+4t),\qquad \epsilon_U(t)=0.$$

我们独立地计算 W 的变形函子。R-基 $w=x-2$、xw 给出 W 中的关系 $x^2w=-2xw-4w$。在任意带标记提升 L 中，取 $e\in L$ 为在标记下提升 w 的元素。于是，根据 Nakayama引理，$(e,\ xe)$ 是 S 上的一组基。存在唯一的 $c,\ d\in S$ 使得

$$x^2e=-cxe-de,\qquad \epsilon_S(c)=2,\quad \epsilon_S(d)=4.$$

$S[x]$-模 L 可与 $S[x]/(x^2+cx+d)$ 识别。首一多项式 x^2+cx+d 生成 $S[x]$ 中 L 的湮灭子。因此，其系数不依赖于 e 的选择。 x^3 作用为零的条件是

$$x^3 = (x-c)(x^2+cx+d) + (c^2-d)x + cd, \qquad d = c^2, \quad c^3 = 0.$$

反之，任何这样的 c 都给出一个具有该循环表示的带标记秩二提升。因此 $U_R(A,\ W)$ 具有与 U_R相同的表示 (A, V).

为确定定理 6.8中的同构，将提升 $A_S/(x-c)$ 与 K_S进行张量运算。所得理想为 $(x-c)A_S$，其基为 $x-c,\ x(x-c)$，作用矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & -c^2 \\ 1 & -c \end{pmatrix}.$$

因此，张量比较保持参数 $t = c-2$ 不变。这两个模在剩余纤维上的长度不同，因此这是稳定模类上的非平凡比较。

上述单一剩余域约定使用局部 Artin 基环。对于一般的非零交换 Artin 环 $R = \prod_i R_i$，相应的测试范畴是范畴 $\mathscr{C}_{R_i}^{\mathrm{aug}}$ 的乘积，并在每个因子上指定剩余域。提升是所得完备半局部测试环上的有限投射模，这等价于在每个因子上自由。 R 的中心幂等元将标记和模作用分解。因此，函子、其存在时的泛环以及 Morita 型比较均按分量获得。

7. 连通外自同构群

设 k 是一个域， A 是一个有限维 k代数。若 k 是完美的，我们记

$$\mathrm{Out}_k^0(A) = \left(\underline{\mathrm{Aut}}_k(A)_{\mathrm{red}}/\underline{\mathrm{Inn}}_k(A)\right)^0$$

表示约化连通代数群。若 k 是代数闭的，我们省略下标 k 。我们也考虑带有完整群概形结构的单位连通分支。Rouquier 证明了，在自内射代数之间的导出等价以及 Morita 型稳定等价下，连通群是不变的 [57, 定理 4.6 和 4.15]。对于代数之间不含半单直因子的约化对，我们利用其误差双模作为包络代数上的模的投射性和内射性 [15, 引理 4.1(3)]。

7.1. 在族中分裂投射内射直和项。

引理 7.1. 设 Λ 是代数闭域 k上的有限维代数， S 是有限型 k-概形，且 $\mathscr{X}$ 是一个 Λ-模族，它在 S上局部自由且秩有限。假设在某个闭点 $s \in S$处，

$$\mathscr{X}(s) \simeq V \oplus E,$$

其中 E 是一个投射-内射 Λ-模。在 s 的一个开邻域 U 上，存在一个分解

$$\mathscr{X}|_U \simeq (E \otimes_k \mathscr{O}_U) \oplus \mathscr{X}'.$$

证明。 在坐标环为 R的仿射邻域上进行讨论，并以 X 表示相应的 $(\Lambda \otimes_k R)$-模。投射性使纤维包含映射 $i_0 \colon E \to X(s)$提升为一个映射 $i \colon E \otimes_k R \to X$。令 $DE = \mathrm{Hom}_k(E,\ k)$。由于 E 是内射的， DE 是一个投射右 Λ-模，而张量–Hom 伴随给出

$$\mathrm{Hom}_{\Lambda\otimes_k R}(X, E\otimes_k R) \simeq \mathrm{Hom}_R(DE \otimes_\Lambda X, R).$$

模 $DE \otimes_\Lambda X$ 是若干个 X 副本的有限直和的一个直和项，因此是 R 上的有限投射模。因此，所示的 Hom 与纤维化操作可交换。于是，纤维投影 $p_0 \colon X(s) \to E$ 提升为 $p \colon X \to E \otimes_k R$。自同态 pi 特化为1_E，并且缩小邻域后可逆。将 p 替换为 $(pi)^{-1}p$。于是 $pi = 1$，这就给出了所需的分裂。□

7.2. **稳定共轭与代数族。** 令 $\mathscr{L}(A)$ 为有限维 A-双模所成的范畴，其中这些双模作为左模和右模均为投射模。将其对经过 A^e-投射双模的映射取商后，所得范畴是幺半群：将包络代数投射双模与 $\mathscr{L}(A)$ 中的对象在任一侧张量化，仍得到包络代数投射双模。记此商中张量可逆同构类构成的群为 $\mathrm{Pic}(A)$。

引理 7.2。 假设 M, N 满足 (MT) 且定义在一个域上。映射

$$[X] \longmapsto [N \otimes_A X \otimes_A M], \qquad [Y] \longmapsto [M \otimes_B Y \otimes_B N]$$

诱导出 $\mathrm{Pic}(A)$ 与 $\mathrm{Pic}(B)$之间的逆群同构。若 k 是代数闭的，且 A没有半单直因子，则自然映射 $\mathrm{Pic}(A) \to \mathrm{Pic}(A)$ 是内射的。

证明。 函子 $\Phi(X) = N \otimes_A X \otimes_A M$ 保持左右投射性，并将包络投射对象映至包络投射对象。此外，

$$\Phi(X) \otimes_B \Phi(Y) \simeq \Phi(X \otimes_A Y) \oplus N \otimes_A X \otimes_A P \otimes_A Y \otimes_A M,$$

而最后一个直和项是 B^e-投射的。逆向构造具有相同性质。根据 (MT) 展开两个复合函子，即可证明第一个断言。

正则双模 A 的直和项是一个中心直代数因子。这样的直和项只有在该因子可分时才是 A^e-投射的，因此该因子是半单的。因此，在所述假设下， A 没有包络投射直和项。任何可逆A-双模也没有这样的直和项：将其与逆张量化，就会在 A中得到这样的直和项。稳定同构与 Krull–Schmidt 消去现可推出可逆双模之间的实际同构。这就证明了内射性。 □

对于 $\alpha \in \mathrm{Aut}_k(A)$，令 A_α 为具有右作用 $x \cdot a = x\alpha(a)$ 的正则左模。则$A_\alpha \otimes_A A_\beta \simeq A_{\alpha\beta}$，并且 $A_\alpha \simeq A_\beta$ 作为双模当且仅当 α 和 β 具有相同的外类。

命题 7.3。 设 k 是代数闭的。设 A、B 是不含半单直因子的有限维 k-代数，并设 M、N满足 (MT)。如果误差双模 P、Q 分别在 A^e、B^e上是内射的，则稳定共轭诱导出代数群的一个同构

$$\mathrm{Out}^0(A) \simeq \mathrm{Out}^0(B).$$

证明。 令 $G = (\underline{\text{自同}}\text{构}_k(A)_{\mathrm{red}})^0$。 G 上的泛自同构定义了一个 $\mathscr{A}$，其在 α处的纤维为A_α 。令

$$\mathscr{X} = N \otimes_A \mathscr{A} \otimes_A M.$$

此族在 G 上局部自由。事实上，用泛自同构扭曲投射右模 N，可得到一个投射右 $A \otimes_k \mathscr{O}_G$-模；与 M 张量化后， $\mathscr{X}$ 成为 M 的常值底层族的有限个副本的有限直和中的一个直和项。在单位元处，$\mathscr{X}(1) \simeq B \oplus Q$。将引理 7.1 应用于 $\Lambda = B^e$，得到一个单位元邻域 $U \subseteq G$ 以及一个分解

$$\mathscr{X}|_U \simeq (Q \otimes_k \mathscr{O}_U) \oplus \mathscr{W}, \qquad \mathscr{W}(1) \simeq B.$$

缩小 U，使得 $\mathscr{W}$ 是正则左 $B \otimes_k \mathscr{O}_U$-模。为此，将 $1 \in B$ 在纤维同构中的像提升，并限制到所得左模映射可逆的开集上。于是右作用给出一族正则的 B 代数自同态。在更小的单位元邻域上，它们是自同构，因为它们在 1 处的行列式不为零。转到外类后，得到一个正则映射

$$f_U : U \longrightarrow \mathrm{Out}^0(B).$$

目标是单位连通分支，因为 U 不可约且 $f_U(1) = 1$。左模平凡化的改变只会改变内类。根据构造， $f_U(\alpha)$ 由稳定双模类 $[N \otimes_A A_\alpha \otimes_A M]$ 唯一确定。

引理7.2 给出一个抽象群同态

$$\lambda : G(k) \longrightarrow \underline{\mathrm{Pic}}(B).$$

利用该引理中的内射性，将 $\mathrm{Out}^0(B)(k)$视为目标中的子群。它在 λ 下的原像包含 $U(k)$。连通代数群由任意单位元邻域生成：对于 $g \in G(k)$，不可约性给出 $U \cap gU \neq \varnothing$，因此 $g \in U(k)U(k)^{-1}$。于是 λ将每个点映入 $\mathrm{Out}^0(B)(k)$，并定义了一个唯一的群同态 f ，该同态定义在 k点上并扩张 f_U。

这个同态是正则的。在每个平移 gU 上，它由 $f(gu) = f(g)f_U(u)$给出。这些正则表达式在交集的闭点上相同，因此作为态射也相同，因为源是约化的。它们定义了一个代数群态射 $G \to \mathrm{Out}^0(B)$。对于内自同构 α，双模 A_α 同构于 A，所以 $f(\alpha) = 1$。因此 f 经由代数群商下降为

$$\bar{f} : \mathrm{Out}^0(A) \longrightarrow \mathrm{Out}^0(B).$$

现在使用 P进行逆向构造，可得到一个方向相反的正则态射 $\bar{g}$ 。稳定共轭以及通常皮卡群的内射性表明，两个复合函子在闭点上都是恒等映射。约化性进而保证它们是恒等态射。因此，f和 $\bar{g}$ 互为逆代数群同构。特别是，该证明还在正特征下给出了正则逆映射。□

定理 7.4. 设 k 为代数闭域，且 A、B 为有限维的 k-代数。一个k-线性 *Morita* 型稳定等价诱导出一个同构

$$\mathrm{Out}^0(A) \simeq \mathrm{Out}^0(B)$$

（该同构）是既约代数群之间的同构。这里不要求自内射性，也不要求满足 *Gorenstein* 假设。

证明。 首先假设不存在半单直因子。从 M、N中删去投射混合双模直和项。Krull–Schmidt 消去表明，约化对仍满足（MT）；另见 [15, 定理 1 的证明。2]根据 [15, 引理 4.1(3)], ，新的误差项是包络代数上的投射-内射模。应用命题 7.3。

一般地，写作 $A = A_0 \times S$和 $B = B_0 \times T$，其中 S、T是半单的，而 A_0、B_0 没有半单直因子。令 e、f为 A_0、B_0的中心幂等元。限制双模eMf、fNe在两侧都是投射的。经由 T的复合函子在A_0上是包络投射的：由于 T 可分，其张量积是相应的、关于 k的外张量积的直和项。同理，经由 S 的复合函子在 B_0上是包络投射的。因此，限制 (MT) 并应用 Krull–Schmidt 定理，可得 eMf、fNe的实际 Morita 型恒等式。前述情形适用于 A_0、B_0。

连通自同构群固定中心块幂等元，而分裂半单代数的连通外自同构群是平凡的。因此，$\mathrm{Out}^0(A) = \mathrm{Out}^0(A_0)$，且 $\mathrm{Out}^0(B) = \mathrm{Out}^0(B_0)$。该同构由与原始对的稳定共轭刻画。事实上，即使存在半单因子，$\mathrm{Out}^0(A)$也嵌入 $\mathrm{Pic}(A)$：其自同构在每个半单块上均以内自同构的方式作用，而消去性可以在其他块上识别它们的类。□

推论 7.5。 设 k 为完美域，且 A、B 为有限维 k-代数。*Morita* 型稳定等价诱导约化连通代数 k群之间的同构

$$\mathrm{Out}^0_k(A) \simeq \mathrm{Out}^0_k(B).$$

证明。 将标量扩张至代数闭包 k。在完美域上，约化自同构群是光滑的，并且约化与该标量扩张可交换。内群 $A^\times/Z(A)^\times$是光滑且几何连通的。商及其单位连通分支的构造与扩张至 $\bar{k}$可交换。因此，$\mathrm{Out}^0_k(A)$的标量扩张为 $\mathrm{Out}^0(A \otimes_k \bar{k})$，对 B也同样如此。

定理 7.4 给出了在 k上的同构。它通过与原来的 k-定义的双模进行稳定共轭来刻画，因此在 k-点上是伽罗瓦等变的。由于这些群是约化的，这就是态射的等变性。仿射伽罗瓦下降适用于该同构及其逆，并给出所述结论。□

注记 7.6。 该定理涉及该代数群，包括其维数、极大环面秩、幺幂根基和约化商群。即使在 Morita 等价下，完整的外自同构群也不是不变量：$k \times M_2(k)$ 与 $k \times k$ 是 Morita 等价的，而它们的外群分别为 1 和 C_2。另见 [57, 注记 4.3]。在非代数闭域上，代数群商的有理点不能想当然地与有理点群的商等同。

在正特征下，约化群的李代数未必是整个 $\mathrm{HH}^1(A)$。例如，在特征二下，$A = k[x]/(x^2)$ 的 $\mathrm{HH}^1(A)$ 是二维的，而其约化

外群是 $\mathbb{G}_m$ ，其李代数是一维的。因此，抽象李代数之间的比较映射和关于整个非约化群概形的断言，都不能取代族论证。该定理也没有断言存在 Artin 基底相对群概形类比。

对于域上的几乎 ν-稳定导出等价，外群不变性已可由 Rouquier 导出不变性定理推出。本文证明的扩展适用于仅给定 Morita 型经典稳定等价的情形。

7.3. 形式外自同构与可积性。设 k 为代数闭域。对于剩余域为 k 的局部 Artin k-代数 T，置 $A_T = A \otimes_k T$，并令

$$\widehat{\mathrm{Out}}_A(T) = \ker(\mathrm{Out}_T(A_T) \longrightarrow \mathrm{Out}_k(A)),$$

其中，$\mathrm{Out}_T(A_T)$ 表示 A_T 的 T-代数自同构模去由单位元共轭得到的等价类。这是外群概形在单位元处的形式完备化。事实上，内群概形 $A^\times/Z(A)^\times$ 光滑，且由光滑提升可知，其在 T 上的主齐性空间有截面，因为剩余域代数闭。同样的推理表明，内 T-点是$A_T^\times$的像。由于单位元可沿幂零理想提升，因此可以为核中的代表元选取与单位元同余的元素。

定理 7.7。 有限维 k 代数之间的 *Morita* 型稳定等价诱导出$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$自然群同构$\mathrm{Out}_A \simeq \mathrm{Out}_B$。其切映射是一阶 *Hochschild* 比较。特别地，该比较保持可积至每个有限阶的类的子空间，以及可在 $k[[t]]$ 上积分的类。

证明。 首先去掉半单因子，并按照定理7.4约化双模对。这些操作不会改变形式比较。与单位元同余的自同构会固定中心块幂等元，因为幂等元在幂零理想上的中心扩张中唯一提升。对于 T 上的矩阵代数，矩阵单位的像确定了定义模分解为自由秩一直和项。选取其中一个直和项的生成元，并用矩阵单位将其传递，即可得到一个共轭基。因此，这些因子具有平凡的形式外函子。添加射影混合双模直和项，或经由可分因子进行张量化，只会使张量比较相差射影直和项。这些直和项在标量扩张至 T 以及扭曲后仍然是射影的。

令 $\alpha \in \mathrm{Aut}_T(A_T)$ 约化为单位元。T-自由双模 $X = N_T \otimes_{A_T} (A_T)_\alpha \otimes_{A_T} M_T$ 约化为 $B \oplus Q$。将 Q 分裂出来的映射可提升为以 Q_T 为源或目标的映射。对于包含映射，利用 Q 在 B^e 上的投射性。对于投影，单位元

$$\mathrm{Hom}_{B_T^e}(X, Q_T) \simeq \mathrm{Hom}_T(D_k Q \otimes_{B^e} X, T)$$

以及 的投射性说明在此 Hom 上的约化是满射。右侧的张量积是 T 上的有限投射模，因为它是由若干个 X 的副本构成的有限直和项。这里 X是 T-自由的，这由命题 7.3 中的单侧投射性论证可得。提升后的映射的复合约化为 1_Q，且是可逆的。补对象 W 是 T-自由的，而其特殊纤维的左生成元的一个提升，根据 Nakayama引理和秩相等，给出一个左模同构 $B_T \simeq W$。右作用给出一个扭曲 β，它约化为单位元，因为其底层线性映射模极大理想后可逆。

稳定双模类 X 决定了 β的外类。事实上，根据中山引理，扭曲正则 B_T-双模的非零投射直和项会映到其特殊纤维中的非零投射直和项。解扭后，这将给出正则 B-双模的一个投射直和项。因此， B_T^e 上的 Krull–Schmidt 消去将识别任意两个稳定同构的扭曲正则双模，而它们之间的同构会将其扭曲识别到一个内自同构。唯一性还保证了与测试环映射的相容性。根据引理 7.2中的论证， T 上的张量恒等式模去投射对象后诱导出逆幺半群比较。因此，它们给出形式外群之间的互逆同态。

对于 $T = k[\epsilon]/(\epsilon^2)$，按 $1 + \epsilon d$ 进行扭曲表示导子 d 的扩张类，其中约定扭曲右作用。进行张量化得到 $B \oplus Q$ 关于其自身的扩张。常数直和项 Q_T 的扩张类为零。因此， B-分量就是张量映像的压缩，它将切映射与 ϕ_1 联系起来。正上同调上的压缩与原始对一致：当删除一个投射的混合直和项时，双边张量映像会因直和项而改变，而这些直和项在单位元处是投射的，因此

在正 Ext 中的映像为零。根据引理，改变正则直和项的分裂并不会改变该映像上的压缩3.4 以及定理 3.6中的投射中心计算。

如果一个类属于从 $k[t]/(t^{r+1})$ 到对偶数的约化像，则称其可积到 r 阶。相容系的外类有相容的代表元。在每一步，提升一个单位元，使其将新代表元的约化共轭到前一个代表元，再用该单位元进行修正。取逆极限即可得到 $k[[t]]$ 上的一个自同构。自然性证明了这两个可积性断言。□

Briggs 和 Rubio y Degrassi 证明了自内射代数 [14] 的可积分类李代数的不变性。形式比较适用于一般有限维代数，并保留了定义在局部 Artin 测试环上的群函子。

推论 7.8。 *在完美域上，经典 Morita 型稳定等价诱导外自同构群概形的完整单位连通分支之间的同构，并保留其概形结构。*

证明。 首先在代数闭域上进行，并如上所述去掉半单因子并化简该对。那些因子的连通外群概形是平凡的：这可由局部 Artin 测试环上的矩阵单位论证以及关于 k的相应结论得到。

设 $G = \underline{\mathrm{Aut}}(A)^0$, 带有其完整的概形结构，并设 $H = \mathrm{Out}(B)^0$。在 G 中选取单位元的一个仿射邻域 U 。命题 7.3 中的族论证适用于其坐标环。引理 7.1中的投射性和基变换计算将 Q 的包含映射和投影提升。后续的可逆条件是 G 上的开行列式条件，因此该构造适用于可能非约化的开子概形。将补对象左模平凡化后，得到一个态射 $h_U : U \to H$。在局部 Artin 测试环上，其取值由输运后的扭曲正则双模的稳定类确定。定理7.7 中的消去论证适用于每个闭点，因为扭曲正则双模没有非零射影直和项。

对于 $g \in G(k)$，令 $h(g)$ 表示约化比较映射的值。在 gU 上定义态射如下：$h(gu) = h(g)h_U(u)$。这些平移覆盖 G，而幺半张量比较给出了每个平移在局部 Artin 测试环上的相同刻画。两个这样的态射在交集中的每个 Artin 测试点上都相同，故它们作为态射也相同。为说明如何据此判定相等，将分离目标的对角理想拉回。在每个闭点处，它在局部环模去极大理想的任意幂所得的商中都为零。Krull 交定理表明该理想为零，而闭点可以检测其支集。因此，这些局部映射可以粘合。在$G \times G$ 上作同样的检验即可证明群律。在内子群上，该映射是平凡的，因为内扭曲就是正则双模，并且内类可在测试环上提升为单位元。自同构群概形的单位连通分支作为 fppf 层映到其外商的单位连通分支上：其核光滑且连通，而在 k 上，单位连通分支的原像因光滑性、满射性和连通纤维而连通。因此，该映射下降到 A 的外群概形的单位连通分支。

将 A, B 互换后重复上述过程。根据稳定消去，这两个复合在所有局部 Artin 测试点上都与单位映射一致。因此，这两个概形态射互为逆。对于完美域，将标量扩张到代数闭包。内群、其商以及单位连通分支的构造与该扩张相容。由局部 Artin 测试环上的稳定共轭刻画可知，这两个态射都是伽罗瓦等变的，下降即完成证明。□

8. 代数 K-理论与相对奇点范畴

对于有限维代数，取其根基的商会在普通 K-群上诱导映射。我们首先证明误差双模在这些群上的作用平凡，从而比较它们的核。随后，我们利用 R-分裂正合结构来比较增强相对奇点范畴的非连通 K-理论。至于由 Gorenstein 投射模的瓦尔德豪森范畴得到的 K-理论，其中弱等价取为稳定同构，请参阅 [52]。

8.1. 根核与普通 K-群。 对于域k上的有限维代数 A ，记 $J_A = \mathrm{rad}(A)$和 $S_A = A/J_A$。我们用 $K_i(A)$表示正合范畴 $\mathscr{P}(A)$的 Quillen K-群，其中该范畴由有限生成投射左 A-模组成。令

$$\widetilde{K_i}(A) = \ker\bigl(q_{A*} : K_i(A) \longrightarrow K_i(S_A)\bigr), \qquad i \geq 0,$$

其中 $q_A\colon\ A \to S_A$ 是商同态。诱导出 q_{A*} 的正合函子是 $S_A \otimes_A -$。下面的结果确定了普通代数 K-理论的一部分，在 Morita 型稳定等价中，投射双模误差在该部分上平凡作用。

定理 8.1. 设 A 和 B 是有限维 k-代数。假设双模 ${}_AM_B$ 和 ${}_BN_A$ 在两侧均有限生成且投射，并满足

$$M \otimes_B N \simeq A \oplus P, \qquad N \otimes_A M \simeq B \oplus Q,$$

其中 P 在 $A^e = A \otimes_k A^{\mathrm{op}}$ 上投射，且 Q 在 B^e 上投射。那么，由 $F = N \otimes_A -$ 和 $G = M \otimes_B -$ 诱导的映射限制为互逆同构

$$\widetilde{K_i}(A) \simeq \widetilde{K_i}(B) \qquad (i \geq 0).$$

不需要对 S_A 或 S_B 作可分性假设，也不需要对张量函子作伴随假设。

证明. 我们先验证 F_* 保持所指的核。令 $V = S_B \otimes_B N$，将其视为一个 S_B-A 双模。取 d 使得 $J_A^d = 0$，并令

$$U_r = VJ_A^r/VJ_A^{r+1} \qquad (0 \leq r < d).$$

每个 U_r 都是一个 S_B-S_A 双模。所有左 S_B-模 VJ_A^r 和 U_r 都是有限生成投射的，因为 S_B 是半单的。对于每个 $X \in \mathscr{P}(A)$，将 V 的根基滤过与 X 张量化是正合的，其连续商为

$$U_r \otimes_A X \simeq U_r \otimes_{S_A} (S_A \otimes_A X).$$

因此，该滤过是由正合函子的逐对象可容许短正合列组成的有限序列 $\mathscr{P}(A) \to \mathscr{P}(S_B)$。代数 K-理论 [69, 第五章，定理 1.2 及推论 1.2。1]因此给出

$$q_{B*}F_* = \left(\sum_{r=0}^{d-1} (U_r \otimes_{S_A} -)_*\right) q_{A*}. \tag{8.1}$$

特别地，$F_*(\widetilde{K_i}(A)) \subseteq \widetilde{K_i}(B)$。交换 A 和 B 即可证明关于G的相应断言。

下面证明自函子 $P \otimes_A -$ 在 $\widetilde{K_i}(A)$上的作用是平凡的。取一个双模 P' 和一个整数 t，使得

$$P \oplus P' \simeq (A \otimes_k A)^t$$

作为 A-A-双模，其中第一因子和第二因子分别带有左作用和右作用。取右根滤过并考察连续商可知，PJ_A^r和

$$W_r = PJ_A^r/PJ_A^{r+1}$$

分别是作为左 A-模的$(A \otimes_k J_A^r)^t$和$(A \otimes_k (J_A^r/J_A^{r+1}))^t$的直和项。因此，二者都是有限生成投射左 A-模。此外，W_r 是一个 A-S_A-双模。因此，$P \otimes_A -$ 的滤过中出现的所有函子都取值于 $\mathscr{P}(A)$，并且$W_r \otimes_{S_A} -$ 是一个正合函子 $\mathscr{P}(S_A) \to \mathscr{P}(A)$。再次应用可加性得到

$$(P \otimes_A -)_* = \left(\sum_{r=0}^{d-1} (W_r \otimes_{S_A} -)_*\right) q_{A*}. \tag{8.2}$$

由此可知，$(P \otimes_A -)_*$ 在 $\widetilde{K_i}(A)$ 上消失。对 Q 也可应用同样的论证。

最后，由给定的双模分解和可加性可得

$$G_*F_* = \mathrm{id}_{\widetilde{K_i}(A)} + (P \otimes_A -)_*, \qquad F_*G_* = \mathrm{id}_{\widetilde{K_i}(B)} + (Q \otimes_B -)_*.$$

将这些恒等态射限制到根核上，即可证明所述结论。 □

推论 8.2。 在定理 *8.1*的假设下，进一步假设两个商同态 q_A 和 q_B 都有含幺环截面。那么

$$K_i(A, J_A) \simeq K_i(B, J_B) \qquad (i \geq 0),$$

其中，相对群由映射在连通代数K-理论谱上的同伦纤维定义。在与根核的典范识别下，这些同构

是 F_* 和 G_*的限制。特别地，如果 S_A 和 S_B 在 k上可分，则结论成立。

证明。 环截面 q_A 在代数 K-理论上诱导出一个截面。因此，同伦纤维的长正合列将 $K_i(A, J_A)$ 规范地识别为 $\ker(q_{A*})$，对每个 $i \geq 0$均成立。同样的结论也适用于 B，而该断言由定理 8.1推出。如果半单商是可分的，则所需的截面由 Wedderburn–Malcev 定理保证存在。 □

推论 8.3。 设 A 和 B 是分裂的有限维 k-代数，它们 *Morita* 型稳定等价，并记 r_A 和 r_B 为它们的简单模同构类数。则以下条件等价：

(1) $r_A = r_B$；(2) $K_0(A) \simeq K_0(B)$ 作为群；
(3) $K_i(A) \simeq K_i(B)$ 对每个 $i \geq 0$均作为群成立。

最后一个条件中的同构不一定由定义稳定等价的张量函子诱导。

证明。 由于这些代数是分裂的，它们的半单商是 k上的全矩阵代数的乘积。Wedderburn–Malcev 定理、代数 K-理论的 Morita 不变性以及商映射的分裂给出

$$K_i(A) \simeq \widetilde{K}_i(A) \oplus K_i(k)^{r_A}, \qquad K_i(B) \simeq \widetilde{K}_i(B) \oplus K_i(k)^{r_B}.$$

因此，根据定理 8.1，（1）蕴含（3）。（3）⇒（2）是显然的，而（2）⇒（1）由 $K_0(A) \simeq \mathbb{Z}^{r_A}$ 和 $K_0(B) \simeq \mathbb{Z}^{r_B}$推出。 □

定理 8.4。 在定理 *8.1*的假设下，假设商映射 $q_A\colon A \to S_A$和 $q_B\colon B \to S_B$ 具有含幺环截面。 $\mathbb{K}(A) \to \mathbb{K}(S_A)$ 以及$\mathbb{K}(B) \to \mathbb{K}(S_B)$ 的同伦纤维是等价的谱。在稳定同伦范畴中，该比较映射由定义这些张量映射的限制唯一刻画。如果 A 和 B 是分裂的，则它们的普通非连通 K-理论谱等价，当且仅当 $r_A = r_B$。

证明。 在谱层面应用可加性于定理 8.1 的证明中的两个滤过。在稳定同伦范畴中，这给出分解

$$q_{B*}F_* = u q_{A*}, \qquad (P \otimes_A -)_* = v q_{A*},$$

其中 u 和 v 由 (8.1) 和 (8.2) 中层函子的直和诱导。交换两个代数即可得到 G 和 Q的分解。转到完美导出增强后，正合函子的同一可加性给出非连通 K-理论 [10]的这些恒等式。环截面将映射 q_{A*} 和 q_{B*} 分裂为谱之间的映射。记 I_A, I_B 为这两个纤维，其分裂单射为 i_A, i_B。第一个分解在稳定同伦范畴中给出唯一态射 $f\colon I_A \to I_B$，满足 $i_B f = F_* i_A$。同样的构造给出 $g\colon I_B \to I_A$，满足 $i_A g = G_* i_B$。由第二个分解以及 $GF \simeq \mathrm{Id} \oplus (P \otimes_A -)$，可得 $i_A g f = i_A$。由于 i_A 是分裂的，故 $gf = 1$。对称地可得 $fg = 1$。

对于分裂代数，根据 Morita 不变性以及 S_A的乘积分解，I_A 在 $\mathbb{K}(A)$中的补对象是 $\mathbb{K}(k)^{r_A}$。这证明了简单模数量相等的充分性。必要性可通过取 π_0得出。 □

注 8.5。前述结果并不要求代数没有可分直因子。仅仅排除这类因子，并不能确立简单模数量相等。此外，推论8.3 中的等价性使用了零次；如果只假设正 K群同构，该论证无法给出逆向结论。在任意域上，简单模数量相等也无法确定半单商中可能不同的除环所对应的 K理论。最后，若不存在 q_A 和q_B的截面，就不能在没有额外论证控制连接同态的情况下，将根核等同于完整的相对 K群。

不存在可分直因子并不能满足推论 8.3 中关于简单模数量的假设。在代数闭域上，它排除了半单块；对于这一类中的自内射代数，剩余的计数断言正是文中 [44, 36] 所讨论的稳定等价 Auslander–Reiten 问题。这是关于非投射简单模的猜想，而不是

关于自扩张消失的同调猜想。对于代数闭域上的 Frobenius 有限代数，在不存在半单直因子的情况下，通常的 K-理论不变性也可由导出提升定理 [28, 定理 11] 得出。这个特殊情形是导出等价的一个已确立结果。

8.2. **交换基环上的稳定循环同调**。令 R 为交换环。本小节及下一小节中，我们使用右模。记 $\mathscr{Q}_R(D)$ 为 R-线性范畴，其对象是有限相对投射对象 $\mathrm{add}\{V \otimes_R D\}$，其中 V 是有限 R-模，并将其视为集中在零次的微分分次范畴。这两个小节中的代数和双模系数均为 R 上的有限对象。所有双模均在 R 上中心化。诱导的 D-L-双模是指形如 $D \otimes_R V \otimes_R L$ 的双模。相对投射双模是此类双模的有限直和的直和项。

我们使用 R 上的导出混合复形，记作 $\mathscr{C}_R$，作为微分分次 Morita 不变量。它可以通过一个 R-余纤维 dg 替换来计算。根据分裂正合范畴的混合复形的可加性 [31, 72]，它对函子的直和以及加性范畴之间函子的逐对象分裂正合列具有可加性。混合复形的普通循环、负循环和周期循环实现分别记作 HC、HC^- 和 HP。我们使用它们在混合复形导出范畴上的导出函子。

对于 H 这些在次数 n 中的实现之一，置

$$H^{\mathrm{st}}_{n,R}(D) = \bigcap_{\substack{L,\,P \\ P \text{ relatively projective } D\text{-}L}} \ker\Big(H_n(\mathscr{C}_R(\mathscr{Q}_R(D))) \xrightarrow{P_*} H_n(\mathscr{C}_R(\mathscr{Q}_R(L)))\Big).$$

这里，L 遍历有限中心 R-代数，而 P_* 由 $-\otimes_D P$ 诱导得到。目标函子定义良好：当 P 是诱导双模时，它在任意有限模上的值都是相对投射对象，在其直和项上同样如此。可以在固定全集中选取这些测试的代表元。该定义使用相对投射双模作为传递测试。

命题 8.6。设 M 和 N 逐侧有限投射，且 $M \otimes_B N$ 和 $N \otimes_A M$ 模 R-相对投射对象稳定地同构于正则双模。两个张量映射在 $H^{\mathrm{st}}_{n,\,R}$ 上诱导出逆同构，其中 $H = HC$、HC^-、HP 成立。在代数闭域上，HC 的构造与 [34,定义 9。7]中的稳定循环同调一致。

证明。函子 $-\otimes_A M$ 和 $-\otimes_B N$ 保持相对投射对象。若 P 是相对投射的 B-L-双模，则 $M \otimes_B P$ 是相对投射的 A-L-双模，因为 M 在左侧是投射的。因此，与目标上的测试复合即为源上的测试，而张量映射保持核的交。在一个稳定化恒等式中，误差属于目标为 $L = A$ 或 $L = B$ 的测试。它们的映射在所指示的子群上为零。可加性和张量复合现在表明，限制后的映射互为逆映射。

在代数闭域上，$\mathscr{Q}_k(D)$ 是有限生成投射模的范畴。使用 $L = k$ 进行的检验，就是以有限生成投射左 D-模进行的转移。为确定这些映射，将右 D-模与左投射 P 张量起来。由此在 P 上得到的作用，是从 D 到 $\mathrm{End}_k(P)$ 的映射。经过循环链上的矩阵迹时，会插入一个投射对偶基；这就是 [34, 第 9] 节中的公式。每个投射 D-L-双模都是不可分解投射模的外积 $De \otimes_k fL$ 的直和。事实上，本原张量幂等元的像是两个根理想之和的商中的分裂本原幂等元。这个和是幂零的，因此这些幂等元给出了所有投射类型。每个外积对应的转移都可分解为经过以 k 为目标的检验。由可加性可知，这两个核的交相同。域上的结果，以及普通循环同调中奇数次与偶数次的作用，详见 [34, 定理 9.6 和 9.9 以及注 9.10]。□

8.3. **根基纤维的加性不变量**。我们使用泛 dg 加性不变量 U_R of [72,第 2]节。其在 dg 范畴上的态射可以表示为双模对应的格罗滕迪克类。对于下面的论证，等价地，可以应用任意取值于满足对逐对象分裂正合列具有可加性的加性范畴中的 dg Morita 不变函子 E。事实上，这样的正合列会在相应的可表双模上给出一个扩张三角，从而得到对应群中的和关系。对于下面的普通情形，记 $\mathscr{Q}(A)$ 为有限投射右 A-模。

定理 8.7。设 A，B，M，N满足定理 8.1的假设，并对半单商使用相同的记号。对于每个取值于阿贝尔范畴中的微分分次加性不变量，

$$\ker(E(\mathscr{Q}(A)) \to E(\mathscr{Q}(S_A))) \;\simeq\; \ker(E(\mathscr{Q}(B)) \to E(\mathscr{Q}(S_B))).$$

这些同构由核上的张量映射诱导而来。如果商映射有代数截面，则对于任意幂等完备加性目标，张量映射同样会将两个补直和项对应起来。特别地，当目标是稳定范畴时，它们会对应同伦纤维。在 U_k 层级上，这是加性对应范畴的幂等完备化中直和项的一个同构。

证明。 在定理 8.1 的滤过论证中使用右模。双模 $M \otimes_B S_B$ 具有由左侧 J_A 的幂给出的滤过。各层在 S_B 侧是投射的，并且左作用通过 S_A。该滤过在投射对象上诱导出逐对象分裂正合列，因此对于层映射之和 u，有 $E(q_B)E(M) = uE(q_A)$。反向方向也成立相应的等式。误差双模 P 关于 $J_A^i P$ 的滤过，其各层在 A上作为右模是投射的，因为 P是 $A \otimes_k A$的有限直和的直和项。因此，根据相同的可加性，其作用经过 $E(q_A)$分解。两个张量映射的复合在核上作为恒等态射作用。

若给定截面，令 $i_A : F_A \to E(\mathscr{Q}(A))$表示截面的补直和项的包含映射， B也有类似记法。于是，经由 $E(q_A)$的分解意味着 $E(q_B)E(M)i_A = 0$。由于 i_B 是分裂单同态，并在加性范畴中识别分裂商映射的核，因此 $E(M)i_A$ 唯一地经由 i_B分解。这两个误差映射都湮灭这些直和项，因此这两个限制互为逆映射。在稳定的目标范畴中，补对象是分裂商映射的纤维。这些限制仅取决于同伦范畴中的张量映射和纤维嵌入。□

推论 8.8。 在定理 8.7的截面假设下， $\mathscr{C}_k(A) \to \mathscr{C}_k(S_A)$和 $\mathscr{C}_k(B) \to \mathscr{C}_k(S_B)$ 的纤维在混合复形的导出范畴中同构。因此，它们的 *Hochschild* 同调以及普通、负周期和周期循环同调均同构。此结论适用于完美域。

证明。 混合复形是 dg 加性且 Morita 不变的。将定理 8.7应用于它。完美域上的截面条件就是 Wedderburn–Malcev 分裂定理。该纤维构造使用对根基取商。命题8.6 使用传递核的交。 □

例如，设 $D = k[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$ 是代数闭域上特征 2 的情形。每个有限投射左 D-模都是自由的。自由模的零次传递是正则作用的迹，且按每个自由生成元重复一次，因此为零。因此 $HC_0^{\mathrm{st}}(D) = D$，而根基纤维的零次同调为 $k\varepsilon$。

定理 8.9。 设 A，B 是任意交换环 R上的有限中心代数。设M，N如命题 8.6中所述。假设存在幂零理想 I_D，其位于 $D = A$中，B且其商$S_D = D/I_D$ 在 R上可分。假设以下滤过在 R上分裂，即每个相继商序列都分裂：

$$(I_A^j)_j, \quad (I_B^j)_j, \qquad (I_A^j(M \otimes_B S_B))_j, \quad (I_B^j(N \otimes_A S_A))_j.$$

对于每个微分分次加性不变量，定理 8.7 中相应的比较映射 $\mathscr{Q}_R$以 $\mathscr{Q}$ 取代时仍然成立，且用这些商范畴取代半单商。关于补对象和纤维的结论使用其中的代数截面。

证明。 商标量扩张保持相对投射对象。在 $M\otimes_B S_B$和 $N \otimes_A S_A$的两个滤过中，目标一侧的各层都是相对投射对象。事实上，对于可分R-代数 S，分离幂等元将 $Y \otimes_R S \to Y$分裂为右 S-模映射，对每个右 S-模 Y皆如此。张量化 $V \otimes_R A$ 后，每个滤过列仍然是 R-分裂的，因此对 A上的任意相对投射对象张量化后也如此。这是因为将给定的 R-分裂与 V 张量化，再用相对投射对象的幂等元截取即可。其商在S_B上是相对投射对象，因此所得序列在 S_B上分裂。反方向的相应论证同样成立。

对于一个诱导误差 $D \otimes_R V \otimes_R D$，其左滤过为 $I_D^j \otimes_R V \otimes_R D$，这是由对 D 的滤过所作的假定分裂得到的。其层在右侧为诱导的。对于一个直和项

的误差，所定义的幂等元保持该滤过，并限制层分裂和相对投射性。如上所述，将这些序列与一个相对投射对象进行张量化，会得到右 D-模的分裂序列。因此，层映射通过 $\mathscr{Q}_R(S_D)$在加性对应范畴中分解误差作用。应用定理8.7的核与分裂补对象论证。□

8.4. **定义双模诱导的映射**。推论 8.3 中的普通群同构是抽象群同构。即使对于约化对以及没有可分直因子的代数，原始张量映射也可能不是同构。

例 8.10. 设 k 是一个域，并令

$$A = k[x]/(x^3), \qquad E = A^e = k[x,y]/(x^3,y^3), \qquad L = \ker(E \xrightarrow{\mu} A) = (x-y).$$

那么 (L, L) 定义了一个从 A 到其自身的 Morita 型稳定等价。双模 L 是约化的，并且 A 没有非零的可分代数直因子。尽管如此，张量函子 $F = L \otimes_A -$ 在 $K_0(A) = \mathbb{Z}$ 上诱导的映射是乘以 2。若 $\operatorname{char} k \neq 2$，它在 $K_1(A)$ 上的映射不是内射的。

证明。序列 $0 \to L \to E \xrightarrow{\mu} A \to 0$ 在两侧都分裂。由于 A 是局部的，而 E 在两侧都是秩为 3 的自由模，因此 L 在两侧都是秩为 2 的自由模。令 $v = x^2 + xy + y^2$。关系式 $(x-y)v = 0$ 和 $x^3 = y^3 = 0$ 直接表明

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{1\mapsto v} E \xrightarrow{x-y} L \longrightarrow 0$$

是一个双模正合列。例如，v、xv、x^2v 线性无关，并张成乘以 $x-y$的映射的核。将 $0 \to L \to E \to A \to 0$ 与 L 张量化可得

$$0 \longrightarrow L \otimes_A L \longrightarrow E^2 \longrightarrow L \longrightarrow 0.$$

Schanuel 引理和 Krull–Schmidt 消去在 E 上给出

$$L \otimes_A L \simeq A \oplus E. \tag{8.3}$$

这证明了 Morita 型恒等式。由于 E 是局部的，且 $\dim_k L = 6 < 9 = \dim_k E$，双模$L$ 没有非零的 E-投射直和项。代数 A 是局部且非半单的，因此没有非零的可分直因子。

等式 $[F(A)] = [L] = 2[A]$ 证明了关于 K_0的断言。对于 K_1，交换局部环 A 满足 $K_1(A) = A^\times$。设 $u = a + bx + cx^2$，其中 $a \neq 0$。在自由左 A-模 E上，将乘以 u 的映射张量化后得到的映射，是在第二个因子上乘以 u，其行列式为 a^3。因此，将可加性应用于 $0 \to L \to E \to A \to 0$，用乘法记号表示可得

$$F_*(u) = a^3 u^{-1}. \tag{8.4}$$

在特征不为 2 的情况下，非平凡单位元 -1 映射为 1。因此，F_* 在 K_1 上不是内射的。□

这个例子并不与对普通群的抽象比较映射相矛盾：这两个代数是相同的。它将这种比较映射与由指定张量函子诱导的同构区分开来。相比之下，定理 8.1 中的限制由原始张量函子诱导，并且彼此互为逆。

8.5. **增强相对奇点范畴与代数 K-理论**。在本小节中，R 是任意交换环，A 是一个有限生成的 R-代数，且作为R-模有限生成。所有双模都是 R-中心的。令 $\mathscr{E}_R(A)$为有限生成左 A-模构成的正合范畴，其合流为限制到 R 后分裂的短正合列。有限模对扩张和直和项封闭，因此该范畴无需任何诺特性假设便是一个正合范畴。其投射对象恰好是

$$\mathscr{P}_R(A) = \operatorname{add}\{A \otimes_R U \mid U \in R\text{-mod}\}.$$

事实上，诱导模在此正合结构下是投射的，并且对每个 $X \in A$-模，乘法映射$A \otimes_R X \longrightarrow X$ 都是一个 R-分裂满射。

写出

$$\mathscr{D}_R(A) = D^b_\infty(\mathscr{E}_R(A))^\natural, \qquad \operatorname{Perf}_R(A) = \operatorname{thick}_{\mathscr{D}_R(A)} \mathscr{P}_R(A),$$

其中$(-)^\natural$ 表示幂等完备化。我们使用正合范畴的有界导出稳定 ∞-范畴；等价地，也可以使用其稳定包 [33, 定理 1.2 和方程 (1)]。定义

$$\mathscr{S}_R(A) = \big(\mathscr{D}_R(A)/\operatorname{Perf}_R(A)\big)^\natural, \qquad \mathbb{K}^{\mathrm{sg}}_R(A) = \mathbb{K}(\mathscr{S}_R(A)).$$

对于每个 $i \in \mathbb{Z}$，我们将 $K^{\mathrm{sg}}_{i\,R}(A) = \pi_i \mathbb{K}^{\mathrm{sg}}_R(A)$ 记作。构造这些对象时，所有正合范畴都替换为小骨架。商是在稳定 ∞-范畴中形成的，而 $\mathbb{K}$ 表示非连通代数 K理论。此定义保留了增强，且不要求A 在 R上平坦。函子的增强由正合范畴 $\mathscr{E}_R(A)$指定，而非从其三角商中选取。

引理 8.11。 设 P 作为一个 A–A-双模，是双模$A \otimes_R U \otimes_R A$的有限直和的一个直和项，其中 $U \in R$-模。则

$$P \otimes_A - : \mathscr{E}_R(A) \longrightarrow \mathscr{P}_R(A)$$

当 $\mathscr{P}_R(A)$ 赋予其分裂正合结构时，这是一个正合函子。无需对 P 作任何单侧投射性假设。

证明。 对于诱导双模，所讨论的函子是 $A \otimes_R U \otimes_R -$。它在 X 上的取值是一个诱导 A-模。若一个序列在 R上分裂，则将其分裂与 $A \otimes_R U$张量化，可得一个 A-线性分裂。通过有限直和和直和项即可证明该断言。具体而言，若 e是定义该直和项的自然幂等元，且 s 是诱导序列的一个分裂，则 ese 的限制是直和项序列的一个分裂。□

定理 8.12. 设 R 是一个交换环，且 A、B 是有限中心 R-代数。假设 ${}_AM_B$ 和 ${}_BN_A$ 在两侧都是有限生成投射的，并且存在双模同构

$$(M \otimes_B N) \oplus P_1 \simeq A \oplus P_2, \qquad (N \otimes_A M) \oplus Q_1 \simeq B \oplus Q_2,$$

其中每个 P_j 都是 $A \otimes_R U \otimes_R A$ 的有限直和的直和项，而每个 Q_j 都是 $B \otimes_R V \otimes_R B$ 的有限直和的直和项，这里 U、V 是有限生成 R-模。于是，$N \otimes_A -$ 和 $M \otimes_B -$ 诱导互逆等价

$$\mathscr{S}_R(A) \simeq \mathscr{S}_R(B).$$

因此，它们诱导谱的等价

$$\mathbb{K}^{\mathrm{sg}}_R(A) \simeq \mathbb{K}^{\mathrm{sg}}_R(B)$$

以及同构

$$K^{\mathrm{sg}}_{i,R}(A) \simeq K^{\mathrm{sg}}_{i,R}(B) \qquad (i \in \mathbb{Z}).$$

该断言 包括实际张量分解的情形，以及误差
双模是 在 A^e 和 B^e上投射的。

证明。 令 $F = N \otimes_A -$ 和 $G = M \otimes_B -$。由于 N_A 是有限生成投射的， F 的底层 R-模函子是限制函子 A-mod $\longrightarrow$ R-mod的有限直和的直和项。因此，它将 R-分裂的合流映为 R-分裂的合流。对 G也适用同样的论证。

对于 $U \in R$-mod，有一个同构

$$F(A \otimes_R U) \simeq N \otimes_R U.$$

由于 ${}_BN$ 是有限生成投射的，其右端是 $B \otimes_R U$的有限直和的直和项。因此， F 将 $\mathscr{P}_R(A)$映入 $\mathscr{P}_R(B)$，类似地， G 将 $\mathscr{P}_R(B)$映入 $\mathscr{P}_R(A)$。有界导出稳定 ∞-范畴的正合函子性，再经幂等完备化，给出保持相对完美子范畴的、介于 $\mathscr{D}_R(A)$和 $\mathscr{D}_R(B)$之间的正合函子。因此，这些函子下降到 $\mathscr{S}_R(A)$和 $\mathscr{S}_R(B)$。

根据引理 8.11，每个误差函子都经过相对投射模的分裂正合范畴。因此，在有界复形上，其像分别落在Perf_R（A）或Perf_R（B）中。给定的双模同构是正合函子之间的自然同构

$$GF \oplus (P_1 \otimes_A -) \simeq \mathrm{Id} \oplus (P_2 \otimes_A -),$$

and

$$FG \oplus (Q_1 \otimes_B -) \simeq \mathrm{Id} \oplus (Q_2 \otimes_B -).$$

它们函子性地延拓到导出增强。经过增强商范畴后，四个误差函子都变为零。因此，所诱导的复合函子自然等价于恒等函子。这就证明了所断言的等价性。应用非连通代数K-理论，可得到谱的等价以及其同伦群上的同构。□

注 8.13。 根据定义，这是一个局部化序列

$$\mathbb{K}(\mathrm{Perf}_R(A)) \longrightarrow \mathbb{K}(\mathscr{D}_R(A)) \longrightarrow \mathbb{K}^{\mathrm{sg}}_R(A)$$

由非连通代数 K-K 理论 [10, 第 5 节和定理 9。8]。这里未使用 Frobenius、Gorenstein、伴随性或底环平坦性假设。特别地，证明并不假设通常张量函子给出普通稳定模范畴之间的等价。

当 $R = k$ 是一个域时，每个短正合列都是 k-分裂的，并且 $\mathscr{P}_k(A) = A$-投射。因此，该构造就是通常的增强奇点范畴，再取幂等完备化，而所显示的序列是

$$\mathbb{K}(A) \longrightarrow \mathbb{G}(A) \longrightarrow \mathbb{K}^{\mathrm{sg}}(A).$$

对于一般底环，相对完美对象不一定是普通完美复形，因此不能将此序列认定为普通 K–G 局部化序列。同样，将 $K^{\mathrm{sg}}_{0\,R,}(A)$ 认定为朴素余核，需要单独考察幂等完备化以及负 K-群边界元。

8.6. **域与导出构造的特化**。

推论 8.14. 设 A、B 是域 k 上的有限维代数，且二者 *Morita* 型稳定等价。定义张量函子在它们增强的奇点范畴之间诱导出逆等价，并诱导出一个等价

$$\mathbb{K}^{\mathrm{sg}}(A) \simeq \mathbb{K}^{\mathrm{sg}}(B).$$

在 次数零时，这恢复了 *Cartan* 矩阵的稳定 *Grothendieck* 群不变量 x:

$$K^{\mathrm{sg}}_0(A) \simeq \mathrm{coker}\big(K_0(A) \longrightarrow G_0(A)\big) \simeq \mathrm{coker}\, C_A.$$

证明。 应用定理 8.12 ，取 $R = k$。有限维奇点范畴是幂等完备的；参见 [17, 第 2]节。因此，其 Grothendieck 群是从完美复形到有界导出范畴的映射的余核。在投射基与单基下，该映射就是 Cartan 矩阵，这就证明了最后一个断言。 □

域上的增强断言与现有的张量诱导的 dg 比较一致，即 [17, 命题 3.1 和引理 3.2]: 由在两侧均为投射的双模定义的张量函子，若诱导出奇点等价，则具有一个为拟等价的 dg 提升。域情形是这一既有比较结果及双模恒等式的推论。定理 8.12的证明给出了任意交换基环上的相对构造。

推论 8.15. 定理 *13.2* 和定理 *14.1* 中构造的双模对诱导出等价

$$\mathbb{K}^{\mathrm{sg}}_R(A) \simeq \mathbb{K}^{\mathrm{sg}}_R(B).$$

对于 *Rouquier–Zimmermann* 构造，稳定化双模恒等式已经足够。得出这一结论并不要求在整个普通稳定模范畴上实现这些等价。

证明. 所引用的构造给出了两侧均为射影的双模，以及带有包络投射误差的实际或稳定化张量恒等式。这些都是定理 8.12 的假设的特例。 □

因此，相对结果可直接应用于由导出构造提供的双模恒等式。即使该正合范畴不是 Frobenius 范畴，其证明仍使用 R-分裂正合结构。普通根基核、理想 J_A的相对群以及增强的 R-相对奇异群是彼此不同的构造；上面的每个比较映射都保留了其定义所要求的假设。

9. 伴随正规化

在本节中，我们构造稳定双模对的双伴随代表元。在小节 9.1之前，除非另有说明，我们都在交换 Artin 环 R上工作。在该小节中，我们转而采用亨泽尔诺特局部基环。始终假设，代数在 R上有限，且双模是有限生成的并且是 R-中心的。置

$$C_{A,B} = A \otimes_R B^{\mathrm{op}}, \qquad A_R^e = C_{A,A}.$$

投射 A-B-双模是指一个投射的 $C_{A,\,B}$-模。对于有限 R-代数 C，考虑以下两个类别

$$\mathscr{P}^{\mathrm{ord}}(C) = C\text{-proj}, \qquad \mathscr{P}^{\mathrm{rel}}(C) = \mathrm{add}\{C \otimes_R U \mid U \in R\text{-mod}\}.$$

第二个类别由正合结构中的投射对象组成，其中的合流在 R 上分裂。我们在全文中固定这两个类别中的一个，并将所选类别记为$\mathscr{P}_{A,\,B}$，其定义在 $C_{A,\,B}$ 上。如果一个双模在该类别下没有$\mathscr{P}_{A,\,B}$中的非零直和项，则称其为关于该类别的 约化 双模。

对于通常的投射误差双模，关于没有可分直因子的 Artin 代数之间 Morita 型稳定等价存在伴随型代表元的结论见 [74,引理 3.11]。对于没有半单直因子的任意域上的有限维代数，相应的结论见 [15, 引理 4.1]。我们直接由给定约化双模对的分解构造这两个伴随。该证明适用于任一投射性类别，并不要求在 R 上具有投射性。

引理 9.1。 设 C 是一个有限生成的 R-代数， $\mathscr{S}$ 是一个有限生成C-模的加性类，且对直和项封闭。假设 X 是一个有限生成的 C-模，在 $\mathscr{S}$中没有非零直和项。记 $\mathscr{I}_{\mathscr{S}}(X,X)$ 为 $\mathrm{End}_C(X)$ 中所有可经由 $\mathscr{S}$中的对象因子分解的映射构成的理想。则

$$\mathscr{I}_{\mathscr{S}}(X,X) \subseteq \mathrm{rad}\,\mathrm{End}_C(X).$$

X 中任何模 $\mathscr{I}_{\mathscr{S}}(X,X)$ 可逆的自同态，都是 X的自同构。

证明。 设 $f \in \mathscr{I}_{\mathscr{S}}(X,X)$ 且 $g \in \mathrm{End}_C(X)$。则 gf可经由 $\mathscr{S}$中的一个对象因子分解。由 Fitting分解可知，对充分大的 n,

$$X = \ker(gf)^n \oplus \mathrm{im}(gf)^n,$$

且 gf 限制在 $Y = \mathrm{im}(gf)^n$上是一个自同构。由于这个自同构可经由 $\mathscr{S}$中的一个对象因子分解，id_Y也如此。因此， Y是 $\mathscr{S}$中某个对象的直和项，所以 $Y \in \mathscr{S}$。关于 X 的假设给出 $Y = 0$, 因此 gf 是幂零的。于是，对每个 g， $1 - gf$ 都是可逆的，这就证明了根基包含。最后一个断言成立，是因为单位元模任何包含于 Jacobson根中的理想都可以提升。□

引理 9.2。 设 A、 B、 C 是有限中心 R-代数，且 ${}_AU_B$ 和 ${}_BV_C$ 是双模。

（1）如果$U \in \mathscr{P}_{A,\,B}$ 和 V_C 是投射的，则$U \otimes_B V \in \mathscr{P}_{A,\,C}$。

（2）如果$V \in \mathscr{P}_{B,\,C}$ 和 ${}_AU$ 是投射的，则$U \otimes_B V \in \mathscr{P}_{A,\,C}$。

证明。 在相对情形中， U 是某个有限 R-模 W 的直和项。对分裂进行张量化，并使用 $V_C \in \mathrm{add}(C_C)$，得到

$$U \otimes_B V \in \mathrm{add}(A \otimes_R W \otimes_R V) \subseteq \mathrm{add}(A \otimes_R W \otimes_R C).$$

这就证明了相对情形下的（1）。对于普通情形，取 W 为 R 上的有限自由模。对于（2），使用由 $B \otimes_R W \otimes_R C$ 和 ${}_AU \in \mathrm{add}({}_AA)$ 给出的 V 的分裂表示。由于所有进行张量化的映射都是分裂的，因此无需关于 R 的平坦性假设。□

如果一个代数的正则双模没有非零投射直和项，则称其没有 R-可分代数因子。等价地，它没有非零的代数直因子 A_1，该因子在R上是可分的，其中可分性是指乘法 $A_1 \otimes_R A_1 \to A_1$ 作为双模映射可分裂。事实上，$\mathrm{End}^{A_R^e}(A) = Z(A)$中的幂等元恰好是确定代数直因子的中心幂等元。

引理 9.3。 设 R 为任意交换环， A 为任意带单位的中心 R-代数。对于正则双模 A，经过通常投射模和经过 R-相对投射 A_R^e-模分解的自同态所构成的理想相同。特别地，这两类模在 A中具有相同的直和项，并且相对投射中心就是通常投射中心 $Z_{\mathrm{pr}}(A)$ 。

证明。 乘法 $\mu:\ A\otimes_R A\to A$ 是一个 R-分裂满同态，并带有 R-线性截面$a\mapsto 1\otimes a$。如果 $A\to U\xrightarrow{h}A$ 是通过一个 R-相对投射模的分解，则将 h 沿μ提升。所得分解通过通常的自由 A_R^e-模 $A\otimes_R A$。理想的反向包含是显然的。将该等式应用于 A的一个直和项所对应的幂等元，即得第二个断言。□

引理 9.4。 设 A 和 B 没有 R-可分直因子。假设 ${}_AM_B$ 和 ${}_BN_A$ 在两侧均为投射模，并满足

$$M\otimes_B N\cong A\oplus P,\qquad N\otimes_A M\cong B\oplus Q, \tag{9.1}$$

其中 $P\in\mathscr{P}_{A,\ A}$ 和 $Q\in\mathscr{P}_{B,\ B}$。记

$$M=M_0\oplus U,\qquad N=N_0\oplus V,$$

其中 M_0、N_0 关于所选类是约化的，且$U\in\mathscr{P}_{A,\ B}$、 $V\in\mathscr{P}_{B,\ A}$。则M_0、 N_0 在两侧均为投射模，并满足

$$M_0\otimes_B N_0\cong A\oplus P_0,\qquad N_0\otimes_A M_0\cong B\oplus Q_0$$

与 $P_0\in\mathscr{P}_{A、A}$ 和 $Q_0\in\mathscr{P}_{B、B}$。

证明。 四个直和项在两侧都是投射的。展开 $(M_0\oplus U)\otimes_B(N_0\oplus V)$ 并应用引理 9.2，我们看到除 $M_0\otimes_B N_0$ 外的每一项都属于 $\mathscr{P}_{A、A}$。因此

$$(M_0\otimes_B N_0)\oplus T\cong A\oplus P$$

对于 $T\in\mathscr{P}_{A、A}$。根据引理 9.3， A 在 $\mathscr{P}_{A、A}$中没有非零直和项。因此，Krull–Schmidt 定理将 $M_0\otimes_B N_0$ 在此类别之外的直和项与 A的直和项对应起来。其余直和项构成 P_0。对 B_R^e 应用同样的论证即可得到第二个分解。□

现在我们可以为一个约化双模对构造两个伴随。

定理 9.5。 设 A、 B 是交换 *Artin* 环 R上的有限中心代数，并固定上述定义的两个投射性类别之一。假设 ${}_AM_B$ 和 ${}_BN_A$ 相对于所选类别是约化的，作为两侧的普通模都是投射的，并满足 (9.1)，其中 $P\in\mathscr{P}_{A、A}$以及 $Q\in\mathscr{P}_{B、B}$。那么

$$M\otimes_B -\ \dashv\ N\otimes_A -\qquad and\qquad N\otimes_A -\ \dashv\ M\otimes_B -$$

在普通模范畴上。特别地，存在双模同构

$$\begin{aligned}{}_BN_A&\cong\mathrm{Hom}_A(M,A)\cong\mathrm{Hom}_{B^{\mathrm{op}}}(M,B),\\ {}_AM_B&\cong\mathrm{Hom}_B(N,B)\cong\mathrm{Hom}_{A^{\mathrm{op}}}(N,A).\end{aligned}$$

证明。 固定（9.1）中的分解，并记包含映射和投影为

$$i:A\longrightarrow M\otimes_B N,\quad p:M\otimes_B N\longrightarrow A,\qquad v:B\longrightarrow N\otimes_A M,\quad q:N\otimes_A M\longrightarrow B.$$

因此 $pi=1_A$、 $qv=1_B$、 $p\cong P$ 的核以及 $v\cong Q$ 的余核。张量积的结合律和单位元识别均不再特别说明。

考虑 A-B-双模自同态

$$t_M=(p\otimes_A 1_M)(1_M\otimes_B v):M\longrightarrow M\otimes_B N\otimes_A M\longrightarrow M.$$

第一个映射 $1_M\otimes_B v$ 是一个以 $M\otimes_B Q$ 为补对象的分裂单同态，而第二个映射 $p\otimes_A 1_M$ 是一个以 $P\otimes_A M$ 为核的分裂满同态。根据引理 9.2，两个补对象都属于 $\mathscr{P}_{A,\ B}$。因此，在将 $C_{A,\ B}$-模按经由 $\mathscr{P}_{A,\ B}$ 中对象的映射取商后，每个映射都是可逆的。因此， t_M 在其中的像

$$\mathrm{End}_{C_{A,B}}(M)/\mathscr{I}_{\mathscr{P}_{A,B}}(M,M)$$

是一个单位元。由于 M 是约化的，引理9.1表明 t_M 是一个双模自同构。

定义

$$p'=p(t_M^{-1}\otimes_B 1_N):M\otimes_B N\longrightarrow A. \tag{9.2}$$

映射 p' 再次是一个分裂满同态，其核同构于 P。交换作用于不同张量因子上的映射，得到

$$\begin{aligned}(p' \otimes_A 1_M)(1_M \otimes_B v) &= (p \otimes_A 1_M)(t_M^{-1} \otimes_B 1_N \otimes_A 1_M)(1_M \otimes_B v) \\ &= (p \otimes_A 1_M)(1_M \otimes_B v)t_M^{-1} = 1_M.\end{aligned}$$

这就是第一个三角恒等式。

对于第二个三角形，令

$$s_N = (1_N \otimes_A p')(v \otimes_B 1_N) : N \longrightarrow N \otimes_A M \otimes_B N \longrightarrow N.$$

我们首先证明 s_N 是幂等元。记 $v(1_B) = \sum_{j=1}^{r} n_j \otimes m_j$。第一个三角恒等式给出

$$\sum_{j=1}^{r} p'(m \otimes n_j)m_j = m \qquad (m \in M), \tag{9.3}$$

而 $s_N(n) = \sum_i n_i p'(m_i \otimes n)$。由 p' 和（9.3）的双模线性，

$$\begin{aligned}s_N^2(n) &= \sum_{i,j} n_i p'(m_i \otimes n_j)p'(m_j \otimes n) \\ &= \sum_i n_i p' \left(\left(\sum_j p'(m_i \otimes n_j)m_j \right) \otimes n \right) \\ &= \sum_i n_i p'(m_i \otimes n) = s_N(n).\end{aligned}$$

映射 $v \otimes_B 1_N$ 是一个分裂单同态，其补对象为 $Q \otimes_B N \in \mathscr{P}_{B,\ A}$。映射 $1_N \otimes_A p'$ 是一个分裂满同态，其核同构于 $N \otimes_A P$，同样属于 $\mathscr{P}_{B,\ A}$。因此 s_N 模去经由 $\mathscr{P}_B$ 中的对象的映射后可逆 A。由于 N 是约化的，引理 9.1 表明 s_N 是一个自同构。可逆幂等元就是单位元，因此 $s_N = 1_N$。

因此，双模映射 v 和 p' 满足两个三角恒等式。将它们与模张量化，便得到

$$F = M \otimes_B - \ \dashv\ G = N \otimes_A -.$$

B-模 X 上的单位元为 $v \otimes_B 1_X$：$X \to GF(X)$，而 A-模 Y 上的余单位为 $p' \otimes_A 1_Y$：$FG(Y) \to Y$。

用 $(B,\ A,\ N,\ M)$ 替换 $(A,\ B,\ M,\ N)$，从 i 和 q 开始，应用相同的构造。由此得到 $G \dashv F$。这两种构造不要求所选分解之间具有任何相容性。

最后，${}_AM$ 和 ${}_BN$ 都是有限生成投射模。因此，由通常的张量–Hom 伴随以及右伴随的唯一性可得

$$N \cong \mathrm{Hom}_A(M, A), \qquad M \cong \mathrm{Hom}_B(N, B)$$

作为双模。分别对 ${}_BN$ 和 ${}_AM$ 应用投射双对偶性，可得到所显示的另外两个同构。□

推论 9.6。 设 A、B 是交换 *Artin* 环 R 上的有限中心代数，且不含 R 可分直因子。假设双模 M、N 在两侧都是投射的，并满足（9.1），其中对于选定的射影性类别，有 $P \in \mathscr{P}_{A,\ A}$ 以及 $Q \in \mathscr{P}_{B,\ B}$。那么，删去属于此类别的双模直和项后，所得的一对双模满足同类型的分解，并诱导出按两种顺序均互为伴随的张量函子。对于普通投射双模，所得的一对双模在 A 与 B 之间定义了伴随型稳定等价。

证明。 应用引理 9.4 和定理 9.5。 □

当双模恒等式仅在相应的稳定范畴中给出时，同样的构造也适用。

推论 9.7。 固定任一投射性类别。设 M、N 在两侧均为投射模，并且

$$M \otimes_B N \simeq A, \qquad N \otimes_A M \simeq B$$

在相应的双模范畴中，分别模掉经由$\mathscr{P}_{A,\,A}$和$\mathscr{P}_{B,\,B}$的映射，其中允许 A、B含有可分直因子。从 M、N中移除$\mathscr{P}_{A,\,B}$和$\mathscr{P}_{B,\,A}$中的直和项后，所得双模 M_0、N_0仍满足这些稳定双模恒等式，并在普通模范畴上诱导出按两种顺序均互为伴随的张量函子。它们在 R-相对稳定模范畴上诱导出与 M、N相同的函子，且这些诱导函子是逆等价。

约化对在每个 R-可分直因子上的分量均为零。如果任一代数含有这样的非零因子，则相应的完整正则双模不能作为规范化复合函子的实际直和项。

此外，若 A、B 没有 R-可分直因子，则稳定恒等态射可以由实际分解表示

$$M_0 \otimes_B N_0 \cong A \oplus P_0, \qquad N_0 \otimes_A M_0 \cong B \oplus Q_0,$$

其中 $P_0 \in \mathscr{P}_{A,\,A}$ 和 $Q_0 \in \mathscr{P}_{B,\,B}$。

证明。 根据引理 9.2，删去所指明的直和项仍保持稳定恒等态射。将M、N 替换为它们的约化部分。选取表示给定稳定同构的双模映射

$$p : M \otimes_B N \longrightarrow A, \qquad v : B \longrightarrow N \otimes_A M$$

。根据同一引理，张量化保持经由所选类别的分解。因此 $(p \otimes_A 1_M)(1_M \otimes_B v)$ 在交叉双模的商范畴中可逆，故由引理 9.1可知它是一个自同构。按照式（ p 9.2）进行规范化。这给出第一个三角恒等式。利用式（9.3）的计算证明第二个三角自同态是幂等的；它在商范畴中仍可逆，因此由约化性可知它是单位元。这里只用到 p、v 的稳定可逆性；它们的代表元不必是分裂的。因此 $M \otimes_B - \dashv N \otimes_A -$。对称构造证明反向的伴随关系。

关于可分因子的断言，如果 eA 是一个 R-可分直因子，那么 $eM \cong eA \otimes_A M \in \mathscr{P}_{A,\,B}$ 根据引理9.2。由于它是约化双模 M的直和项，因此它为零。对于 M中支集在可分因子上的每个分量，同样的论证也适用。

回忆一下， R-相对稳定范畴是 A-模关于经过 $\mathsf{add}\{A \otimes_R U \mid U \in R\text{-模}\}$的映射取商所得的范畴。如果一个交叉双模属于$\mathscr{P}_{A,\,B}$，则将其与任意 B-模进行张量化，会得到一个 R-相对投射 A-模。此外，单侧投射性确保 $M \otimes_B -$保持相对投射模。由此，稳定双模恒等式在相对稳定模范畴之间诱导出逆等价。删除所指示的双模直和项不会改变这些诱导出的函子。

对于最后一个断言，将 $M \otimes_B N = X_0 \oplus P_0$ 分解为，其中 X_0 约化且$P_0 \in \mathscr{P}_{A,\,A}$。在附加假设下， A 根据引理9.3是约化的。因此 X_0 和 A 是模去所选类后同构的约化对象。逆同构的代表元的复合由引理9.1可知是单位元，因此这些代表元实际上是同构。于是 $X_0 \cong A$。另一个分解以同样方式得到。□

注 9.8。 如果有限的 C-模 X 作为 R上的模是投射的，那么它在C 上相对于 R 投射，当且仅当它在普通意义下作为 C 上的模投射。事实上，一个 R-分裂满同态$R^n \to X$ 会诱导一个 R-分裂的 C-满同态 $C^n \to X$，根据相对投射性，该同态在 C上分裂。因此，如果 A， B 在 R上是投射的，那么上述两种选择在单侧投射双模 M， N 的所有直和项及其乘积的直和项上都一致。因此，它们在所示分解中的误差模上也一致。R-投射模之间的分解理想也相同：将一个映射从相对投射模到目标模，并沿着一个 R-分裂的普通自由 C-模满同态提升即可。在这种情况下，普通版本和相对版本的归一化命题一致。

注 9.9。 定理 9.5 中的伴随适用于普通模范畴，而张量函子由于单侧投射性而是正合的。在非域基环上，它们未必能在整个普通稳定模范畴上诱导逆等价。事实上，

$$(A \otimes_R A) \otimes_A X \cong A \otimes_R X$$

对于任意 X，不必是 A-模中的投射对象。证明利用模范畴在$C_{A,\,B}$ 和 $C_{B,\,A}$ 上的商，通过选定的投射性类别进行映射，以建立两个三角自同态的可逆性。稳定双模恒等式

给出了推论 9.7中的相对稳定等价。不要求普通稳定模范畴的等价。

9.1. **亨泽尔诺特局部基环**。 正规化论证使用引理 9.1中的根基包含，而移除误差直和项还使用 Krull–Schmidt 定理。在亨泽尔诺特局部基环上，这两点都源于相关自同态环的半完美性。基环的完备性并非必需。

命题 9.10。 设 R，$\mathfrak{m}$）是交换 *Hensel* 诺特局部环，并设 A，B 是有限中心 R-代数。固定采用第 9节中的普通射影性类别或 R-相对投射性类别之一。则定理9.5 以及推论9.6 和 9.7 在 R上仍然成立。

特别地，一对约化的有限生成双模，其在两侧均为投射模并满足 *Morita* 型分解，会诱导出按两种顺序均为伴随的张量函子。仅满足稳定双模恒等式的一对双模也具有这样的约化代表，并且该代表具有相同的稳定恒等式以及诱导的 R-相对稳定函子。如果 A、B 没有 R-可分直因子，则正则双模仍然是复合函子的实际直和项。不要求 A、B 关于 R 具有投射性。

证明。 设 C 是有限中心 R-代数，且 X 是有限生成的 C-模。则 X 在 R 上有限。由于 R 是诺特的，

$$E = \operatorname{End}_C(X) \subseteq \operatorname{Hom}_R(X, X)$$

是有限 R-模。我们首先证明 E 是半完美的。

置 $k = R/\mathfrak{m}$。对于 $z \in \mathfrak{m}E$ 和 $y \in E$，由 $1 - yz$ 给出的左乘和右乘在模 $\mathfrak{m}$ 意义下诱导出单位元。Nakayama引理表明，这两个乘法映射都是满射，因此 $1 - yz$ 具有左逆和右逆。于是

$$\mathfrak{m}E \subseteq \operatorname{rad} E.$$

此外，$E/\mathfrak{m}E$ 是有限维 k-代数。

我们断言幂等元可模 $\mathfrak{m}E$ 提升。设 $a \in E$ 是幂等元 $\bar{a} \in E/\mathfrak{m}E$ 的一个提升。选取 $e_1, \dots,$ e_n 作为 R-模 E 的生成元，使其剩余类构成 $E/\mathfrak{m}E$ 的 k-基，并选取矩阵 $T \in M_n(R)$ 表示在这些生成元上的左乘 a。若 $f(Z) = \det(ZI - T)$，则行列式技巧给出 $f(a) = 0$。事实上，自然满同态 $R^n \to E$ 将 T 与由 a 给出的左乘交织起来，而凯莱–哈密顿定理随后通过在 1_E 处求值得到这一恒等式。T 的约化表示由左乘 $\bar{a}$ 给出的幂等算子。因此，

$$\bar{f}(Z) = Z^s(Z-1)^q \qquad (s + q = n).$$

若 $s = 0$ 或 $q = 0$，则分别有 $\bar{a} = 1$ 或 $\bar{a} = 0$，结论立即成立。否则，由亨泽尔局部环的因子分解判别准则，存在首一多项式 g，$h \in R[Z]$ 使得

$$f = gh, \qquad \bar{g} = Z^s, \qquad \bar{h} = (Z-1)^q;$$

参见 [66, 引理10.153.3]。它们的结式是一个单位元，因此 $(g) + (h) = R[Z]$。取 $e(Z) \in R[Z]$ 使得

$$e \equiv 0 \pmod{g}, \qquad e \equiv 1 \pmod{h}.$$

于是 $e^2 - e \in (f)$，且 $e(a)$ 是 E 的一个幂等元。由同余式 $\bar{e}(0) = 0$ 和 $\bar{e}(1) = 1$ 可知 $\bar{e}(\bar{a}) = \bar{a}$，因此 $e(a)$ 提升为 $\bar{a}$。这一论证也适用于可能非交换的环 E，因为这些多项式的系数都位于 R 的中心像中。

阿廷环 $E/\mathfrak{m}E$ 具有幂零根基，模掉该根基后幂等元可以提升。将这一事实与前述提升性质及包含映射 $\mathfrak{m}E \subseteq \operatorname{rad} E$ 相结合，可知 E 是半完美的。分裂本原幂等元给出 X 到具有局部自同态环的模的有限分解。因此，有限生成 C-模的范畴是 Krull–Schmidt 的。

现在我们建立正规化所需的根基包含。设 $\mathscr{S}$ 是有限 C-模的一个在直和项下封闭的加性类，并假设 X 在$\mathscr{S}$中没有非零直和项。记

$$X = \bigoplus_{i=1}^{r} X_i^{n_i}, \qquad E/\operatorname{rad} E \cong \prod_{i=1}^{r} M_{n_i}(D_i),$$

其中 X_i 是两两不同构的不可分解对象，并且

$$D_i = \operatorname{End}_C(X_i)/\operatorname{rad}\operatorname{End}_C(X_i).$$

对于一个经由 $\mathscr{S}$ 分解的映射，同构不可分解直和项之间的每个分量也经由 $\mathscr{S}$ 分解。在与 X_i 的识别下，这样的分量不可能是可逆的：否则 X_i 将是 $\mathscr{S}$ 中某个对象的直和项。由于 $\mathrm{End}_C(X_i)$ 是局部的，该分量属于其根基。在所示的半单商中，不同构不可分解对象之间的分量均为零。因此

$$\mathscr{I}_{\mathscr{S}}(X,X) \subseteq \operatorname{rad}\mathrm{End}_C(X).$$

单位元可以模包含于 Jacobson 根的理想提升；需要该理想非幂零这一假设。

交叉张量引理以及通常投射中心与相对投射中心相等这一结论用到了分裂映射，并且在 R 上仍然成立。定理 9.5 和推论 9.7 中的三角计算现在可以应用刚刚证明的根基包含。Krull–Schmidt 性质允许去除所指出的误差直和项。当 A, B 没有 R-可分直因子时，根据引理 9.3，它们的正则双模是约化的；因此，同样的分解论证保留了实际的正则双模直和项。这就证明了所述结论。□

推论 9.11。 在命题 *9.10*的假设下，设归一化双模M, N 满足实际分解 (9.1)。那么，对于每个 A-模 X 和每个 B-模Y，包括非有限生成的模，以及对每个

$$d \in \{\mathrm{pd}, \mathrm{id}, \mathrm{Gpd}, \mathrm{Gid}, \mathrm{domdim}\},$$

有

$$d_A(X) = d_B(N \otimes_A X), \qquad d_B(Y) = d_A(M \otimes_B Y).$$

相应的等式对右模也成立，只需将张量因子反转。

证明。 双模单位元和余单位元在全体模范畴上定义了两个伴随，而单侧投射性使两个张量函子都成为正合函子。实际的分解给出了自然的分裂单射

$$X \mid M \otimes_B N \otimes_A X, \qquad Y \mid N \otimes_A M \otimes_B Y.$$

定理 11.1 适用。对相反代数作同样的论证，即可证明右模的相应断言。仅凭稳定双模恒等式并不能得到此处所用的实际直和项嵌入。□

只要满足所需的单侧投射性和稳定双模恒等式，前述结果就适用于 Abe–Hoshino [1]的完备局部情形。要将这些结果应用于给定的导出等价，还需单独构造这些双模。

根基条件也可以与亨泽尔假设分开表述。

命题 9.12. 设 R 是一个交换环， A、 B 是含幺中心 R-代数，并固定一个射影性类别。假设 ${}_AM_B$ 和 ${}_BN_A$ 在两侧均为有限生成投射，且

$$M \otimes_B N \simeq A, \qquad N \otimes_A M \simeq B$$

在相应的稳定双模范畴中。假设

$$\mathscr{I}_{\mathscr{P}_{A,B}}(M,M) \subseteq \operatorname{rad}\mathrm{End}_{C_{A,B}}(M),$$
$$\mathscr{I}_{\mathscr{P}_{B,A}}(N,N) \subseteq \operatorname{rad}\mathrm{End}_{C_{B,A}}(N).$$

那么 $M \otimes_B -$ 和 $N \otimes_A -$ 在所有普通模范畴上按两种顺序互为伴随。特别地，若 M、 N 是约化的，且它们所示的自同态环是半完美的，则这一结论成立。

证明。 选取稳定同构 $p\colon M \otimes_B N \to A$ 和 $v\colon B \to N \otimes_A M$ 的代表元。交叉张量引理表明

$$t_M = (p \otimes_A 1_M)(1_M \otimes_B v)$$

在模$\mathscr{I}_{\mathscr{P}_{A,B}}(M,M)$的意义下可逆。假设的根基包含使 t_M成为自同构。将 p 替换为 $p(t_M^{-1} \otimes_B 1_N)$ 即可得到第一个三角恒等式。（ 9.3 ）中的计算表明，第二个三角自同态是幂等的。它在第二个

分解理想的意义下也可逆，因此根据另一个根基包含，它实际上是一个自同构。故它就是单位元。交换 M, N 即可得到反向伴随。

对于最后一个断言，半完美性保证 M、N 都可有限分解为具有局部自同态环的不可分解对象。命题 9.10 证明中的矩阵论证随后根据约化性得到两个根基包含。□

这个判据针对指定的双模对。它并不声称在任意基环上都存在约化代表元，也不以实际分解取代稳定双模恒等式。

下一个例子说明，单凭约化性并不能保证在任意诺特局部基环上满足根基条件。

例 9.13. 令 $k = \mathbb{Q}$ 并设

$$R = k[x]_{(x)}, \qquad A = R[t]/(t^2(t-1) - x).$$

代数 A 是 R上的秩为三的自由模。消去 x 后，可将 A 识别为 $k[t]$的一个局部化，因此 A 是一个整环。由于 A 是局部环 R上的有限代数，其极大理想是位于 (x) 之上的两个理想，即 (t) 和 $(t-1)$。因此

$$\operatorname{rad} A = (t) \cap (t-1) = (t(t-1)).$$

特别地，R 不是亨泽尔的：有限交换 R-代数 A 是一个具有两个极大理想的整环，而亨泽尔局部环上的有限交换代数是局部环的乘积 [66, 引理10.153]。

令 $C = A^e_{R^\circ}$。它是相应的局部化：

$$k[t,u]/((t-u)g(t,u)), \qquad g(t,u) = t^2 + tu + u^2 - t - u.$$

正则双模为 $A = C/(t-u)$，并且

$$\operatorname{End}_C(A) = A, \qquad \operatorname{Hom}_C(A, C) = \operatorname{ann}_C(t-u) = (g).$$

湮灭子等式可通过在局部化之前于 $k[t,u]$ 中约去 $t-u$ 得到。因此，将映射 $A \to C$ 与映射 $C \to A$ 复合，恰好得到由 $g(t,t)$ 生成的理想。由于每个有限投射 C-模都是有限自由模的一个直和项，完整的投射分解理想为

$$\mathscr{I}_{C\text{-proj}}(A, A) = (g(t,t)) = (3t^2 - 2t) = (t).$$

这里 $3t-2$ 是 A中的单位元，因为它在两个极大理想处的剩余分别为 -2 和 1.

整环 $\operatorname{End}_C(A) = A$ 没有非平凡幂等元，因此 A 作为双模是不可分解的。它不是 C-投射的，因为其单位元不属于 (t)。因此，A是约化的，但是

$$\mathscr{I}_{C\text{-proj}}(A, A) = (t) \not\subseteq \operatorname{rad} \operatorname{End}_C(A) = (t(t-1)).$$

根据引理 9.3，对于R-相对类，同样的分解理想和同样的约化性断言也成立。代数 A 没有非零 R-可分直因子，因为它是整环，且其正则双模不是投射的。

乘以 $1-t$ 在稳定自同态环 $A/(t) \cong k$中是一个单位元，但它不是 A的自同构，因为 $1 - t \in (t-1)$。因此，即使代数是 R-自由的且双模在两侧都是自由的，一个自同态也可以是稳定可逆的，却不是自同构。这表明，仅凭约化性无法将根基论证推广到任意诺特局部基环。这并不是双伴随正规化存在性的反例：单位元对 $(A,\ A)$ 本身已经是双伴随的。

9.2. 域与可分因子的作用。

9.2.1. 域情形。 半单商的可分性与不存在可分直因子是两个不同的概念。前者并非伴随正规化所必需的。Chen–Pan–Xi [15,引理 4.1，第 650] 页证明，在任意域上，若 A, B 不含半单直因子，且 Morita 型对 M, N 不含投射双模直和项，则

$${}_BN_A \simeq \operatorname{Hom}_A(M, A) \simeq \operatorname{Hom}_{B^{\mathrm{op}}}(M, B), \qquad M \otimes_B - \dashv N \otimes_A - \dashv M \otimes_B -.$$

他们还证明了相应的对偶同构 M 以及包络代数上误差双模的投射-内射性。两个半单商均未假设为可分。

他们的证明从 Dugas–Martínez-Villa [19, 定理 2.7 和推论 3.1]的论证中去除了关于半单商可分性的假设。[19,定理 2.8] 中的判据利用可分性，根据一个双模的所有张量像均具有投射性，推导出该双模的投射性。该判据用于从较弱的函子性假设构造 Morita 型分解。因此，紧随该判据之后的不可分域例子，并不能排除对已经满足 Morita 型分解的一对对象进行正规化。

推论 9.14. 设 A、B 是域 k 上没有可分直因子的有限维代数。假设 M、N 定义了一个 *Morita* 型稳定等价。那么，删去它们的投射双模直和项后，得到一对 M_0、N_0，其张量函子按两种顺序都互为伴随，并且在普通稳定范畴上诱导相同的函子。

证明. 有限维代数的可分性意味着其对角双模是投射的。由于 $\mathrm{End}_{A^e}(A) = Z(A)$，对角直和项与代数直因子相对应。应用引理 9.4 和定理 9.5，其中 $R = k$。在域上，投射双模与任意模张量后，在另一侧仍是投射模；因此，被删去的直和项在普通稳定范畴上诱导零函子。□

存在性断言包含在 [74, 引理 3.11] 中。上述证明给出了明确的单位和余单位，无需标量扩张或绝对不可分解性。在完美域上，没有可分直因子等价于没有半单直因子。在非完美域上，前者条件较弱：次数大于一的有限纯不可分域扩张作为环是半单的，但它在基域上不可分。

9.2.2. 约化与可分直因子。 未约化的 Morita 型对不一定会诱导出伴随的张量函子。

例 9.15。 令 $A = k[t]/(t^2)$，置 $B = A$，并令

$$M = A \oplus A^e, \qquad N = A.$$

这些双模在两侧均为投射模，并满足 $M \otimes_A N \simeq A \oplus A^e \simeq N \otimes_A M$。由 N 定义的张量函子是单位元函子，其左伴随和右伴随在自然同构意义下均为单位元函子。由 M 定义的函子不同构于单位元函子，因为它将 A映射到 $A \oplus A^e \not\simeq A$。因此，所指定的张量函子互不构成伴随函子。删除投射双模直和项后，得到伴随对 $(A,\ A)$。

即使可以替换实现该等价的双模，可分直因子的条件也不能省略。

例 9.16。 设 $A = kQ$ 为克罗内克箭图 $1 \rightrightarrows 2$，并令 $B = A \times k$。定义

$${}_AM_B = ({}_AA_A, {}_AA_k), \qquad {}_BN_A = ({}_AA_A, {}_kA_A)^{\mathsf{t}}.$$

这些项是 B的两个因子的分量； A-作用是正则的，而 k-作用是标量作用。这些双模在两侧都是投射的，并且

$$M \otimes_B N \simeq A \oplus (A \otimes_k A). \tag{9.4}$$

误差在 A^e上是秩为一的自由模。取 $k1_A$ 在 A中的向量空间补空间 V。将四个双模分量记录为矩阵形式，得到

$$\begin{aligned} N \otimes_A M &\simeq \begin{pmatrix} {}_AA_A & {}_AA_k \\ {}_kA_A & {}_kA_k \end{pmatrix} \simeq B \oplus Q, \\ Q &= \begin{pmatrix} 0 & {}_AA_k \\ {}_kA_A & {}_kV_k \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{9.5}$$

由于 $B^e \simeq A^e \times A \times A^{\mathrm{op}} \times k$， Q 的四个分量在相应因子上都是投射的。因此 M， N 定义了经典 Morita 型稳定等价。

然而，这些代数之间不存在一个 Morita 型对，使其张量函子按两个方向都互为伴随。采用以左模表示所示箭图的路径约定时，不可分解投射 A-模的维数向量为 (1，2)，(0，1)，而不可分解内射模的维数向量为 (1，0)，(2，1)。因此， A 没有非零投射-内射模，而 B-模 $S = (0,\ k)$ 非零且为投射 - 内射模。如果某个 Morita 型对给出了双伴随正合函子 F：B- 模 $\to A$- 模 和 G：A- 模 $\to B$- 模，那么 F 将保持投射对象

和内射对象，从而迫使 $F(S) = 0$。Morita 型分解使恒等函子成为 GF 的一个直和项，因此 S 将是 $GF(S) = 0$ 的一个直和项。该论证适用于任意域，包括代数闭域。

9.2.3. 伴随与普通稳定等价。 Xi–Zhang [74, 引理 3.11，第 13]阐述了对于不含可分直和项的 Artin 代数，伴随型代表元的存在性。他们的定义 3.7 是在域上陈述的，其证明援引了早期域上论证的扩张。定理 9.5 在此处所采用的 Morita 型双模条件下直接证明了该断言。伴随存在于普通模范畴上，无需基底上的投射性，也无需普通稳定模范畴之间的等价。

例如，取 $R = k[\epsilon]/(\epsilon^2)$、$A = R[t]/(t^2)$、$P = A \otimes_R A$、$M = A \oplus P$ 和 $N = A$。该代数在 R 上是自由的，双模在两侧均为投射模，且两个误差双模都是投射的 A^e_R-模 P。然而，对于 $X = A/\epsilon A$，我们有

$$P \otimes_A X \simeq X^{\oplus 2}, \qquad M \otimes_A X \simeq X^{\oplus 3}.$$

这里 X 是不可分解的，因为其自同态环为 $k[t]/(t^2)$；它也是非投射的，因为 A 是局部的且 $\epsilon X = 0$。Krull–Schmidt 定理蕴含 $X^{\oplus 3}$ 与 X 在通常稳定范畴中不同构。因此，给定的张量函子在通常稳定范畴上并非互逆。它们在 R-相对稳定范畴上互逆，且其约化对是单位元对。

10. 自内射维数与内射对象的保持

对于 Artin 代数，Tang 证明了 Morita 型稳定等价保持左、右自内射维数中的每一个 [61, 定理 1]。我们利用扩张群上的收缩，证明具有所示双模分裂的含幺环满足维数等式。Iwanaga–Gorenstein 推论涉及双侧诺特环。我们还利用 Tang 的三角矩阵例子 [61, 第 3] 节来考察 Beligiannis 证明中关于内射模的断言。

10.1. 扩张群上的自然截影。 我们采用通常的复合顺序，并在所有模组成的范畴中计算内射维数，允许其取值为 ∞。

引理10.1。 设 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 为阿贝尔范畴，且 $F\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ 和 $G\colon \mathscr{B} \to \mathscr{A}$ 为正合加性函子。假设存在自然变换

$$\eta\colon \mathrm{Id}_{\mathscr{A}} \longrightarrow GF, \qquad \pi\colon GF \longrightarrow \mathrm{Id}_{\mathscr{A}}, \qquad \pi\eta = \mathrm{Id}\,.$$

对于每个 X、$Y \in \mathscr{A}$ 以及每个 $n \geq 0$，将 F 作用于扩张后得到一个分裂单射

$$F_*\colon \operatorname{Ext}^n_{\mathscr{A}}(X, Y) \longrightarrow \operatorname{Ext}^n_{\mathscr{B}}(FX, FY).$$

扩张群按 *Yoneda* 意义理解；对于模范畴，它们与通常的导出函子一致。

证明。 对于扩张类 $\xi \in \operatorname{Ext}^n_{\mathscr{B}}(FX, FY)$，定义

$$r^n_{X,Y}(\xi) := (\pi_Y)_*(\eta_X)^* G_*(\xi).$$

这里，G_* 后接沿 η_X 的拉回以及沿 π_Y 的推出。由于 F 和 G 是正合的，所诱导的映射是良定义的。将 η 的自然性应用于 X 被 Y 扩张的一个代表元，可得

$$(\eta_X)^*(GF)_*(\alpha) = (\eta_Y)_*\alpha.$$

因此

$$r^n_{X,Y} F_*(\alpha) = (\pi_Y)_*(\eta_Y)_*\alpha = (\pi_Y\eta_Y)_*\alpha = \alpha.$$

对于 $n = 0$，相同的公式为 $r^0_{X,Y}(h) = \pi_Y G(h)\eta_X$。该构造关于两个变量都是自然的。□

注 10.2. 对于模范畴，若 F 保持投射对象，则前述收缩可在上链复形上描述。对于投射分解 $L_\bullet \to X$，其次数为 i 的分量是

$$\operatorname{Hom}_B(FL_i, FY) \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(L_i, Y), \qquad h \longmapsto \pi_Y G(h)\eta_{L_i}.$$

η 的自然性表明这是一个上链映射，而 $\pi\eta = 1$ 表明它收缩了由 F诱导的映射。这就是 [61, 定理 1] 证明中所使用的比较映射。

推论 10.3。设 $F\colon$ A-模 $\to B$-模 和 $G\colon$ B-模 $\to A$-模 满足引理*10.1*的假设，则

$$\mathrm{id}_A X \le \mathrm{id}_B(FX)$$

对每个左 A-模 X 都成立。特别地， F 反映内射性。

证明。如果 $\mathrm{id}_B(FX) \le d$，由引理可知，对于每个左 A-模 U，$\mathrm{Ext}_A^{d+1}(U,\ X) = 0$。由内射维数的通常判据即可得到结论。□

10.2. **正则模**。

定理 10.4. 设 A 和 B 为含幺环。假设 ${}_AM_B$ 和 ${}_BN_A$ 在每一侧都是有限生成投射模，并且存在双模分解

$$M \otimes_B N \simeq A \oplus P, \qquad N \otimes_A M \simeq B \oplus Q.$$

那么，无需对 P、Q 作任何投射性假设，即有

$$\mathrm{id}_A A = \mathrm{id}_B B, \qquad \mathrm{id}_{A^{\mathrm{op}}} A = \mathrm{id}_{B^{\mathrm{op}}} B.$$

$\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$中的两个等式均成立。无需诺特性假设、伴随或底层交换基环。

证明。令 $F = N \otimes_A -$ 和 $G = M \otimes_B -$。这些函子是正合的，因为 N_A 和 M_B 是投射的。双模分解给出自然分裂

$$GF(X) \simeq X \oplus (P \otimes_A X), \qquad FG(Y) \simeq Y \oplus (Q \otimes_B Y).$$

假设 $d = \mathrm{id}_B B < \infty$。左侧 B-模 $F(A) \simeq {}_BN$ 是 B^t 的一个直和项，其中 t有限，因此 $\mathrm{id}_B F(A) \le d$。由推论 10.3，

$$\mathrm{id}_A A \le \mathrm{id}_B F(A) \le \mathrm{id}_B B.$$

交换 A，B与 F，G，即可在任一维数有限时得到反向不等式。因此，左自内射维数相等，包括二者均为无穷大的情形。

对于右模，使用 $-\otimes_A M$和 $-\otimes_B N$。它们的正合性源于左侧投射性，而它们在正则模上的取值是有限生成投射右模 M_B 和N_A。两个复合函子再次以自然直和项的形式包含恒等函子。同样的论证证明了右侧等式。□

对于 Artin 代数之间的 Morita 型稳定等价，这一结果恢复了 Tang 定理[61,定理 1]。

推论 10.5。设 A, B 是双侧诺特环。假设双模 ${}_AM_B, {}_BN_A$在两侧均为有限生成投射模，并满足

$$M \otimes_B N \simeq A \oplus P, \qquad N \otimes_A M \simeq B \oplus Q$$

对任意补双模 P, Q均成立。因此，左、右自内射维数分别保持不变。特别地， A 是 *Iwanaga–Gorenstein* 环，当且仅当 B 是。只要所示的双模分解成立，这一结论适用于交换诺特环上的有限代数，因此也适用于 *Artin* 代数。

证明。应用定理 10.4。对于双侧诺特环，其左、右自内射维数同时有限，当且仅当它具有 Iwanaga–Gorenstein 性质。有限生成于交换诺特环上的代数在两侧均为诺特的。□

该证明既不需要模在交换基环上的投射性，也不需要普通稳定模范畴之间的等价。此外，它不需要伴随，也不需要保持内射模。因此，在非域基环上，这些等式直接由双模分裂得到。Liu 和 Xi 先前的结果假设两个方向均存在伴随 [43, 命题 4.1，第 579] 页；他们在第 584 页提出的问题 1 则询问，在没有这一额外假设的情况下，是否仍能得到单边有限性。

在定理 9.5 和命题 9.10所述的 Artin 和亨泽尔情形中，且在不存在 R-可分直因子的情况下，删除投射双模直和项后得到一对张量函子在两个方向上互为伴随的函子对。此时，这个约化对也保持内射对象。回缩论证适用于原函子，允许任意补双模，且对代数直因子不作任何限制。

命题 10.6。 在定理 *10.4*的假设下，原张量函子保持所有左模和右模的投射维数。更确切地说，

$$\begin{aligned}\operatorname{pd}_B(N\otimes_A X)&=\operatorname{pd}_A X,\\ \operatorname{pd}_A(M\otimes_B Y)&=\operatorname{pd}_B Y,\\ \operatorname{pd}_{B^{\mathrm{op}}}(U\otimes_A M)&=\operatorname{pd}_{A^{\mathrm{op}}}U,\\ \operatorname{pd}_{A^{\mathrm{op}}}(V\otimes_B N)&=\operatorname{pd}_{B^{\mathrm{op}}}V.\end{aligned}$$

所有等式均包括无穷值。补双模不需要满足伴随关系，也不需要具有包络代数上的投射性。

证明。 正合函子 $F=N\otimes_A -$ 和 $G=M\otimes_B -$ 保投射对象。由于 X 是 $GF(X)$的一个直和项，因此有

$$\operatorname{pd}_A X\le \operatorname{pd}_A GF(X)\le \operatorname{pd}_B F(X)\le \operatorname{pd}_A X.$$

这就证明了第一个等式，第二个等式由对称性可得。同样的论证也适用于右模张量函子。□

10.3. **一个不保内射对象的张量函子**。以下例子出自 Tang [61,节 3]。

例 10.7. 设 K 为一个域，令 $A=T_2(K)$ 表示上三角 2×2矩阵代数。记其矩阵单位为 e_{ij} 。设

$$E=A\otimes_K A,\qquad M=A,\qquad N=A\oplus E,$$

其中 $a\cdot(u\otimes v)\cdot b=au\otimes vb$。该映射

$$A\otimes_K A^{\mathrm{op}}\longrightarrow E,\qquad u\otimes v^{\mathrm{op}}\longmapsto u\otimes v$$

是 $A\otimes_K A^{\mathrm{op}}$上的左模同构。因此， E 是一个投射的 A-双模。它在两侧也都是秩为 3 的自由模。因此， M 和 N 在两侧都是有限生成投射模，并且

$$M\otimes_A N\simeq A\oplus E,\qquad N\otimes_A M\simeq A\oplus E.$$

这些就是 Morita 型稳定自等价的定义恒等式。

对于每个左 A-模 X ，都有

$$N\otimes_A X\simeq X\oplus(A\otimes_K X).$$

第二个直和项是一个自由左 A-模。因此，该张量函子在所有模的通常稳定范畴上诱导恒等函子。

左理想 $Ae_{11}=Ke_{11}$ 不是内射的。事实上，右乘 e_{12} 给出一个单态射

$$j\colon Ae_{11}\longrightarrow Ae_{22},\qquad e_{11}\longmapsto e_{12}.$$

对于一个 A-线性 $r\colon\ Ae_{22}\to Ae_{11}$,

$$r(e_{12})=r(e_{12}e_{22})=e_{12}r(e_{22})=0,$$

因为 $e_{12}Ae_{11}=0$。因此 rj 不能是单位元。

令 $I=D_K(e_{22}A)=\operatorname{Hom}_K(e_{22}A,\ K)$。它是一个一维内射左 A-模： $e_{22}A$是一个投射右 A-模，并且

$$\operatorname{Hom}_A(-,I)\simeq D_K(e_{22}A\otimes_A -)$$

是正合的。尽管如此,

$$N\otimes_A I\simeq I\oplus(A\otimes_K I)\simeq I\oplus A$$

它不是内射的，因为它包含非内射直和项 Ae_{11}。

内射维数也可以显式计算。配对

$$e_{11}A\times Ae_{22}\longrightarrow K,\qquad (y,x)\longmapsto \text{the coefficient of } e_{12}\text{ in } yx$$

将 Ae_{22} 与 $D_K(e_{11}A)$ 等同，因此 Ae_{22} 是内射的。此外,

$$0\longrightarrow Ae_{11}\xrightarrow{j}Ae_{22}\longrightarrow I\longrightarrow 0$$

是正合的。因此

$$\operatorname{id}_A I=0,\qquad \operatorname{id}_A A=1,\qquad \operatorname{id}_A(N\otimes_A I)=1.$$

因此，尽管这些代数的自内射维数相同，该函子并不保持每个模的内射维数。相同的例子给出

$$\operatorname{Gid}_A I = 0, \qquad \operatorname{Gid}_A(N \otimes_A I) = 1,$$

因为 Gorenstein 内射维数在内射维数有限时与之相同；参见 [25]。

它还区分了各个模的主维数。单态射 j 是本质的，且上述正合列给出了最小内射分解

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow (Ae_{22})^2 \longrightarrow I \longrightarrow 0.$$

这里 Ae_{22} 是投射-内射模，而 I 不是投射模。因此，$\operatorname{domdim}_A A = 1$，而 $\operatorname{domdim}_A(Ae_{22}) = \infty$。由于

$$N \otimes_A Ae_{22} \simeq Ae_{22} \oplus A^2,$$

后一个模的主维数为 1。因此，即使在域上，原来的那一对也未必保留各个模的内射维数、Gorenstein 内射维数和主维数。转到相反代数便得到相应的右模例子。

10.4. **Beligiannis 论证中的缺口。** Beligiannis [5, 定理 8.12，第 192] 页分别在 (i)、(ii) 和 (iii) 部分中陈述了稳定 Cohen–Macaulay 范畴、虚Gorenstein性和 Gorenstein性的保留。他在该定理之前紧接着给出的定义，包含由指定的张量函子诱导的普通稳定范畴等价。在任意阿廷基环上，这比仅要求双模分裂条件更强。

在第 (i) 部分的证明中，同一页提到，左张量函子

$$M \otimes_\Gamma - \colon \operatorname{Mod}\text{-}\Gamma^{\mathrm{op}} \longrightarrow \operatorname{Mod}\text{-}\Lambda^{\mathrm{op}}$$

被断言保持内射对象。例10.7交换两个定义双模的名称后，便可在给定假设下反驳这一断言。该例甚至满足通常的稳定等价要求，因此这一失效与非域基环所带来的任何歧义无关。

因此，证明中所用的内射性断言并不成立，而定理 8.12(iii) 仍然有效。推论 10.5 无需假设保持内射对象即可证明这一部分，并给出更强的自内射维数分别相等的结论。(i) 和 (ii) 中的其他断言则需要分别论证。

作为比较，例 10.7 也反驳了 Sun–Zhao [60,引理3.1(1)，第 2592–2593] 页中关于保持性的方向，以及其命题3.2(1)（第 2593 页）中关于单个模的等式。另一个相反的例子则针对右模相关断言。正则模的等式及由此得到的 Gorenstein 结论仍然成立。

注10.8。 引理3.1(1)中的映射延拓论证使用了两个投影之间的额外相容性；另见 [61, 第 3]节。设 $\pi\colon\ GF \to \mathrm{Id}$和 $\rho\colon\ FG \to \mathrm{Id}$为由双模分裂给出的两个投影。它们并不意味着

$$F(\pi_I) = \rho_{F(I)}.$$

在例 10.7中，$G = \mathrm{Id}$和 $F(Z) = Z \oplus (A \otimes_K Z)$。在 $F(F(I))$的直和项 $A \otimes_K F(I)$上，映射$\rho_{F(I)}$为零，而 $F(\pi_I)$是 $1_A \otimes \pi_I$且其像 $A \otimes_K I$非零。引理10.1中的收缩并不要求这些投影相同。

11. 个体 Gorenstein 维数

设 A 为含幺环。我们用 GProj(A) 表示 Gorenstein 投射左A-模的范畴，用 Gproj(A) 表示其有限生成模的全子范畴。除非特别指定有限生成模范畴，否则我们处理任意模。我们在 $\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$中取维数，并规定 $\operatorname{Gpd}_A(0) = 0$。于是，添加一个投射直和项不会改变维数。按照这一约定，在双侧诺特环上的有限生成模中，Gpd_A 与 Auslander–Bridger 维数 $\operatorname{G–dim}_A$一致。

回顾一下，GProj(A) 是可解的，并且对直和项封闭；Gorenstein 投射维数在取直和项时不会增加；对于每个 $n \geq 0$,

$$\operatorname{Gpd}_A X \leq n \quad \Longleftrightarrow \quad \Omega_A^n X \in \operatorname{GProj}(A). \tag{11.1}$$

这些事实的成立无需假设 A 是 Gorenstein；参见 [25, 定理 2.5、命题 2.16、2.18–2.19 以及定理 2。20]在双侧诺特环上，有限生成的 Gorenstein 投射模具有由有限生成投射模构成的全正合复形，而同一判据也适用于有限模范畴。在任一普通稳定模范畴中，同构对象具有相同的 Gorenstein 投射维数。

11.1. 来自正合双伴随的维数。我们首先将同调论证与用于构造伴随对的假设分离开来。本小节中的所有维数均在全体模范畴中计算。特别地，内射分解不要求其项为有限生成模。我们允许取无穷值，规定 pd(0) $=$ id(0) $=$Gorenstein投射维数(0) $=$ Gid(0) $=0$，并使用 domdim(0) $=\infty$。

下一个定理中关于 Gorenstein 维数的部分也可由 [18, 定理 3.2 和注 3.3]推出：恒等映射的截使每个 Frobenius 函子都忠实。我们给出简短的分解论证，以便统一处理这五种维数。伴随型 Artin 先行结果是[43, 引理 4.2 和命题 4.5]。

定理 11.1。设 A、B 为含幺环，并设

$$F : A\text{-Mod} \longrightarrow B\text{-Mod}, \qquad G : B\text{-Mod} \longrightarrow A\text{-Mod}$$

是双向伴随的正合加性函子。假设恒等函子是它们复合函子的自然直和项：

$$\mathrm{Id}_{A\text{-Mod}} \mid GF, \qquad \mathrm{Id}_{B\text{-Mod}} \mid FG. \tag{11.2}$$

那么，对于任意左 A-模 X、任意左 B-模 Y，以及任意

$$d \in \{\mathrm{pd}, \mathrm{id}, \mathrm{Gpd}, \mathrm{Gid}, \mathrm{domdim}\},$$

都有

$$d_B(FX) = d_A(X), \qquad d_A(GY) = d_B(Y).$$

不需要满足诺特条件或有限生成条件。

证明。具有正合右伴随的正合函子保持投射对象，具有正合左伴随的正合函子保持内射对象。因此，F 和 G 都保持投射模和内射模。

设 $T^\bullet$ 是由投射 A-模构成的全正合复形。那么，$F(T^\bullet)$ 是由投射 B-模构成的正合复形。对于任意投射 B-模 Q，伴随关系给出

$$\mathrm{Hom}_B(F(T^\bullet), Q) \simeq \mathrm{Hom}_A(T^\bullet, GQ),$$

由于 GQ 是投射的，因此该复形是正合的。故 F 保持 Gorenstein 投射模。若 $I^\bullet$ 是由内射 A-模组成的全正合复形，且 J 在 B上是内射的，则由另一个伴随关系可得

$$\mathrm{Hom}_B(J, F(I^\bullet)) \simeq \mathrm{Hom}_A(GJ, I^\bullet).$$

右侧复形是正合的，因为 GJ 是内射的。因此，F 也保持 Gorenstein 内射模。同样的论证也适用于 G。

将这些函子作用于有限分解或余分解，可得 $d_B(FX) \le d_A(X)$ 以及$d_A(GY) \le d_B(Y)$，适用于前四种维数。这些维数在取直和项时不会增大；关于任意环上的 Gorenstein 维数，参见 [25]。因此，式（11.2）给出

$$d_A(X) \le d_A(GFX) \le d_B(FX) \le d_A(X),$$

对 Y也有类似结论。这就证明了前四个等式，包括取无穷值的情形。

对于主维数，取 X的最小内射分解。若其前 n 项是投射的，则应用 F 可得 FX 的一个内射分解，其前 n 项是投射的。对任意环，最小内射分解逐项都是任意内射分解的直和项：这可由依次分裂后继余核的内射包得到。因此，

$$\mathrm{domdim}_B(FX) \ge \mathrm{domdim}_A(X).$$

同样的论证适用于 G。内射包的有限直和仍是内射包，因此有限直和的主维数等于其各直和项主维数的最小值。利用 $X \mid GFX$，我们得到

$$\mathrm{domdim}_A(X) \ge \mathrm{domdim}_A(GFX) \ge \mathrm{domdim}_B(FX) \ge \mathrm{domdim}_A(X).$$

这就证明了剩余的等式。 □

注记 11.2。若 A，B 是双侧诺特的，且这些函子保持有限模，那么 Gorenstein 投射维数的等式也给出有限模上 Auslander–Bridger G维数的等式。内射维数、Gorenstein 内射维数和主维数仍在A-模和 B-模中计算：在诺特环上，有限模的内射包未必是有限的。

推论 11.3。设 A，B 是交换 *Artin* 环上的有限代数，或交换亨泽尔诺特局部环上的有限代数。设 M_0，N_0 是一个约化对，且定理 *9.5* 或命题 *9.10* 适用于该约化对。假设正则双模确实是直和项：

$$M_0 \otimes_B N_0 \simeq A \oplus P_0, \qquad N_0 \otimes_A M_0 \simeq B \oplus Q_0.$$

令 $F = N_0 \otimes_A -$ 和 $G = M_0 \otimes_B -$。对于每个左 A-模 X、每个左 B-模 Y，以及每个

$$d \in \{\mathrm{pd}, \mathrm{id}, \mathrm{Gpd}, \mathrm{Gid}, \mathrm{domdim}\},$$

有

$$d_B(FX) = d_A(X), \qquad d_A(GY) = d_B(Y). \tag{11.3}$$

对于每个右 A-模 U 和右 B-模 V，有

$$\begin{aligned} d_{B^{\mathrm{op}}}(U \otimes_A M_0) &= d_{A^{\mathrm{op}}}(U), \\ d_{A^{\mathrm{op}}}(V \otimes_B N_0) &= d_{B^{\mathrm{op}}}(V). \end{aligned} \tag{11.4}$$

特别地，约化函子保持并反映 *Gorenstein* 投射模和 *Gorenstein* 内射模。对于有限模，它们保持左、右 *Auslander–Bridger* G 维数。不要求其在基环上具有投射性或内射性，并且这些函子不一定给出普通稳定模范畴之间的逆等价。

证明。正规化结果给出双模对偶同构，因而在全体模范畴上按两种次序均有伴随。单侧投射性使张量函子正合。所显示的双模分解给出（11.2），因此定理 11.1 证明了（11.3）。这两个双模对偶同构还给出了右模张量函子之间按两种次序的伴随。将定理应用于对环即可证明（11.4）。这些环是双侧诺特环，且张量函子保持有限模，从而得到关于G-维数的断言。 □

推论 11.4. 在推论*11.3*的假设下，有

$$\begin{aligned} \mathrm{domdim}({}_AA) = \mathrm{domdim}({}_BB), \quad \mathrm{domdim}(A_A) = \mathrm{domdim}(B_B), \\ \mathrm{id}_A\, A = \mathrm{id}_B\, B, \qquad\qquad \mathrm{id}_{A^{\mathrm{op}}}\, A = \mathrm{id}_{B^{\mathrm{op}}}\, B. \end{aligned}$$

证明。左 B-模 N_0是一个有限投射生成元。事实上，B是 $N_0 \otimes_A M_0$的一个直和项，而它属于 $\mathrm{add}({}_BN_0)$，因为 ${}_AM_0$ 是有限投射的。因此$\mathrm{add}({}_BN_0) = \mathrm{add}({}_BB)$。具有相同加性闭包的两个模，其内射维数和主维数分别相同。将（11.3）应用于 $X = A$，于是 $F(A) = N_0$。对右投射生成元作相同论证，即可证明右自内射维数和右主维数相等。 □

注 11.5。以上五个分别成立的等式涉及的是具有实际恒等元直和项的约化对。即使在域上，添加投射双模直和项也可能破坏对内射维数、Gorenstein 内射维数和主维数的分别保持；参见例 10.7。仅凭双模分裂，原始的约化对已经保持投射维数，见命题 10.6。对于原始的约化对，以下判据给出了分别保持 Gorenstein 投射维数的条件。特别地，定理 11.14 讨论了基环内射性，而推论 11.15讨论了有限自内射维数的交换诺特基环上的有限投射代数。环的自内射维数分别相等，也可由定理 10.4推出，无需正规化或伴随。

11.2. **普通稳定模范畴中的一个判据**。

命题 11.6。 设 A和 B 是双侧诺特环。假设

$$\Phi : A\text{-}\underline{\mathrm{mod}} \longrightarrow B\text{-}\underline{\mathrm{mod}}$$

是满足以下两个条件的一个等价:

(1) 存在自然同构 $\Phi\Omega_A \simeq \Omega_B\Phi$; (2) Φ 的限制是一个等价 $\mathrm{Gproj}(A) \longrightarrow \mathrm{Gproj}(B)$。

于是，对于每个 $X \in A$-模，都有

$$\mathrm{Gpd}_B\, \Phi(X) = \mathrm{Gpd}_A\, X.$$

这里， $\Phi(X)$ 表示代表其稳定同构类的任意模。该等式还包括值 ∞。

证明。 我们首先证明， X 是 Gorenstein 投射模当且仅当 $\Phi(X)$ 是 Gorenstein 投射模。正向蕴含由 (2) 得出。反之，设 $\Phi(X)$ 是 Gorenstein 投射模。限制函子的本质满射性给出 $U \in \mathrm{Gproj}(A)$ 以及稳定范畴中的同构$\Phi(X) \simeq \Phi(U)$。 Φ 在整个稳定模范畴上的全忠实性给出 $X \simeq U$ 。因此， X 是 Gorenstein 投射模，因为添加或去掉投射直和项不会改变这一性质。

对于每个 $n \geq 0$，条件 (1) 和 (11.1) 现在给出

$$\begin{aligned} \mathrm{Gpd}_A\, X \leq n &\iff \Omega_A^n X \in \mathrm{Gproj}(A) \\ &\iff \Phi(\Omega_A^n X) \in \mathrm{Gproj}(B) \\ &\iff \Omega_B^n \Phi(X) \in \mathrm{Gproj}(B) \\ &\iff \mathrm{Gpd}_B\, \Phi(X) \leq n. \end{aligned}$$

对于有限维数和无限维数，该等式均成立。 □

注 11.7。 证明使用了整个普通稳定模范畴上的全忠实性，以反映任意奇异子是 Gorenstein 投射模这一性质。仅有 Gorenstein 投射模的稳定范畴之间的等价，并不能提供这种反映性质。

11.3. **具有正合稳定逆的正合函子**。

引理 11.8. 设 A、 B 是含幺环，且 $G: B$-模 $\to A$-模 是一个保持投射对象的加性函子。若它在普通稳定模范畴上诱导的函子是全忠实的，则 G 保持分裂满同态。

证明。 设 $p: E \twoheadrightarrow Z$ 是一个满同态，且令 $s: GZ \to GE$ 满足 $G(p)s = 1_{GZ}$。由满性可得一个映射 $t: Z \to E$ ，其稳定类映到 s 的稳定类。由忠实性可知， $pt - 1_Z$ 可经由一个投射模 Q 分解。写作 $pt - 1_Z = ba$ ，其中 $a: Z \to \widetilde{Q}$ 且 $b: Q \to Z$。将 b 沿 p 提升为映射 $b: Q \to E$。于是 $t - ba$ 是 p 的截面。□

定理 11.9. 设 A 和 B 是含幺环，并令

$$F : A\text{-Mod} \to B\text{-Mod}, \qquad G : B\text{-Mod} \to A\text{-Mod}$$

是保持投射对象的正合函子。假设它们在普通稳定模范畴上诱导的函子互为逆等价。那么， F 和 G 保持 *Gorenstein* 投射模，并且

$$\mathrm{Gpd}_B\, F(X) = \mathrm{Gpd}_A\, X, \qquad \mathrm{Gpd}_A\, G(Y) = \mathrm{Gpd}_B\, Y$$

对所有 $X \in A$-模 和 $Y \in B$-模均成立。不要求存在伴随，也不要求保持内射模。

证明。 设 $T^\bullet$ 是由投射 A-模构成的全正合复形。正合性及保持投射对象这一性质意味着， $F(T^\bullet)$是由投射 B-模构成的正合复形。对于 $T^\bullet$的每个圈 Z，模 $GF(Z)$与 Z稳定同构，因此是 Gorenstein 投射模。

固定一个投射 B-模 Q，并考虑一个扩张

$$0 \longrightarrow Q \longrightarrow E \xrightarrow{p} F(Z) \longrightarrow 0.$$

应用 G后，该扩张分裂，因为 GQ 是投射模，而 $GF(Z)$ 是 Gorenstein 投射模。引理 11.8 表明 p 分裂。因此，对于每个圈 $\mathrm{Ext}^1_B(F(Z)\ Q) = 0$ 以及每个 Z 投射

投射 Q。将这一消灭性结果应用于 $F(T^\bullet)$ 的圈的短正合列，可知 $\mathrm{Hom}_B(F(T^\bullet)\ Q)$ 是无圈的。因此， F 保持 Gorenstein 投射模。交换 F 和 G 后，对 G 也得到相同结论。

保持 Gorenstein 投射模的正合函子不会增大 Gorenstein 投射维数。由于 $GF(X)$ 与 X稳定同构，我们得到

$$\mathrm{Gpd}_A X = \mathrm{Gpd}_A GF(X) \le \mathrm{Gpd}_B F(X) \le \mathrm{Gpd}_A X.$$

这些不等式在 $\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$中成立，因此在无限维数的情形下等式也成立。由对称性可得 G 的公式。□

注 11.10。 该定理要求两个保持投射对象并诱导逆通常稳定等价的正合函子。对于诱导稳定等价的单个正合函子，还必须验证其稳定逆具有这样的正合实现。

11.4. **交换基环上的双模分解**。 接下来我们直接研究双模分解。设 R 是一个交换环，设 A, B 是 R代数，并假设 R-中心双模 ${}_AM_B$ 和 ${}_BN_A$ 在两侧均有限生成投射，且满足

$$M \otimes_B N \simeq A \oplus P, \qquad N \otimes_A M \simeq B \oplus Q. \tag{11.5}$$

Put

$$F = N \otimes_A -, \quad G = M \otimes_B -, \quad E_A = P \otimes_A -, \quad E_B = Q \otimes_B -.$$

补双模 P, Q 在两侧均为投射模，因为它们是上述张量积的直和项。因此，所有四个函子都是正合的，并且保持投射对象。下一个判据不要求 P, Q 是包络代数上的投射模。我们不假设 F, G 诱导普通稳定模范畴之间的逆等价。

命题 11.11。 假设 (11.5) 并设 E_A、E_B 在全体模范畴中保持 *Gorenstein* 投射模。则 F、G 保持并反映 *Gorenstein* 射影性，并且

$$\mathrm{Gpd}_B(N \otimes_A X) = \mathrm{Gpd}_A X, \qquad \mathrm{Gpd}_A(M \otimes_B Y) = \mathrm{Gpd}_B Y \tag{11.6}$$

对于每个左 A-模 X 和左 B-模 Y。

证明。 这些分解给出自然同构 $GF \simeq \mathrm{Id} \oplus E_A$ 和 $FG \simeq \mathrm{Id} \oplus E_B$。它们还表明， F 和 G 都反映分裂满同态。事实上，如果 $G(p)$ 有一个截面，那么 $FG(p)$ 有一个截面 s。若 $p : E \to Z$ 和 ι、 π 是 FG 的单位元直和项所对应的自然包含映射和投影，那么 $\pi_E s \iota_Z$ 就是 p 的一个截面。

设 Z是一个由投射 A-模组成的全正合复形的圈。则 $GF(Z) = Z \oplus E_A(Z)$是 Gorenstein 投射模。定理 11.9 中的扩张论证适用：任意投射 B-模对 $F(Z)$的扩张在施加 G后分裂，因此已经分裂。于是， F 保持 Gorenstein 投射模。同样的论证也适用于 G。

由于 X 是 $GF(X)$ 的直和项，因此有

$$\mathrm{Gpd}_A X \le \mathrm{Gpd}_A GF(X) \le \mathrm{Gpd}_B F(X) \le \mathrm{Gpd}_A X.$$

这证明了第一个等式（包括无穷值），第二个等式由对称性可得。维数为零说明 Gorenstein 投射性具有反射性。□

引理 11.12。设 A 是含幺环，且 P 是一个双侧投射的 A-双模。假设对每个投射左A-模 U，$\mathrm{Hom}_A(P, U)$ 作为左 A-模具有有限内射维数，其中 $(af)(p) = f(pa)$。则 $P \otimes_A -$保持所有 *Gorenstein* 投射模。

证明。设 $T^\bullet$是由投射 A-模组成的全正合复形。则 $P \otimes_A T^\bullet$是一个投射项构成的正合复形。对任意投射左 A-模 U，由张量–Hom 伴随可得

$$\mathrm{Hom}_A(P \otimes_A T^\bullet, U) \simeq \mathrm{Hom}_A(T^\bullet, \mathrm{Hom}_A(P, U)).$$

投射对象的正合复形与有限内射维数的模作 Hom 后仍然正合。为证明这一点，使用目标的有限内射分解：从投射复形的每一项取 Hom 都是正合的，而从正合复形到内射模取 Hom 得到的复形也是正合的。对内射分解的长度作归纳即可证明该断言。因此，对每个投射 U，所示复形都是正合的，这恰好说明 $P \otimes_A T^\bullet$ 具有全正合性。□

引理11.13。 设 R 是一个交换诺特环，且 A 是一个 R-代数，其底层 R-模是内射的。设 P 是一个有限生成投射 A^e-模，并且在两侧也都是投射的。那么 $P \otimes_A -$ 保持所有 *Gorenstein* 投射模。

证明。 设 U 是任意一个投射左 A-模。其底层 R-模是若干个 A_R的直和的直和项。在诺特环上，内射对象的直和仍是内射的：由 Baer判别法可知，从一个理想映射到这样的直和时，其像落在有限个直和项中，因为该理想是有限生成的。因此， U_R 是内射的。

由于 P是 $(A \otimes_R A)^r$ 的直和项，其中 r有限，因此模 $\mathrm{Hom}_A(P,\ U)$ 是 $\mathrm{Hom}_R(A,\ U)^r$的直和项。由余诱导伴随可知，后者在 A上是内射的

$$\mathrm{Hom}_A(-, \mathrm{Hom}_R(A, U)) \simeq \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Res}(-), U).$$

作用 是 $(af)(x) = f(xa)$，且右侧函子是正合的。现在可应用引理 11.12。 . □

定理 11.14。 假设 (11.5)成立。设 R 是诺特的，且 A、B 作为R-模是内射的，并且 P、Q 分别在 A^e 、 B^e 上是投射的。则 (11.6) 对所有左模均成立。对于所有右 A- 模 U 和右 B- 模 V，还有

$$\begin{aligned} \mathrm{Gpd}_{B^{\mathrm{op}}}(U \otimes_A M) &= \mathrm{Gpd}_{A^{\mathrm{op}}} U, \\ \mathrm{Gpd}_{A^{\mathrm{op}}}(V \otimes_B N) &= \mathrm{Gpd}_{B^{\mathrm{op}}} V. \end{aligned} \tag{11.7}$$

特别地，当 R 是一个域，或者当 R 是交换自内射*Artin*环且 A、B 在 R上是有限投射时，结论成立。所有断言都包括无限维数的情形，且不需要伴随型假设。

证明。 补对象 P、Q 在两侧都是有限的，因而作为它们的包络代数上的模也是有限的。应用引理 11.13 于 P、Q，随后应用命题 11.11。对相反代数应用相同的论证即可证明（11.7）。在域上所有模都是内射的；在自内射Artin环上，有限投射模都是内射的。 □

推论 *11.15.* 设 R 是一个交换诺特环，且具有 $\mathit{id}_R R < \infty$，并设 A、B 是有限投射 R-代数。假设 R-中心双模 ${}_AM_B$、${}_BN_A$在两侧都是有限生成投射模，满足（*11.5*），且 P、Q 分别在 A^e、B^e上是投射模。则原张量对保持所有左模和右模的 *Gorenstein* 投射维数：（*11.6*）和（*11.7*）成立，包括取无限值的情形。对于有限生成模，左、右 *Auslander–Bridger* G-维数也满足相同的等式。不需要伴随或保持内射模。

证明。 令 $d = \mathrm{id}_R R$。每个投射 R-模的内射维数至多为 d。事实上，在诺特环 R上，内射对象的直和仍是内射对象，正如前一个引理所述。取若干份长度为 d 的 R内射分解的直和，再利用直和项下的封闭性，即得所述结论。

设 U 是任意投射左 A-模。由于 A_R 是投射的， U_R 是投射的，且 $\mathrm{id}_R U \le d$。将正合函子 $\mathrm{Hom}_R(A,\ -)$ 应用于 U_R 的长度为 d 的内射分解。正合性利用了 A_R的投射性，而由余诱导伴随可知，每个所得项都是 A 上的内射模。因此

$$\mathrm{id}_A \mathrm{Hom}_R(A, U) \le d.$$

P 的有限 A^e-投射性意味着 $\mathrm{Hom}_A(P,\ U)$ 是 $\mathrm{Hom}_R(A,\ U)$ 的有限个副本的有限直和的一个直和项。因此

$$\mathrm{id}_A \mathrm{Hom}_A(P, U) \le d \qquad \text{for every projective left } A\text{-module } U.$$

引理 11.12 表明 $P \otimes_A -$ 保持所有 Gorenstein 投射模。对 B，Q 重复该论证，并应用命题 11.11 即可证明左模等式。相反代数也是 R上的有限投射模，因此同样的证明可得右模等式。

最后， A，B 是双侧诺特的，因为它们是 R上的有限模，而且张量函子保持有限模。对于这类模，Gorenstein 投射维数与 Auslander– Bridger G-维数一致，其中零处的约定如上所述。□

注 11.16。 在域上，E_A，E_B 取值于投射模，因此张量对也诱导普通稳定模范畴之间的逆等价。在一般的诺特基环上，这一结论

并非定理11.14 或推论11.15的内容。证明使用了实际的双模收缩，以及误差函子对 Gorenstein 投射模的保持性。它们并未将普通稳定模范畴与相对稳定模范畴等同起来。

注记 11.17. 对于双侧诺特环上的有限模陈述，只需$\mathrm{Hom}_A(P,A)$和 $\mathrm{Hom}_B(Q,B)$ 具有有限内射维数；对于右模，在对环上也有类似条件。事实上，使用有限生成投射模构成的全正合复形；其 Hom 复形与直和交换，因此，只需用正则模检验变换后的复形，即可检验它对每个投射模的情形。对于任意模，我们则使用引理 11.12中的投射目标条件。上面的证明验证了该条件对每个投射目标都成立，且不要求目标满足有限生成假设。

11.5. 几乎 ν-稳定的 Artin环上的导出等价。

定理 11.18. 设 A 和 B 是任意交换 *Artin* 环上的 *Artin*代数。设

$$F : D^b(A\text{-mod}) \longrightarrow D^b(B\text{-mod})$$

它是一个几乎 ν-稳定的导出等价，并采用通常的非负规范化；设 F 是其稳定函子。那么，对于每个有限生成左 A-模 X，

$$\mathrm{Gpd}_B \overline{F}(X) = \mathrm{Gpd}_A X \quad in\ \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}.$$

等价地，*Auslander–Bridger* G-维数也满足同一等式。无需假设基环上的投射性，也无需对 F 进行张量实现。

证明。 由 [27, 定理 3。7]， $\overline{F}$是 A 与 B的整个普通稳定模范畴之间的等价。由 [26,推论 5。6],其限制是在它们的有限生成 Gorenstein 投射模稳定范畴之间的三角等价。最后， [26, 推论 4。12] 给出$F\Omega_A \simeq \Omega_B F$。命题 11.6 证明了这一断言。 □

转到反代数可得以下右模版本。

推论 11.19。 在定理 *11.18*的假设下，令 G 为 F的拟逆，并记D_A， D_B 表示标准 *Artin* 对偶，并将其扩展到导出范畴。导出等价

$$H = D_A G D_B : D^b(B^{\mathrm{op}}\text{-mod}) \longrightarrow D^b(A^{\mathrm{op}}\text{-mod})$$

是几乎 ν-稳定的。其稳定函子满足

$$\mathrm{Gpd}_{A^{\mathrm{op}}} \overline{H}(V) = \mathrm{Gpd}_{B^{\mathrm{op}}} V$$

对每个有限生成的右 B-模 V都成立。等价地， H 的任意拟逆都会给出从 A 到 B 的右模对应，并保持各个 G-维数。

证明。 设 $T^\bullet = G(B)$和 $T^\bullet \equiv F(A)$为几乎 ν-稳定性的定义中所用的根倾斜复形。它们分别集中于非正次数和非负次数。根据引理 2.3及其前面的讨论，导出等价与完美复形上的 Nakayama 函子相容，这确定了 H 及其逆的倾斜复形为

$$(\overline{T}^\bullet)^* = \mathrm{Hom}_B(\overline{T}^\bullet, B), \qquad (T^\bullet)^* = \mathrm{Hom}_A(T^\bullet, A).$$

它们的次数具有所需的符号。如果 P是投射的，那么 $P^* = D\nu P$和 $\nu_{A^{\mathrm{op}}}(P^*) = DP$。因此， P 与 νP 的加性闭包相等，意味着 P^* 与$\nu_{A^{\mathrm{op}}}(P^*)$的加性闭包也相等。将这一观察应用于两个倾斜复形的非零次数项，可知 H 是几乎 ν-稳定的。对反代数应用前述定理即可得到该等式。□

注 11.20。 推论 11.19 中的右模对应由 $D_A G D_B$ 的稳定函子及其拟逆定义。这一构造既不要求对F 进行张量实现，也不要求给定的导出等价具有标准性。

12. 普通稳定张量等价的刚性

设 R 是一个交换环。我们使用普通稳定范畴，即将经过投射模的态射取商所得的范畴。我们将给出一些条件，在这些条件下，诱导稳定等价的 R-中心张量函子是 Morita 等价。

12.1. **张量实现的刚性**。

引理12.1. 设$(R,\mathfrak{m})$ 是一个非域的交换局部环，且 A 是有限投射的 R-代数。若 X 和 Y 是被 $\mathfrak{m}$ 湮灭的有限生成 A-模，则任何经过投射 A-模的映射 $X \to Y$ 都是零。因此

$$\underline{\mathrm{Hom}}_A(X,Y) = \mathrm{Hom}_A(X,Y).$$

证明。 每个有限生成投射 A-模 P 在局部环R上都是投射的，因此是自由的。任意映射 $X \to P$ 的像都包含于

$$\mathrm{Ann}_P(\mathfrak{m}) = \mathrm{Soc}(R)P \subseteq \mathfrak{m}P.$$

该包含映射成立，是因为 R 是局部环且不是域：$\mathrm{Soc}(R)$中位于 $\mathfrak{m}$ 之外的元素会是湮灭 $\mathfrak{m}$的单位元，从而迫使 $\mathfrak{m}=0$。每个映射 $P \to Y$都会消去 $\mathfrak{m}P$，因此复合函子为零。□

定理12.2。 设 $(R,\mathfrak{m})$ 是一个非域交换局部环。设 A 和 B 是非零有限投射 R-代数，并设 ${}_BN_A$ 是一个 R-中心双模，使得 ${}_BN$ 是有限生成投射的。假设张量函子

$$F = N \otimes_A - : A\text{-mod} \longrightarrow B\text{-mod}$$

诱导出普通稳定模范畴之间的一个等价。则 ${}_BN$ 是一个投射生成元，右作用映射

$$\rho : A^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{End}_B(N)$$

是一个同构，并且 $N \otimes_A -$ 是模范畴的 *Morita* 等价。特别地， N_A是有限生成投射的。

证明。 令 $k = R/\mathfrak{m}$、 $A_0 = A/\mathfrak{m}A$、 $B_0 = B/\mathfrak{m}B$和 $N_0 = N/\mathfrak{m}N$。由于 ${}_BN$ 是投射的， F 保持投射对象，因而诱导出一个稳定函子。这里不要求 F 具有正合性。关于 R 的中心性意味着，F 将被 $\mathfrak{m}$ 消去的模映到被 $\mathfrak{m}$消去的模，而其在这些模上的限制可识别为

$$N_0 \otimes_{A_0} - : A_0\text{-mod} \longrightarrow B_0\text{-mod}.$$

根据引理 12.1 ，对于 A 和 B两者，在该子范畴上的限制都是全忠实的。将其作用于左正则模 A_0。由于 $F(A_0) = N_0$，它给出了由右作用诱导的同构

$$A_0^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_{B_0}(N_0). \tag{12.1}$$

置 $C = \mathrm{End}_B(N)$。在 ${}_BB^s$中选取 ${}_BN$ 的一个有限生成投射补。于是 C 是 $\mathrm{End}_B(B^s)$的一个角，因此作为 R-模是一个有理数域上的矩阵代数的直和项。因此，C 是 R上的有限生成投射模，故也是有限自由模。同样的角描述表明

$$C/\mathfrak{m}C \simeq \mathrm{End}_{B_0}(N_0).$$

在此同一识下， ρ 的约化恰好是（12.1）。其源和目标是秩相同的有限自由R-模，因为它们的约化具有相同的 k维数。其表示矩阵的约化可逆，因此其行列式是 R中的单位元。因此， ρ 是一个同构。

还需证明 N 是一个生成元。设 S 是一个简单左 B-模。模 S 是有限的 R-模，因为它是 B 的商。中心性意味着 $\mathfrak{m}S$ 是 S的一个 B-子模，而中山引理排除了 $\mathfrak{m}S = S$。因此 $\mathfrak{m}S = 0$。这样的非零 S 不可能是B上的投射模：投射 B-模在 R上是自由模，而非零自由 R-模不会被非零理想 $\mathfrak{m}$消去。

稳定本质满射性给出 $X \in A$-模 以及一个稳定同构 $S \simeq F(X)$。取代表元 $i:\ S \to F(X)$ 和 $p:\ F(X) \to S$，它们是互为逆的稳定映射。自同态 $pi - 1_S$ 经由一个投射 B- 模分解，根据引理 12.1，它为零。因此 $pi = 1_S$：模 S 实际上是 $F(X)$的一个直和项。

取一个满同态 $A^r \twoheadrightarrow X$ ，其中 r 有限。张量化的右正合性给出一个满同态 $N^r \twoheadrightarrow F(X)$，与 p复合得到 $N^r \twoheadrightarrow S$。因此，对于每个简单 B-模 S，$\mathrm{Hom}_B(N,\ S) \neq 0$。

Let

$$I = \mathrm{Tr}_B(N) = \sum_{f \in \mathrm{Hom}_B(N,B)} f(N).$$

若 $B/I \neq 0$，取 B/I 的一个简单商模 S 以及一个非零映射 $N \to S$。N 的投射性使该映射提升为 B/I，进而提升为 B。后一个提升的像包含在 I中，因此它与 $B \to B/I$的复合为零，矛盾。因此 $I = B$。将 1_B 表示为元素 $f(n)$的有限和，可得从若干个 N 的有限直和到 B的一个分裂满同态。因此 ${}_BN$ 是一个投射生成元。

Morita理论现应用于投射生成元 ${}_BN$ 以及同构 $A^{\mathrm{op}} \simeq \mathrm{End}_B(N)$，从而证明了该断言。□

注12.3。 定理 12.2 适用于指定的 R-中心张量函子，该函子作用于所有有限生成模的普通稳定范畴。在相对稳定范畴或格范畴上的等价不满足这一假设。相关结果在 [20, 定理8.8和推论8。9] 中以不同假设得到了证明。它们关于整环的推论涉及非域整环上的无挠代数，并使用了顶端的消失性，而上述证明适用于每个非域交换局部基环，包括顶端非零的基环。

推论12.4。 设 R 为交换环，使得 $R_{\mathfrak{m}}$ 在任意极大理想处都不是域$\mathfrak{m}$。设 A、B 为有限投射 R-代数，且 N 为中心 B–A-双模，并且在左侧有限生成投射。若 $N \otimes_A -$ 诱导有限生成模的普通稳定范畴之间的等价，则它是*Morita* 等价。证明只需在剩余域正则模与其自身之间的稳定态射上满足全忠实性，并在简单 B-模上满足稳定本质满射性。

证明。 固定一个极大理想 $\mathfrak{m}$。对于被 $\mathfrak{m}$湮灭的模，通过普通投射模分解的映射根据引理 12.1在局部化后为零。这种局部化不会改变源和目标，因此该映射为零。于是，在 $A/\mathfrak{m}A$ 上的稳定全忠实性确定了剩余域端同态环上的右作用同构。定理 12.2中的角环论证将这些自同态环与 ρ 的剩余域纤维 $A^{\mathrm{op}} \to \mathrm{End}_B(N)$同构。因此，在每个极大理想 ρ 处，根据局部化后的行列式论证，这是有限自由模之间的同构。由此它是 R上的同构。

每个单 B-模 S 在 R 上都是有限的，并且被某个极大理想 $\mathfrak{m}$所湮灭：在其支集中选取一个极大理想，并在 $\mathfrak{m}$ 处使用 Nakayama引理 $\mathfrak{m}S = S$排除 。定理 12.2 的稳定本质满射性论证现在表明，S是某个 $N \otimes_A X$的直和项，因为$\mathrm{End}_B(S)$上的投射因子化理想为零。因此，对所有这样的 S，都有 $\neq 0$ 。迹理想论证证明了 N 是一个生成元，而 Morita理论完成证明。□

例如，任意非域整环都满足基环条件。该论证允许基环在其局部化中具有非零顶端。

12.2. **非域基环上的双模分解**。

例12.5. 设 $R = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$、$A = R$ 和 $B = R \times R$。给出

$$ {}_AM_B = {}_RB_B, \qquad {}_BN_A = {}_BB_R $$

由对角映射 $R \to B$ 所诱导的标量 R-作用。两个双模在每一侧都是投射的。此外，

$$ M \otimes_B N \simeq B \simeq A \oplus P, \qquad P = R \in A^e\text{-proj}. $$

若 e_1, e_2 是 B 的两个中心本原幂等元，则

$$ N \otimes_A M \simeq B \otimes_R B \simeq B \oplus Q, \qquad Q = (Be_1 \otimes_R e_2B) \oplus (Be_2 \otimes_R e_1B). $$

对角直和项给出 B，而两个非对角直和项给出投射的 B^e-模 Q。因此，M, N 满足 Morita 型稳定等价的双模条件。

然而，模上的张量函子是

$$ X \longmapsto (X, X), \qquad (Y_1, Y_2) \longmapsto Y_1 \oplus Y_2. $$

对于 $S = R/$（2），引理 12.1 给出

$$ \underline{\mathrm{End}}_A(S) = \mathbb{F}_2, \qquad \underline{\mathrm{End}}_B((S, S)) = \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2. $$

对角函子在这些环上诱导映射 $a \mapsto (a, a)$。其像在$\mathbb{F}_2$上的维数为一。因此，这个函子不是普通稳定模范畴之间的等价。此外，A 和 B并不 Morita 等价：它们分别有一个和两个简单模。

相反，每个 A-模都是相对 R-投射的。每个 B-模 (Y_1, Y_2) 都是 $B \otimes_R (Y_1 \oplus Y_2)$ 的直和项。因此，这两个 R-相对稳定范畴都是零范畴，且所示的张量对在它们之间诱导一个等价。

12.3. **一个没有普通张量实现的近 ν-稳定函子。**

例 12.6. 设 $R = \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ 和 $A = R \times R$。在导出范畴的乘积识别下，考虑

$$F = \mathrm{Id} \times [-1] : D^b(A\text{-mod}) \longrightarrow D^b(A\text{-mod}).$$

与 F 及其逆相关的倾斜复形为

$$T = (R, 0) \oplus (0, R)[1], \qquad \overline{T} = (R, 0) \oplus (0, R)[-1].$$

它们具有所需的非正支集和非负支集。环 R 是自内射的，且其 Nakayama 函子固定其不可分解投射模。因此，非零次数项满足近 ν-稳定条件 [27]。根据 [26,例 4.7(b)]，相关的稳定函子为

$$\overline{F} = \mathrm{Id} \times \Omega_R.$$

令 $S = R/(2)$。投射覆盖 $R \twoheadrightarrow S$ 的核为 $2R \simeq R/(4)$，因此

$$\overline{F}(0, S) \simeq (0, R/(4)).$$

对于任意有限的 R-中心 A-双模 N，模 $N \otimes_A (0, S)$ 都被 2 消灭。因此，它具有形式 (S^a, S^b)，其中 $a, b \geq 0$。这样的模不可能与 $(0, R/(4))$ 稳定同构：不可分解的非投射 R-模 $R/(2)$ 和 $R/(4)$ 不同构，而且 Krull–Schmidt 唯一性在添加射影直和项后仍然成立。因此，F 无法通过与一个在目标侧投射的 R-中心双模张量化来实现，即使仅考虑稳定对象的同构类也是如此。

因此，所指定的稳定函子无法通过这种张量实现，尽管单位双模给出了 A 的一个 Morita 型自等价。

注 12.7. 稳定函子的 Morita 实现未必能确定其底层的导出等价。在前面的构造中，将 $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ 替换为 $R = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$。每个有限 R-模都是 R 和 $S = R/(2)$ 的若干份直和，而 R-模可识别为有限维 $\mathbb{F}_2$-向量空间范畴。在此识别下，Ω_R 自然同构于恒等函子：它固定 S，并在其矩阵自同态上恒等作用。因此，$\mathrm{Id} \times [-1]$ 的稳定函子由恒等 Morita 双模实现。该导出函子本身不是 t-正合函子，也不是 Morita 等价的某个统一移位，因为它的两个因子具有不同的移位。

13. 相对 Frobenius 范畴与导出等价

我们回顾构造 Rouquier 和 Zimmermann 所需的 R-分裂 Frobenius 结构。随后，我们研究 Abe 和 Hoshino 关于倾斜复形自同态代数的 Gorenstein 条件。

13.1. **相对 Frobenius 结构。**令 $D_R A = \mathrm{Hom}_R(A, R)$。

命题 13.1. 假设 A 是 R 上的有限生成投射模，且 $D_R A$ 是左 A-模的投射生成元。那么

$$\mathscr{P}_R(A) = \mathscr{I}_R(A).$$

因此，有限生成左 A-模构成的 R-分裂正合范畴是 *Frobenius* 范畴，并且A-模$_R$ 具有其典范稳定三角结构。当$(D_R A)_A$ 是投射生成元时，类似的右模陈述也成立。

证明。 由于 A_R 是有限生成投射模，求值给出一个自然的左 A-模同构

$$D_R A \otimes_R V \simeq \mathrm{Hom}_R(A, V) \qquad (V \in R\text{-mod}).$$

由于 $_A(D_R A)$ 是投射的，因此右侧的每个模都属于 $\mathscr{P}_R(A)$。反之， $A \in \mathsf{add}(_A D_R A)$ 蕴含 $A \otimes_R V \in \mathsf{add}(D_R A \otimes_R V)$，从而有 $A \otimes_R V \in \mathscr{I}_R(A)$。取直和项即可得到这两个类相等。由于该正合范畴具有充分多的投射对象和充分多的内射对象，因此它是 Frobenius 的。于是，相对 syzygy 和 cosyzygy 在其稳定范畴上诱导出互为逆的移位函子。□

13.2. **Rouquier–Zimmermann 构造**。 下面的定理给出了在诺特基底上使用的从导出构造到相对构造的方法。其双模断言归功于 Rouquier 和 Zimmermann。

定理 13.2。 设 A 和 B 是有限投射 R-代数，且 D_RA 和 D_RB 是两侧的投射生成元。那么，每个 R-线性标准导出等价 A和 B 都会给出双模 ${}_AM_B$ 和 ${}_BN_A$，它们在两侧均为有限生成投射，并满足 (2.3)。特别地， $N\otimes_A-$ 和 $M\otimes_B-$ 诱导互为逆的三角等价

$$A\text{-}\underline{\mathrm{mod}}_R\simeq B\text{-}\underline{\mathrm{mod}}_R$$

在有限生成模的完整相对稳定范畴上，并赋予命题 *13.1*所给出的典范三角结构。

证明。 关于双模的断言可由 [58, 第 2.6 节、命题 2.14 和推论 2.15]推出。该节假设在基环上有限投射，并将基底对偶为投射的代数称为基环上的 Gorenstein 代数。当前假设蕴含这些条件。对于逆双侧倾斜复形，所引结果构造出所需的单侧投射双模，并给出在等式两侧加上普通投射双模后的恒等态射。特别地，误差项在普通包络代数 A^e 和 B^e 上是投射的，这些代数定义在 R上。

命题 2.1 现在给出了相对商范畴中所有有限生成模之间的加性等价。命题 13.1 表明两个正合范畴都是 Frobenius 范畴。张量函子对于 R-分裂结构是正合的，并且保持投射-内射对象不变。因此，它们诱导的稳定函子互为逆三角等价。 □

推论 13.3。 在定理 *13.2*的假设下，令 $\mathscr{L}_R(A)$ 表示有限 A-模中作为 R上的投射模的全子范畴，并类似地定义 $\mathscr{L}_R(B)$。所构造的张量函子限制为互为逆的三角等价

$$\mathscr{L}_R(A)/[A\text{-proj}]\simeq\mathscr{L}_R(B)/[B\text{-proj}].$$

特别地，定理和此推论适用于有限投射对称 R-代数 A,B，即满足 $D_RA\simeq A$ 和 $D_RB\simeq B$ 为双模的代数。

证明。双模的单侧投射性意味着张量函子保持R-投射模。对于 $X\in\mathscr{L}_R(A)$，典范的 R-分裂满同态 $A\otimes_R X\to X$ 具有一个 A-投射的中项和一个 R-投射的核。典范的 R-分裂单同态 $X\to D_RA\otimes_R X$ 具有一个 A-投射的中项和一个 R-投射的余核。因此，基环-对偶假设使得 $\mathscr{L}_R(A)$成为一个 Frobenius 正合范畴，其投射内射对象是有限投射的 A-模。对于 B 也同样成立。

若 P 在 A^e 上是投射的，且 X 在 R 上是投射的，则 $P\otimes_A X$ 在 A 上是投射的。因此，稳定化恒等式给出了这些子范畴之间的逆稳定等价。张量函子是正合的，并且保持投射-内射对象，因此这些是三角等价。最后一个断言由对称代数的上述双模同构得出。□

推论 13.4。 假设定理 *13.2*的假设成立。进一步假设 R 是亨泽尔局部的，且 A， B 没有 R-可分直因子。那么，所构造的双模具有约化代表元 M_0， N_0 它们在两侧都是投射的，并满足

$$M_0\otimes_B N_0\simeq A\oplus P,\qquad N_0\otimes_A M_0\simeq B\oplus Q,\qquad P\in A^e\text{-proj},\quad Q\in B^e\text{-proj}.$$

它们的张量函子按两种顺序互为伴随，并且诱导出与原函子对相同的 R-相对稳定范畴等价。

证明。 应用命题 9.10 和推论9.7 于通常投射类以及定理13.2中的稳定化恒等式。 □

注 13.5. Rouquier 和 Zimmermann 在其推论 2.15 之前的定义中使用了稳定化恒等式（2.3）。这些恒等式足以在满足其假设的任意交换诺特基环上证明定理 13.2。推论 13.4 在所述附加假设下给出了直和项形式（2.2）。这两个结论都不要求整个普通稳定模范畴之间存在等价。

13.3. Abe 和 Hoshino 提出的问题。本小节中我们使用右模。对于交换诺特环 R，有限 R-代数 C 按照 [2, 定义 2.1] 的意义，是余维 c 的 Gorenstein 代数，当且仅当对于每个 $\mathfrak{p} \in \in \operatorname{Supp}_R C$， $R_{\mathfrak{p}}$ 都是 Gorenstein 的，群 $\operatorname{Ext}^i_R(C, R)$ 对于 $i \neq c$ 均为零，并且 $\operatorname{Ext}^c_R(C, R)$ 是一个右 C-模投射生成元。继例 4.6 之后，Abe 和 Hoshino 提出疑问：导出等价代数的 Ext 消失是否足以保证其为相同余维的 Gorenstein 代数。我们给出肯定的回答。

定理 13.6. 设 A 是上述意义下余维为 c 的 *Gorenstein* R代数。设$P \in K^b(\text{proj-}A)$ 是一个倾斜复形，并令 $B = \operatorname{End}_{K^b(\text{proj-}A)}(P)$，带有诱导的 R代数结构。若

$$\operatorname{Ext}^i_R(B, R) = 0 \qquad (i \neq c),$$

则 B 是余维为 c的 *Gorenstein* R代数。

我们首先证明一个自内射性结果，它将在模参数系约化后用到。任意域上的有限维代数情形已知，见 [73,推论 5.3]。

引理 13.7. 设 S 是一个交换诺特环，且 C 是有限的 S代数。若 C 是自内射的，则 $K^b(C\text{-proj})$中的每个倾斜复形的相反端同态代数都是自内射的。

证明. 令 $S_0 = S/\operatorname{Ann}_S C$。由于 C 是有限的 S代数，它是诺特的。根据拟 Frobenius 环的刻画 [37, 定理 15.1], ，自内射性蕴含 C 是阿廷的。因此，左正则模 ${}_C C$ 有一个有限复合列。

令 V 为其一个简单因子，并取一个属于 $\operatorname{Supp}_S V$ 的极大理想 $\mathfrak{m}$。由于 V 在 S 上有限生成，利用 $\mathfrak{m}$ 处的中山引理可得 $\mathfrak{m}V \neq V$。 S 的中心作用使得 $\mathfrak{m}V$ 成为 V 的一个 C-子模。因此由简单性可知 $\mathfrak{m}V = 0$，且 $\operatorname{Supp}_S V = \{\mathfrak{m}\}$。由此可得

$$\operatorname{Spec} S_0 = V(\operatorname{Ann}_S C) = \operatorname{Supp}_S C$$

由有限个极大理想组成。因此 S_0 是阿廷环。

将 $S_0 = \prod_i S_i$ 写成阿廷局部环的乘积。 S_0 的中心幂等元相应地分解 C 和倾斜复形。相反端同态代数是所得倾斜复形的相反端同态代数的乘积，而自内射性可在每个因子上检验。

对每个 i，Cohen结构定理 [65] 给出一个从完备正则局部环出发的满射 $Q_i \twoheadrightarrow S_i$。令 $x_1, \ldots, x_d$ 为 Q_i 的一个正则参数系。由于 S_i 的极大理想是幂零的，当 N 充分大时，该满射可经由

$$Q_i/(x_1^N, \ldots, x_d^N).$$

该商是一个阿廷局部完全交叉，因而是 Gorenstein 的。沿着该满射限制 S_i 的作用，不会改变该代数、其倾斜复形以及相反端同态代数。因此，我们可以假设 S 是一个阿廷局部 Gorenstein 环。记 $D = \operatorname{Hom}_S(-, S)$。这是有限 S-模上的一个对偶。对于有限 S-代数 L，模 DL 在两侧都是内射余生成元。当且仅当 L 是自内射的时，它才是投射的。事实上，若它是投射的，则不可分解内射模穷尽不可分解投射模的同构类，因为这两组对象都由简单模标记。在这种情况下， DL 还是一个生成元。

首先假设 C 是一个有限环，并令 E 为 C 上的倾斜复形 T 的自同态代数。我们用 $D^b(L)$ 表示有限右 L-模的有界导出范畴，并置 $\nu_L = - \otimes^{\mathbf{L}}_L DL$。在完美复形上，由 T 给出的 S-线性等价确定了 ν_C 和 ν_E。为说明这一点，对于一个完美复形 U 以及有限 L-模的任意有界复形 V，该对偶由下式给出：

$$D \operatorname{Hom}_{D^b(L)}(U, V) \simeq \operatorname{Hom}_{D^b(L)}(V, \nu_L U).$$

通过对 U 的有界投射表示及其逐项的Nakayama像（一个有界内射复形）进行计算即可得到该结论。正如从 T 的微分分次端同态代数及其截断到 E所见，完美复形上的等价是 S-线性的。因此，对于完美的 V，从 C侧传输而来的对象与 $\nu_E U$ 表示 V的同一个函子。传输而来的对象是完美的。在此对象上取自然同构，得到一个到 $\nu_E U$的态射；由于可由 E的移位检测到，该态射是同构。特别地， ν_E 是完美范畴的一个自等价。

正合函子 ν_C 置换不可分解有限射影模。因此，在 T 作用下，ν_C 的迭代在同构意义下只有有限种可能的分次项。由于有限 C-模之间的同态集是有限的，这些迭代在这些项上的微分也只有有限种可能。因此，$\nu_E^s E \simeq E$ 对某个 $s > 0$成立。我们使用 [3, 定理 21]的逆向论证。每个 $\nu_E^j E$，$j \geq 0$都是正上同调为零的完美复形，因为 ν_E 是与一个位于零次的双模作导出张量。如果 $\nu_E^{j+1} E$ 在零次是投射的，则取 $\nu_E^j E$的极小有界投射表示。它没有正次项，因为否则最后一个微分将是分裂满同态。若其最低的非零项位于负次，则逐项应用 ν_E 后，最低次微分是单射的，因为像在该次的上同调为零。由于其源是内射对象，该微分随即分裂。这与极小性矛盾，因为Nakayama引理给出了从有限生成投射模到有限内射模的等价。由 $j = s - 1$ 向下递推可证明 $DE = \nu_E E$ 是投射的。

接下来，假设 S 的剩余域具有特征零。系数域使 C 和 E 成为域上的有限维代数，因此域上的结果适用。在剩余特征为 $p > 0$ 时，我们首先作一个具有代数闭剩余域 k 的忠实平坦局部扩张。通过逐次添加不可约剩余多项式的首一提升的根，并取滤过并，可以得到这样的扩张。在每一步中，极大理想都是原极大理想 $\mathfrak{m}$ 的扩张，而 $\mathfrak{m}$-进滤过的各层则是扩张后的剩余域向量空间。由于滤过是有限的，且这些层在新的剩余域上是有限维的，所得环是阿廷的。由于顶端与该平坦扩张相容，且其维数为一，所得环是 Gorenstein 的。自同态复形和对偶 D 与平坦扩张相容。有限模的投射性可沿该扩张下降，而完美范畴的生成性则可通过将 C 关于 T 的有限构造经扩张而上升。

根据Cohen结构定理，扩张局部环有限地扩张于一个截断Witt环$W_n(k)$ [65, 63]之上。我们将这两个代数和倾斜复形视为关于 $W_n(k)$的数据。由第一段可知，其自身的对偶 $\mathrm{Hom}_{W_n(k)}(-, W_n(k))$ 也能检测有限代数的自内射性。现在我们证明，在 $W_n(k)$上的一个反例将给出有限域 k_0 上的 $W_n(k_0)$中的一个反例。

固定 n、C 和 E 在 $W_n(k)$上的循环模分解，以及表示 T各项的幂等矩阵的有限秩和次数。同时固定通过移位、直和、锥和直和项从 T 构造 C 的有限构造形式。每个中间复形都可以由有界有限生成投射模表示，而同伦范畴中的同构或收缩则由链映射和同伦见证。这些见证只涉及有限多个附加矩阵。在这些选择下，反例的存在性是特征为 p的域语言中的一个一阶句子。更明确地说，一个循环模$W_n(k)/(p^i)$被解释为对可定义关系 $u - v \in p^i W_n(k)$取商。代数结构由结构常数指定。有界自同态复形在每个非零次数上的正合性，通过要求每个圈都是边界元来表达。将 E 与其零次上同调的对应关系，通过为 E的模生成元指定圈，并要求模关系和环关系模边界成立，再加上所得映射的内射性和满射性来指定。任一代数的对偶由其循环生成元上线性函数的取值组组成，并满足相应的湮灭子条件。对于这种类型的模，循环生成元的数量限制了其对偶作为Witt环上、进而作为代数上的模生成元数量。因而，对偶的投射性可以通过要求存在一些映射，将其表示为某个固定秩自由模的直和项来表达。为了指定一个反例，要求 C一侧满足这种分裂，而 E一侧不满足。Witt加法和乘法由泛多项式给出，因此这些都是域公式。

特征为 p 的代数闭域理论的完备性如今给出了定义在 $\mathbb{F}_p$ [11] 上的此类数据。选取一个有限子域 k_0，使其包含所有结构常数、复形以及有限生成见证的坐标。所得的维特环扩张是忠实平坦的。事实上，由于有限 p-进滤过，剩余域基可提升为 $W_n(k_0)$上的基。因此，$W_n(k_0)$上的自同态复形仅在零次具有上同调，并且其自同态代数扩张为 E 上的代数（其中基环为 $\mathbb{F}_p$）。通过对 k_0的选取，有限生成见证可以下降。由于对偶与该平坦扩张交换，C-侧的投射性下降，而 E-侧的投射性将上升。于是得到一个定义在有限环上的反例，矛盾。□

定理的证明 *13.6*。 复形 $\mathrm{Hom}_A^\bullet(P,\ P)$ 与中心局部化交换。因此$\mathrm{Supp}_R A = \mathrm{Supp}_R B$：如果 $A_\mathfrak{p} = 0$，则局部化的自同态代数为零；如果 $B_\mathfrak{p} = 0$，则 $P_\mathfrak{p}$ 的单位元在同伦范畴中为零，因此其厚闭包为零，并且 $A_\mathfrak{p} = 0$。有限 B-模的投射性可在 R的极大理想处通过局部化有限自由表示的扩张类来判定。生成元性质可通过局部化迹理想来判定。因此我们可以假设 R 是局部 Gorenstein 环，并且 $A \neq 0$。

由 [2, 命题 2.9], ，取 $\mathrm{Ann}_R A$ 中一个长度为 c 的 R-正则序列 $\boldsymbol{x}$。它逐项湮灭 P，因此也湮灭B。令 $S = R/(\boldsymbol{x})$。换环同构

$$\mathrm{Ext}_S^j(C,S) \simeq \mathrm{Ext}_R^{c+j}(C,R), \qquad C = A, B,$$

与双模作用相容。由局部对偶，两个代数都是 Gorenstein 局部环 S 上的极大 Cohen–Macaulay 模。并且 $D_S A$ 是一个投射生成元。我们将证明 $D_S B$也满足同一断言。

取 S的一个参数系。它在 A 和 B 上是正则的。在单步处理中，令 y 为$\bar{}$下一个参数，令 $S = S/(y)$，并记 $C = C/yC$。 $H^\bullet = \mathrm{Hom}_A^\bullet(P,\ P)$ 的各项属于 $\mathrm{add}(A_S)$。乘以 y 在每一项上都是单射。由 P各项的投射性，商复形是 P/yP 在 $\bar{A}$ 上的自同态复形。由于 y 在 $B = H^0(H^\bullet)$ 上正则，长正合列给出 $H^i(H^\bullet/yH^\bullet) = 0$ （对 $i \neq 0$ 而言），以及 $H^0(H^\bullet/yH^\bullet) = \bar{B}$ （作为代数）。$\bar{}$有界投射复形上的约化函子将 A 映为 A，并保留生成所需的三角和直和项。因此 P/yP 是倾斜的。此外，将 $\mathrm{Hom}_S(C,\ -)$ 作用于参数序列，得到

$$(D_S C)/y(D_S C) \simeq D_{\bar{S}}\bar{C}, \qquad C = A, B,$$

因为 $\mathrm{Ext}_S^1(C,\ S) = 0$。这就确定了每次约化下的对偶，而 $D_S A$ 的约化保留其投射生成元性质。

在所有参数都被消去后，基环是阿廷局部 Gorenstein 环，A 的约化是自内射的，而 A、B 的约化是导出等价的。引理13.7表明，B 的约化对偶是一个投射生成元。

为通过一个参数进行提升，令 $K = D_S B$ 并取一个有限自由表示 $0 \to L \to F \to K \to 0$。由于乘以 y 在 S上是单射的，因此在 K 上也是单射的；由于它在 F上是单射的，因此在 L 上也是单射的。由于 y 在 B 和 K上是正则的，K 的投射分解的约化是 K/yK的投射分解。因此

$$\mathrm{Ext}_B^1(K, L/yL) \simeq \mathrm{Ext}_{\bar{B}}^1(K/yK, L/yL) = 0.$$

最后一个等式使用了约化对偶的投射性。对 L 上的y 乘法所对应的正合序列给出 $y\,\mathrm{Ext}_B^1(K,\ L) = \mathrm{Ext}_B^1(K,\ L)$。中山引理表明这个有限 S- 模为零，因此该表示分裂。既然 K 是投射的，其迹理想通过 $\mathrm{Hom}_B(K,\ B)$ 的基变换约化为 K/yK 的迹理想$\bar{}$。后一个理想是 B。中山引理给出 K的生成元性质。反复进行提升并使用换环同构，表明 $\mathrm{Ext}_R^c(B,\ R)$ 是一个投射生成元。这就证明了定理。□

推论 13.8. 在定理 *13.6*的假设下，令 $\Omega_A = \mathrm{Ext}_R^c(A,R)$ 且 $\nu_A = -\otimes_A^{\mathbf{L}}\Omega_A$。则 $\mathrm{add}(\nu_A P) = \mathrm{add}(P)$。

证明。 将 [2, 推论 4.4] 应用于定理 13.6的结论。 □

14. Artin 基环上的几乎 ν-稳定导出等价

本节中，我们将几乎 ν-稳定导出等价的双模恒等式推广到交换 Artin 环 R上投射的代数。所有代数均在 R 上有限生成，且所有双模均为 R-中心的。令 $A_R^e = A \otimes_R A^{\mathrm{op}}$。我们称一对 ${}_A M_B, {}_B N_A$ 满足*Morita* 型双模恒等式，若其成员在两侧均为有限生成投射模，且

$$M \otimes_B N \simeq A \oplus P, \qquad N \otimes_A M \simeq B \oplus Q, \tag{14.1}$$

其中 P 是 A_R^e-投射的，且 Q 是 B_R^e-投射的。根据第 2节，这些恒等态射给出了相对稳定范畴之间的等价。在一般的 Artin 基环上，它们未必给出普通稳定模范畴之间的等价。

我们采用 Hu–Xi 关于几乎 ν-稳定等价的定义 [27]。因此，对于几乎ν-稳定导出等价 $F\colon D^b(A\text{-模}) \longrightarrow D^b(B\text{-模})$ 及其拟逆 G，相应的倾斜复形具有根投射代表元

$$T^\bullet \simeq G(B),\quad T^i = 0\ (i \notin [-n, 0]), \qquad U^\bullet \simeq F(A),\quad U^i = 0\ (i \notin [0, n]).$$

令 $T^- = \bigoplus_{i<0} T^i$ 和 $U^+ = \bigoplus_{i>0} U^i$。所需条件为

$$\operatorname{add}(T^-) = \operatorname{add}(\nu_A T^-), \qquad \operatorname{add}(U^+) = \operatorname{add}(\nu_B U^+). \tag{14.2}$$

这里 $\nu_A = D\operatorname{Hom}_A(-,\ A)$，其中 D 是 Artin基环上有限模的通常对偶 .

定理 14.1。设 A 和 B 是有限生成投射 R-模。如果存在一个R-线性的几乎 ν-稳定导出等价，使得 A 与 B之间存在这种等价，那么存在一对 R-中心双模，满足 (14.1)。该断言适用于任何此类 R-线性等价。

对于一个域，Hu–Xi [27, 定理 5.3，第 141–143] 页证明了更强的断言，即将诱导的普通稳定等价确定为一个张量函子。他们在第 151 页提出的问题（2）询问R-投射 Artin 代数。定理 14.1 确立了双模结论（14.1）。证明控制了在 R 上的外张量积，然后添上投射双模直和项，从而得到（14.1）中的两个同构。

14.1. **预备引理**。

引理 14.2. 在定理 *14.1*的假设下，存在一个 R-线性标准几乎ν-稳定导出等价，介于 A 与 B之间。这里只断言标准替代的存在性。

证明。 我们首先证明极小投射复形的一个性质。设 H 是 $D^b(B\text{-模})$的一个 t-正合 R-线性自等价，并记其在心上的限制为 E 。因此， E 是一个 Morita 自等价。若 $P^\bullet$ 是一个根有界投射复形，且 $V^\bullet$ 是 $H(P^\bullet)$的根投射代表，则

$$V^i \simeq E(P^i) \qquad \text{for every } i. \tag{14.3}$$

事实上，对于任意简单 B-模 S，根基性使得 $\operatorname{Hom}_B(P^\bullet, S)$ 中的微分为零。因此

$$\operatorname{Hom}_{D^b(B)}(P^\bullet, S[j]) \simeq \operatorname{Hom}_B(P^{-j}, S).$$

应用 H 可得到相应的空间 $\operatorname{Hom}_B(V^{-j}, E(S))$，并且与除环$\operatorname{End}_B(S)$ 和 $\operatorname{End}_B(E(S))$相容。这些空间在相应除环上的维数决定了不可分解投射覆盖的重数，从而证明了（14.3）。由于 H 保留由投射对象生成的厚子范畴，因此投射代表存在。一个 R-线性 Morita 等价还通过自然同构与投射对象上的 Nakayama 函子交换

$$D\operatorname{Hom}_B(P, X) \simeq \operatorname{Hom}_B(X, \nu_B P)$$

以及 Yoneda 引理。因此，加性 Nakayama 稳定性条件在 (14.3) 下保持不变。

现在令 $T^\bullet = G(B)$。导出 Morita 理论给出一个 R-线性的标准等价$G_0\colon D^b(B) \longrightarrow D^b(A)$，满足 $G_0(B) \simeq T^\bullet$；其自同态代数的 R-代数识别由 G诱导。关于投射交换基环上的双侧实现，参见 [54, 推论 3.5], 或 [58, 第 2.2] 节。自等价 $H = FG_0$ 满足 $H(B) \simeq B$。它是t-正合的，因为群 $\operatorname{Hom}_{D^b(B)}(B, X[j])$能够检测 X的上同调。令 $F_0 = G_0^{-1}$。 F_0的第一个倾斜复形是 $T^\bullet$。它的另一个倾斜复形是 $F_0(A) \simeq H^{-1}F(A)$；由 (14.3)，其根基项由 $F(A)$的根基项经由心上的 Morita 等价 E^{-1} 得到。因此，(14.2) 中的两个条件对 F_0均成立。□

引理 14.3。设 R 为局部环且不是自内射的，并设 A 为一个非零 *Artin* R-代数，其作为 R上的模是投射的。则 A 没有非零有限生成投射-内射左模或右模。因此，任意两个此类代数之间的 R- 线性几乎 ν- 稳定导出等价所关联的倾斜复形都集中在零次，且这些代数是 R- 线性 *Morita* 等价的。

证明。 限制到 R 会将一个 A-投射模变为一个 R-投射模。它还会将一个A-内射模变为一个 R-内射模：它是正合函子 $A\otimes_R -$的右伴随。在局部环 R 上，一个非零有限投射模是非零自由模。如果它是内射的，则其直和项 R 也将是内射的，这就产生矛盾。右模上的论证相同。 T^-或 U^+中由（14.2）得到的每一项既是投射的又是内射的，因此这些项必须为零。集中在零次的倾斜复形是一个投射生成元，从而得到所述的 Morita 等价。 □

下一个引理表明，在加入投射双模后，可以用实际的直和分解替代稳定化双模恒等式。

引理 14.4。 设 R 为交换局部 *Artin* 环，且 A、B 为非零有限自由R-代数。假设 ${}_AM_B$ 和 ${}_BN_A$ 在两侧均有限且为投射模，并且存在双模同构

$$(M\otimes_B N)\oplus W_A\simeq A\oplus V_A,\qquad (N\otimes_A M)\oplus W_B\simeq B\oplus V_B, \tag{14.4}$$

其中 V_A、W_A 为 A_R^e-投射模，而 V_B、W_B 为 B_R^e-投射模。则对于充分大的整数 t，双模

$$\widetilde{M}=M\oplus(A\otimes_R B)^t,\qquad \widetilde{N}=N\oplus(B\otimes_R A)^t$$

满足实际恒等式 (14.1)，其中误差双模为投射双模。

证明。 取补对象 $W_A\oplus W'_A\simeq(A_R^e)^u$和 $W_B\oplus W'_B\simeq(B_R^e)^v$。记 $a=$的秩为$_R A>0$，记 $b=$的秩为$_R B>0$，并取 t 使得 $t^2b\ge u$ 且 $t^2a\ge v$。展开 $\widetilde{M}\otimes_B\widetilde{N}$后，两个混合直和项是 $M\otimes_R A$ 和 $A\otimes_R N$的有限直和。由于 ${}_AM$和 N_A为投射模，它们是 A_R^e-投射的。其余加入的直和项为

$$(A\otimes_R B)^t\otimes_B(B\otimes_R A)^t\simeq(A\otimes_R B\otimes_R A)^{t^2}\simeq(A_R^e)^{t^2b}$$

作为一个 A-A-双模。由（14.4），

$$(M\otimes_B N)\oplus(A_R^e)^u\simeq A\oplus V_A\oplus W'_A.$$

这给出了第一个所需的恒等式。反向乘积含有新增自由直和项（B_R^e）$^{t^2a}$，从而得到第二个恒等式。补足后的双模在两侧仍是投射模，因为 A 和B 在 R上有限自由。□

14.2. **自内射基环上的外积**。我们首先证明加性子范畴的一个交公式。该公式对任意交换 Artin 基环都成立。

引理 14.5。设 A、B 为 *Artin* R-代数。设 ${}_BV$ 和 W_A 为有限生成投射模。那么，作为（$B\otimes_R A^{\mathrm{op}}$）-模的加性子范畴，

$$\operatorname{add}(B\otimes_R W)\cap\operatorname{add}(V\otimes_R A)=\operatorname{add}(V\otimes_R W).$$

证明。取幂等元 $e\in B$和 $f\in A$，使得 add(V) $=$add(Be) 且 add(W) $=$add(fA)。令 $C=B\otimes_R A^{\mathrm{op}}$、 $u=e\otimes 1$和 $v=1\otimes f^{\mathrm{op}}$。对于一个简单的 C-模 S，我们断言

$$uvS\neq 0\quad\Longleftrightarrow\quad uS\neq 0\text{ and }vS\neq 0.$$

只需证明逆向蕴含。若 $vS\neq 0$ 且 $uvS=0$，则 u 湮灭 vS。 R-子模 vS 在 B-作用下稳定，而 u 与 A^{op}-作用可交换。因此，u 湮灭 $C(vS)=S$，这与 $uS\neq 0$矛盾。 S 的不可分解投射覆盖出现在 Cu中，当且仅当 $uS\neq 0$；对于 Cv 和 Cuv也同理。因此，Krull–Schmidt 定理给出 add(Cu) ∩add(Cv) $=$ add(Cuv)，这正是所需的等式。□

引理 14.6. 设 R 是交换自内射局部阿廷环，且 A、B 是 R上的有限投射模。若 ${}_BV$ 和 W_A 是投射-内射模，则 $V\otimes_R W$ 是 $B\otimes_R A^{\mathrm{op}}$上的投射-内射模。

证明。这里的 $D_R=\operatorname{Hom}_R(-,R)$ 是有限 R-模的对偶。 V 和 W 都是 R 上的有限投射模。它们的外积是 $B\otimes_R A^{\mathrm{op}}$ 上的投射模，并且

$$D_R(V\otimes_R W)\simeq D_R(W)\otimes_R D_R(V)$$

在反包络代数上是投射的：两个内射因子的对偶是投射的。应用对偶性即可证明原外积的内射性。□

对于一个 Artin代数 A，令 E_A 为所有正 Nakayama迭代均为投射的不可分解投射模各取一个代表后所得的直和。因此$\mathrm{add}(E_A) = \mathrm{add}(\nu_A E_A)$，且该子范畴中的每个对象都是投射-内射的。这是 [27, 命题 3.8 和引理 3.9（第 129–130]页）中使用的最大 Nakayama稳定投射内射子范畴。在（14.2）下，有 $T^- \in \mathrm{add}(E_A)$， $U^+ \in \mathrm{add}(E_B)$，并且

$$F(K^b(\mathrm{add}\, E_A)) = K^b(\mathrm{add}\, E_B) \quad \text{up to isomorphism.} \tag{14.5}$$

该等式及其逆由 Hu–Xi 的引理 3.9 得出，该引理对 Artin 代数成立。

14.3. **双边构造**。

定理 14.1 的证明。将 R 分解为交换Artin局部环的有限乘积。由于 F 是 R-线性的，它保持导出范畴中相应的中心幂等元分解。 A 和 B 的零分量相互对应，并且假设条件和所需的双模恒等式都逐分量成立。因此，只需在带有 A、$B \neq 0$的局部 R上进行讨论。在这种情况下，它们在 R 上是有限自由的。引理 14.3 处理 R 不是自内射的情形，其中 $P = Q = 0$。在证明的其余部分，设 R 是自内射的，并使用 $D_R = \mathrm{Hom}_R(-, R)$。根据引理 14.2，我们可以将 F 替换为标准的几乎 ν-稳定等价。

一个非负的双边代表。设 ${}_BX_A$ 是诱导 F 的双侧倾斜复形，其逆为 ${}_AY_B$。这些复形可以由有界复形表示，且其各项在两侧都是投射的。事实上，取相应张量积代数上的有界上方投射分解。将其限制到每一侧后，得到的都是完美复形。因此，足够靠左的上同调核在两侧都是投射的，在该上同调核处截断即可得到所需的有界代表。限制保持每一侧的投射性，因为 A 和 B 在 R 上是投射的。

我们断言， X 有一个根代表

$$\Delta^\bullet = (0 \longrightarrow N \longrightarrow \Delta^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \Delta^n \longrightarrow 0), \qquad \Delta^i \in \mathrm{add}(U^+ \otimes_R (T^-)^*) \quad (i > 0), \tag{14.6}$$

其中 $^* = \mathrm{Hom}_A(-, A)$，定义在左侧的 A-投射对象上。为证明这一断言，保留右侧的 A-作用，并考虑导出等价

$$X \otimes^{\mathbf{L}}_A - : D^b(A^e_R) \longrightarrow D^b(B \otimes_R A^{\mathrm{op}}).$$

其两个单侧倾斜复形分别由 $T^\bullet \otimes_R A$ 和 $U^\bullet \otimes_R A$ 表示。保留左侧的 B-作用，得到

$$- \otimes^{\mathbf{L}}_B X : D^b(B^e_R) \longrightarrow D^b(B \otimes_R A^{\mathrm{op}}),$$

其对应的复形为 $B \otimes_R \mathrm{Hom}_B(U^\bullet, B)$ 和 $B \otimes_R \mathrm{Hom}_A(T^\bullet, A)$。所选的有界模型是投射的，因此在进行各自张量积的一侧上是平坦的。导出张量结合律和逆恒等式给出了带有这些附加作用的逆等价。有界模型保持有界性和有限生成性。所示的单侧代表来自于在 R 上的投射性。如有必要，去掉可缩直和项不会改变所示的次数和加性支集。

将标准形陈述 [27, 引理 3.1] 应用于这两个等价中的对角模 A 和 B 。它给出了同一对象 X 的两个非负根基代表，其正项分别为

$$\mathrm{add}(U^+ \otimes_R A) \quad \text{and} \quad \mathrm{add}(B \otimes_R (T^-)^*).$$

从同伦态射到导出态射的比较映射，对于正次数项为投射的非负复形，是一个同构 [27, 引理 2.2(1)，第 114]页。因此，这两个代表元同伦等价，而根基性使它们作为复形同构。引理14.5 现在证明了（14.6）。特别地，

$$\Delta^i \in \mathrm{add}(E_B \otimes_R E^*_A) \qquad (i > 0). \tag{14.7}$$

零次双模的投射性。遗忘右 A-作用后，$\Delta^\bullet$ 在导出范畴中与$U^\bullet$同构。遗忘左 B-作用后，它与 $\mathrm{Hom}_A(T^\bullet, A)$同构。在这两种情况下，根据同一个比较引理，这些同构都可提升为同伦等价。零次的同伦逆方程表明，1_N 是一个经由比较复形的零次投射项与 Δ^1的直和分解的映射。因此，N 既是左 B-模，也是右 A-模，且均为投射模。

Put

$$\Theta^\bullet = \mathrm{Hom}_B^\bullet(\Delta^\bullet, B), \qquad M = \Theta^0 = \mathrm{Hom}_B(N, B).$$

这是一个支集位于 $[-n, 0]$ 中的逆双侧倾斜复形。有限 R-投射性给出，对于$i > 0$,

$$\Theta^{-i} \in \mathrm{add}(D_R((T^-)^*) \otimes_R (U^+)^*) = \mathrm{add}(\nu_A T^- \otimes_R (U^+)^*) \subseteq \mathrm{add}(E_A \otimes_R E_B^*).$$

模 E_A^* 和 E_B^* 也都是投射-内射模：例如 $D_R(E_A^*) = \nu_A E_A$ 是投射的，而 E_A^* 根据定义是投射的。引理 14.6因此表明，两个复形中所有非零次数项在各自的张量积代数上都是投射-内射模。

模 M 作为右 B-模是投射的。为了证明它作为左A-模是投射的，在忘却右 B-作用后比较 $\Theta^\bullet$ 与 $T^\bullet$。二者都是非正的，且其负次数项是内射左 A-模。因此，根据 [27, 引理2.2(2)]，它们的导出同构提升为同伦等价。现在，次数为零的同伦逆方程经由 1_M 分解通过 $T^0 \oplus \Theta^{-1}$，后者是投射的。因此，M 在两侧都是投射的。四个加性支撑关系。我们需要

$$\begin{aligned} N \otimes_A E_A &\in \mathrm{add}(E_B), \quad E_A^* \otimes_A M \in \mathrm{add}(E_B^*), \\ M \otimes_B E_B &\in \mathrm{add}(E_A), \quad E_B^* \otimes_B N \in \mathrm{add}(E_A^*). \end{aligned} \tag{14.8}$$

首先，$E_A^* \otimes_A E_A \simeq \mathrm{End}_A(E_A)$ 在 R 上是有限投射的：它是 A 上某个矩阵代数的直和项。对于 E_B，也有类似结论。将任一因子替换为其加性闭包中的对象后，同样的结论仍然成立。

复形 $\Delta^\bullet \otimes_A E_A$ 是一个由投射 B-模组成的有界复形，且其正次数项属于 $\mathrm{add}(E_B)$。由（14.5），它与 $K^b(\mathrm{add}\, E_B)$中的一个复形同伦等价。次数零处的同伦逆方程经过 $1_{N\otimes_A E_A}$ 中的对象$\mathrm{add}(E_B)$；这就证明了第一个关系。对非正复形 $\Theta^\bullet \otimes_B E_B$ 应用同样的论证，即可证明第三个关系。张量–Hom 伴随和有限投射性给出

$$E_A^* \otimes_A M \simeq \mathrm{Hom}_B(N \otimes_A E_A, B),$$

因此，第一个关系蕴含第二个关系。

对于第四个关系，使用导出双模同构

$$\Delta^\bullet \simeq \mathrm{Hom}_A^\bullet(\Theta^\bullet, A).$$

与 E_B^* 张量化后，在 $D^b(A^{\mathrm{op}})$中得到，

$$E_B^* \otimes_B \Delta^\bullet \simeq \mathrm{Hom}_A^\bullet(\Theta^\bullet \otimes_B E_B, A).$$

右侧与一个位于 $K^b(\mathrm{add}\, E_A^*)$ 中的复形同伦等价；由（14.5）可知。左侧是一个有界的投射右 A模复形，非负，且正次项属于$\mathrm{add}(E_A^*)$。因此，其零次同伦逆方程证明了（14.8）中的最后一个关系。这里仅使用了这些复形的导出对偶；该论证不要求零次双模之间存在同构 $N \simeq \mathrm{Hom}_A(M, A)$。

分裂乘积复形并进行填充。考虑 $C^\bullet = \Delta^\bullet \otimes_A \Theta^\bullet$。它在导出范畴中同构于对角双模 B。由（14.7）和（14.8）可知，除对应于 $(i, j) = (0, 0)$的项之外，每个张量项 $\Delta^i \otimes_A \Theta^j$都属于$\mathrm{add}(E_B \otimes_R E_B^*)$。对于 $i > 0, j < 0$，这要用到 $E_A^* \otimes_A E_A$的R-投射性；对于 $i = 0$ 或 $j = 0$，则要用到（14.8）的第一行。根据引理 14.6，这些项都是B_R^e-投射-内射的。因此

$$C^0 = (N \otimes_A M) \oplus W_B$$

与 W_B 投射-内射，并且 $C^\bullet$ 中每个处于非零次数的项都是投射-内射。

由于 $C^\bullet$ 的唯一上同调是零次的 B，我们可以从两端分离出可缩二项复形。在最左侧的负次数处，微分是从一个内射模出发的单态射，因此它分裂。在最右侧的正次数处，微分是一个满同态

到一个投射模上，因此它分裂。重复这两个操作便得到 $C^0 \simeq B \oplus V_B$，其中 V_B是投射-内射的。因此

$$(N \otimes_A M) \oplus W_B \simeq B \oplus V_B.$$

逆乘积 $\Theta^\bullet \otimes_B \Delta^\bullet \simeq A$ 的处理方式类似，使用（14.8）的第二行。于是得到

$$(M \otimes_B N) \oplus W_A \simeq A \oplus V_A$$

其中 W_A，V_A 是 A_R^e上的投射模。引理 14.4 将这些稳定同构转换为（14.1）。最后，在 R 的局部因子上构造的各对的有限乘积给出了所需的整体对。□

注 14.7。在一般的 Artin 基环上，非半单不可分解代数的对角双模可能是其相对包络代数上的投射模。例如，如果 $A = R$是一个非半单交换局部 Artin 环，那么 $A_R^e = R$，且对角双模是自由的。因此，在域情形中所使用的非半单块的对角双模的非投射性，在 Artin 基环上无法使用。引理 14.4以另一种方式替代了该消去论证，而无需排除这些块。

14.4. 相对稳定等价与 Gorenstein 维数。

推论 14.8. 在定理 *14.1*的假设下，令 $\mathscr{L}_R(A)$ 表示有限 A-模的全子范畴，其中这些模作为 R-模是投射的，并类似地定义 $\mathscr{L}_R(B)$。所构造的张量函子诱导互逆等价

$$\mathscr{L}_R(A)/[A\text{-proj}] \simeq \mathscr{L}_R(B)/[B\text{-proj}].$$

它们还诱导 A-模 与B-模 的加性商之间的互逆等价，商去各自相对 R-投射模，即模$A \otimes_R V$和 $B \otimes_R V$的加性闭包，其中 V是有限 R-模。

证明。由于 N_A 是投射的，$N \otimes_A X$ 是 X 的有限多个副本之有限直和的直和项，作为 R-模。因此它保持 R-投射性，对 $M \otimes_B -$也同样如此。由于双模在目标一侧是投射的，这两个函子都保持普通投射对象。若 X 是 R-投射的，且 P是 A_R^e-投射的，则 $P \otimes_A X$ 是 $A \otimes_R X$的有限直和的直和项，因而是 A-投射的。因此，两个恒等式（14.1）给出了第一对逆等价。

对于任意有限模 X，同样的论证表明 $P \otimes_A X$ 是相对 R-投射的。此外，$N \otimes_A (A \otimes_R V) = N \otimes_R V$ 是 $B \otimes_R V$ 的有限直和的一个直和项，因为 ${}_BN$ 是投射的。因此，两个函子都保持相对投射对象，而（14.1）给出了第二个断言。□

推论 14.9。定理 *14.1* 中的 *Morita* 对可以选取为：其张量函子保持两侧每个有限模的 *Gorenstein* 投射维数不变。明确地，对于 X 上的有限左模 A以及 Y 上的有限左模 B，

$$\mathrm{Gpd}_B(N \otimes_A X) = \mathrm{Gpd}_A X, \qquad \mathrm{Gpd}_A(M \otimes_B Y) = \mathrm{Gpd}_B Y,$$

包括值 ∞。对于 X' 上的有限右模以及 Y' 上的有限右模，

$$\mathrm{Gpd}_{B^{\mathrm{op}}}(X' \otimes_A M) = \mathrm{Gpd}_{A^{\mathrm{op}}} X', \qquad \mathrm{Gpd}_{A^{\mathrm{op}}}(Y' \otimes_B N) = \mathrm{Gpd}_{B^{\mathrm{op}}} Y'.$$

证明。在 R的每个非自内射局部因子上，取引理 14.3中的 Morita 对；Morita 等价保持全正合复形及其维数不变。在每个自内射局部因子上，使用定理中构造的 Morita 对，必要时包括填充。它满足定理 11.14的所有假设，该定理给出了该因子上以及相反代数上的所示等式。有限代数直积上的 Gorenstein 投射维数等于各分量维数的最大值。合并这有限多个因子即可证明该断言。□

注 14.10。定理 14.1 中的张量函子未必能实现给定几乎 ν-稳定导出等价所对应的普通稳定函子。若 X 不是 R上的投射模，则将 $\Delta^\bullet$ 的一个正次数项与 X 张量化，可能得到一个非投射的 B-模。类似地，当 $P \otimes_A X$ 是 P-投射时，A_R^e也未必是投射模。推论 14.8给出了两个商范畴，在这些范畴上，所构造的张量函子互为逆等价。

例 14.11。 本节所用的 Artin对偶不能替换为 $D_R = \mathrm{Hom}_R(-,R)$，否则论证就会改变。为说明这一点，设 $R = A = B = k[[t]]$，其中 k 是一个域，并令

$$\nu_R = D_R \,\mathrm{Hom}_R(-,R).$$

于是， ν_R 在有限投射 R-模上自然同构于恒等函子。对于具有逆 $G = [1]$ 的导出自等价 $F = [-1]$ ，复形 $T = G(R) = R[1]$ 和 $U = F(R) = R[-1]$ 分别集中在次数 -1 和 1。因此， $T^- = R = U^+$ 以及 (14.2) 中的两个形式等式对这个 ν_R 都成立。然而， F 并非 t-正合，尽管 R 不是自内射的，因为 $\mathrm{Ext}^1_R(k,R) \simeq k$。因此，替换对偶后，引理 14.3 的零次结论并不成立。Matlis 对偶也不能在有限R-模上给出对偶：它将 R 送到非有限生成模 $E_R(k)$。

定理 13.2 在诺特基底上给出了一个正向构造，并对基底对偶提出了明确假设。其相对 Frobenius 结构正是该构造所需的结构。上面的例子仅涉及在阿廷论证中提议替换对偶这一点。

附录 A. Abe–Hoshino 代数与基环上的投射性

A.1. **两种 Gorenstein 约定**。 Abe 和 Hoshino 对交换基环上的 Gorenstein代数使用两种定义。在 [1, 定义 3.1]中， R 是 Gorenstein 的， A 作为 R-模具有 Gorenstein 维数零，并且 D_RA 作为右 A-模是投射生成元。该定义不要求在 R上的投射性。 [1, 定理 4.5] 中的判据刻画了对于倾斜复形 T，通过 $\mathrm{add}(T) = \mathrm{add}(\nu T)$ 保持 Gorenstein 维数零条件和对偶生成元条件的情形；[1, 推论 4.6] 给出了 A_R 和 B_R 为投射模时的版本。后一判据在交换诺特基环上成立，而不要求基环本身是 Gorenstein 的。

本段采用右模约定。如果 A_R 是投射模且 D_RA 是投射生成元，那么对于倾斜复形 $T \in K^b(\mathrm{proj}\text{-}A)$ 和 $B = \mathrm{End}_{K^b(\mathrm{proj}\text{-}A)}(T)$，推论 4.6 表明

$$\mathrm{add}(T) = \mathrm{add}(\nu T), \qquad \nu T = T \otimes^{\mathbf{L}}_A D_R A, \tag{A.1}$$

等价于相应的投射性和对偶生成元条件 B。对于这些R-反射代数，两侧的对偶生成元条件等价 [1, 注 3。2]。结合定理13.2，这一判据为相应的标准导出等价给出 Morita型相对稳定等价，意义如（2.3）中稳定化的情形。推论 13.4 在其附加假设成立时适用。条件（A.1）涉及整个倾斜复形，而几乎 ν-稳定性涉及相对于 Artin 对偶的、指定的非零次数项。这是不同的假设，且 Rouquier–Zimmermann 构造不要求几乎 ν-稳定性。

[2, 定义 2.1] 中的更一般定义涉及余维 c： $R_{\mathfrak{p}}$ 在 A的支集上是 Gorenstein，

$$\mathrm{Ext}^i_R(A,R) = 0 \quad (i \neq c), \qquad \Omega = \mathrm{Ext}^c_R(A,R) \text{ is a right } A\text{-projective generator}.$$

他们的推论 4.4 使用 $\nu = - \otimes^{\mathbf{L}}_A \Omega$ 来刻画导出等价代数何时仍属于同一个余维类。定理 13.6证明，目标代数的基环 Ext 群集中于特定次数已足够；推论 13.8给出了由此得到的中山稳定性。这些条件不同于左、右自内射维数有限。特别地，在阿廷戈伦斯坦基环上，其零余维条件会迫使代数通常为自内射： D_RA 经由限制–余诱导是内射的，而 A 是有限个 D_RA副本的有限直和的直和项；对偶性给出反向的结论。

仅有 G- 维数$_RA = 0$ 这一条件不能替代命题 13.1 中的基环上的投射性，也不能替代所引用的 Rouquier–Zimmermann 定理中的该条件。下面的例子表明，相应的R-分裂正合范畴不一定是 Frobenius 范畴。

A.2. **一个不具有基环上投射性的自对偶代数**。

例 A.1。 令 K 为一个域，并令

$$R = K[t]/(t^2), \qquad A = K[x,y]/(x^2,y^2), \qquad t \longmapsto xy.$$

记 $J=(x,\ y)=\mathrm{rad}\ A$、$C=A/(xy)$ 和 $S=A/J$。则

$$A_R\simeq R\oplus K^{\oplus 2},\qquad \text{G-}\dim_R A=0,\qquad D_R A\simeq A\quad \text{as bimodules.} \tag{A.2}$$

然而，A_R 并不是投射的，并且

$$\mathscr{P}_R(A)=\mathrm{add}(A,C),\qquad \mathscr{I}_R(A)=\mathrm{add}(A,J),\qquad \mathscr{P}_R(A)\neq\mathscr{I}_R(A). \tag{A.3}$$

A-模$_R$ 上的相对 syzygy 函子不是一个等价函子。

证明。由 1、xy 张成的子空间是一个自由秩一 R直和项，而子空间 Kx和 Ky 都被 t湮灭。这给出了（A.2）中的第一个分解，但它在局部环 R上不是自由的。等价地，乘以 t 的映射在 A 上具有 K-秩一，而在一个自由秩二 R-模上具有秩二。

所有项均为 R 且所有微分均为乘以 t 的周期复形是正合的，并且在 $\mathrm{Hom}_R(-,R)$作用下仍保持正合。每个微分的余核都是 K。因此，K 在 R上的 Gorenstein 维数为零，R 及其有限直和也同样如此，从而证明了维数断言。

Th在 R 上取 t 的系数的泛函将 R 与其 K-对偶对应起来。因此 e

$$\mathrm{Hom}_R(A,R)\simeq\mathrm{Hom}_K(A,K)$$

作为 A-双模。取 xy 的系数的 A 上泛函是一个对称化形式，因此后一个双模同构于 A。这证明了对偶断言。特别地，这个代数满足 [1,Definition 3.1] 中的 Gorenstein 维数零条件和对偶生成元条件。

每个有限 R-模都是若干个 R 和 K 的直和。因此

$$\mathscr{P}_R(A)=\mathrm{add}(A\otimes_R R,A\otimes_R K)=\mathrm{add}(A,C).$$

类似地，相对内射模由 $\mathrm{Hom}_R(A,\ R)\simeq A$ 和

$$\mathrm{Hom}_R(A,K)\simeq D_K(A/(xy))\simeq\mathrm{ann}_A(xy)=J.$$

最后一个同构来自 A 上的对称化形式。模 C 是不可分解的，因为 $\mathrm{End}_A(C)\simeq C$ 是局部的。模 J 是不可分解的，因为它有一维底层。两者的维数都是三，但

$$\dim_K\mathrm{top}\,C=1,\qquad \dim_K\mathrm{top}\,J=2.$$

因此，它们不同构，且都不同构于四维不可分解模 A。Krull–Schmidt 定理给出了（A.3）中的不等式。因此，R-分裂正合范畴不是 Frobenius 范畴。

存在一个 R-分裂正合列

$$0\longrightarrow S^{\oplus 2}\longrightarrow C\xrightarrow{\pi}S\longrightarrow 0. \tag{A.4}$$

事实上，t 在 C上作用为零，而 $\mathrm{rad}\ C=Kx\oplus Ky$ 被 J湮灭。满同态 π 是右极小的：诱导其简单顶上单位映射的 C 的自同态是局部代数 $\mathrm{End}_A(C)$中的单位元。因此，π 是一个相对投射覆盖，并且我们可以在相对稳定范畴中取 $\Omega_R S=S^{\oplus 2}$。

S 的非零自同态都不经过 $\mathrm{add}(A,\ C)$进行分解。否则，1_S 的某个非零标量倍数将可如此分解，从而使 S 成为相对投射对象的直和项，这与 Krull–Schmidt 定理矛盾。将同样的论证应用于矩阵元素可得

$$\underline{\mathrm{End}}_{A,R}(S)=K,\qquad \underline{\mathrm{End}}_{A,R}(S^{\oplus 2})=\mathrm{Mat}_2(K).$$

等价会保持自同态环不变，但这些环的 K-维数分别为一和四。因此，Ω_R 不是一个等价。□

该例表明，仅有 Gorenstein 维数为零和对偶生成元条件，并不能使相对上同调核可逆。然而，只要有此类双模数据可用，根据命题2.2或（2.3），相对稳定等价仍然成立，见命题2.1。

A.3. **一个布劳尔树示例。**

例 A.2。 设 K 为代数闭域。设 A_0 和 B_0 分别为三边星形和三边直线的基本布劳尔树代数，二者的例外重数均为一。它们是对称的，并且根据 Rickard 的经典布劳尔树结果而标准导出等价 [53,定理 4。2]；另见 [35, 第 2.1–2 节2]中关于双边情形的明确讨论。它们的 Cartan 矩阵为

$$C_{A_0} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C_{B_0} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

这些条目统计相应树边共有的顶点数，对角元均为二。

令 $R = K[\epsilon]/(\epsilon^2)$， $A = R \otimes_K A_0$ 和 $B = R \otimes_K B_0$。将逆双侧倾斜复形从 K 扩张到 R，可得到 A 和 B的逆双侧倾斜复形，因为域上的标量扩张是正合的，并且保留它们的张量恒等式。这两个代数在 R上都是有限自由且对称的，因此定理 13.2 给出了相对 Morita 型稳定等价。另一方面，它们作为有限维 K-代数的 Cartan 矩阵分别为 $2C_{A_0}$ 和 $2C_{B_0}$。这两个矩阵无法通过简单模的置换对应起来，因为一个矩阵的非对角元全为零，而另一个不是。因此， A 和 B 并非 Morita 等价。该构造是通过对经典布劳尔树示例进行标量扩张得到的。

同样的标量扩张构造与 $R = K[[t]]$ 给出完备诺特局部基底上一维的有限自由对称代数。它们的整体 R-相对稳定范畴由定理13.2表明是三角等价的。它们并不 R-线性 Morita 等价：这样的等价会限制为被 t湮灭的子范畴之间的 Morita 等价，因而也会给出 A_0 与 B_0之间的 Morita 等价，这与它们所显示的 Cartan 矩阵相矛盾。

App附录B. 可分张量函子与 Gorenstein 投射模 S

在可分等价中，正则双模是两侧均为射影的双模的张量积的直和项。我们给出一个域上的例子，其中补直和项不满足包络代数射影性假设，且相应的张量函子无法保持 Gorenstein 投射模。这说明了命题11.11中误差双模的作用。

例B.1。 令 k 为一个域，并令 $C = k[t]/(t^2)$。定义双模 ${}_CL_C$，取 $L_C = C_C$并令左作用经过增广 $C \to k$。构造三角代数

$$D = \begin{pmatrix} C & L \\ 0 & C \end{pmatrix}, \qquad u = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}.$$

同态 $C \to D$, $c \mapsto \mathrm{diag}(c, c)$ 定义了一个双模 $V = {}_DD_C$，它作为左模是秩一自由模，作为右模是秩三自由模。令 $S = C/(t)$。由于 C 是自内射的， S 是 Gorenstein 投射的。尽管如此，

$$Z = V \otimes_C S \simeq D/Du$$

不是 Gorenstein 投射。

事实上，右乘 u 给出一个投射分解。

$$\cdots \xrightarrow{\cdot u} D \xrightarrow{\cdot u} D \xrightarrow{\cdot u} D \longrightarrow Z \longrightarrow 0.$$

这是正合的，因为 $D_C \simeq C^3$。应用 $\mathrm{Hom}_D(-, D)$ 会将微分变为左乘 u。将 D 中的一个元素写作 (a, ℓ, b)。然后

$$u(a, \ell, b) = (ta, 0, tb),$$

因此

$$\ker(u \cdot -) = kt \oplus L \oplus kt, \qquad \mathrm{im}(u \cdot -) = kt \oplus 0 \oplus kt.$$

因此，对于每个 $i \geq 1$， $\mathrm{Ext}^i_D(Z, D) \simeq L \neq 0$ 作为 k-向量空间。特别地，Gorenstein投射维数 $_D Z = \infty$。

现在令 $\Lambda = C \times D$，并令 U为唯一非零分量是 $e_D U e_C = V$ 的 Λ-双模。它在两侧都是有限生成投射的。双模

$${}_\Lambda M_\Lambda = {}_\Lambda \Lambda_\Lambda, \qquad {}_\Lambda N_\Lambda = \Lambda \oplus U$$

满足

$$M \otimes_\Lambda N \simeq \Lambda \oplus U, \qquad N \otimes_\Lambda M \simeq \Lambda \oplus U,$$

因此定义了一个可分等价。然而，Gorenstein投射模 $(S,0)$ 的像是

$$N \otimes_\Lambda (S,0) \simeq (S,Z),$$

其 Gorenstein 投射维数为无穷大。

误差双模 U 在两侧都是投射的，但在 $\Lambda^e = \Lambda \otimes_k \Lambda^{\mathrm{op}}$ 上不是投射的。事实上，若 U 在 Λ^e 上是投射的，那么 $U \otimes_\Lambda (S,0)$ 将是一个投射左 Λ-模，这与上面的计算相矛盾。因此，这一对并未定义 Morita 型稳定等价。

注B.2。 Sun–Zhao 的定理A（定理 3.2） [59] 断言，特定的可分张量对保持 Gorenstein 投射模。按照上述双模定义，例B.1表明这一断言一般并不成立。该例涉及由指定张量函子实现的保持性质。它并不排除带有 Frobenius 或双伴随假设的命题，也不排除以代数之间存在等价为基础表述的不变性陈述。

参考文献

[1] Hiroki Abe 和 Mitsuo Hoshino，导出等价与 Gorenstein代数，《Journal of Pure and Applied Algebra》211（2007），第 1 期，55–69。[2] Hiroki Abe 和 Mitsuo Hoshino，Gorenstein代数的导出等价与 Serre对偶，《Journal of Pure and Applied Algebra》213（2009），第 11 期，2156–2166。[3] Salah Al-Nofayee 和 Jeremy Rickard，自内射代数的倾斜复形刚性与导出等价，arXiv:1311.0504，2013年。[4] Viktor Bekkert、Hernán Giraldo 和 José A. Vélez-Marulanda，有限维代数上有限生成 Gorenstein投射模的万有变形环，《Journal of Pure and Applied Algebra》224（2020年），第 5 期，106223。[5] Apostolos Beligiannis，Cohen–Macaulay模、（余）挠对与虚Gorenstein代数，《代数学杂志》288（2005），第 1 期，137–211。[6] Belkacem Bendiffalah 和 Daniel Guin，幂等元与 Hochschild 上同调，《Comptes Rendus Mathematique》342（2006），第 5 期，371–376。[7] Roman Bezrukavnikov 和 Victor Ginzburg，结合代数的变形，《Ann. of Math. (2)》166（2007），第 2 期，533–548。[8] Frauke M. Bleher，万有变形环与二面体2-群，《Journal of the London Mathematical Society (2)》79（2009），第 1 期，225–237。[9] Frauke M. Bleher、Ted Chinburg 和 Roberto C. Soto，万有变形环、端平凡模，以及半二面体与广义四元数 2 5, 1897 223 2019 1912 -群，《Journal of Pure and Applied Algebra》（），第 – 期。[10] Andrew J. Blumberg、David Gepner 和 Gonçalo Tabuada，高阶代数 K-理论的一个万有刻画，《几何与拓扑》17（2013年），733–838。[11] Manuel Bodirsky，模型论，讲义，第 7.7 节。[12] Serge Bouc，双模、广义迹与 Hochschild同调中的传递，未发表预印本，1997年。[13] Benjamin Briggs 和 Lleonard Rubio y Degrassi，Hochschild 上同调限制李代数结构的稳定不变性，《太平洋数学杂志》321（2022），第 1 期，45–71。[14] Benjamin Briggs 和 Lleonard Rubio y Degrassi，关于可积导子的李代数结构，《Bull. Lond. Math. Soc.》55（2023），2617–2634。[15] Hongxing Chen、Shengyong Pan 和 Changchang Xi，Morita 型稳定等价的诱导与限制，《Journal of Pure and Applied Algebra》216（2012），第 3 期，643–661。[16] Xiao-Wu Chen、Huanhuan Li 和 Zhengfang Wang，Leavitt路径代数、 B_∞-代数与奇异 Hochschild 上同调的 Keller猜想，《美国数学会回忆录》313（2025年），第 1586 期。此处引用的内部编号采用 arXiv:2007.06895v3 中的编号。[17] Xiao-Wu Chen、Jian Liu 和 Ren Wang，由双模与二次单项式代数诱导的奇点等价，《Algebras and Representation Theory》26（2023年），609–630。[18] Xiao-Wu Chen 和 Wei Ren，Frobenius 函子与 Gorenstein同调性质，《代数学杂志》610（2022年），18–37。[19] Alex S. Dugas 和 Roberto Martínez-Villa，关于 Morita 型稳定等价的注记，《Journal of Pure and Applied Algebra》208（2007），第 2 期，421–433。[20] Alex S. Dugas 和 Roberto Martínez-Villa，分次代数的稳定等价，《代数学杂志》320（2008年），第 12 期，4215–4241。[21] Florian Eisele， p-进提升问题与导出等价，《代数学杂志》356（2012年），90–114。[22] Jorge A. Guccione 和 Juan J. Guccione，三角矩阵代数的 Hochschild 上同调，预印本，arXiv:math/0104068v2，2001年。

[23] Reiner Hermann, 《同调满态射、稳定等价与 Hochschild 上同调中的李括号》, Oberwolfach Reports 12（2015年）, 1361–1364, 报告编号: 24/2015。[24] Reiner Hermann, 《同调满态射、粘合与 Hochschild 上同调——着眼于 Snashall–Solberg 猜想》, Advances in Mathematics 299（2016年）, 687–759。[25] Henrik Holm, 《Gorenstein同调维数》, Journal of Pure and Applied Algebra 189（2004年）, 167–193。[26] Wei Hu 和 Shengyong Pan, 《导出等价的稳定函子与 Gorenstein 投射模》, Mathematische Nachrichten 290（2017年）, 第10期, 1512–1530。[27] Wei Hu 和 Changchang Xi, 《导出等价与 Morita 型稳定等价 I》, Nagoya Mathematical Journal 200（2010年）, 107–152。[28] Wei Hu 和 Changchang Xi, 《导出等价与 Morita 型稳定等价 II》, Revista Matemática Iberoamericana 34（2018年）, 第1期, 59–110。[29] Tomohiro Itagaki、Katsunori Sanada 和 Satoshi Usui, 《Frobenius代数的完全上同调环上的 Batalin–Vilkovisky结构》, J. Algebra 581（2021年）, 226–277。[30] Bernhard Keller, 《导出 DG范畴》, Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure (4) 27（1994年）, 第1期, 63–102。[31] Bernhard Keller, 《关于正合范畴的循环同调》, Journal of Pure and Applied Algebra 136（1999年）, 第1期, 1–56。[32] Bernhard Keller, 《Hochschild复形上高阶结构的导出不变性》, 预印本, 修订于2018年5月16日, 2003年。[33] Jona Klemenc, 《正合 ∞范畴的稳定包》, Homology, Homotopy and Applications 24（2022年）, 第2期, 195–220。[34] Steffen König、Yuming Liu 和 Guodong Zhou, 《Hochschild（上）同调中的迁移映射及其在稳定不变量、导出不变量和 Auslander–Reiten猜想中的应用》, Transactions of the American Mathematical Society 364（2012年）, 第1期, 195–232。[35] Yuta Kozakai, 《布劳尔树代数的折叠与双侧倾斜复形》, OsakaJournalof Mathematics 56（2019年）, 第1期, 133–164。[36] Xiaogang Li 和 Changchang Xi, 《中心化子矩阵代数上的稳定等价与同调维数》, Journal of Pure and Applied Algebra（2026年）, 108424, 待刊。[37] T. Y. Lam, 《模与环讲义》, Graduate Texts in Mathematics, 第189卷, Springer-Verlag, 纽约, 1999年。[38] Markus Linckelmann, 《有限群的块的 Hochschild 上同调中的迁移》, Algebras and Representation Theory 2（1999年）, 第2期, 107–135。[39] Markus Linckelmann, 《可积导子与 Morita 型稳定等价》, Proc. Edinb. Math. Soc. 61（2018年）, 343–362。[40] Markus Linckelmann, 《完备离散赋值环上对称代数的 Tate对偶与迁移》, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society 68（2025年）, 763–786。[41] Hsuan-Yi Liao 和 Seokbong Seol, 《Keller 可容许三元组与 Duflo定理》, J. Math. Pures Appl. 174（2023年）, 1–43。[42] Yuming Liu 和 Changchang Xi, 《有限维代数的 Morita 型稳定等价的构造 II》, Mathematische Zeitschrift 251（2005年）, 21–39。[43] Yuming Liu 和 Changchang Xi, 《有限维代数的 Morita 型稳定等价的构造 III》, Journal of the London Mathematical Society 76（2007年）, 第3期, 567–585。[44] Yuming Liu、Guodong Zhou 和 Alexander Zimmermann, 《Higman理想、稳定Hochschild同调与 Auslander–Reiten猜想》, Mathematische Zeitschrift 270（2012年）, 759–781。[45] Wendy Lowen, 《阿贝尔范畴与导出范畴中对象的障碍理论》, Communications in Algebra 33（2005年）, 第9期, 3195–3223。[46] Marco Manetti, 《复流形变形讲义》, Rend. Mat. Appl. (7) 24（2004年）, 第1期, 1–183。[47] Shengyong Pan 和 José A. Vélez-Marulanda, 《关于 Gorenstein投射模的万有变形环与稳定等价》, arXiv:2606.06648, 2026年。[48] Shengyong Pan 和 Guodong Zhou, 《Morita 型稳定等价与稳定Hochschild上同调环》, Archiv der Mathematik 94（2010年）, 511–518。[49] Alexander Polishchuk 和 Leonid Positselski, 《二次代数》, University Lecture Series 37, American Mathematical Society, 罗得岛州普罗维登斯, 2005年。[50] Zygmunt Pogorzały, 《Morita 型稳定等价下 Hochschild上同调代数的不变性》, Journal of the Mathematical Society of Japan 53（2001年）, 第4期, 913–918。[51] Zygmunt Pogorzały, 《在 Morita 型稳定等价下不变的轨道代数》, Central European Journal of Mathematics 12（2014年）, 第6期, 813–823。[52] Wei Ren, 《Frobenius 函子、稳定等价与 Gorenstein 投射模的 K理论》, Journal of Algebra 612（2022年）, 431–459。[53] Jeremy Rickard, 《导出范畴与稳定等价》, Journal of Pure and Applied Algebra 61（1989年）, 第3期, 303–317。[54] Jeremy Rickard, 《作为导出函子的导出等价》, Journal of the London Mathematical Society 43（1991年）, 第1期, 37–48。[55] Jeremy Rickard, 《倾斜复形的提升定理》, J. Algebra 142（1991年）, 第2期, 383–393。[56] Raphaël Rouquier, 《自同构群与稳定或导出等价》, 初步版本, 2000年4月20日。

[57] Raphaël Rouquier，自同构、分次与三角范畴，Jussieu数学研究所学报 10（2011年），第3期，713–751。[58] Raphaël Rouquier 和 Alexander Zimmermann，导出模范畴的皮卡群，伦敦数学会会刊 87（2003年），第1期，197–225。[59] Juxiang Sun 和 Guoqiang Zhao，可分等价的不变量与构造，代数学杂志 662（2025年），589–607。[60] Juxiang Sun 和 Guoqiang Zhao，同调猜想与 Morita 型稳定等价，AIMS数学 10（2025年），第2期，2589–2601。[61] Qiyue Tang，Morita 型稳定等价下的自内射维数，Hexagon预印本 hexagon:2611.00192v2，2026年，第2版。[62] Michael Schlessinger，Artin环上的函子，Transactions of the American Mathematical Society 130（1968年），第2期，208–222。[63] Jean-Pierre Serre，局部域，Graduate Texts in Mathematics，第67卷，Springer-Verlag，纽约，1979年。[64] Stacks Project作者，Stacks Project，标签 09B8。[65] Stacks Project作者，Stacks Project，定理10.160.8，标签032A。[66] Stacks Project作者，Stacks Project，2026年，引理10.153.3，标签 04GG。[67] Yury Volkov 和 Sarah Witherspoon，某些正合幺半范畴上同调的分次李结构，Homology, Homotopy and Applications 26（2024年），第2期，79–98。[68] Zhengfang Wang，Tate–Hochschild 上同调上的 Gerstenhaber 代数结构的不变性，Jussieu数学研究所学报 20（2021年），第3期，893–928。[69] Charles A. Weibel，K本：代数 K理论导论，数学研究生研究丛书，第145卷，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2013年。[70] Amnon Yekutieli，平坦性与完备化再探，Algebras and Representation Theory 21（2018年），717–736。[71] Changchang Xi，伴随型稳定等价，数学论坛 20（2008年），第1期，81–97。[72] Gonçalo Tabuada，加性不变量的伽罗瓦下降，伦敦数学会通报 46（2014年），385–395。[73] Changchang Xi 和 Jin Zhang，导出等价下的自内射代数，Journal of Pure and Applied Algebra 229（2025年），第1期，107795。[74] Changchang Xi 和 Jinbi Zhang，稳定等价的新不变量与 Auslander–Reiten猜想，数学年刊 394（2026年），第4期，论文编号99，共30页。

数学与统计学院，北京交通大学，中国北京 100044电子邮箱地址： shypan@bjtu.edu.cn