arXiv:2611.32262v1 [math.FA] 24 Nov 2026

伴随中心的交换子未必是对偶的中心

H. DURU、A. K. KITOVER 和 M. ORHON

Abstract. 设 X 是一个巴拿赫格，其理想中心为 $Z(X)$，并设 $Z^*(X) = \{S^* : S \in Z(X)\}$ 为中心算子的伴随所成的集合，它们作用于对偶空间 X^*。对偶空间的中心 $Z(X^*)$总包含于 $Z^*(X)$ 的交换子 $(Z^*(X))^{\mathrm{com}}$ 中；当 X 具有拓扑序单位时，二者相等。有人曾断言，只要 X 具有拓扑满中心，二者就相等；但这一断言已发表的证明有误，因此该问题一直被列为未解问题。我们证明这一断言是错误的。对于 Marcinkiewicz 序列空间 m_ψ, $\psi(t) = \log(1+t)$（即 Dixmier–Macaev 理想所对应的序列空间），它是戴德金完备的，因而具有拓扑满中心；在其对偶空间上存在一个有界算子，它与每个中心算子的伴随都交换，却不是中心算子；它将一个 Dixmier 迹映射到另一个与之不相交的 Dixmier 迹。该构造依赖于一个一般的充分条件，此条件借助取值于戴德金完备空间$C(K)$的不变均值以及 $C(K)$ 的内射性加以证明。我们还汇集了一些正面结果，并给出一个关于二者相等的范数稠密判据。对于每个奥利奇空间 L_Φ，我们证明 $(Z^*(L_\Phi))^{\mathrm{com}}$ 中的每个算子，相对于对偶空间分解为序连续带和奇异带的分解，都是下三角算子，且其对角元为中心算子；此外，通过一个基于杨氏不等式的分解引理，我们证明其非对角元为零。因此，所有奥利奇空间及其对偶空间中二者都相等，且无需任何 Δ_2条件。

1. Introduction

设 X 是实数或复Banach格。若存在 $\kappa \geq 0$，使得对所有 $x \in X$ 都有 $|Sx| \leq \kappa|x|$（在复数情形下，$|\cdot|$ 是复模），则称算子 $S \in L(X)$ 为中心的；中心算子的集合 $Z(X)$ 是 X 的理想中心。它是一个交换代数 [18, 定理 3.1.9、3.1.10 和 3.1.12],，且中心算子的伴随算子在对偶空间 X^* 上仍为中心算子（引理 2.1）。记

$$Z^*(X) = \{S^* : S \in Z(X)\} \subseteq Z(X^*),$$

并且，对于集合 $\mathcal{A} \subseteq L(X^*)$，令 $\mathcal{A}^{\mathrm{com}}$ 表示它在 $L(X^*)$ 中的交换子。由于 $Z(X^*)$ 是交换的，并且包含 $Z^*(X)$,

$$Z(X^*) \subseteq (Z^*(X))^{\mathrm{com}} \tag{1}$$

对每个巴拿赫格 X 都成立。(1) 中何时取等号这一问题，起源于 [1] 中发展起来的巴拿赫 $C(K)$-模理论和保持不交性的算子理论。[1] 的定理 9.11 断言：

(1) 如果 X 具有拓扑序单位（准内点），那么 $Z(X^*) = (Z^*(X))^{\mathrm{com}}$；(2) 如果 X 具有拓扑满中心，同样成立。

Date：2026年11月23日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类 46B42、47B65；次要分类 46A40、47B38。*Key words and phrases.* 巴拿赫格、理想中心、对偶巴拿赫格、交换子、拓扑满中心、Marcinkiewicz空间、Dixmier 迹、奥利奇空间、奇异泛函。

(1) 已在 [1] 中得到证明。正如 E. L. Arenson（私人通信）[1] 所指出的，(2) 的证明是不正确的：该证明使用了算子 $T \in (Z^*(X))^{\mathrm{com}}$ 与中心算子的伴随的极限之间的交换性，但这些极限仅在弱* 算子拓扑下存在，而 T 不一定是弱*-连续的。第三位作者在 [20,备注 4] 中将 (2) 记为一个开放问题。在同一篇论文中还证明了，对于具有拓扑满中心的 X， $Z(X^*)$ 是双对偶 $Z(X)''$ 在嵌入 $Z(X) \to Z(X^*)$ 的 Arens扩张下的像（定理 1，推论 2]）；特别地， $Z(X^*)$ 属于 $Z^*(X)$ 的弱* 算子闭包。

在本文中，我们证明第 (2) 部分是错误的。令 $\psi(t) = \log(1+t)$，并令 m_ψ 为所有实数（或复数）序列 x 构成的 Marcinkiewicz 序列空间，其中 $\sum_{k=1}^{n} x_k^{\#} = O(\log n)$， $x^{\#}$ 是 $|x|$ 的递减重排（第 4.1 节）。这是 Dixmier–Macaev 理想 $\mathcal{M}_{1,\infty}$ 的底层序列空间，该理想由紧算子构成，并在其上定义 Dixmier 迹 [9, 14]。（它严格大于弱 ℓ^1, $\ell^{1,\infty} = \{x : \sup_n n x_n^{\#} < \infty\}$，后者不可赋范。）

定理 A。 巴拿赫格 $X = m_\psi$ 是戴德金完备的，因此其中心在拓扑意义下是满的；但是，在 X^* 上存在一个有界算子 T，它与每个 S^*都交换， $S \in Z(X)$，却不是中心的。更确切地说，在 X 上存在不相交的正*Dixmier*迹 s_1、 s_2，使得$Ts_1 = s_2$。对于复空间 m_ψ，同样的结论也成立（注 *5.3*）。

算子 T 必然不是弱*连续的（备注 5.2(a)），因此在 [20] 中使用的弱* 算子拓扑下是不可见的。定理 A 源于一个一般的充分条件，即定理 3.1。假设，对于所有 x，带有 $S^2 = I$ 和 $|Sx| = |x|$的中心算子 S 的线性张成空间在 $Z(X)$ 中稠密，并且 X^* 包含一个非零泛函 φ_2 以及一个与其不相交的泛函 φ_1，使得对于所有 $S \in Z(X)$， S^* 在由 φ_2 生成的带上的范数至多是 $\|S^*\varphi_1\|$的常数倍。则等式 (1) 不成立。在 m_ψ 上，(φ_1, φ_2) 这一对由沿互不相交的尺度集取的两个 Dixmier 迹给出（第 4 节）；对于二者， $\|S^*\varphi_i\|$ 都与商空间 ℓ^∞/c_0 中 S 的范数可比。定理 3.1 的证明结合了极端不连通 K 上 $C(K)$ 的内射性（Goodner、Nachbin、Kelley），以及取值于 $C(K)$ 的不变均值（Agnew–Morse、Kantorovich）。

在第6节中，我们汇集了一些正面结果：对于具有拓扑序单位的巴拿赫格的闭理想，等式成立（命题 6.1）；对于范数序连续的 X，等式也成立（命题 6.3，这是 [1, 定理 9.10]的一个特例）；此外，对于每个 X，在满足范数稠密条件时，等式成立（定理 6.8）。我们还证明，等式不成立等价于存在两个不相交带 X^* 之间的非零有界模映射（命题 6.7）。在第7节中，我们讨论奥利奇空间 L_Φ。在这些空间中，对偶的奇异带是一个 AL-空间，因此，对偶分解为序连续带与奇异带后，$(Z^*(L_\Phi))^{\mathrm{com}}$ 中的每个算子必为下三角算子，且其对角元是中心的（定理 7.6）。非对角元是一个从 L_Ψ 映入奇异带、且在 E_Ψ上为零的模映射。基于杨氏不等式的分解引理（引理 7.7）表明，对于 $x \in L_\Phi$ 和 $h \in L_\Psi$，存在一个集合 A，使得 $1_A x \in E_\Phi$ 且 $1_{\Omega\setminus A} h \in E_\Psi$。由此可知，非对角元为零；对于每个 μ σ-有限的奥利奇空间 $L_\Phi(\mu)$，等式成立，且对 Φ 及其共轭函数均无 Δ_2条件（定理 7.9）；其对偶也成立（推论 7.11）。这包括诸如 $L_{\exp}[0,1]$这样的空间，事实上还包括每个 $L_\Phi(\mu)$，其中 μ 有限且无原子，并且 $L_\Phi \neq E_\Phi$；命题 6.1 和 6.3 以及 [1, 定理 9.11] 的第 (1) 部分均不适用于这些空间。第8节列出了开放问题。

[1] [1] 中第（2）部分的证明由本文第二作者撰写，错误由其独自负责。第（1）部分的证明归功于 E. L. Arenson。

2. Preliminaries

除非另有说明，从现在起所有巴拿赫格均为实数空间；主要结果的复数版本可通过引理 5.3 中的复化得到。关于巴拿赫格的标准事实，我们参见 [4, 18, 22, 25]。对于巴拿赫格 E，E^* 是其对偶巴拿赫格；它是戴德金完备的。若两个元素不相交，$u \perp v$，则 $|u| \wedge |v| = 0$。对于 $A \subseteq E$，$A^d = \{v : \text{对所有 } u \in A\}$ 均有 $v \perp u$，它是其不交补；而 $\{u\}^{dd}$ 是由u生成的带。在戴德金完备的巴拿赫格中，每个带 B 都是投影带，$E = B \oplus B^d$，相应的带投影是中心的。对于巴拿赫格E 上的正泛函 φ，χ 以及 $0 \leq x \in E$，我们将使用黎斯–康托罗维奇公式

$$(2) \qquad |\varphi|(x) = \sup\{|\varphi(y)| : |y| \leq x\}, \qquad (\varphi \wedge \chi)(x) = \inf\{\varphi(y) + \chi(x-y) : 0 \leq y \leq x\}$$

（前者对任意 $\varphi \in E^*$ 都成立）；见 [4, 定理 1.18]（回想一下，对于巴拿赫格，$E^* = E^\sim$ 命题 1.3. [18, ）。

2.1. **中心。** 以下两个引理是众所周知的（见 [4, 定理 2.60] 和 [18,命题 3.1.2]）；为保证完备性，我们给出简短的证明。

引理 2.1. 设 $S \in L(X)$ 满足 $|Sx| \leq \kappa|x|$ 对所有 $x \in X$ 均成立。那么，对所有 $\varphi \in X^*$，$|S^*\varphi| \leq \kappa|\varphi|$。特别地，$Z^*(X) \subseteq Z(X^*)$，且 $\|S^*\| = \|S\|$。

证明。设 $0 \leq x \in X$。由 (2),

$$|S^*\varphi|(x) = \sup\{|(S^*\varphi)(y)| : |y| \leq x\} = \sup\{|\varphi(Sy)| : |y| \leq x\}.$$

若 $|y| \leq x$，则 $|Sy| \leq \kappa|y| \leq \kappa x$，因此 $|\varphi(Sy)| \leq |\varphi|(|Sy|) \leq \kappa|\varphi|(x)$。于是，对所有 $x \geq 0$，都有 $|S^*\varphi|(x) \leq \kappa|\varphi|(x)$，即 $|S^*\varphi| \leq \kappa|\varphi|$。范数相等对每个有界算子都成立。□

引理 2.2。 设 E 是一个巴拿赫格，$R \in Z(E)$，且 u、$v \in E$ 满足 $u \perp v$。则 $Ru \perp v$。特别地：

(a) 若 $Ru = v$ 且 $u \perp v$，则 $v = 0$;

(b) R 将 E 的每个带 B 映入 B。

证明。对所有 w，设 $|Rw| \leq \kappa|w|$，其中 $\kappa \geq 1$。对于 a，$b \geq 0$，我们有 $\kappa a \wedge b \leq \kappa a \wedge \kappa b = \kappa(a \wedge b)$。因此 $|Ru| \wedge |v| \leq \kappa|u| \wedge |v| \leq \kappa(|u| \wedge |v|) = 0$。(a) 若 $Ru = v$，则 $|v| = |v| \wedge |v| = |Ru| \wedge |v| = 0$。(b) 若 $u \in B$ 且 $v \in B^d$，则 $Ru \perp v$；因此 $Ru \in B^{dd} = B$。□

我们采用以下关于戴德金完备 Banach 格的中心的标准描述。

命题 2.3。 设 $E \neq \{0\}$ 是一个戴德金完备 *Banach* 格。那么，$Z(E)$在算子范数、复合运算以及 $L(E)$ 上的序（即 $S \geq 0$ 当且仅当对所有 $x \geq 0$都有 $Sx \geq 0$）下，作为代数和向量格，等距同构于极端不连通紧豪斯多夫空间 K上的 $C(K)$；其中恒等算子对应于常值函数1。

参考文献与提纲。由于 E 是戴德金完备的，序有界算子空间 $L_b(E)$也如此（黎斯–康托罗维奇），并且 $Z(E) = \{S : \text{对于某个 } \kappa\}$，$|S| \leq \kappa I$ 是由 I生成的$L_b(E)$的主理想；因此 $Z(E)$是带有序单位 I的戴德金完备向量格。在$Z(E)$上，算子范数与序单位范数 $\inf\{\kappa : |S| \leq \kappa I\}$相同，因此 $Z(E)$是带单位元的 AM-空间，故根据角谷定理，它与某个 $C(K)$格等距同构。复合使 $Z(E)$成为带单位元 I的阿基米德 f-代数；在这类代数中，乘法由序和单位元决定，所以角谷同构是乘法的。最后，$C(K)$是戴德金完备的，因此 K 是极端不连通的 [18, 命题 2.1.4]。所用事实见 [18, 命题 3.1.7 和定理 3.1.11] ($Z(E)$是由 I生成的理想，而 $\|S\| = \inf\{\kappa : |S| \leq \kappa I\}$ 适用于 $S \in Z(E)$；参见 [25, 定理 144.2]), [18, 定理 3.1.13] (一个

f-代数带有单位元 e 时，作为代数和向量格，它同构于其正交态射，因此其乘法由序和 e决定），[25, 第 20] 章和 [23]。□

若对每个 $x \in X$， $Z(X)x = \{Sx : S \in Z(X)\}$ 的闭包都是由 x [24] 生成的闭理想，则巴拿赫格 X 具有拓扑满中心 。具有拓扑序单位的 Banach格以及 σ-戴德金完备的 Banach 格都具有拓扑满中心 [20, , 见第 2 节推论 2] 之后。对于本文所用的空间，这一点在引理 4.3(c) 中得到了直接证明。

2.2. 三个经典工具。

定理 2.4（Goodner、Nachbin、Kelley [11, 19, 12]）。设 K 是一个极端不连通紧豪斯多夫空间。若 Y 是实赋范空间 W 的线性子空间，且 $f : Y \to C(K)$ 是一个有界线性算子，则 f 有一个线性延拓 $\tilde{f} : W \to C(K)$，满足 $\|\tilde{f}\| = \|f\|$。

定理 *2.5*（*Hahn–Banach–Kantorovich*；[4, 定理 *1*.25] 与 $H = \{0\}$）。设 L 为实向量空间， $\mathcal{F}$ 为戴德金完备向量格，且 $p: L \to \mathcal{F}$ 为次线性映射，即$p(\Phi + \Phi') \le p(\Phi) + p(\Phi')$ 且 $p(c\Phi) = cp(\Phi)$，对于实数 $c \ge 0$成立。那么存在一个线性映射$\mathcal{M} : L \to \mathcal{F}$，使得对于所有 $\Phi \in L$，均有 $\mathcal{M}(\Phi) \le p(\Phi)$。

第三个工具是一个取值于 $C(K)$ 的不变均值。其证明遵循 Agnew 和 Morse [3]；我们将详细给出证明。

引理 *2.6*。设 K 为一个极端不连通紧豪斯多夫空间，且 U 为一个阿贝尔群，其中每个元素 u 都满足 $u^2 = 1$。设 L 为所有有界映射 $\Phi : U \to C(K)$ 构成的向量空间（有界是指 $\|\Phi\|_L := \sup_u \|\Phi(u)\|_\infty < \infty$），对于 $v \in U$，令 $(\tau_v\Phi)(u) = \Phi(uv)$。存在一个线性映射 $\mathcal{M} : L \to C(K)$，使得对于所有 $\Phi \in L$、 $v \in U$ 和$h \in C(K)$:

(i) $\mathcal{M}(\Phi) \ge 0$ 当且仅当 $\Phi(u) \ge 0$ 对所有 u成立；*(ii)* $\mathcal{M}(\Phi) = h$ 当且仅当 $\Phi(u) = h$ 对所有 u成立；*(iii)* $\mathcal{M}(\tau_v\Phi) = \mathcal{M}(\Phi)$；*(iv)* $\|\mathcal{M}(\Phi)\|_\infty \le \|\Phi\|_L$；*(v)* $\mathcal{M}(h\Phi) = h\mathcal{M}(\Phi)$，其中 $(h\Phi)(u) = h \cdot \Phi(u)$。

证明。 由于 K 是极端不连通的， $C(K)$ 是戴德金完备向量格： $C(K)$ 的每个非空且范数有界的子集在 $C(K)$中都有上确界和下确界。这些分别是相对于 $C(K)$ 的序的最小上界和最大下界；它们不一定是逐点上确界，我们只使用其序理论性质。

步骤*1*：次线性映射。 对于 $\Phi \in L$、 $n \in \mathbb{N}$和 $v_1, \dots, v_n \in U$（允许重复）令

$$\Sigma(\Phi; v_1, \dots, v_n) = \sup_{u \in U} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \Phi(uv_k) \in C(K),$$

and

$$p(\Phi) = \inf\{\Sigma(\Phi; v_1, \dots, v_n) : n \in \mathbb{N},\ v_1, \dots, v_n \in U\} \in C(K).$$

所涉及的所有元素的范数至多为 $\|\Phi\|_L$，因此这些上确界和下确界存在，并且

$$-\|\Phi\|_L \cdot 1 \le p(\Phi) \le \|\Phi\|_L \cdot 1. \tag{3}$$

显然，对于实数 $c \ge 0$， $p(c\Phi) = cp(\Phi)$（当 $c = 0$ 时，两边均为 0）。

步骤*2*：次可加性。令 Φ， $\Phi' \in L$，并固定 v_1，……， $v_n \in U$以及 w_1，……， $w_m \in U$。考虑由 nm 个 U 中的元素组成的族（$v_k w_l$）$_{k \le n,\ l \le m}$。对于每个 $u \in U$，由于 $v_k w_l = w_l v_k$，

$$\frac{1}{nm} \sum_{k,l} (\Phi + \Phi')(uv_k w_l) = \frac{1}{m} \sum_{l=1}^{m} \Big(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \Phi\big((uw_l)v_k\big) \Big) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{1}{m} \sum_{l=1}^{m} \Phi'\big((uv_k)w_l\big) \Big).$$

Φ 的每个内平均都至多为 $\Sigma(\Phi;\ v_1,\ \ldots\ldots,\ v_n)$，因为 $uw_l \in U$；Φ' 的每个内平均都至多为 $\Sigma(\Phi';\ w_1,\ \ldots\ldots,\ w_m)$。因此，对于每个 u，左端至多为 $\Sigma(\Phi;\ v) + \Sigma(\Phi';\ w)$，再对 u 取上确界，

$$p(\Phi+\Phi') \le \Sigma\big(\Phi+\Phi';(v_k w_l)_{k,l}\big) \le \Sigma(\Phi;v)+\Sigma(\Phi';w).$$

因此，$p(\Phi+\Phi') - \Sigma(\Phi';\ w)$ 是集合 $\{\Sigma(\Phi;v)\}$（遍历所有有限族 v）的一个下界，所以它不大于 $p(\Phi)$；也就是说，对于所有 w，都有 $p(\Phi+\Phi') - p(\Phi) \le \Sigma(\Phi';w)$，对 w 取下确界，得到 $p(\Phi+\Phi') \le p(\Phi) + p(\Phi')$。

步骤*3*：不变性。令 $v \in U$，并取 $n=2$、$v_1=1$、$v_2=v$。对于每个 u，利用 $v^2=1$，

$$\tfrac{1}{2}\big[(\Phi-\tau_v\Phi)(u)+(\Phi-\tau_v\Phi)(uv)\big] = \tfrac{1}{2}\big[\Phi(u)-\Phi(uv)+\Phi(uv)-\Phi(uv^2)\big] = 0.$$

因此，$p(\Phi-\tau_v\Phi) \le \Sigma(\Phi-\tau_v\Phi;\ 1,\ v) = 0$。

步骤4：线性映射。根据定理 2.5，存在一个线性的 $\mathcal{M}: L \to C(K)$，使得 $\mathcal{M} \le p$。(ii)：若 $\Phi \equiv h$，则对于每个族 v，都有 $\Sigma(\Phi;v) = h$，因此 $p(\Phi) = h$，同理 $p(-\Phi) = -h$。于是 $\mathcal{M}(\Phi) \le h$，且 $-\mathcal{M}(\Phi) = \mathcal{M}(-\Phi) \le -h$，所以 $\mathcal{M}(\Phi) = h$。(i)：若 $\Phi \ge 0$，则 $\mathcal{M}(-\Phi) \le p(-\Phi) \le \Sigma(-\Phi;\ 1) = \sup_u(-\Phi(u)) \le 0$，所以 $\mathcal{M}(\Phi) \ge 0$。(iii)：$\mathcal{M}(\Phi) - \mathcal{M}(\tau_v\Phi) = \mathcal{M}(\Phi-\tau_v\Phi) \le p(\Phi-\tau_v\Phi) \le 0$。将 $\tau_v\Phi$ 代替 Φ 应用于此，并利用 $\tau_v\tau_v\Phi = \Phi$（作为 $v^2=1$），还可得到 $\mathcal{M}(\tau_v\Phi) - \mathcal{M}(\Phi) \le 0$。(iv)：令 $\gamma = \|\Phi\|_L$。于是对所有 u，都有 $-\gamma\cdot 1 \le \Phi(u) \le \gamma\cdot 1$，因此由 (i) 和 (ii)，$-\gamma\cdot 1 \le \mathcal{M}(\Phi) \le \gamma\cdot 1$，即 $\|\mathcal{M}(\Phi)\|_\infty \le \gamma$。

步骤 *5*：*(v)*。首先，令 $h=e$ 为 K 的某个开闭子集的示性函数（因此 $e^2=e$，$0 \le e \le 1$）。记映射 $u \mapsto |\Phi(u)|$ 和 $\gamma = \|\Phi\|_L$ 为 $|\Phi|$。对每个 $\Phi' \in L$，我们有 $-|\Phi'| \le \Phi' \le |\Phi'|$，因此由 (i) 得，$|\mathcal{M}(\Phi')| \le \mathcal{M}(|\Phi'|)$。由于对每个 u 都有 $|e\Phi| = e|\Phi| \le \gamma e$，由 (i) 和 (ii) 可得

$$|\mathcal{M}(e\Phi)| \le \mathcal{M}(e|\Phi|) \le \mathcal{M}(\gamma e) = \gamma e.$$

因此，$\mathcal{M}(e\Phi)$ 在 $e=0$ 成立的每一点都取值为零，也就是说 $(1-e)\mathcal{M}(e\Phi) = 0$，即 $\mathcal{M}(e\Phi) = e\mathcal{M}(e\Phi)$。同理（以 $1-e$ 替代 e），$e\mathcal{M}((1-e)\Phi) = 0$。因此

$$e\mathcal{M}(\Phi) = e\mathcal{M}(e\Phi) + e\mathcal{M}((1-e)\Phi) = e\mathcal{M}(e\Phi) = \mathcal{M}(e\Phi).$$

由线性性，(v) 对指标函数的任意线性组合 h 都成立。极不连通紧空间是全不连通的，因此其既开又闭集能够分离其中的点，而这些集合的指标函数的线性组合构成了 $C(K)$ 的一个包含 1 且能分离点的子代数；根据斯通–魏尔施特拉斯定理，它在 $C(K)$ 中稠密。若 $h_j \to h$ 一致收敛，则根据 (iv)$\|\mathcal{M}(h_j\Phi) - \mathcal{M}(h\Phi)\|_\infty \le \|h_j - h\|_\infty\gamma \to 0$ 且 $\|h_j\mathcal{M}(\Phi) - h\mathcal{M}(\Phi)\|_\infty \le \|h_j - h\|_\infty\gamma \to 0$，因此 (v) 对于 h成立。□

3. A sufficient condition for $Z(X^*) \neq (Z^*(X))^{\mathrm{com}}$

对于巴拿赫格 X 令

$$U(X) = \{S \in Z(X):\ S^2 = I \text{ and } |Sx| = |x| \text{ for all } x \in X\}.$$

每个 $u \in U(X)$ 都满足 $\|u\| = 1$，因此满足 $\|u^*\| = 1$；$U(X)$ 在复合运算下构成一个阿贝尔群（因为 $Z(X)$ 是交换的），且有 $u^{-1} = u$。例如，如果 P 是一个带投影，那么$2P - I \in U(X)$：$(2P-I)^2 = I$，并且 $|(2P-I)x| = |Px - (I-P)x| = |Px| + |(I-P)x| = |x|$，因为 $Px \perp (I-P)x$。

定理 3.1。设 X 是一个实*Banach*格，使得 $U(X)$ 的线性张成在算子范数下于$Z(X)$ 中稠密。假设存在 $\varphi_1, \varphi_2 \in X^*$，满足 $\varphi_2 \neq 0$ 和 $\varphi_1 \perp \varphi_2$，并且存在常数 γ，使得在 $B_2 = \{\varphi_2\}^{dd}$的情况下，

$$\big\|S^*|_{B_2}\big\| \le \gamma\,\|S^*\varphi_1\| \qquad (S \in Z(X)). \tag{4}$$

那么存在一个有界算子 T，作用于 X^*，且对所有 $S \in Z(X)$ 和 $T\varphi_1 = \varphi_2$都有 $TS^* = S^*T$。特别地，$T \notin Z(X^*)$，且 $Z(X^*) \neq (Z^*(X))^{\mathrm{com}}$。

这里，$S^*|_{B_2}$ 表示 S^* 在 B_2上的限制；根据引理 2.1 和引理 2.2(b)，它将 B_2 映入自身。

证明。步骤*1*：B_2的中心。 B_2 是戴德金完备 Banach 格 X^*中的一个带，因此它本身也是戴德金完备 Banach 格；并且 $B_2 \neq \{0\}$，因为 $\varphi_2 \in B_2$。根据命题 2.3，存在一个极不连通紧空间 K 以及一个等距代数格同构 $\rho: C(K) \to Z(B_2)$，其中 $\rho(1) = I_{B_2}$是 B_2的单位元。

步骤*2*：$Z(X)$的表示。设 $S \in Z(X)$。限制 $S^*|_{B_2}$ 将 B_2 映入 B_2，且满足 $|S^*\varphi| \le \kappa|\varphi|$（引理 2.1），所以它属于 $Z(B_2)$。令

$$\widehat{S} = \rho^{-1}\big(S^*|_{B_2}\big) \in C(K).$$

对于 $R, S \in Z(X)$，我们有 $(RS)^* = S^*R^*$，并且 $RS = SR$，因为 $Z(X)$ 是交换的；因此 $(RS)^*|_{B_2} = S^*|_{B_2}R^*|_{B_2}$。又由于 ρ^{-1} 是线性的且是乘法的，$S \mapsto \widehat{S}$ 是线性的且 $\widehat{\ }$ 是乘法的，其中 $I = 1$。由于 ρ 是等距的，$\|S\|_\infty = \|S^*|_{B_2}\| \le \|S^*\| = \|S\|$。如果 $u \in U(X)$，那么 $\widehat{u}^2 = \widehat{u^2} = \widehat{I} = 1$ 且 $\|\widehat{u}\|_\infty \le 1$。

步骤*3*：轨道上的有界映射 φ_1。令 $\mathcal{V} = \{S^*\varphi_1 : S \in Z(X)\}$，这是 X^* 的一个线性子空间。定义 $f: \mathcal{V} \to C(K)$ 为

$$f(S^*\varphi_1) = \widehat{S}.$$

$\widehat{\ }$ 这是定义良好的：如果 $S^*\varphi_1 = R^*\varphi_1$，那么 $(S-R)^*\varphi_1 = 0$，因此由 (4) $\|S-R\|_\infty = \|(S-R)^*|_{B_2}\| \le \gamma\|(S-R)^*\varphi_1\| = 0$。它是线性的，并且由 (4) $\|f(S^*\varphi_1)\|_\infty = \|S^*|_{B_2}\| \le \gamma\|S^*\varphi_1\|$，所以 $\|f\| \le \gamma$。

步骤*4*：延拓。由定理 2.4，存在一个线性算子 $\tilde{f}: X^* \to C(K)$延拓 f，满足 $\|\tilde{f}\| \le \gamma$。

步骤*5*：平均化。设 $U = U(X)$，并令 $\mathcal{M}$ 为引理 2.6 中针对该群 U 以及步骤1中的空间 K 所给出的映射。对于 $\varphi \in X^*$，定义 $\Phi_\varphi: U \to C(K)$ 为

$$\Phi_\varphi(u) = \widehat{u} \cdot \tilde{f}(u^*\varphi).$$

由于 $\|\widehat{u}\|_\infty \le 1$ 和 $\|u^*\| = 1$，我们有 $\|\Phi_\varphi(u)\|_\infty \le \gamma\|\varphi\|$ 对所有 u都成立，因此 $\Phi_\varphi \in L$。令

$$q(\varphi) = \mathcal{M}(\Phi_\varphi) \in C(K).$$

映射 $\varphi \mapsto \Phi_\varphi$ 是线性的，因此 $q: X^* \to C(K)$ 是线性的，并且根据引理 2.6(iv)，$\|q(\varphi)\|_\infty \le \gamma\|\varphi\|$。

步骤 *6*：的模性质 q。令 $v \in U$ 和 $\varphi \in X^*$。对于 $u \in U$，我们有 $u^*v^* = (vu)^* = \frown(uv)^*$。此外，$\widehat{u} = \widehat{v}\,\widehat{uv}$：事实上 $\widehat{v}\,\widehat{uv} = \widehat{vuv} = uv^2 = \widehat{u}$。因此

$$\Phi_{v^*\varphi}(u) = \widehat{u}\,\tilde{f}(u^*v^*\varphi) = \widehat{v} \cdot \widehat{uv}\,\tilde{f}((uv)^*\varphi) = \widehat{v} \cdot (\tau_v\Phi_\varphi)(u),$$

也就是说，$\Phi_{v^*\varphi} = \widehat{v} \cdot \tau_v\Phi_\varphi$。根据引理 2.6(v) 和 (iii)，

$$q(v^*\varphi) = \mathcal{M}(\widehat{v} \cdot \tau_v\Phi_\varphi) = \widehat{v}\,\mathcal{M}(\tau_v\Phi_\varphi) = \widehat{v}\,\mathcal{M}(\Phi_\varphi) = \widehat{v}\,q(\varphi).$$

$\widehat{\ }$现在固定 φ。单位元等式 $q(S^*\varphi) = S\,q(\varphi)$ 的两边关于 $S \in Z(X)$ 都是线性的，并且关于 S 在算子范数下都$\widehat{\ }$连续：$\|q(S^*\varphi)\|_\infty \le \gamma\|S\|\|\varphi\|$ 和 $\|S\,q(\varphi)\|_\infty \le \|S\|\,\gamma\|\varphi\|$。它们在 U 上相等，因此在线性张成空间上相等，进而在其闭包上相等。根据假设，该闭包为 $Z(X)$：

$$q(S^*\varphi) = \widehat{S}\,q(\varphi) \qquad (S \in Z(X),\ \varphi \in X^*). \tag{5}$$

步骤 *7*：$q(\varphi_1) = 1$。对于 $u \in U$, $u^*\varphi_1 \in \mathcal{V}$，所以 $\tilde{f}(u^*\varphi_1) = f(u^*\varphi_1) = \widehat{u}$，并且 $\Phi_{\varphi_1}(u) = \widehat{u}^2 = 1$对所有 u 都成立。根据引理 2.6(ii)，$q(\varphi_1) = 1$。

步骤 *8*：算子 T。定义

$$T\varphi = \rho\big(q(\varphi)\big)\varphi_2 \qquad (\varphi \in X^*).$$

这里将 $\rho(q(\varphi)) \in Z(B_2)$ 应用于 $\varphi_2 \in B_2$，因此 $T\varphi \in B_2 \subseteq X^*$。 T 是线性的，并且 $\|T\varphi\| \le \|\rho(q(\varphi))\|\,\|\varphi_2\| = \|q(\varphi)\|_\infty\|\varphi_2\| \le \gamma\|\varphi_2\|\,\|\varphi\|$。令 $S \in Z(X)$。根据 (5)、 $\rho\widehat{\ }$的乘法性以及 S的定义，

$$T(S^*\varphi) = \rho\big(\widehat{S}\,q(\varphi)\big)\varphi_2 = \rho(\widehat{S})\big(\rho(q(\varphi))\varphi_2\big) = S^*|_{B_2}\big(T\varphi\big) = S^*T\varphi.$$

因此 $T \in (Z^*(X))^{\mathrm{com}}$。最后，根据步骤 7， $T\varphi_1 = \rho(1)\varphi_2 = \varphi_2$。若 T 是中心的，则将引理 2.2(a) 应用于 $R = T$、 $u = \varphi_1$ 和 $v = \varphi_2$，便可得到 $\varphi_2 = 0$，矛盾。□

注记 3.2。 所用假设为： $U(X)$ 的张成空间稠密、不等式 (4)、$\varphi_2 \neq 0$ 和 $\varphi_1 \perp \varphi_2$。不需要 φ_1 的正性， φ_2。

4. The space m_ψ and Dixmier traces

4.1. 空间。 令 $\psi(t) = \log(1+t)$，其中 $t \ge 0$。对于趋于 0 的实数序列 $x = (x_n)_{n\ge1}$，令 $x^\# = (x_n^\#)_{n\ge1}$ 为 $|x|$ 的递减重排；等价地，对于 $N \in \mathbb{N}$，

$$\sum_{r=1}^{N} x_r^\# = \max\Big\{\sum_{n\in J}|x_n| :\ J \subseteq \mathbb{N},\ \#J = N\Big\}. \tag{6}$$

这个*Marcinkiewicz* 序列空间 $X = m_\psi$ 由所有满足以下条件的 $x \in c_0$ 组成

$$\|x\| = \sup_{n\ge1}\frac{1}{\psi(n)}\sum_{r=1}^{n} x_r^\# < \infty.$$

（若 x 是一个满足 $\limsup_n |x_n| = c > 0$ 的序列，则对每个 N，都存在一个由 N 个指标组成的集合 J，使得对于 $n \in J$，有 $|x_n| > c/2$，因此 $\sum_{n\in J}|x_n| \ge Nc/2$，而这不是 $O(\log N)$；所以限制到 c_0并无妨。）

引理 4.1. $(X, \|\cdot\|)$ 在坐标逐点序下是一个巴拿赫格，并且是序列空间 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 的一个理想：若 $x \in X$，$y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 且 $|y| \le |x|$，则 $y \in X$ 且 $\|y\| \le \|x\|$。范数具有对称性：只要 $x^\# = y^\#$，就有 $\|x\| = \|y\|$。

证明。 若 $|y| \le |x|$ 逐坐标地，则 $y \in c_0$，并且由 (6) 可得，对每个 N，都有 $\sum_{r\le N} y_r^\# \le \sum_{r\le N} x_r^\#$；因此 $y \in X$ 且 $\|y\| \le \|x\|$。对称性由定义显然可得。对于 $x,\ y \in X$ 且 J，其中 $\#J = N$, $\sum_{n\in J}|x_n + y_n| \le \sum_J|x_n| + \sum_J|y_n| \le \sum_{r\le N} x_r^\# + \sum_{r\le N} y_r^\#$；取 J上的最大值，得到 $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$。齐次性和正定性显然可得，因此 $\|\cdot\|$ 是一个格范数。

完备性：设 $(x^{(j)})$ 是 X 中的柯西序列。由于 $|x_n| \le x_1^\# \le \psi(1)\|x\|$ 对每个坐标 n 都成立，该序列逐坐标地是柯西序列；令 x 为其逐坐标极限。固定 $\varepsilon > 0$ 和 j_0，使得对于 $i,\ j \ge j_0$，有 $\|x^{(j)} - x^{(i)}\| \le \varepsilon$。对于固定的 N, J，满足 $\#J = N$ 且 $j \ge j_0$，我们有 $\sum_{n\in J}|x_n^{(j)} - x_n^{(i)}| \le \varepsilon\psi(N)$，其中 $i \ge j_0$；令 $i \to \infty$，得到 $\sum_{n\in J}|x_n^{(j)} - x_n| \le \varepsilon\psi(N)$。对 J 取最大值，得到 $\sum_{r\le N}(x^{(j)} - x)_r^\# \le \varepsilon\psi(N)$（我们马上会看到 $x^{(j)} - x \in c_0$）。特别地，对于 $N = 1$，$\sup_n |x_n^{(j)} - x_n| \le \varepsilon\psi(1)$；由于 ε 是任意的， $x^{(j)} \to x$ 一致收敛，因此 $x \in c_0$，并且该估计表明，对于 $j \ge j_0$， $x^{(j)} - x \in X$ 且 $\|x^{(j)} - x\| \le \varepsilon$。因此 $x \in X$ 且 $x^{(j)} \to x$。□

设 c_{00} 为有限支撑序列构成的空间， X_a 为其在 X中的闭包； X_a 是一个闭理想。令

$$X_s^* = (X_a)^\perp = \{\varphi \in X^* :\ \varphi = 0 \text{ on } X_a\}.$$

引理 4.2。 X_s^* 是 X^*中的一个带。

证明。理想。设 $\varphi \in X_s^*$ 和 $|\chi| \le |\varphi|$。对于 $0 \le x \in X_a$，(2)给出 $|\varphi|(x) = \sup\{|\varphi(y)| : \ |y| \le x\} = 0$，因为任意满足 $|y| \le x$ 的 y 都属于理想 X_a。因此，$|\varphi| = 0$ 在(X_a)+上成立，从而 $|\chi| = 0$ 在(X_a)+上成立，并且对于 $y \in X_a$，$|\chi(y)| \le |\chi|(|y|) = 0$。于是 $\chi \in X_s^*$。显然，X_s^* 是一个线性子空间。序闭性。设(φ_α)是(X_s^*)+ 中的一个向上有向族，其上确界 φ 属于 X^*。对于$x \ge 0$，$\varphi(x) = \sup_\alpha \varphi_\alpha(x)$（见 [4, 定理 1.19]），因此 $\varphi = 0$ 在(X_a)+ 上成立，进而在 X_a上成立。序闭理想是一个带。□

设 $x_0 = (1/n)_{n\ge 1}$。由于 $\sum_{k\le n} 1/k \le 1+\log n$，我们有 $x_0 \in X$；令 $\nu = \|x_0\|$，于是 $1 \le \nu < \infty$。对于无限集 $A = \{a_1 < a_2 < \dots\} \subseteq \mathbb{N}$，令 x_A为满足 $(x_A)_{a_j} = 1/j$且对于 $n \notin A$有 $(x_A)_n = 0$ 的序列。于是 $x_A^{\#} = x_0$，因此 $x_A \in X$ 和 $\|x_A\| = \nu$。

引理 *4.3*。*(a)* X 是戴德金完备的。*(b)* 对于 $g \in \ell^\infty$ 和 $x \in X$，$gx \in X$ 且 $\|gx\| \le \|g\|_\infty \|x\|$。$Z(X) = \{M_g : \ g \in \ell^\infty\}$，其中 $M_g x = gx$ 是逐坐标乘积，且 $\|M_g\| = \|g\|_\infty$。*(c)* X 具有拓扑满中心；事实上，对于每个 $x \in X$，$Z(X)x$是由 x生成的理想。*(d)* 如果 $g \in c_{00}$，则 M_g^*在 X_s^*上为零。*(e)* $U(X) = \{M_g$: 对于所有 $n\}$，$g_n \in \{-1, 1\}$，且 $U(X)$的线性张成空间在 $Z(X)$中稠密。

证明。(a) 设 $\emptyset \ne D \subseteq X$ 被 $w \in X$ 从上方有界。D 的逐坐标上确界 s 存在于 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 中，且对任意 $d_0 \in D$ 都满足 $d_0 \le s \le w$，因此由引理 4.1 可得 $|s| \le |d_0| + |w|$ 和 $s \in X$；显然，s 是 D 在 X 中的上确界。

(b) $|gx| \le \|g\|_\infty |x|$，因此由引理 4.1 可得 $gx \in X$ 和 $\|gx\| \le \|g\|_\infty \|x\|$；于是 $M_g \in Z(X)$ 且 $\|M_g\| \le \|g\|_\infty$ 在单位向量 e_n 上检验（注意 $\|e_n\| = 1/\psi(1)$）可得 $\|M_g\| \ge |g_n|$，故 $\|M_g\| = \|g\|_\infty$ 反过来，设 $S \in Z(X)$ 且 $|Sx| \le \kappa|x|$。那么 $|Se_n| \le \kappa e_n$，所以存在 $Se_n = g_n e_n$ 使得 $|g_n| \le \kappa$。对于 $x \in X$ 和 $n \in \mathbb{N}$，写作 $x = x_n e_n + y$，其中 $y_n = 0$。那么 $|Sy| \le \kappa|y|$ 的第 n 个坐标为 0，因此 $(Sx)_n = g_n x_n$。故 $S = M_g$。

(c) 令 $x \in X$，并设 y 属于由 x生成的理想，即对于某个 c，有 $|y| \le c|x|$。若 $x_n \ne 0$，则定义 $g_n = y_n/x_n$；否则定义为 $g_n = 0$。于是 $|g_n| \le c$ 且 $y = gx = M_g x$。因此，$Z(X)x$ 是由 x生成的理想，其闭包则是由 x生成的闭理想。

(d) 若 $g \in c_{00}$，则 $gx \in c_{00} \subseteq X_a$，所以对于 $\varphi \in X_s^*$，有 $(M_g^*\varphi)(x) = \varphi(gx) = 0$。

(e) 根据 (b)，$M_g^2 = I$当且仅当对于所有 n都有 $g_n^2 = 1$，进而 $|M_g x| = |x|$。对于 $D \subseteq \mathbb{N}$，$1_D = \frac{1}{2}(1 + (2 \cdot 1_D - 1))$，其中 1 是常值序列，且 $2 \cdot 1_D - 1$ 是一个 ± 1 序列。因此，$U(X)$的张成空间包含所有满足 g 且只取有限个值的 M_g；这些 g 在 ℓ^∞中一致稠密。根据 (b)，相应的 M_g 在 $Z(X)$中稠密。□

4.2. **沿尺度的均值**。令 $\mathcal{B}$ 为带上确界范数的 $[0, \infty)$ 上的有界实值博雷尔函数空间。对于 $0 \le \alpha < \beta$，令 $A_{[\alpha,\beta]}(H) = (\beta - \alpha)^{-1} \int_\alpha^\beta H(u)\, du$ 对于 $H \in \mathcal{B}$；则 $A_{[\alpha,\beta]} \in \mathcal{B}^*$，$\|A_{[\alpha,\beta]}\| = 1$。

引理 4.4。令 $0 \le \alpha_k < \beta_k$ 满足 $\alpha_k \to \infty$ 和 $\beta_k - \alpha_k \to \infty$。根据巴拿赫–阿劳格鲁定理，序列 $(A_{[\alpha_k,\beta_k]})_k$ 存在一个弱 * 聚点 $\omega \in \mathcal{B}^*$，即对于每个 $\varepsilon > 0$、有限个 H_1、……、$H_m \in \mathcal{B}$ 以及 k_0，存在 $k \ge k_0$，使得 $|A_{[\alpha_k,\beta_k]}(H_i) - \omega(H_i)| < \varepsilon$ 对于 $i \le m$。每个这样的ω 都满足：

(i) $\omega(H) \ge 0$ 若 $H \ge 0$，且 $\omega(1) = 1$；*(ii)* 对于 $H \in \mathcal{B}$ 和实数 $c \ge 0$，$\omega(H(\cdot + c)) = \omega(H)$；*(iii)* 若 H，$H' \in \mathcal{B}$ 且 $H(u) - H'(u) \to 0$ 如 $u \to \infty$，则 $\omega(H) = \omega(H')$；*(iv)* 若 $\sup_{u\in[\alpha_k,\beta_k]} |H(u)| \to 0$ 如 $k \to \infty$，则 $\omega(H) = 0$。

证明。我们使用以下事实：如果 $G \in \mathcal{B}$ 和 $A_{[\alpha_k,\beta_k]}(G) \to 0$ 如 $k \to \infty$，那么 $\omega(G) = 0$。事实上，给定 $\varepsilon > 0$，取 k_0 使得 $|A_{[\alpha_k,\beta_k]}(G)| < \varepsilon$ 对于 $k \ge k_0$成立，然后取 $k \ge k_0$ 使得 $|A_{[\alpha_k,\beta_k]}(G) - \omega(G)| < \varepsilon$；因此 $|\omega(G)| < 2\varepsilon$。

(i) 对每个 $A_{[\alpha,\beta]}$ 都成立，并且可传递到聚点（在 $H_1 = H$ 的情形下应用定义）。对于 (ii): $c \geq 0$,

$$\big|A_{[\alpha_k,\beta_k]}(H(\cdot + c)) - A_{[\alpha_k,\beta_k]}(H)\big| = \frac{1}{\beta_k - \alpha_k}\Big|\int_{\beta_k}^{\beta_k+c} H - \int_{\alpha_k}^{\alpha_k+c} H\Big| \leq \frac{2c\|H\|_\infty}{\beta_k - \alpha_k} \to 0,$$

因此该事实适用于 $G = H(\cdot + c) - H$。 (iii)： $\sup_{u\geq\alpha_k} |H(u) - H'(u)| \to 0$ 因为 $\alpha_k \to \infty$, 所以$A_{[\alpha_k,\beta_k]}(H - H') \to 0$。 (iv)： $|A_{[\alpha_k,\beta_k]}(H)| \leq \sup_{[\alpha_k,\beta_k]} |H| \to 0$。 □

4.3. **Dixmier 迹**。对于 $0 \leq x \in X$ 和实数 $u \geq 0$ ，令

$$G_x(u) = \sum_{r\leq e^u} x_r^{\#}, \qquad F_x(u) = \frac{G_x(u)}{\psi(e^u)}.$$

G_x 是一个非递减阶梯函数，而 $\psi(e^u)$ 是连续且为正的，因此 $F_x \in \mathcal{B}$；事实上$0 \leq F_x \leq \|x\|$ ，因为 $G_x(u) \leq \|x\|\psi(\lfloor e^u \rfloor) \leq \|x\|\psi(e^u)$。

引理 4.5。对于 $0 \leq x,\ y \in X$ 和 $u \geq 0$:

$$G_{x+y}(u) \leq G_x(u) + G_y(u) \leq G_{x+y}(u + \log 2).$$

证明。 设 $N = \lfloor e^u \rfloor$。由 (6)，存在 J，使得 $\#J = N$ 且 $G_{x+y}(u) = \sum_J (x + y) = \sum_J x + \sum_J y \leq G_x(u) + G_y(u)$。再次由 (6)，存在 J_1，J_2，使得 $\#J_1 = \#J_2 = N$，$G_x(u) = \sum_{J_1} x$ 且 $G_y(u) = \sum_{J_2} y$。集合 $J = J_1 \cup J_2$ 至多有 $2N \leq \lfloor 2e^u \rfloor = \lfloor e^{u+\log 2} \rfloor$ 个元素，并且由于 $x,\ y \geq 0$，$G_x(u) + G_y(u) \leq \sum_J (x + y) \leq G_{x+y}(u + \log 2)$。 □

命题 4.6。 设 ω 如引理 *4.4* 中所述。在 X 上存在唯一的线性泛函Tr_ω ，满足对 $0 \leq x \in X$ 有 $\mathrm{Tr}_\omega(x) = \omega(F_x)$ 。它是正的， $\|\mathrm{Tr}_\omega\| \leq 1$，$\mathrm{Tr}_\omega(x_0) = 1$，$\mathrm{Tr}_\omega \in X_s^*$，并且当 $0 \leq x$、$y \in X$ 和 $x^{\#} = y^{\#}$ 时，$\mathrm{Tr}_\omega(x) = \mathrm{Tr}_\omega(y)$。

证明。正锥上的可加性。令 $0 \leq x, y \in X$。将引理 4.5 中的不等式除以 $\psi(e^u)$，得到

$$F_{x+y}(u) \leq F_x(u) + F_y(u) \leq H(u), \qquad \text{where } H(u) = F_{x+y}(u + \log 2)\,\frac{\psi(2e^u)}{\psi(e^u)}.$$

由于当 $t \geq 1$ 时， $1 \leq \psi(2t)/\psi(t) \leq \log 3/\log 2$，且当 $t \to \infty$ 时， $\psi(2t)/\psi(t) \to 1$，而 $H(u) - F_{x+y}(u + \log 2) \to 0$ 当 $u \to \infty$ 时成立。由引理 4.4(i)（ ω的单调性和线性），再由(iii)，最后在 $c = \log 2$ 时应用(ii),

$$\omega(F_{x+y}) \leq \omega(F_x) + \omega(F_y) \leq \omega(H) = \omega\big(F_{x+y}(\cdot + \log 2)\big) = \omega(F_{x+y}).$$

因此 $\omega(F_{x+y}) = \omega(F_x) + \omega(F_y)$。显然，对 $c \geq 0$， $F_{cx} = cF_x$。

延拓。对于 $x \in X$，令 $\mathrm{Tr}_\omega(x) = \omega(F_{x^+}) - \omega(F_{x^-})$。若 $x = a - b$ 且 $a, b \geq 0$，则$a + x^- = b + x^+$，因此由可加性， $\omega(F_a) + \omega(F_{x^-}) = \omega(F_b) + \omega(F_{x^+})$，即 $\mathrm{Tr}_\omega(x) = \omega(F_a) - \omega(F_b)$；对分解的这种无关性意味着 Tr_ω 是线性的，而且它是唯一的线性延拓。它是正的，并且 $|\mathrm{Tr}_\omega(x)| \leq \mathrm{Tr}_\omega(|x|) = \omega(F_{|x|}) \leq \|x\|$ ，因为 $F_{|x|} \leq \|x\|$。

在 x_0 处的值。 $G_{x_0}(u) = \sum_{k\leq e^u} 1/k$，且当 $N \to \infty$ 时，$\sum_{k\leq N} 1/k - \log N$ 收敛，而$\psi(e^u) - u \to 0$；因此 $F_{x_0}(u) \to 1$，并且根据引理 4.4(i),(iii)， $\mathrm{Tr}_\omega(x_0) = 1$。

奇异性。如果 $x \in c_{00}$，那么 $G_{|x|}$ 有界且 $F_{|x|}(u) \to 0$，因此 $\mathrm{Tr}_\omega(|x|) = 0$ ，并且 $|\mathrm{Tr}_\omega(x)| \leq \mathrm{Tr}_\omega(|x|) = 0$。由连续性，$\mathrm{Tr}_\omega$ 在 X_a 上为零。

对称性。 F_x 只取决于 $x^{\#}$。 □

泛函 Tr_ω 是（交换的）Dixmier 迹；参见 [9, 14]。

引理 4.7。 设 $s \in X^*$ 为正，且当 $0 \le x$、y 和 $x^{\#} = y^{\#}$时，满足 $s(x) = s(y)$，并满足 $s(x_0) = 1$。对于 $g \in \ell^\infty$，令 $\lambda(g) =$上极限$_{n\to\infty} |g_n|$（g 在 ℓ^∞/c_0中的等价类的范数）。那么

$$\|M_g^* s\| \ge \frac{\lambda(g)}{\nu}.$$

证明。 我们可以假设 $\lambda(g) > 0$。令 $0 < \varepsilon < \lambda(g)$。有无穷多个 n 满足 $|g_n| > \varepsilon$，因此集合 $\{n\colon\ g_n > \varepsilon\}$、$\{n\colon\ g_n < -\varepsilon\}$ 中至少有一个是无限集。将 g 替换为 $-g$（这不会改变$\|M_g^* s\|$）后，我们可以假设 $A = \{n\colon\ g_n > \varepsilon\}$ 是无限集。于是，$x_A \ge 0$、$\|x_A\| = \nu$、$g x_A \ge \varepsilon x_A$逐坐标地成立，并且 $s(x_A) = s(x_0) = 1$，因为 $x_A^{\#} = x_0 = x_0^{\#}$。由于 s 是正的，

$$(M_g^* s)(x_A) = s(g x_A) \ge \varepsilon s(x_A) = \varepsilon,$$

因此 $\|M_g^* s\| \ge \varepsilon/\nu$。令 $\varepsilon \to \lambda(g)$。 □

引理 4.8。 若 $\varphi \in X_s^*$且 $g \in \ell^\infty$，则 $\|M_g^* \varphi\| \le \lambda(g)\|\varphi\|$。因此，对于每个带$B \subseteq X_s^*$，$\|M_g^*|_B\| \le \lambda(g)$。

证明。 对于 $N \in \mathbb{N}$，令 $g_n^{(N)} = g_n$，其中 $n > N$；对于 $n \le N$，令 $g_n^{(N)} = 0$。于是 $g - g^{(N)} \in c_{00}$，因此由引理 4.3(d)可得 $M_g^* \varphi = M_{g^{(N)}}^* \varphi$，且$\|M_{g^{(N)}}^* \varphi\| \le \|g^{(N)}\|_\infty \|\varphi\| =$ $\sup_{n>N} |g_n|\, \|\varphi\|$。令$N \to \infty$。对于第二个结论，注意到 B 在 M_g^*下是不变的（引理 2.2）。□

4.4. **两个互不相交的 Dixmier 迹**。 取 $a_1 = 2$ 并递归定义

$$b_k = a_k^2, \quad a_k' = b_k^2, \quad b_k' = {a_k'}^2, \quad a_{k+1} = {b_k'}^2 \qquad (k \ge 1).$$

于是 $2 \le a_k < b_k < a_k' < b_k' < a_{k+1}$，并且这些数及其差都趋于 ∞。令ω_1 为 $(A_{[a_k,b_k]})_k$ 的一个弱* 聚点，并令 ω_2 为 $(A_{[a_k',b_k']})_k$ 的一个弱* 聚点（引理 4.4），再令

$$s_1 = \mathrm{Tr}_{\omega_1}, \qquad s_2 = \mathrm{Tr}_{\omega_2}.$$

因此 s_1 “看到”只有尺度 $u \in [a_k, b_k]$ 和 s_2 只有尺度 $u \in [a_k', b_k']$（引理 4.4(iv)）.

对于 $0 \le x \in X$和实数 $t > 0$，记 $x^{\#}(t) = x^{\#}_{\lceil t \rceil}$；则对于 $N \in \mathbb{N}$，有 $\int_0^N x^{\#}(t)\, dt = \sum_{r \le N} x_r^{\#}$，并且如果 $r \in \mathbb{N}$、$r > t$，那么 $r \ge \lceil t \rceil$ 和 $x_r^{\#} \le x^{\#}(t)$。

引理 4.9。 设 $0 \le x \in X$。对于每个 $b \ge 1$，存在 $\beta \in [b, 2b]$，使得 $e^{\beta} x^{\#}(e^{\beta}) \le 3\|x\|$。

证明。 函数 $v \mapsto e^v x^{\#}(e^v)$ 是一个非负博雷尔函数。假设对于所有 $v \in [b, 2b]$，$e^v x^{\#}(e^v) > 3\|x\|$。代入 $t = e^v$，

$$3\|x\| b < \int_b^{2b} e^v x^{\#}(e^v)\, dv = \int_{e^b}^{e^{2b}} x^{\#}(t)\, dt \le \int_0^{\lceil e^{2b} \rceil} x^{\#}(t)\, dt = \sum_{r \le \lceil e^{2b} \rceil} x_r^{\#}.$$

最后一项和至多为 $\|x\| \psi(\lceil e^{2b} \rceil) \le \|x\| \log(2 + e^{2b}) \le \|x\|(2b + 1) \le 3\|x\| b$ for $b \ge 1$，矛盾。□

命题 4.10。 $s_1 \perp s_2$ 在 X^*。

证明。 由于 $s_1,\ s_2 \ge 0$，根据 (2)，对于 $0 \le x \in X$，

$$(s_1 \wedge s_2)(x) = \inf\{s_1(y) + s_2(x - y)\colon\ 0 \le y \le x\}.$$

因此，只需对每个 $0 \le x \in X$, $x \ne 0$ 找到一个分解 $x = y + z$，使得 $y,\ z \ge 0$,$s_1(y) = 0$ 以及 $s_2(z) = 0$。固定这样一个 x。

秩。 由于 $x \in c_0$，其正项可以列为 $x_{p_1} \ge x_{p_2} \ge \ldots$，且具有不同位置$p_r$，从而 $x_{p_r} = x_r^{\#}$ 对所有 r 均成立（如果 x 只有有限个正项，则该列表是有限的）。我们称r 为位置 p_r的秩 。

阈值。根据引理 4.9，存在 $\beta_k \in [b_k, 2b_k]$ 和 $\delta_k \in [b'_k, 2b'_k]$，使得

$$e^{\beta_k} x^{\#}(e^{\beta_k}) \le 3\|x\|, \qquad e^{\delta_k} x^{\#}(e^{\delta_k}) \le 3\|x\|.$$

这些尺度的排序如下：

$$\cdots < \delta_{k-1} \le 2b'_{k-1} < a_k < b_k \le \beta_k \le 2b_k < a'_k < b'_k \le \delta_k \le 2b'_k < a_{k+1} < \cdots$$

（例如 $2b'_{k-1} < {b'_{k-1}}^2 = a_k$，因为 $b'_{k-1} > 2$）。

和的定义。令 $Q = \bigcup_k (e^{\beta_k}, e^{\delta_k}] \subseteq (0,\infty)$。令 y 为将 x 限制在秩属于 Q 的那些位置上所得的结果（即，若 $r \in Q$，则 $y_{p_r} = x_{p_r}$；在所有其他位置上则为 $y_n = 0$ n），并令 $z = x - y$ 为将 x 限制在秩不属于 Q 的那些位置上所得的结果。于是 $y, z \ge 0$。

观察。如果 w 是将 x 限制在一组位置上所得的结果，那么根据 (6)，$G_w(u)$ 是 x 在该组位置上的至多 $\lfloor e^u \rfloor$ 个条目的和。秩为 $r > e^\theta$ 的条目至多为 $x^{\#}(e^\theta)$。秩为 $\le e^\theta$ 的条目之和至多为 $\sum_{r \le e^\theta} x^{\#}_r \le \|x\|\psi(e^\theta) \le \|x\|(\theta+1)$。

$s_1(y) = 0$。令 $k \ge 2$ 和 $u \in [a_k, b_k]$。y 的每个秩都属于某个 $(e^{\beta_j},\ e^{\delta_j}]$；如果 $j \le k-1$，则该秩为 $\le e^{\delta_{k-1}}$；如果 $j \ge k$，则为 $> e^{\beta_k}$。第一类条目的总和至多为 $\|x\|(\delta_{k-1}+1) \le \|x\|(2b'_{k-1}+1)$。第二类条目中至多有 $\lfloor e^u \rfloor \le e^{b_k} \le e^{\beta_k}$ 个进入 $G_y(u)$，每个至多为 $x^{\#}(e^{\beta_k})$，因此它们的贡献至多为 $e^{\beta_k} x^{\#}(e^{\beta_k}) \le 3\|x\|$。于是，利用 $\psi(e^u) \ge u \ge a_k = {b'_{k-1}}^2$，

$$F_y(u) \le \frac{\|x\|(2b'_{k-1}+4)}{u} \le \frac{\|x\|(2b'_{k-1}+4)}{{b'_{k-1}}^2} \qquad (u \in [a_k, b_k]).$$

当 $k \to \infty$ 时，右端趋于 0，因此根据引理 4.4(iv)，$s_1(y) = \omega_1(F_y) = 0$。

$s_2(z) = 0$。设 $u \in [a'_k, b'_k]$。z 的秩不落在 $(e^{\beta_k},\ e^{\delta_k}]$ 中。秩为 $\le e^{\beta_k}$ 的 z 的条目之和至多为 $\|x\|(\beta_k+1) \le \|x\|(2b_k+1)$。秩为 $> e^{\beta_k}$ 的 z 的条目秩为 $> e^{\delta_k}$；其中至多有 $\lfloor e^u \rfloor \le e^{b'_k} \le e^{\delta_k}$ 个进入 $G_z(u)$，每个至多为 $x^{\#}(e^{\delta_k})$，因此它们的贡献至多为 $3\|x\|$。所以

$$F_z(u) \le \frac{\|x\|(2b_k+4)}{a'_k} = \frac{\|x\|(2b_k+4)}{b_k^2} \qquad (u \in [a'_k, b'_k]),$$

它趋于 0；因此，根据引理 4.4(iv)，$s_2(z) = \omega_2(F_z) = 0$。 □

5. The counterexample

定理 5.1。设 $X = m_\psi$，$\psi(t) = \log(1+t)$，并设 s_1, s_2 为命题 *4.10* 中的 *Dixmier* 迹。那么存在一个作用在 X^* 上的有界算子 T，使得对于所有 $g \in \ell^\infty$ 和 $Ts_1 = s_2$，都有 $TM_g^* = M_g^* T$。特别地，$T \in (Z^*(X)^{\mathrm{com}} \setminus Z(X^*)$，尽管 X 是戴德金完备的，且具有拓扑满中心。

*P*证明。我们利用 $\varphi_1 = s_1$、$\varphi_2 = s_2$ 和 $\gamma =$ 验证定理 3.1 的假设 ν.

稠密性。根据引理 4.3(e)，$U(X)$ 的张成空间在 $Z(X)$ 中稠密。

不相交性 以及非退化性。根据命题 4.10，$s_1 \perp s_2$，并且由于 $s_2(x_0) = 1$，$s_2 \ne 0$。

支配关系 (4)。每个 $S \in Z(X)$ 都是某个 $g \in \ell^\infty$（引理 4.3(b)）的 M_g。带 $B_2 = \{s_2\}^{dd}$ 包含于带 X_s^*（引理 4.2）中，因为 $s_2 \in X_s^*$（命题 4.6）。根据引理 4.8，以及将引理 4.7 应用于 $s = s_1$（正、对称且 $s_1(x_0) = 1$，由命题 4.6），

$$\|M_g^*|_{B_2}\| \le \lambda(g) \le \nu \|M_g^* s_1\| \qquad (g \in \ell^\infty).$$

定理 3.1 现在给出 T。最后一个断言由引理 4.3(a)、(c) 得出。 □

注 5.2。 (a) T 不是弱*连续的。 在 X^* 上弱*连续的算子恰好是算子 $R \in L(X)$ 的伴随算子 R^* 。如果 $T = R^*$，那么 R 与每个 M_g 都可交换。于是 $Re_n = RM_{1_{\{n\}}}e_n = M_{1_{\{n\}}}Re_n$，所以对于某个 r_n，有 $Re_n = r_ne_n$ ；而对于 $x \in X$，$(Rx)_ne_n = M_{1_{\{n\}}}Rx = R(x_ne_n) = r_nx_ne_n$；因此 $R = M_r$ 与 $|r_n|\,\|e_n\| = \|Re_n\| \le \|R\|\,\|e_n\|$，于是 $|r_n| \le \|R\|$ 且 $r \in \ell^\infty$，所以 $R \in Z(X)$ 和 $T = R^*$ 都是中心的。（一般而言，这可由 [20, 推论 3] 得出。）这与 [20, 定理 1] 一致：对于非弱*连续的算子，与 $Z^*(X)$ 的交换性不会延续到 $Z^*(X)$ 的弱* 算子闭包。

(b) T 是正则的。证明定理 3.1 中的映射 q 是到戴德金完备空间 $C(K)$ 中的有界线性算子；它将 X^* 的序区间映射为 $C(K)$ 中范数有界、因而序有界的子集，所以它是序有界的，从而是正则的 [4, 定理 118]。映射 $h \mapsto \rho(h)\varphi_2$ 是正映射之差（分拆 $\varphi_2 = \varphi_2^+ - \varphi_2^-$；此处 $\varphi_2 = s_2 \ge 0$）。因此 T 是正则的；即使在序有界算子空间中取交换子，它仍然是一个反例。

(c) 该构造所使用的内容。除了 $U(X)$ 在 $Z(X)$ 中的张成空间的稠密性之外，只使用了 m_ψ 的两个性质：存在一个泛函 s_1，使得 $\lambda(g)/\nu \le \|M_g^*s_1\| \le \lambda(g)$（引理 4.7 和 4.8，以及 $\|s_1\| \le 1$），从而 $g \mapsto M_g^*s_1$ 将商空间 ℓ^∞/c_0 同构嵌入；并且存在一个与 s_1 不相交的非零奇异泛函 s_2 。

(d) $C(Q)$不能满足定理 3.1 的假设，这与 [1,定理 9.11]的第 (1) 部分一致。令 $X = C(Q)$为 Q 紧的；则 $X^* = M(Q)$是正则博雷尔测度空间， $Z(X) = \{M_g :\ g \in C(Q)\}$、 $\|M_g^*\mu\| = \int |g|\,d|\mu|$，而测度 φ_2的带由相对于 $|\varphi_2|$绝对连续的测度组成，因此 $\|M_g^*|_{\{\varphi_2\}^{dd}}\|$ 是 $|\varphi_2|$- $|g|$的本性上确界；对于连续的 g ，该上确界等于 $\sup\{|g(k)| :\ k \in \operatorname{supp}\varphi_2\}$。假设 (4) 对 $\varphi_1 = \mu$成立。令 $k \in \operatorname{supp}\varphi_2$ ，并令 V为 k的一个开邻域。由乌雷松引理，存在 $g \in C(Q)$， $0 \le g \le 1$、 $g(k) = 1$，在 V之外为 $g = 0$；于是 $1 \le \gamma\int g\,d|\mu| \le \gamma|\mu|(V)$。由 $|\mu|$的外正则性， $|\mu|(\{k\}) = \inf_V |\mu|(V) \ge 1/\gamma$。因此，$\operatorname{supp}\varphi_2$ 中的每一点都是 μ的一个原子，其质量至少为 $1/\gamma$；这样的点至多有 $\gamma\|\mu\|$ 个，所以 $\operatorname{supp}\varphi_2$ 是有限的，而 φ_2 是 μ的原子处点质量的非零有限线性组合。于是 $|\varphi_2| \wedge |\mu| \ne 0$，这与 $\varphi_1 \perp \varphi_2$矛盾。

注 5.3。 复标量。 令 $X_{\mathbb{C}}$ 为实Banach格 $X = m_\psi$ 的复化。其中心 $Z(X_{\mathbb{C}})$ 是 $Z(X)$ 的复化，即 $\{M_g : g \in \ell^\infty(\mathbb{C})\}$，而 $(X_{\mathbb{C}})^*$ 是 X^* 的复化。令 $T_{\mathbb{C}}$ 为定理 5.1 中算子 T 的复化。对于具有实数 g_1的 $g = g_1 + ig_2$， g_2，我们有 $M_g^* = (M_{g_1}^*)_{\mathbb{C}} + i(M_{g_2}^*)_{\mathbb{C}}$，它与 $T_{\mathbb{C}}$ 交换。引理 2.2 对复Banach格同样逐字成立（使用复模），因此 $T_{\mathbb{C}}s_1 = s_2$、 $s_1 \perp s_2$、 $s_2 \ne 0$ 表明 $T_{\mathbb{C}}$ 不是中心的。

注 5.4。 *Marcinkiewicz*函数空间。 定理 5.1 对函数空间 $X = M_\psi(0,\ \infty)$ 仍然成立，其中 $\psi(t) = \log(1 + t)$，该空间由 $(0,\ \infty)$ 上所有满足 $\|x\| = \sup_{t>0}\psi(t)^{-1}\int_0^t x^* < \infty$ 的可测 x 构成，其中 x^* 是 $|x|$ 的递减重排。我们仅概述所需的改动；除此之外，第4节和第5节中的论证均可照搬，只需将求和替换为积分。

(1) 由于 $\psi(t)/t \to 1$ 是 $t \to 0$，我们有 $\|x\|_\infty \le \|x\|$，因此 $X \subseteq L^\infty$；而 $\int_0^t x^* = O(\log t)$ 给出 $x^*(t) \to 0$是 $t \to \infty$。 X 是 L^0 的戴德金完备对称理想，并且 $Z(X) = \{M_g :\ g \in L^\infty\}$ 满足 $\|M_g\| = \|g\|_\infty$。（引理 4.3(b) 的证明用到了单位向量，因此必须作出修改：中心算子 S 与带投影 M_{1_B}交换，因此对于有限测度集合 A ，有 $S1_A = g_A1_A$，其中 $|g_A| \le \kappa$ 和 $g_A = g_{A'}$ 定义在 $A \cap A'$ 上；这就为有限测度支撑的简单 x 定义了满足$Sx = gx$ 的 $g \in L^\infty$。由于 $|\{x > 1/n\}| < \infty$，每个 $0 \le x \in X$ 都是这类函数的递增序列的上确界；并且根据定理 2.44], , 中心算子是序连续的 [4, , 所以 $Sx = gx$。）与引理 4.3 中一样， $Z(X)x$ 是由x生成的理想，而 $U(X) = \{M_g$ 的张成空间 $|g| = 1\}$ 在 $Z(X)$ 中稠密。

(2) 令 X_a 为在有限测度集合之外取零的函数所构成空间的闭包（与序列情形不同，这不是 X的序连续部分：对所有 $s>0$， $\|1_{(0,s)}\|\geq 1$），$X_s^*=(X_a)^\perp$（一个带，如引理 4.2 中所述），并且 $\lambda(g)=\inf\{\varepsilon>0:$ 对 $g\in L^\infty$， $|\{|g|>\varepsilon\}|<\infty\}$。引理 4.8 的证明仍然适用：若 $A=\{|g|>\lambda(g)+\varepsilon\}$，则 $|A|<\infty$， M_{g1_A} 将 X 映入 X_a，并且对 $\varphi\in X_s^*$，有$M_g^*\varphi=M_{g1_{(0,\infty)\setminus A}}^*\varphi$。

(3) 按第 4 节中的定义定义 $G_x(u)=\int_0^{e^u}x^*$ 和 F_x，Tr_ω。引理 4.5 变为 $\int_0^t(x+y)^*\leq\int_0^t x^*+\int_0^t y^*\leq\int_0^{2t}(x+y)^*$，其中 x， $y\geq 0$；证明方法与之前相同，只需用 $\int_0^t w^*=\sup\{\int_A|w|:|A|=t\}$ 替代 (6)。命题 4.6 则变为 $x_0(t)=1/(1+t)$；此处 $\int_0^T x_0=\psi(T)$，因此 $\|x_0\|=1$且 $F_{x_0}\equiv 1$。若 x 在有限测度集 A 之外为零，则 $G_{|x|}\leq\|x\|_\infty|A|$ 有界，因此 $\mathrm{Tr}_\omega\in X_s^*$。

(4) 在引理 4.7 中，将无限集 $A\subseteq\mathbb{N}$ 替换为一个具有无限测度的集合 $E\subseteq(0,\infty)$，在该集合上 $g>\varepsilon$（或 $g<-\varepsilon$），并将 x_A 替换为在 E 上取值为 $x_0\circ\sigma$（其他地方为 0）的函数，其中 $\sigma:E\to(0,\infty)$ 是保测映射；于是 $x_0\circ\sigma 1_E$的重排为 x_0，从而得到 $\|M_g^*s\|\geq\lambda(g)$。

(5) 在引理 4.9 和命题 4.10 中，秩的作用由一个保测映射 ρ 承担，该映射将 x 的支集映到 $(0,\infty)$，且在 x 的支集上几乎处处有 $x=x^*\circ\rho$（Ryff 定理，采用第 2 章推论 7.6 第 83] 页的形式 [7, ；它适用，因为 $(0,\infty)$ 是共振的 [7, 第 2 章定理 2.7]，且 $x^*(t)\to 0$ 如同 $t\to\infty$）。不妨设 x 的支集具有无限测度，否则 $x\in X_a$ 且 $s_1(x)=s_2(x)=0$。令 $y=x1_{\rho^{-1}(Q)}$ 并且$z=x-y$，以 $\int_0^t w^*=\sup\{\int_A|w|:\ |A|=t\}$ 代替 (6)；估计相同。

因此，定理 3.1 适用于 $\gamma=\|x_0\|=1$。

6. Positive results and a criterion

6.1. 具有拓扑序单位的巴拿赫格的理想。

命题 6.1. 设 X 是具有拓扑序单位的巴拿赫格 Y 的闭理想。那么 $Z(X^*)=(Z^*(X))^{\mathrm{com}}$。

证明。步骤*1*： X^* 作为 的一个带。设 $X^\perp=\{y^*\in Y^*:y^*|_X=0\}$。如引理 4.2 的证明所示，$X^\perp$是 Y^*中的一个带。由于 Y^* 是戴德金完备的， $Y^*=X^\perp\oplus B$ 满足$B=(X^\perp)^d$；设 P 为投影到 B上的带投影。设 r： $B\to X^*$，$\mathrm{r}(y^*)=y^*|_X$。我们断言，r 是一个满射格等距同构。

- 格同态。*</style}*对于 和 ，由 *(2)，() sup():，* $|z|\leq x\}$，且每个这样的 z 都属于理想 X；因此 $|y^*|(x)=|y^*|_X|(x)$，即$|y^*|\,|_X=|y^*|_X|$。
- 单射。若 $y^*\in B$ 和 $y^*|_X=0$，则 $y^*\in B\cap X^\perp=\{0\}$。
- 满射。</style}给定 $x^*\in X^*$，用哈恩–巴拿赫定理将其延拓为 $y^*\in Y^*$；于是 $Py^*\in B$ 且 $(I-P)y^*\in X^\perp$，所以 $\mathrm{r}(Py^*)=y^*|_X=x^*$。
- 等距性。设 $y^*\in B$。对每个 $w\in X^\perp$, $|y^*-w|=|y^*|+|w|\geq|y^*|$，因为 $y^*\perp w$，所以 $\|y^*-w\|\geq\|y^*\|$。因此 $\|y^*|_X\|=\mathrm{dist}(y^*,X^\perp)=\|y^*\|$，其中第一个等式是用哈恩–巴拿赫定理对限制的范数所作的刻画。

步骤*2*：提升算子。设 $T\in(Z^*(X))^{\mathrm{com}}$ 并令

$$\widetilde{T}=\mathrm{r}^{-1}T\mathrm{r}P\in L(Y^*).$$

令 $R\in Z(Y)$。由于 X 是一个理想且 $|Rx|\leq\kappa|x|$，因此我们有 $RX\subseteq X$ 和 $R|_X\in Z(X)$。由引理 2.1，$R^*\in Z(Y^*)$；由于 $Z(Y^*)$ 是交换的且包含 P， R^* 与 P 交换，并将 B 映入 B （引理 2.2(b)）。对于 $y^*\in B$ 和 $x\in X$，$(\mathrm{r}R^*y^*)(x)=y^*(Rx)=(\mathrm{r}y^*)(R|_Xx)=((R|_X)^*\mathrm{r}y^*)(x)$，即在 B 上 $\mathrm{r}R^*=(R|_X)^*\mathrm{r}$，等价地，$\mathrm{r}^{-1}(R|_X)^*=R^*\mathrm{r}^{-1}$ 于

X^*。因此

$$\widetilde{T}R^* = \mathrm{r}^{-1}T\mathrm{r}R^*P = \mathrm{r}^{-1}T(R|_X)^*\mathrm{r}P = \mathrm{r}^{-1}(R|_X)^*T\mathrm{r}P = R^*\mathrm{r}^{-1}T\mathrm{r}P = R^*\widetilde{T}.$$

~因此 $T \in (Z^*(Y))^{\mathrm{com}}$。

~步骤3。 </style}根据 $[1,$ 定理 9.11(1)], $T \in Z(Y^*)$。中心算子保持带 B 不变，且其在 B 上的限制是中心的；由于 r 是格同构， $T = \mathrm{r}\ \widetilde{T}|_B\,\mathrm{r}^{-1} \in Z(X^*)$。反向包含关系即为(1)。□

命题 6.1 例如适用于每个局部紧 $X = C_0(L)$ L（ $C(\beta L)$ 的一个闭理想），包括非-σ-紧的 L，对于后者， X 没有拓扑序单位。

6.2. 序连续范数。 </style}下面的引理是 $[18,$ 练习 3.1.E3，第 $168]$页；为说明完备性，我们给出简短的论证。

引理 6.2。 设 E 是一个 *Dedekind* 完备 *Banach* 格，且 $T \in L(E)$。若 T 与 E的每个带投影都可交换，则 $T \in Z(E)$。

证明。 对于 $u \in E$，令 P_u 为投影到 $\{u\}^{dd}$上的带投影。于是 $Tu = TP_uu = P_uTu \in \{u\}^{dd}$，因此 T 是带保持的。巴拿赫格上的有界带保持算子是中心的 [18,定理 3.1.12]；这一结论依据 Abramovich、Veksler 和 Koldunov 定理 [2]，该定理指出这类算子是序有界的（另见 [4,定理 4.76] 和 [20,第 2]节）。□

命题 6.3。 若 X 具有序连续范数，则 $Z^*(X) = Z(X^*)$ 且 $Z(X^*) =(Z^*(X))^{\mathrm{com}}$。

命题 6.3 是 $[1,$ 定理 9.10（第 $61]$ 页）的特例；为方便读者，我们给出一个直接证明。

证明。设 $T \in Z(X^*)$。由引理 2.1， $T^* \in Z(X^{**})$。由于 X 的范数是序连续的，X（典范嵌入）是 X^{**} [18,定理 2.4.2(v)]中的一个理想；由于 $|T^*\xi| \le \kappa|\xi|$， T^*将 X映射到 X中，并且 $R = T^*|_X \in Z(X)$。对于 $\varphi \in X^*$ 和 $x \in X$，$(R^*\varphi)(x) = \varphi(T^*x) =(T^*x)(\varphi) =x(T\varphi) =(T\varphi)(x)$，因此 $T = R^* \in Z^*(X)$。于是 $Z^*(X) = Z(X^*)$，且每个 $T \in (Z^*(X))^{\mathrm{com}}$都与 X^*的所有带投影交换，因此由引理 6.2 可知它是中心的。□

这涵盖了例如 $c_0(\Gamma)$ 和 $\ell^p(\Gamma)$、 $1 \le p < \infty$（对于不可数的 Γ），以及 $L^p(\mu)$、 $1 \le p < \infty$（对于非-σ-有限的 μ）。

命题 6.1 和 6.3 并未穷尽所有等式成立的 Banach格。为说明这一点，我们使用两个简单的观察。

引理 6.4。 设 $X = X_1 \oplus X_2$ 是两个 *Banach*格的直和（带有坐标逐点序和任意格范数，例如 $\|(x_1, x_2)\| =\max(\|x_1\|, \|x_2\|)$）。若 $Z(X_i^*) =(Z^*(X_i))^{\mathrm{com}}$ 对于 $i = 1、2$，则 $Z(X^*) = (Z^*(X))^{\mathrm{com}}$。

证明。将 X^* 视为 $X_1^* \oplus X_2^*$，$(\varphi_1, \varphi_2)(x_1, x_2) = \varphi_1(x_1) + \varphi_2(x_2)$；这是一个格同构。令 P_1、 P_2 为 X 的坐标投影；它们是中心的，而 P_i^* 是 X^* 的坐标投影。令 $T \in (Z^*(X))^{\mathrm{com}}$。由于 T 与 P_1^* 和 P_2^* 对易，它具有 $T = T_1 \oplus T_2$ 的形式，其中 $T_i \in L(X_i^*)$。若 $S \in Z(X_1)$，则 $S \oplus 0 \in Z(X)$ 且 $(S \oplus 0)^* = S^* \oplus 0$； T 与该算子的对易关系给出 $T_1S^* = S^*T_1$。因此 $T_1 \in (Z^*(X_1))^{\mathrm{com}} = Z(X_1^*)$，同理 $T_2 \in Z(X_2^*)$。若 $|T_i\varphi_i| \le \kappa_i|\varphi_i|$，则 $|T(\varphi_1, \varphi_2)| \le \max(\kappa_1, \kappa_2)|(\varphi_1, \varphi_2)|$，所以 $T \in Z(X^*)$。反向包含关系由 (1) 给出。□

引理 6.5。 设 Γ 不可数，则 $\ell^1(\Gamma)$ 不格同构于带有拓扑序单位的巴拿赫格的某个闭理想。

证明。 假设 J 是带有拓扑序单位 u的巴拿赫格 Y 的一个闭理想，并且 $V\colon \ell^1(\Gamma) \to J$ 是一个格同构；令 $c = \|V^{-1}\|$ 和 $f_\gamma = Ve_\gamma$，其中 (e_γ) 是单位向量。由于 u 是一个拓扑序单位，当 $n \to \infty$时有 $f_\gamma \wedge nu \to f_\gamma$，因此 $f_\gamma \wedge u \neq 0$。由于 $0 \leq f_\gamma \wedge u \leq f_\gamma$ 且 J 是一个理想，故 $f_\gamma \wedge u \in J$，而 $V^{-1}(f_\gamma \wedge u)$属于由 e_γ生成的 $\ell^1(\Gamma)$中的理想，该理想就是 $\mathbb{R}e_\gamma$。因此 $f_\gamma \wedge u = c_\gamma f_\gamma$，其中 $0 < c_\gamma \leq 1$。元素 $c_\gamma f_\gamma$ 两两不交，所以对于每个有限的 $F \subseteq \Gamma$

$$\sum_{\gamma\in F} c_\gamma f_\gamma = \sup_{\gamma\in F}(f_\gamma \wedge u) \leq u, \qquad \text{and} \qquad \sum_{\gamma\in F} c_\gamma = \Big\|\sum_{\gamma\in F} c_\gamma e_\gamma\Big\|_1 \leq c\,\|u\|.$$

因此 $\sum_{\gamma\in\Gamma} c_\gamma < \infty$，而这对于不可数多个 $c_\gamma > 0$ 来说是不可能的。 □

例 6.6. 设 Γ 不可数且 $X = \ell^1(\Gamma) \oplus \ell^\infty$。由命题 6.3（对于 $\ell^1(\Gamma)$）、命题 6.1（对于具有序单位的 ℓ^∞）和引理 6.4 可得，$Z(X^*) = (Z^*(X))^{\mathrm{com}}$。然而，命题 6.3 不适用于 X，因为其范数不是序连续的；命题 6.1 也不适用：若 X 是带有拓扑序单位的巴拿赫格 Y 的闭理想，那么它的闭理想 $\ell^1(\Gamma) \oplus 0$（理想的理想仍是理想）也应如此，这与引理 6.5 矛盾。（对于可数的 Γ，空间 $\ell^1 \oplus \ell^\infty$ 具有拓扑序单位，因此命题 6.1 适用。）

6.3. **一个判据**。

命题 6.7. 对于巴拿赫格 X，以下各条件等价：

(a) $Z(X^*) \neq (Z^*(X))^{\mathrm{com}}$；***(b)*** 存在 X^* 的两个不相交带 B_1、B_2 以及一个非零有界线性 Θ：$B_1 \to B_2$，使得$\Theta(R\varphi) = R\Theta(\varphi)$ 对所有 $R \in Z^*(X)$ 和 $\varphi \in B_1$成立。

证明。 (b)⇒(a)。令 P_1 为到 B_1 上的带投影，并将其视为作用于 X^* 且取值于 B_2中的算子。每个 $R \in Z^*(X)$都是中心的，因此与 P_1 交换（它们都属于交换代数 $Z(X^*)$），并且保持 B_1 和 B_2 不变；所以 $TR = \Theta P_1 R = \Theta R P_1 = R\Theta P_1 = RT$。取 $\varphi \in B_1$ 满足 $\Theta\varphi \neq 0$；于是 $T\varphi = \Theta\varphi \in B_2$ 与 φ不相交，因此根据引理 2.2(a)，T 不是中心的。

(a)⇒(b)。令 $T \in (Z^*(X))^{\mathrm{com}} \setminus Z(X^*)$。如引理 6.2 的证明所示，$T$ 不是带保持的：存在 φ 使得 $T\varphi \notin \{\varphi\}^{dd}$。令 P 为投影到 $\{\varphi\}^{dd}$ 上的带投影，$B_1 = PX^*$、$B_2 = (I-P)X^*$ 且 $\Theta = (I-P)T|_{B_1}$。于是 Θ与 $Z^*(X)$可交换（P也如此），并且$\Theta\varphi = (I-P)T\varphi \neq 0$。□

6.4. **范数稠密条件**。

定理 6.8。设 X 是一个巴拿赫格，满足对每个 $0 \leq \theta \in X^*$ 及 X^*的每个带投影 P，

$$P\theta \in \overline{\{S^*\theta :\ S \in Z(X)\}} \qquad \textit{(norm closure)}. \tag{7}$$

则 $Z(X^*) = (Z^*(X))^{\mathrm{com}}$。

证明。令 $T \in (Z^*(X))^{\mathrm{com}}$、$\varphi \in X^*$，并设 P是 X^*的一个带投影。置 $\theta = |\varphi| + |T\varphi|$，并选取满足 $S_n^*\theta \to P\theta$的 $S_n \in Z(X)$。算子 $D_n = S_n^* - P$ 在 X^*上是中心的。对于戴德金完备的 X^* 上的中心算子 D 以及 $\chi \geq 0$，对所有 η，我们有 $|D\chi| = |D|\chi$和 $|D\eta| \leq |D||\eta|$（正交态射是序有界且不交性保持的，因此由定理 2.40]可得$|D\eta| = |D||\eta|$）。于是

$$|D_n\varphi| \leq |D_n||\varphi| \leq |D_n|\theta = |D_n\theta|, \qquad |D_nT\varphi| \leq |D_n||T\varphi| \leq |D_n\theta|,$$

且 $\|D_n\theta\| \to 0$给出 $S_n^*\varphi \to P\varphi$和 $S_n^*T\varphi \to PT\varphi$。因此

$$TP\varphi = \lim_n TS_n^*\varphi = \lim_n S_n^*T\varphi = PT\varphi.$$

因此，根据引理 6.2， T 与 X^*的每个带投影以及 $T \in Z(X^*)$都可交换。 □

注 6.9。 (a) 对于 $X = C(Q)$，(7) 成立： $X^* = M(Q)$，带投影将 $0 \le \theta$ 映射$1_E\theta$ 到 Borel 集合 E，根据 Lusin 定理，存在 $f_n \in C(Q)$，使得 $f_n \to 1_E$ 属于 $L^1(\theta)$，即$\|f_n\theta - 1_E\theta\| \to 0$。

(b) 由于 $\{S^*\theta\}$ 是线性子空间，根据 Mazur 定理，其范数闭包等于其在弱拓扑中的闭包 $\sigma(X^*, X^{**})$。根据 $[20, \text{定理 } 2],$，对于具有拓扑满中心的 X，总是包含于 $\sigma(X^*, X)$-闭包中。因此，(7) 恰好要求从弱* 过渡到弱闭包。

(c) 对于 $X = m_\psi$，(7) 对 $\theta = s_1 + s_2$ 和到 $\{s_2\}^{dd}$ 上的投影 P 不成立，因此 $P\theta = s_2$。对于每个 $g \in \ell^\infty$， $M_g^*\theta - s_2 = M_g^*s_1 + M_{g-1}^*s_2$ 满足 $M_g^*s_1 \perp M_{g-1}^*s_2$，由引理 4.7

$$\|M_g^*\theta - s_2\| \ge \max\big(\|M_g^*s_1\|, \|M_{g-1}^*s_2\|\big) \ge \tfrac{1}{\nu}\max\big(\lambda(g), \lambda(1-g)\big) \ge \tfrac{1}{2\nu},$$

因为对于每个 n，$\max(|g_n|, |1 - g_n|) \ge \frac{1}{2}$。

7. Orlicz spaces

本节中所有巴拿赫格均为实数； μ 是 $(\Omega\ \Sigma)$ 上的 σ-有限测度， Φ 是一个 N-函数，而 Ψ 是其互补 N-函数。设 $X = L_\Phi = L_\Phi(\mu)$ 配备 Luxemburg 范数，并设 E_Φ 为 X 中由支撑在有限测度集上的简单函数构成的集合的闭包；$E_\Phi = \{x :$ 对所有 $c > 0\}$， $\int \Phi(c|x|)\, d\mu < \infty$ ，且 E_Φ 是 X 的序连续部分 X_a 。我们使用以下标准事实。

(O1) $X^* = L_\Psi \oplus S$，其中 L_Ψ （采用 Orlicz 范数，通过 $h(x) = \int hx\, d\mu$ 作用）是序连续泛函带，而 $S = (E_\Phi)^\perp$ 是奇异泛函带。 L_Ψ 的范数具有 Fatou 性质。(O2) $Z(X) = \{M_g :$ $g \in L^\infty\}$、 $\|M_g\| = \|g\|_\infty$，并且每个满足 $0 \le y \le x$ 的 y 都可表示为 $y = hx$，其中 $h \in L^\infty$、$0 \le h \le 1$ （参见注 5.4(1)）。

关于 (O1)，参见 $[21, \text{命题 } 2 \text{ 和定理 } 4]$: 每个 $x^* \in X^*$ 都能唯一分解为 $x^* = y^* + z^*$，其中 z^* 在 E_Φ 上为零，而 $y^*(x) = \int hx\, d\mu$，对某个 $h \in L_\Psi$ ($[21, \text{，定理 } 1 \text{ 和引理 } 8]$, 的推论，因为 Ψ 是连续的且 μ 是 σ- 有限；对于有限的 μ，参见 $[5]$)，并且 $|y^*| \wedge |z^*| = 0$ （ Zaanen 在 $[21, \text{命题 } 2]$ 后的评注）。用 Riesz 空间的语言来说： L_Φ 上的序连续泛函带是 L_Φ的伴随空间，它采用 Orlicz 范数时就是L_Ψ ；而 X^* 是这个带与其不交补（即奇异泛函带）的直和 $[25, \text{（定理 132.5 和第 597–598 页）}]$。在 $[21]$ L_Φ 中采用 Orlicz 范数，而在 L_Ψ 中采用 Luxemburg 范数；像此处一样，在 L_Φ上采用 Luxemburg 范数时，这两种范数的作用互换： $h \in L_\Psi$ 的 Orlicz 范数是 $\sup\{\int hx\, d\mu :\ \|x\| \le 1\}$，即在 Luxemburg 范数单位球上的上确界 $[13, \text{（9.25）和第 14 节。5]}$。Orlicz 范数的 Fatou 性质由其定义 $\sup\{\int |h|v\, d\mu :$ $\int \Phi(v)\, d\mu \le 1\}$ $[13, \text{（9.4）以及 Fatou 引理推出。（在 [13] 中，测度是有界集合上的 Lebesgue 测度；这两种论证都不依赖于此。）(O2) 是显然的：对于 } 0 \le y \le x \text{ ，在 } \{x \ne 0\} \text{上取 } h = y/x \text{ ，在其他地方取 } h = 0 \text{； } Z(X) \text{ 的描述可仿照注 5.4(1) 证明。}$

对于 $x \in L_\Phi$ 置

$$\theta_\Phi(x) = \inf\Big\{\lambda > 0 : \int \Phi(|x|/\lambda)\, d\mu < \infty\Big\},$$

并以相同方式在 L_Ψ 上定义 θ_Ψ。那么，由于 Φ的凸性， θ_Φ 是一个半范数； $\theta_\Phi \le \|\cdot\|$， θ_Φ 恰好在 E_Φ上为零；当 $|x| \le |y|$时， $\theta_\Phi(x) \le \theta_\Phi(y)$，并且

$$\theta_\Phi(1_{A\cup A'}x) = \max\big(\theta_\Phi(1_Ax), \theta_\Phi(1_{A'}x)\big) \qquad (A, A' \in \Sigma), \tag{8}$$

因为可容许的 λ 是一个向上射线，并且当且仅当关于 A 和 A' 的两个积分均为有限值时，$\int_{A\cup A'} \Phi(|x|/\lambda) < \infty$。同样地，对于 $x,\ y \ge 0$， $\theta_\Phi(x \vee y) = \max(\theta_\Phi(x)\ \theta_\Phi(y))$。相同的

结论也适用于 θ_Ψ，并且对于 L_Ψ 作为 X^* 的子空间的范数，$\theta_\Psi(k) \le \|k\|$（Orlicz 范数支配 Luxemburg 范数）。

引理 7.1。$\operatorname{dist}(x, E_\Phi) = \theta_\Phi(x)$ 对于 $x \in X$，且 X^* 的范数在 S_+上可加，即 S 是一个 *AL*-空间。

证明。若 $e \in E_\Phi$，则 $\theta_\Phi(x) = \theta_\Phi(x-e) \le \|x-e\|$，所以 $\theta_\Phi(x) \le \operatorname{dist}(x, E_\Phi)$。反过来，设$\lambda > \theta_\Phi(x)$，设 $F_1 \subseteq F_2 \subseteq \cdots$是并为 Ω 的有限测度集合，且 $x_n = x1_{\{|x|\le n\}\cap F_n} \in E_\Phi$。由控制收敛定理，$\int \Phi(|x-x_n|/\lambda) \to 0$，因此当 n充分大时，$\|x-x_n\| \le \lambda$。于是，巴拿赫格 X/E_Φ 的商范数为 $[x] \mapsto \theta_\Phi(x)$。$X/E_\Phi$ 的正元素有正代表元，且 $[x] \vee [y] = [x \vee y]$，所以对于 $[x]$、$[y] \ge 0$，$\|[x] \vee [y]\| = \max(\|[x]\|, \|[y]\|)$：$X/E_\Phi$ 是一个 AM-空间。根据命题 1.4.7(i)，其对偶是一个 AL-空间 [18, 。最后，商映射 $\mathrm{q}: X \to X/E_\Phi$ 是一个格同态 [18, 命题 1.3.13]，并且是区间保持的（若 $0 \le \mathrm{q}(y) \le \mathrm{q}(x)$，则 $\mathrm{q}(y) = \mathrm{q}(y^+ \wedge x)$，其中 $0 \le y^+ \wedge x \le x$），因此其伴随算子是一个格同态 [18, 定理 1.4.19(ii)]；由于它是从 $(X/E_\Phi)^*$ 到 $(E_\Phi)^\perp$上的等距映射，因此它是到 $S = (E_\Phi)^\perp$上的格等距同构。（对于 L_Φ 上的 Orlicz 范数，S_+ 上范数的可加性见 [21,引理 6]；另见 [25, 定理 133.6], ，其中将这一结果归功于 Andˆo [5]。）□

对于 $g \in L^\infty$和 $\varphi \in X^*$，我们记作 $g\varphi = M_g^*\varphi$；在 L_Ψ 上，这就是逐点乘积。两个带在 $\varphi \mapsto g\varphi$下均保持不变。令 P为将 X^* 投影到 L_Ψ 上的带投影，令 $Q = I - P$为投影到 S上的带投影。由于 L_Ψ 是 $L^0(\mu)$的理想，其带投影为算子 $k \mapsto 1_E k$、$E \in \Sigma$。令 $(L_\Psi)_a$ 为 L_Ψ的序连续部分；它是 E_Ψ。（例如，当 Ψ 在 μ 为无原子且无限时对所有 u 满足 Δ_2，在 μ为无原子且有限时对较大的 u 满足该条件，而在 μ 为 $\mathbb{N}$上的计数测度时对较小的 u 满足该条件时，$L_\Psi = E_\Psi$。）

如果有界线性映射 Θ 将 B_1 中的一个带映射到 X^* 的一个带 B_2，并且对所有 $g \in L^\infty$、$\varphi \in B_1$都有 $\Theta(g\varphi) = g\Theta(\varphi)$，我们称其为模映射 。

7.1. **奇异泛函**。

引理 7.2. 设 $0 \le \sigma \in S$。存在 $B_m \in \Sigma\ (m \in \mathbb{N})$，使得 $\|1_{\Omega\setminus B_m}\sigma\| \le 2^{-m}$ 且 $1_{B_m} \to 0\mu$-几乎处处。

证明。设 $F_1 \subseteq F_2 \subseteq \cdots$是有限测度集，其并为 Ω。取 $0 \le y_m \in X$、$\|y_m\| \le 1$，使得 $\sigma(y_m) > \|\sigma\| - 2^{-m}$。由于 $\int \Phi(y_m)\,d\mu \le 1$，我们有 $\mu\{y_m > n\} \le 1/\Phi(n) \to 0$，因此存在 n_m使得 $\mu\{y_m > n_m\} < 2^{-m}$。令 $B_m = \{y_m > n_m\} \cup (\Omega \setminus F_m)$。于是 $y_m 1_{\Omega\setminus B_m}$ 有界且支撑于 F_m，所以它属于 E_Φ，并且 σ 在其上为零。因此

$$\|1_{B_m}\sigma\| \ge (1_{B_m}\sigma)(y_m) = \sigma(y_m) > \|\sigma\| - 2^{-m}.$$

由于 $1_{B_m}\sigma$ 和 $1_{\Omega\setminus B_m}\sigma$ 是 S 中的正元素，且它们的和为 σ，由引理 7.1 可得 $\|1_{\Omega\setminus B_m}\sigma\| = \|\sigma\| - \|1_{B_m}\sigma\| < 2^{-m}$。最后，$\sum_m \mu\{y_m > n_m\} < \infty$，因此根据 Borel–Cantelli 引理，几乎每个点只属于有限多个集合 $\{y_m > n_m\}$；对于所有充分大的 m，它也属于 F_m。故 $1_{B_m} \to 0$ 几乎处处成立 □

引理 7.3。设 $\sigma_1, \sigma_2 \in S_+$ 满足 $\sigma_1 \perp \sigma_2$，并设 $\varepsilon > 0$。存在 $h \in L^\infty$, $0 \le h \le 1$，使得$\|h\sigma_1\| \le 2\varepsilon$ 且 $\|(1-h)\sigma_2\| \le 2\varepsilon$。

证明。取 $0 \le x_i \in X$, $\|x_i\| \le 1$，使得 $\sigma_i(x_i) > \|\sigma_i\| - \varepsilon$，并令 $x = x_1 + x_2$。由 (2) 可得 $0 \le y \le x$ 满足 $\sigma_1(y) + \sigma_2(x-y) < \varepsilon$，且由 (O2) 可得 $y = hx$ 满足 $h \in L^\infty$, $0 \le h \le 1$。由于$\sigma_1 \ge 0$ 且 $hx_1 \le hx$, $\sigma_1(hx_1) < \varepsilon$，故

$$\|(1-h)\sigma_1\| \ge \sigma_1((1-h)x_1) = \sigma_1(x_1) - \sigma_1(hx_1) > \|\sigma_1\| - 2\varepsilon.$$

由引理 7.1，$\|h\sigma_1\| = \|\sigma_1\| - \|(1-h)\sigma_1\| < 2\varepsilon$。同理，利用 $\sigma_2((1-h)x_2) \le \sigma_2((1-h)x) < \varepsilon$，可得 $\|(1-h)\sigma_2\| < 2\varepsilon$。□

引理 7.4。 设 B_1, B_2 是包含于 S 中的 X^* 的不相交带。每个模映射 $\Theta:\ B_1 \to B_2$均为零。

证明。 只需证明 $\Theta\sigma = 0$ 对 $0 \le \sigma \in B_1$成立。设 $\tau = \Theta\sigma$；则 $|\tau| \in B_2$，因此 $|\tau| \perp \sigma$。令$\varepsilon > 0$，并令 h为引理 7.3 对 $\sigma_1 = \sigma$、 $\sigma_2 = |\tau|$给出的泛函。由于 M_h^*是正中心算子， $|h\tau| = h|\tau|$，且

$$\|\tau\| \le \|h|\tau|\| + \|(1-h)|\tau|\| \le \|h\tau\| + 2\varepsilon = \|\Theta(h\sigma)\| + 2\varepsilon \le 2(\|\Theta\| + 1)\varepsilon.$$

因此 $\tau = 0$。 □

注 7.5。 引理 7.4 正是 Orlicz 空间与 m_ψ不同之处。在第 5 节的反例中， s_1 和 s_2 是互不相交的奇异泛函，但 m_ψ 的带 X_s^* 不是 AL-空间（否则，用引理 4.3(c)代替 (O2)，引理 7.3 和 7.4 的证明便可用于将定理 5.1 中的算子 T限制到 $\{s_1\}^{dd}$），且对于两个 i， $\|M_g^* s_i\|$ 都与$\lambda(g)$可比较，因此引理 7.3 的类似结论不成立。

7.2. **交换子的结构**。

定理 7.6. 设 $X = L_\Phi(\mu)$ 如上，并设 $T \in L(X^*)$。那么 $T \in (Z^*(X))^{\mathrm{com}}$ 当且仅当

$$T = AP + BQ + RP, \tag{9}$$

其中 $A, B \in Z(X^*)$ 且 $R:\ L_\Psi \to S$ 是一个模映射。每个模映射 $L_\Psi \to S$ 在$(L_\Psi)_a$上均为零，并且 $T \in Z(X^*)$ 当且仅当 $R = 0$。因此， $Z(X^*) = (Z^*(X))^{\mathrm{com}}$ 当且仅当每个模映射 $L_\Psi \to S$ 都为零；特别地，当$(L_\Psi)_a = L_\Psi$时，等式成立。

证明。充分性。 AP和 BQ 是中心的，因此与 $Z^*(X) \subseteq Z(X^*)$可交换。对于 $g \in L^\infty$， P与 M_g^* 可交换，因此 $RP(g\varphi) = R(gP\varphi) = gRP\varphi$。

必要性。 令 $T \in (Z^*(X))^{\mathrm{com}}$。由于 P， $Q \in Z(X^*)$ 与每个 M_g^* 交换，四个映射$PT|_{L_\Psi}$、 $QT|_{L_\Psi}$、 $PT|_S$、$QT|_S$都是模映射。

(i) $PT|_S = 0$。令 $0 \le \sigma \in S$、 $k = PT\sigma \in L_\Psi$，令 B_m 如引理 7.2 中所述，并置$C_m = \bigcap_{j \ge m}(\Omega \setminus B_j)$。由于 $1_{B_j} \to 0$ 几乎处处成立， $C_m \uparrow$除去一个零测集外在 Ω 上成立。由于 $0 \le 1_{C_m}\sigma \le 1_{\Omega\setminus B_m}\sigma$，我们有 $\|1_{C_m}\sigma\| \le 2^{-m}$，而 $1_{C_m}k = PT(1_{C_m}\sigma)$ 给出 $\|1_{C_m}k\| \le \|T\|2^{-m}$。由于 $1_{C_m}|k| \uparrow |k|$ 几乎处处成立，且 L_Ψ 的范数具有 Fatou 性质，$\|k\| =$ 极限$_m \|1_{C_m}k\| = 0$。

(ii) 每个模映射 $\Theta:\ L_\Psi \to S$ 在 $(L_\Psi)_a$上都为零；特别地， $QT|_{L_\Psi}$也如此。令$h \in (L_\Psi)_a$，$\tau = \Theta h \in S$，并令 B_m 由引理 7.2 对 $|\tau|$给出。则 $1_{B_m}\tau = \Theta(1_{B_m}h)$，且

$$\|\tau\| \le \|1_{B_m}\tau\| + \|1_{\Omega\setminus B_m}|\tau|\| \le \|\Theta\|\,\|1_{B_m}h\| + 2^{-m}.$$

由于 $|1_{B_m}h| \le |h|$，$1_{B_m}h \to 0$ 几乎处处成立，且 h 具有序连续范数，故 $\|1_{B_m}h\| \to 0$。因此 $\tau = 0$。(iii) $PT|_{L_\Psi}$在 L_Ψ上是中心的：它与 L_Ψ的每个带投影 $k \mapsto 1_E k$都交换，因此引理 6.2 可应用于 $E = L_\Psi$。

(iv) $QT|_S$ 在 S上是中心的。否则，如引理 6.2 的证明所示，它不带保持：存在 $\varphi \in S$ 使得 $QT\varphi \notin \{\varphi\}^{dd}$。令 P_φ 为投影到 $\{\varphi\}^{dd}$上的带投影。它是中心的，因此与 M_g^*交换，而 $(I - P_\varphi)QT|_{\{\varphi\}^{dd}}$是从 $\{\varphi\}^{dd}$到不交带 $S \cap \{\varphi\}^{d}$的非零模映射。这与引理 7.4 矛盾。

令 $A = PTP$、 $B = QTQ$ 和 $R = QT|_{L_\Psi}$。由 (iii) 和 (iv)， A 和 B 在 X^* 上是中心的（在两个互补带上分别为中心算子的算子，在 X^* 上构成一个中心算子）。由 (i)，$PTQ = 0$，因此 $T = PTP + QTP + QTQ = AP + RP + BQ$；根据 (ii)， R 在 $(L_\Psi)_a$ 上为零。

中心性。 如果 $R = 0$，那么 $T = AP + BQ$ 是中心的。反之，如果 T 是中心的，那么 $RP = T - AP - BQ$也是中心的。对于 $h \in L_\Psi$，我们有 $RPh = Rh \in S$，它与 h不相交，因此根据引理 2.2(a)， $Rh = 0$□

7.3. 所有奥利奇空间中的等式。 设 φ 是 Φ 的右导数，并且 $\psi(v) = \sup\{s \geq 0 : \varphi(s) \leq v\}$ 是其右逆，从而 $\Phi(u) = \int_0^u \varphi$ 以及 $\Psi(v) = \int_0^v \psi$ [13, 第一章，第§2]节。由于φ 和 ψ 都是非递减的，

$$\Phi(u) \leq u\varphi(u), \qquad \Psi(v) \leq v\psi(v) \qquad (u, v \geq 0), \tag{10}$$

并且如果 $v < \varphi(u)$，那么 $\psi(v) \leq u$。

引理 7.7。 设 $x \in L_\Phi$ 和 $h \in L_\Psi$。存在 $A \in \Sigma$ 使得 $1_A x \in E_\Phi$ 和 $1_{\Omega\setminus A} h \in E_\Psi$。

证明。 不妨设 $x,\ h \geq 0$。根据 Hölder 不等式， $xh \in L^1(\mu)$。

一个权函数。设 $F_1 \subseteq F_2 \subseteq \cdots$ 为有限测度集，其并集为 Ω，且 $B_n = F_n \cap \{x \leq n,\ h \leq n\}$。则除去一个零测集外， $B_n \uparrow \Omega$，并且 $1_{B_n} x \in E_\Phi$、 $1_{B_n} h \in E_\Psi$，因为支集包含于有限测度集上的有界函数属于 E_Φ 和 E_Ψ。根据控制收敛定理，存在$n_1 < n_2 < \cdots$使得 $\int_{\Omega\setminus B_{n_j}} xh\, d\mu \leq 4^{-j}$。在 B_{n_1} 上令 $w = 1$，在 $B_{n_j} \setminus B_{n_{j-1}}$上令 $w = j$，对于 $j \geq 2$。则 $w \geq 1$ 是可测的，

$$\int w^2 xh\, d\mu \leq \int xh\, d\mu + \sum_{j\geq 2} j^2\, 4^{-(j-1)} < \infty,$$

且当 $\{w < \lambda\} \subseteq B_{n_j}$ $j \geq \lambda$ 时。

集合。令 $A = \{wh \geq \varphi(wx)\}$。在 A 上，由 (10)， $\Phi(wx) \leq wx\,\varphi(wx) \leq w^2 xh$。在 Ω 上， $\setminus A$ 我们有 $wh < \varphi(wx)$，因此 $\psi(wh) \leq wx$，并且由 (10)， $\Psi(wh) \leq wh\,\psi(wh) \leq w^2 xh$。

结论。令 $\lambda \geq 1$，并固定一个整数 $j \geq \lambda$。在 $A \cap \{w \geq \lambda\}$ 上，我们有 $\Phi(\lambda x) \leq \Phi(wx) \leq w^2 xh$，且 $\{w < \lambda\} \subseteq B_{n_j}$，因此

$$\int_A \Phi(\lambda x)\, d\mu \leq \int w^2 xh\, d\mu + \int \Phi(\lambda 1_{B_{n_j}} x)\, d\mu < \infty.$$

因此 $1_A x \in E_\Phi$。同理，利用 Ω 上关于 $\Psi(wh)$ 的估计， $\setminus A$, $\int_{\Omega\setminus A} \Psi(\lambda h)\, d\mu < \infty$ 对每个 $\lambda > 0$ 都成立，即 $1_{\Omega\setminus A} h \in E_\Psi$。 □

注记 7.8。 证明只用到了 $xh \in L^1(\mu)$。逐点来看，它表示 $\min\big(\Phi(wx)\ \Psi(wh)\big) \leq w^2 xh$，这是杨氏不等式的一种形式；关键在于尺度 w 可以随点变化并趋于 ∞，而 $w^2 xh$仍然可积。

定理 7.9。 设 μ 是一个 σ-有限测度， Φ 是一个 N-函数，且 $X = L_\Phi(\mu)$。每个有界模映射 $L_\Psi \to S$ 均为零。因此， $Z(X^*) = (Z^*(X))^{\mathrm{com}}$，并且$(Z^*(X))^{\mathrm{com}}$ 中的每个算子都具有 $AP + BQ$ 的形式，其中 A、 $B \in Z(X^*)$。

证明。 设 $R\colon L_\Psi \to S$ 是一个有界模映射， $h \in L_\Psi$ 且 $\tau = Rh$。令 $x \in X$，并令 A由引理 7.7给出。由于 $1_{\Omega\setminus A} h \in E_\Psi = (L_\Psi)_a$，定理 7.6证明的(ii)部分给出$1_{\Omega\setminus A}\tau = R(1_{\Omega\setminus A} h) = 0$，因此 $\tau = 1_A\tau$。由于 $1_A x \in E_\Phi$ 且 $\tau \in S = (E_\Phi)^\perp$，

$$\tau(x) = (1_A\tau)(x) = \tau(1_A x) = 0.$$

由于 x 是任意的， $\tau = 0$，因此 $R = 0$。其余断言由定理 7.6 得出。 □

对于奥利奇空间的对偶，我们需要引理 6.4 的逆命题。

引理 7.10。 令 $X = X_1 \oplus X_2$ 如引理 *6.4* 中所述。若 $Z(X^*) = (Z^*(X))^{\mathrm{com}}$，则 $Z(X_1^*) = (Z^*(X_1))^{\mathrm{com}}$。

证明。 令 $T_1 \in (Z^*(X_1))^{\mathrm{com}}$ 且 $S \in Z(X)$。由于 S 与中心坐标投影对易， $S = S_1 \oplus S_2$，并且 $S_i \in Z(X_i)$，因为 $|S_i x_i| \leq \kappa |x_i|$。因此 $S^* = S_1^* \oplus S_2^*$与 $T_1 \oplus 0$对易。所以 $T_1 \oplus 0 \in (Z^*(X))^{\mathrm{com}} = Z(X^*)$，且 $T_1 \in Z(X_1^*)$。 □

推论 7.11。设 μ 为 σ-有限的，且 Φ 为一个 N-函数。则 $Z(X^*) = (Z^*(X))^{\mathrm{com}}$ 对于 $X = L_\Phi(\mu)^*$。

证明。根据 (O1)，$X = L_\Psi \oplus S$ 是带格范数的两个带的直和。带 S 是一个 AL-空间（引理 7.1），因此它具有序连续范数，并且根据命题 6.3 满足等式。空间 L_Ψ 赋有 Orlicz 范数，该范数等价于其 Luxemburg 范数；换用等价的格范数既不改变中心，也不改变交换子。对于 Luxemburg 范数，L_Ψ 根据应用于 Ψ 的定理 7.9 满足等式，其中 Ψ 的共轭函数是 Φ。根据引理 6.4，X 成立等式。□

引理 6.4 和 7.10 共同表明，对于直和，满足等式当且仅当每个直和项都满足等式。特别地，对于 L_Φ^*，满足等式当且仅当对于 L_Ψ 满足等式。

7.4. **先前结果未涵盖的奥利奇空间**。定理 7.9 涵盖了命题 6.1 和 6.3 以及 [1, 定理 9.11] 第 (1) 部分不适用的空间。例如，设$X = L_{\exp}[0,1]$, $\Phi(u) = e^u - 1 - u$。命题 6.3 不适用，因为 $\Phi \notin \Delta_2$。[1, 定理 9.11]的第 (1) 部分也不适用：若 μ 是有限且无原子的，并且 $L_\Phi \neq E_\Phi$，那么 L_Φ 没有拓扑序单位。事实上，设 $0 \le w \in L_\Phi$，并选取 k，使得 $G = \{w \le k\}$ 具有正测度。由于 μ 有限且无原子，$L_\Phi \neq E_\Phi$ 意味着 Φ 对较大的 u不成立，于是对每个具有正测度的 G，都有$L_\Phi(G) \neq E_\Phi(G)$；因此存在一个 $0 \le x \in L_\Phi$，支撑于 G，且$\theta_\Phi(x) = 1$。若 $|y| \le nw$，则在 G上有 $|y| \le nk$，因此在 G 上 $|x - y| \ge (x - nk)^+$，并且

$$\|x - y\| \ge \theta_\Phi\big((x - nk)^+\big) = \theta_\Phi(x) = 1,$$

因为 $x - (x - nk)^+$ 有界且支集包含于 G，因而包含于 E_Φ。所以 x 不属于由 w生成的闭理想。

命题 6.1 也不适用。这由上一段和下一个引理可知，因为 Luxemburg 范数具有引理意义下的 Fatou 性质（参见 [25,定理 131.7]）：若 $0 \le x_k \uparrow x$几乎处处成立且 $\|x_k\| \le M$，则 $\int \Phi(x_k/M)\, d\mu \le 1$，因此由单调收敛可得 $\int \Phi(x/M)\, d\mu \le 1$，即 $x \in L_\Phi$ 且 $\|x\| \le M$。

引理 7.12。设 μ 是有限测度，且 X 是 $L^0(\mu)$ 的一个理想，其中 $L^\infty(\mu) \subseteq X$，并赋予其具有 *Fatou* 性质的完备格范数：若 $0 \le x_k \uparrow x$ 几乎处处成立，$x_k \in X$ 且$\sup_k \|x_k\| < \infty$，则 $x \in X$ 且 $\|x\| \le \sup_k \|x_k\|$。若 X 与某个具有拓扑序单位的巴拿赫格的闭理想格同构，则 X 具有拓扑序单位。

证明。设 V是从 X 到巴拿赫格 Y的闭理想 J 上的格同构，并设u 是 Y的拓扑序单位。巴拿赫格之间的正算子都是有界的，因此$c = \|V^{-1}\| < \infty$。X 中的格运算几乎处处按点进行。对于 $x \in X_+$ 和 $r > 0$，元素 $Vx \wedge ru$ 属于 J，因为 $0 \le Vx \wedge ru \le Vx$。

步骤*1*。令 $g_k = V^{-1}(V(k1) \wedge u) \in X_+$, $k \in \mathbb{N}$。对于 $m \ge k$, $V(g_m \wedge k1) = V(m1) \wedge u \wedge V(k1) = V(k1) \wedge u = Vg_k$, 因此 $g_m \wedge k1 = g_k$。于是 (g_k) 是递增的，并且令 $g = \sup_k g_k$（逐点取上确界，取值于 $[0,\infty]$），则有 $g_k = \min(g, k)$ 几乎处处成立。

步骤*2*：$V^{-1}(Vx \wedge u) = x \wedge g$ 对于 $x \in X_+$。令 $x_k = x \wedge k1$。由于 $x_k \le k1$,

$$Vx_k \wedge u = Vx_k \wedge V(k1) \wedge u = V(x_k \wedge g_k) = V(x_k \wedge g),$$

因为 $x_k \wedge \min(g, k) = x_k \wedge g$。由 $Y, 0 \le Vx \wedge u - Vx_k \wedge u \le Vx - Vx_k$ 中的伯克霍夫不等式；应用 V^{-1}, $0 \le V^{-1}(Vx \wedge u) - x_k \wedge g \le x - x_k$, 且 $x - x_k \to 0$ 几乎处处成立。令 $k \to \infty$，即可得到所需结论。将 x 替换为 x/n, 同样有 $V^{-1}(Vx \wedge nu) = x \wedge ng$，对于 $n \in \mathbb{N}$。

步骤*3*：$g \in X$。根据步骤1，$\|\min(g, k)\| = \|g_k\| = \|V^{-1}(V(k1) \wedge u)\| \le c\|u\|$ 对每个 k 都成立，并且 $\min(g, k) \uparrow g$。此外 $g < \infty$ 几乎处处成立：如果 $A = \{g = \infty\}$，那么 $k1_A \le \min(g, k)$，因此 $k\|1_A\| \le c\|u\|$对所有 k 都成立，从而 $1_A = 0$ 属于 X 且 $\mu(A) = 0$。由 Fatou 性质，$g \in X$。

步骤*4*。令 $x \in X_+$ 和 $\varepsilon > 0$。由于 u是拓扑序单位，因此存在 $y \in Y$，使得$|y| \le mu$ 对某个 m 和 $\|Vx - y\| < \varepsilon$成立。对于 $n \ge m$,

$$0 \le Vx - Vx \wedge nu = (Vx - nu)^+ \le (Vx - |y|)^+ \le (Vx - y)^+ \le |Vx - y|,$$

因此，根据步骤2，$\|x - x \wedge ng\| = \|V^{-1}(Vx - Vx \wedge nu)\| \le c\varepsilon$。由于 $0 \le x \wedge ng \le ng$，每个 $x \in X_+$，从而每个 $x \in X$，都属于由 g 生成的 X 的闭理想；也就是说，g 是 X的拓扑序单位。□

因此，$L_{\exp}[0,1]$，以及更一般地，所有满足 μ 有限且无原子、并且 $L_\Phi \ne E_\Phi$ 的 $L_\Phi(\mu)$，都不同构于某个具有拓扑序单位的巴拿赫格的闭理想；命题 6.1 和 6.3 以及定理 9.11] 的第 (1) 部分均不适用于它，而定理 7.9 适用于它们所有。

8. Open problems

问题 8.1。刻画具有拓扑满中心的巴拿赫格 X，使得 $Z(X^*) = (Z^*(X))^{\mathrm{com}}$。定理 6.8 的逆命题是否成立?

问题 8.2。对于哪些凹函数 ψ，Marcinkiewicz 空间m_ψ 和 M_ψ中的等式不成立? 我们的构造使用了两个定义在互不相交的尺度集上的互不相交的正对称奇异泛函；选择 $\psi(t) = \log(1+t)$ 通过命题 4.6 中的 $\psi(2t)/\psi(t) \to 1$ 以及引理 4.9 和命题 4.10 中的尺度估计起作用。还需注意，我们证明 Orlicz 空间中的等式成立（定理 7.9）时，用到了 Orlicz 空间对偶的奇异部分是一个 AL-空间这一事实（引理 7.1；另见 [5, 21, 8]）；而对于某些 Marcinkiewicz 函数空间，这一事实并不成立 [8, 例 8.2–8.4]。

该方法需要非零的正对称泛函，而当 ψ正则增长时，这类泛函并不存在。设对所有 $t > 0$，都有 $\psi(2t) \ge (1+\delta)\psi(t)$，且 $\delta > 0$。令 $D_m x(t) = x(t/m)$。由于 $(D_m x)^*(t) = x^*(t/m)$,

$$\int_0^t (D_{2^n} x)^* = 2^n \int_0^{t/2^n} x^* \le 2^n \psi(t/2^n)\|x\| \le \Big(\frac{2}{1+\delta}\Big)^n \psi(t)\|x\|,$$

因此 $\|D_{2^n}\| \le 2^{nr}$满足 $r = 1 - \log_2(1+\delta) < 1$。另一方面，$D_2 x$与两个互不相交的 x副本之和等测度，因此正对称泛函 s 满足 $s(D_{2^n} x) = 2^n s(x)$，其中 $x \ge 0$。故对所有 n，都有 $2^n s(x) \le 2^{nr}\|s\|\|x\|$，且 $s = 0$。同样的论证适用于m_ψ，此时 $(D_m x)^n = x_{\lceil n/m \rceil}$。例如，这适用于 $\psi(t) = t^p$, $0 < p < 1$（于是 $r = 1 - p$），也就是弱 L^q 空间 $q = 1/(1-p)$。反过来，根据 [10, 定理 3.4]，$M_\psi(0,\infty)$ 上存在一个非零对称泛函，其支撑集为 ∞（即在 $M_\psi \cap L^1$ 上取值为零），当且仅当 $\liminf_{t\to\infty} \psi(2t)/\psi(t) = 1$ 且 $\psi(t) \to \infty$，当 $t \to \infty$ 时成立；而存在一个支撑于 0 的泛函（在$M_\psi \cap L^\infty$ 上取值为零），当且仅当 $\liminf_{t\downarrow 0} \psi(2t)/\psi(t) = 1$ 且 $\psi(0+) = 0$。这类泛函是奇异的。在 [10] 中，若正泛函关于次主序单调，则称其为对称泛函；这类泛函在等测度的正函数上取值相同，因此符合我们所说的对称性。对于 $\psi(t) = \log(1+t)$，只有 ∞ 处的行为才相关，因为当 $t \downarrow 0$时，$\psi(2t)/\psi(t) \to 2$。

这种二分由生成 Marcinkiewicz空间的函数的正则性所决定，Mekler [15, 17] 对此进行了研究。对于定义在 $[0,1]$, 上且满足 $\psi(t) = \int_0^t f$ 的 Marcinkiewicz空间，Mekler 证明，$\liminf_{t\to 0} \psi(2t)/\psi(t) > 1$ 等价于 f 的正则性 $f^{**} \le Kf^*$、主重排不变理想与主控理想 $N_f = M_f$ 相等，以及 N_f [15, 可范数化（定理 3]；主要蕴含关系可追溯至 [16]; 另见 [6, 推论 4.1], ，其中证明了这些条件等价于 M_f 的 Hardy–Littlewood性质，也等价于伸缩算子 $(\sigma_\tau x)(t) = x(t/\tau)$, $\tau \ge 1$) 满足 $\lim_{\tau\to\infty} \tau^{-1}\|\sigma_\tau\|_{M_f \to M_f} = 0$，并且还等价于压缩–膨胀算子 ($\|\rho_s\|_{M_\psi \to M_\psi} \le k s^{-p}$)($0 < s \le 1$) $k > 0$ 和 $p \in (0,1)$ 满足幂估计,

若 $st \le 1$，则压缩–膨胀算子 $(\rho_s x)(t) = x(st)$；若 $st > 1$，则 $(\rho_s x)(t) = 0$；此外，还等价于每个 σ-子代数 [17, 对 N_f 的平均化（定理 1.4]）。这引出了两个问题：对于每个正则的 ψ Marcinkiewicz空间，等式是否成立？对于每个 m_ψ 和 $M_\psi(0,\infty)$，若 $\liminf_{t\to\infty} \psi(2t)/\psi(t) = 1$ 且 $\psi(\infty) = \infty$，等式是否都不成立？对于每个 $M_\psi(0,\infty)$，若 $\liminf_{t\downarrow 0} \psi(2t)/\psi(t) = 1$ 且 $\psi(0+) = 0$，等式是否也都不成立？

致谢。反例以及本文的其他若干结果，是第二作者与由 Anthropic 开发的人工智能系统 Claude 经过长期互动后获得的。Claude 还起草了本文的初稿。研究人员仅向 Claude 提供了手稿，并由 Claude 的不同实例对证明进行了审阅。作者已核查所有论证，并对本文内容承担全部责任。

References

[1] Y. A. Abramovich、E. L. Arenson 和 A. K. Kitover, *Banach C K -modules and operators preserving dis- ( ), 《Pitman数 jointness 277, 1992* 学研究笔记丛书》Longman，Harlow，。[2] Y. A. Abramovich、A. I. Veksler 和 A. V. Koldunov, *On operators preserving disjointness*, 《苏联数学文摘》20（1979），1089–1093。[3] R. P. Agnew 和 A. P. Morse, *Extensions of linear functionals, with applications to limits, integrals, measures, and densities 2 **39** 1938 20 30* ，《数学年刊》（） （），–。[4] C. D. Aliprantis 和 O. Burkinshaw, *Positive operators*, Springer，多德雷赫特，2006年（1985年版本的重印版）。[5] T. Andˆo, *Linear functionals on Orlicz spaces*, 《新数学档案》（第3辑）8（1960），1–16。[6] M. Sh. Braverman 和 A. A. Mekler, *The Hardy–Littlewood property for symmetric spaces*, 《西伯利亚数学杂志》18（1977），第3期，371–385（译自《西伯利亚数学杂志》18（1977），第3期，522–540）。[7] C. Bennett 和 R. Sharpley, *Interpolation of operators*, 《纯粹与应用数学》129，Academic Press，波士顿，1988年。[8] E. de Jonge, *The semi-M property for normed Riesz spaces*, 《数学汇刊》34（1977），147–172。[9] J. Dixmier, *Existence de traces non normales*, 《巴黎科学院报告》S´辑A-B 262（1966），A1107–A1108。[10] P. G. Dodds、B. de Pagter、E. M. Semenov 和 F. A. Sukochev, *Symmetric functionals and singular traces*, 《正性》2（1998），47–75。[11] D. B. Goodner, *Projections in normed linear spaces*, 《美国数学会汇刊》69（1950），89–108。[12] J. L. Kelley, *Banach spaces with the extension property*, 《美国数学会汇刊》72（1952），323–326。[13] M. A. Krasnosel'skii 和 Ya. B. Rutickii, *Convex functions and Orlicz spaces*, P. Noordhoff，格罗宁根，1961年。[14] S. Lord、F. Sukochev 和 D. Zanin, *Singular traces: theory and applications*, De Gruyter数学研究丛书46，De Gruyter，柏林，2013年。[15] A. A. Mekler, *On regularity and weak regularity of functions generating Marcinkiewicz spaces*, 载于：《函数空间V》（Pozna´n，2000），《纯粹与应用数学讲义》213，Dekker，纽约，2000年，379–387。[16] A. A. Mekler, *On the Hardy–Littlewood property in a Marcinkiewicz space*, 《高等院校学报：数学》1975年，第3期，104–106（俄文）。[17] A. A. Mekler, *Conditional expectations and interpolation of linear operators New developments in Ryff–* , , LAP *Calderón approach 2019* Lambert学术出版，。[18] P. Meyer-Nieberg, *Banach lattices*, Springer，柏林，1991年。[19] L. Nachbin, *A theorem of the Hahn–Banach type for linear transformations*, 《美国数学会汇刊》68（1950），28–46。[20] M. Orhon, *The ideal center of the dual of a Banach lattice*, 《正性》14（2010），841–847。[21] M. M. Rao, *Linear functionals on Orlicz spaces: general theory*, 《太平洋数学杂志》25（1968），553–585。[22] H. H. Schaefer, *Banach lattices and positive operators*, Springer，柏林，1974年。[23] A. W. Wickstead, *The structure space of a Banach lattice*, 《纯粹与应用数学杂志》（第9辑）56（1977），39–54。[24] A. W. Wickstead, *Extremal structure of cones of operators*, 《牛津数学季刊》（第2辑）32（1981），239–253。[25] A. C. Zaanen, *Riesz spaces II*, North-Holland，阿姆斯特丹，1983年。

Department of Mathematics, Faculty of Science, Istanbul University, Istanbul, Türkiye
Email address: hduru@istanbul.edu.tr

Community College of Philadelphia, 1700 Spring Garden St., Philadelphia, PA 19130, USA
Email address: akitover@ccp.edu

Department of Mathematics & Statistics, University of New Hampshire, Durham, NH 03824, USA*Email address*: mo@unh.edu