arXiv:2611.32267v1 [math.AG] 24 Nov 2026

二元形式的同时 Waring 问题与有理曲线的几何

MACIEJ GAŁ ĄZKA、JAEWOO JUNG 和 HYUNSUK MOON

摘要。我们研究二元形式的同时 Waring 问题及其在有理曲线中的几何应用。通过分析同时湮灭子的最小自由分解，我们建立了同时 Waring 秩和边界 Waring 秩的公式，并对二元单项式进行了明确计算。

作为几何应用，我们明确描述了有理曲线在射影等价意义下的参数化。我们根据相应同时湮灭子的极小生成元，确定了包含该曲线并使其成为直纹截面的有理正规卷曲的最小维数。对于作为除子位于有理正规曲面卷曲上的有理曲线，我们刻画其光滑性，并描述其定义理想的生成元。

1. 引言

多项式 Waring 问题是代数几何中的一个经典课题，旨在确定将给定的次数为d 的齐次多项式表示为若干线性形式的d次幂之和所需的最少项数。这个最小值称为该多项式的*Waring* 秩 。边界 *Waring* 秩 则借助 Waring 秩有界的形式集合的扎里斯基闭包来定义。自 Sylvester 和 Macaulay 的奠基性工作以来（一般情形参见 [IK99]，二元情形参见 [CS11]），这一问题已发展为一个活跃的研究领域，部分原因在于它与对称张量分解（例如参见 [CGLM08]）及代数复杂性理论（例如参见 [LT10, Lan17]）密切相关。

在本文中，我们始终在一个特征零的代数闭域 $\mathbb{K}$上工作。为了研究齐次多项式（或型式）的华林分解，主要的代数工具是其对偶理想。将研究范围限制在二元形式上，我们将 $\mathrm{Sym}^d \mathbb{K}^2$ 识别为 $\mathscr{R}_d$，即多项式环 $\mathscr{R} = \mathbb{K}[S,\ T]$的次数为$d$ 的分量。通过引入对偶环$R = \mathbb{K}[s,\ t],$，我们可以借助微分作用将 $\mathscr{R}$视为一个R-模，并将$F \in \mathscr{R}_d$ 的湮灭子（或对偶理想）定义为

$$\mathrm{Ann}(F) = \{g \in R \mid g \circ F = 0\}.$$

Sylvester 经典地证明了，Ann(F)由两个形式g_1 和g_2 生成，它们满足 $\deg g_1 + \deg g_2 = d + 2$。假设 $\deg g_1 \leq \deg g_2,$，则F 的*Waring* 秩 为 $\deg g_1$（当g_1无平方因子时），否则为 $\deg g_2$，而其边界 *Waring* 秩始终等于 $\deg g_2$。

从几何角度看，Waring 问题自然转化为研究 Veronese 簇的割线簇。在二元情形下，这一图景简化为有理正规曲线$\widetilde{\mathscr{C}_d} \subset \mathbb{P}^d_{\mathbb{K}} = \mathbb{P}(\mathscr{R}_d)$的割线簇。在这一背景下产生的一个几何问题，是刻画通过中心 $p \in \mathbb{P}^d_{\mathbb{K}}$进行线性投影 $\pi_p \colon \mathbb{P}^d_{\mathbb{K}} \dashrightarrow \mathbb{P}^{d-1}_{\mathbb{K}}$后得到的曲线 $\pi_p(\widetilde{\mathscr{C}_d})$。结果表明，$p$的 $\widetilde{\mathscr{C}_d}$-秩，即满足$q$-阶割线簇包含$p$的最小$q$ ，完全决定了投影曲线的所有分次 Betti 数（参见 [Par 07]）；而这一秩恰好等于湮灭子 Ann(F_p) 的生成元的最小次数，其中$F_p \in \mathscr{R}_d$ 是与p对应的二元形式。（详情见 [JMP26, 第 2 节。2]）

在这一背景下，一个自然的推广是研究同步华林问题（例如参见 [CC03、AGMO18、CV17]）。给定齐次多项式$F1$，……，F_r，其中 $\deg F_i = e_i$，对于$i = 1$，……，r，问题是求能够同时为每个多项式构成华林分解的线性形式的最少数量

2020数学学科分类。 主要分类：14N07、14N05、14H45；次要分类：13D02、14H50。关键词和短语。 同步华林问题、对偶理想、有理曲线、最小自由分解。所有作者对本研究的贡献均等。

F_i。换言之，我们希望确定

$$\min\left\{k\in\mathbb{N}\;\middle|\;\exists l_1,\dots,l_k\in\mathscr{R}_1 \text{ such that } F_i\in\langle l_1^{e_i},\dots,l_k^{e_i}\rangle \text{ for all } i=1,\dots,r\right\}.$$

这个最小值称为F的同时 *Waring* 秩$_1$,....., F_r。F*1*的同时边界 *Waring* 秩$_1$,....., F_r定义为

$$\min\left\{k\in\mathbb{N}\;\middle|\;(F_1,\dots,F_r)\in\overline{\bigcup_{l_1,\dots,l_k\in\mathscr{R}_1}\prod_{i=1}^{r}\langle l_1^{e_i},\dots,l_k^{e_i}\rangle}\right\},$$

其中，上划线表示在 $\prod_{i=1}^{r}\mathscr{R}_{e_i}$ 中取扎里斯基闭包。

受此启发，本文旨在探讨以下问题：

(1) 我们能否描述F1,....., F_r 的同时湮灭子的代数结构？(2) 我们能否用该湮灭子的生成元，给出F1,....., F_r 的同时 Waring 秩和边界 Waring 秩的公式？(3) 我们如何通过同时湮灭子的结构来理解有理曲线的几何？

第一个问题可通过使用射影维数为 2 的分次环的经典结构定理，即*Hilbert-Burch* 定理，得到解答。由于这一基础性结果是我们研究的起点，现将其表述如下：

定理 1.1。 设 $W\subset\mathscr{R}$ 是一个非零的 R-子模，由齐次多项式 F_1,F_2，.....，$F_r\in\mathscr{R}$ 极小生成：

$$W=R\circ F_1+R\circ F_2+\cdots+R\circ F_r.$$

则 I =湮灭子$(W)=\{g\in R\mid g\circ F=0$对所有 $F\in W\}\subset R$ 而言，是一个由 r 个二元形式 g_1，.....，g_{r+1} 极小生成的阿廷理想，即

$$\mathrm{Ann}(W)=(g_1,g_2,\dots,g_{r+1}).$$

反之，设 $I\subset R$ 是一个阿廷理想，由 r 个二元形式 g_1，.....，g_{r+1} 极小生成。则 $W=I^{\perp}=\{F\in\mathscr{R}\mid g\circ F=0$对所有 $g\in I\}\subset\mathscr{R}$而言，是一个由 r 个齐次多项式 F_1，.....，$F_r\in\mathscr{R}$ 极小生成的 R-子模。

此外，

$$\sum_{i=1}^{r+1}\deg(g_i)=\sum_{j=1}^{r}(\deg(F_j)+2).$$

在这种情况下，我们总有 $V(g_1,g2$，.....，$g_{r+1})=\{0\}$；见定理 2.5。定理 1.1 的证明见第 2.5 节。

作为定理 1.1 的直接推论，我们用其湮灭理想的极小生成元，明确刻画二元形式的同时 Waring 秩和同时边界 Waring 秩。

定理 1.2。 设 $F_1,\dots,F_r\in\mathscr{R}$是子模 $R\circ F_1+\cdots+R\circ F_r$的极小齐次生成元。设 $g_1,\dots,g_{r+1}\in R$ 是湮灭子$(F_1,\dots,F_r)$的极小生成元，并按 $d_1\le\cdots\le d_{r+1}$ 排列，其中 $d_i=$ 度 g_i。令 $h_i=$ 最大公因式 $(g_1,\dots,g_i)$，其中 $1\le i\le r+1$。则有以下结论：

(1) $F_1,\dots,F_r$的同时 *Waring* 秩恰为 d_k，其中 k 是使多项式 h_k 无平方因子的最小整数。*(2)* $F_1,\dots,F_r$的同时边界 *Waring* 秩恰为 d_1。

定理 1.2 的陈述与证明见定理 3.1 和定理 3.3。应用定理 1.2，我们计算了二元单项式的同时边界秩以及定理 3.6 中给出的同时 Waring 秩。

当F1,...,F_r具有相同次数时，这种情形的研究尤为深入，这源于对称张量的同时秩轨迹的代数结构与 Veronese 簇的 Grassmann割簇几何之间存在自然联系。在这一情形下，相应的商代数称为层代数，相关研究已在文献中广泛开展（例如， [AR17，Iar04]）。

基于这些动机，我们将研究范围限定在次数固定为d 的二元形式上，其对应的几何对象是有理正规曲线 $\mathscr{C}_d$。任何由 $\mathscr{C}$ 参数化的有理曲线

都可以实现为从 $\mathbb{P}^1$ 出发的双有理映射所给出的 $\widetilde{\mathscr{C}_d}$的线性投影。若将该投影的中心记为 $\mathbb{P}(L)$，其中$L = \langle F1,\ldots,F_r\rangle \subset \mathbb{K}[S,T]_d$是一个子空间，则 $\mathscr{C}$是 $\mathscr{C}_d$在该有理映射下的像

$$\pi_{\mathbb{P}(L)} : \mathbb{P}(\mathrm{Sym}^d\mathbb{K}^2) \dashrightarrow \mathbb{P}(\mathrm{Sym}^d\mathbb{K}^2/L).$$

因此，自然会问，L 的代数性质如何决定 $\mathscr{C}$的几何。

为建立湮灭子结构与曲线参数化之间的联系，我们考察一个代数不变量 $\rho(L)$，称为仿射缺陷，其定义为 $\mathrm{Ann}(L)$ 中次数为$d+1$的极小生成元的个数。

仿射缺陷 $\rho(L)$有一个自然的代数解释，即L 的一阶延拓的维数（见定理 4.3）。它还给出了公因子g次数的上界；也就是说，$\deg(g) \le \rho(L)$（见定理 4.4）。当L在格拉斯曼流形 $\mathrm{Gr}(r,\mathscr{R}_d)$中变化时，我们证明轨迹 $\mathfrak{D}_{\ge\tau} = \{L \in \mathrm{Gr}(r,\mathscr{R}_d) \mid \rho(L) \ge \tau\}$ 是扎里斯基闭的，且局部由行列式方程定义（见定理 4.11）。

利用仿射缺陷，我们可以在射影等价意义下描述曲线的参数化（见定理 4.6）。给定 $\mathrm{L} = \langle \mathrm{F1},\ldots,\mathrm{F}_r\rangle \subset \mathscr{R}_d$，且 $\dim_{\mathbb{K}}\mathrm{L} = \mathrm{r}$，$1 \le \mathrm{r} \le \mathrm{d}-1$，设 $\mathrm{g1},\ldots,\mathrm{g}_m$是 $\mathrm{Ann(L)}$ 中次数至多为 d 的极小生成元，其中 $\mathrm{m} := \mathrm{r}+1-\rho(\mathrm{L})$，并令 $\mathrm{d}_i := \deg(\mathrm{g}_i)$。令 $\mathrm{g} := \gcd(\mathrm{g1},\ldots,\mathrm{g}_m)$，且 $\mathrm{g}'_i := \mathrm{g}_i/\mathrm{g}$，则曲线 $\mathscr{C} = \pi_{\mathbb{P}(L)}(\mathscr{C}_d)$ 的参数化如下：

$$\left\{ \left[\cdots : g'_i(\alpha,\beta)\alpha^{d-d_i-j}\beta^j : \cdots \right]_{1\le i\le m,\,0\le j\le d-d_i} \mid [\alpha:\beta] \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} \right\} \subset \mathbb{P}^{d-r}_{\mathbb{K}}. \tag{1.1}$$

这一参数化的一个直接推论是，通过计算公因子$g = \gcd(g1,\ldots,g_m)$ 的次数，我们可以确定 $\pi_{\mathbb{P}(L)}$ 中包含多少个内投影（按重数计）（见定理 4.7 ）。此外，利用仿射缺陷 $\rho(L)$，我们构造一个维数为 $r+1-\rho(L)$ 的有理正规卷曲曲面，使 $\mathscr{C}$ 成为其直纹的一个截面，从而改进一般上界 $r+1$。上界 $r+1$ 可由连续进行点投影得到，参见 [BS07，定理 7.3]，用于包含卷曲曲面的外投影。

下面的定理证明，在截面条件下，这个维数具有极小性，并为仿射缺陷 $\rho(L)$ 提供了精确的几何解释。

定理 1.3. 设投影曲线 $\mathscr{C} = \pi_{\mathbb{P}(L)}(\widetilde{\mathscr{C}_d}) \subseteq \mathbb{P}^{d-r}_{\mathbb{K}}$与具有 (1.1) 中参数化的曲线射影等价，令 $\varphi : \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} \longrightarrow \mathscr{C}$ 为由 (1.1) 定义的态射。设 m 为满足 $2 \le m \le \min\{r+1, d-r\}$ 的整数。那么，$\rho(L) = r+1-m$ 当且仅当

(1) φ 双有理映到其像，且 *(2)* m 是满足 $\mathscr{C}$ 包含于 $\mathbb{P}^{d-r}_{\mathbb{K}}$ 中某个 n 重有理正规卷曲中、并作为其直纹截面的最小正整数 n。

我们还探讨了更为专门的几何情形。具体而言，我们研究作为除子位于有理正规曲面卷曲面 $\mathscr{S} = S(a,b)$ 上的有理曲线 $\mathscr{C}$。这里，$S(a,b)$ 是通过连接两个位于不相交线性子空间中、次数分别为 a 和 b 的有理正规曲线上的对应点得到的。对于满足 $1 \le a \le b$ 的光滑卷曲曲面 $\mathscr{S} = S(a,b)$，我们证明，只要 $\mathscr{C}$是其直纹的截面，它就是光滑的。反过来，若 $\mathscr{C}$ 光滑且不是有理正规曲线，那么只要 d 相对于 r 足够大，$\mathscr{C}$ 就是 $\mathscr{S}$ 直纹的截面（见定理 5.1）。

最后，作为参数化结果的一个应用，我们研究曲线$\mathscr{C}$的定义理想$I(\mathscr{C})$。假设态射 φ 是双有理的，定理 4.8 表明，最大条件 $\rho(L) = \dim(L)$ 等价于 $\mathscr{C} = \pi_{\mathbb{P}(L)}(\widetilde{\mathscr{C}_d} \setminus \mathbb{P}(L)) \subset \mathbb{P}^{d-r}_{\mathbb{K}}$恰为次数为 $d-r$的有理正规曲线。当 $\rho(L) = \dim_{\mathbb{K}}(L) - 1$时，我们给出理想$I(\mathscr{C})$由二次型生成的精确条件。

定理 1.4. 设 $\mathscr{C}$是由(1.1)参数化的曲线，且满足 $\rho(L) = \dim_{\mathbb{K}}(L) - 1$ *(*因此 $m = 2$*)*。设 $d - r \ge 2$，$d_1 \le d_2$ 且 $d' =$次数(最大公因式(g_1,g_2))。则理想 $I(\mathscr{C})$ 满足以下条件：

(1) $I(\mathscr{C})$ 由线性形式乘积的差生成。*(2)* 当且仅当

$$\begin{cases} d \ge 2r - d' + 2 & \text{if } d_2 = d, \\ d_1 \ge 2r - d' + 2 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

注意，若 $d_2 = d$（等价地，$d_1 = r+1$），则 $\mathscr{C}$ 位于一个以次数为 $d-r-1$ 的有理正规曲线为底的锥上。若 $d_2 < d$，则 $\mathscr{C}$ 位于一个光滑有理正规曲面卷曲上。

我们在定理 5.8 中明确给出了极小生成元的数量和次数。在光滑卷曲曲面的情形下，二次生成判据也可由 [Par14, 定理 4.4(2)]推出。我们的方法直接从同时湮灭子的极小生成元出发给出证明，并同时处理光滑卷曲曲面和锥。此外，只要 $I(\mathscr{C})$ 由二次型生成，它就可以由秩至多为 4 的二次型生成。因此，定理 1.4 推广了关于几乎最小次数曲线的结果（参见 [JMP26]）。

在第 2 节中，我们介绍与二元形式的对偶理想以及定理 1.1 的证明相关的一些预备知识。针对第二个问题，我们在第 3 节给出一种算法，并根据指数给出二元单项式的精确秩公式。关于第三个问题，我们在第 4 节给出一般性答案，并在第 5 节进一步介绍曲面卷曲面上曲线的几何与代数信息。

2. 预备知识与定理 1.1 的证明

2.1. 二元形式的零化。 本小节回顾一些与二元形式的零化概念相关的基础知识。我们固定一些将在全文中沿用的记号。

令 R := $\mathbb{K}$[s,t] 和 $\mathscr{R}$:= $\mathbb{K}$[S,T] 是定义在域 $\mathbb{K}$ 上的两个二元标准分次多项式环，其中 deg(s) = deg(t) = deg(S) = deg(T) = 1，使得 R = $\oplus_{i\in\mathbb{Z}} R_i$ 和 $\mathscr{R} = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathscr{R}_i$，其中 $R_i := \oplus_{j=0}^{\mathbb{K}} s^j t^{i-j}$ 以及 $\mathscr{R}_i := \oplus_{j=0}^{\mathbb{K}} S^j T^{i-j}$ 分别表示 R 和 $\mathscr{R}$ 的第 i 个分次分量，对所有 $i \in \mathbb{Z}$ 均成立。我们称多项式 $g \in R_i$ 和 $F \in \mathscr{R}_i$ 是 R 和 $\mathscr{R}$ 中次数为 i 的二元形式。

定义 2.1。 对于所有i、 $j \in \mathbb{Z}$，我们考虑 $\mathbb{K}$-向量空间之间的双线性映射

$$\circ_{(j,i)} : R_j \times \mathscr{R}_i \longrightarrow \mathscr{R}_{i-j} \quad \text{and the induced map} \quad \circ : R \times \mathscr{R} \longrightarrow \mathscr{R},$$

其中，$\circ_{(j,i)}$ 定义为

$$(g,F) \longmapsto g \circ_{(j,i)} F = g \circ F := \sum_{k=0}^{j} c_k \left(\frac{\partial}{\partial S}\right)^{j-k} \left(\frac{\partial}{\partial T}\right)^{k} F$$

对于$g = \sum_{jk=0} c_k s^{j-k} t^k \in R_j$。多项式$F \in \mathscr{R}$的对偶理想 （或湮灭子）定义为由所有满足$g \circ F = 0$ 的多项式$g \in R$所组成的理想，记作 Ann(F)。换言之，对于$F \in \mathscr{R}$，

$$\mathrm{Ann}(F) := \{g \in R : g \circ F = 0\}.$$

如果多项式F 是齐次的，那么 Ann(F)是一个齐次理想。当逆系统模$W \subset \mathscr{R}$ 被视为一个分次R-模时，它赋予逆分次$W_{-q} = W \cap \mathscr{R}_q$。

命题 2.2。 （参见 [IK99, 定理 1。44]）设 $F \in \mathscr{R}_d$ 是一个次数为 d 的非零二元形式。那么，Ann（F）是由 R 中的两个二元形式生成的完全交理想。更明确地说，

$$\mathrm{Ann}(F) = (g_1, g_2) \subset R$$

对于满足 $V(g_1,g_2) = /0 \, in \ \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} \, and \, \deg g_1 + \deg g_2 = d+2$ 的 $g_1, g_2 \in R$。

零化是研究将型式分解为线性形式的幂和的有力工具。这种分解在经典上称为华林分解 或（广义）型式加性分解 。关于广义加性分解和零化的更全面讨论，读者可参阅 [IK99]。

2.2. 通过二元形式上的零化实现空间对偶。 对于任意整数 $d \geq 0$，配对 $\circ : R_d \times \mathscr{R}_d \to \mathscr{R}_0 = \mathbb{K}$ 在两个向量空间 R_d 和 $\mathscr{R}_d$ 之间定义了一个非退化内积。这意味着，对于 R_d 的任意一组基 $\{v_0, v1, \ldots, v_d\}$ 以及 $\mathscr{R}_d$ 的任意一组基 $\{w_0, w1, \ldots, w_d\}$，矩阵 $v_\bullet \circ w_\bullet := (v_i \circ w_j \mid 0 \leq i, j \leq d) \in \mathbb{K}^{(d+1)\times(d+1)}$ 的秩为 $d+1$。因此，我们可以自然地将 $\mathscr{R}_d$ 识别为

通过这一微分运算得到的R_d 的对偶向量空间。特别地，对于 $F \in \mathscr{R}_d$ 和 $g \in R_d$，内积 $g \circ F$ 明确表示为

$$g \circ F = \sum_{i=0}^{d} c_i \left(\frac{\partial}{\partial S}\right)^{d-i} \left(\frac{\partial}{\partial T}\right)^{i} F(S,T) \in \mathbb{K},$$

其中 $g = \sum_{i=0}^{d} c_i s^{d-i} t^i$。

令 $\{s^d、s^{d-1}t \ldots, t^d\}$为$R_d$的标准单项式基。相对于上文定义的内积，$\mathscr{R}_d$的对偶基为

$$\{S^{[d]}, \ldots, S^{[d-i]}T^{[i]}, \ldots, T^{[d]}\} := \{\frac{S^d}{d!}, \ldots, \frac{S^{d-i}}{(d-i)!}\frac{T^i}{i!}, \ldots, \frac{T^d}{d!}\}.$$

事实上，我们有

$$s^{d-i}t^i \circ S^{[d-j]}T^{[j]} = \delta_{ij},$$

其中 δ_{ij} 表示克罗内克δ。

引理 2.3. *(*[JMP26，引理 2.3]*)* 设 d 为正整数。对于任意二元形式 $g(s,t) \in \mathbb{K}[s,t]_d$和$(\alpha S + \beta T)^d \in \mathbb{K}[S,T]_d$，有

$$g(s,t) \circ (\alpha S + \beta T)^d = d!g(\alpha, \beta).$$

定理 2.3 表明，$g(s,t) \in \mathbb{K}[s,t]_d$与 $(\alpha S + \beta T)^d$的内积，对应于在点 (α, β) 处对型式 $g(s,t)$ 求值。

我们将射影空间 $\mathbb{P}^d$ 与空间 $\mathbb{P}(\mathbb{K}[S,T]_d)$ 的射影化相认，其中该空间由次数为 d 的二元形式构成。更明确地说，点 $p = [p_0 \colon p_1 \colon \cdots \colon p_d] \in \mathbb{P}^d$对应于以下二元形式（相差一个标量因子）：

$$F_p = \sum_{i=0}^{d} p_i S^{[d-i]}T^{[i]} = \frac{1}{d!}\sum_{i=0}^{d} p_i \binom{d}{i} S^{d-i}T^i \in \mathbb{K}[S,T]_d,$$

其中，$(p0, \ldots, p_d)$ 是 F_p 关于 $\{S^{[d-i]}T^{[i]} \mid 0 \le i \le d\}$ 的对偶基的系数。在此相认下，环面不动点 $e_i = [\delta_{i0} \colon \cdots \colon \delta_{id}] \in \mathbb{P}^d$ 对应于 $S^{[d-i]}T^{[i]}$；标准有理正规曲线 $\widetilde{\mathscr{C}_d} = \nu_d(\mathbb{P}^1) \subset \mathbb{P}^d$ 上的点 $\nu_d([\alpha \colon \beta])$ 对应于线性形式的纯幂 $(\alpha S + \beta T)^d$（相差一个非零标量）。

在消去配对 $\circ$ 下：$R_d \times \mathscr{R}_d \to \mathbb{K}$，$F_p$ 的正交补恰好是其次数为 d 的湮灭子，即 $(F_p)^\perp = (\mathrm{Ann}(F_p))_d$。更一般地，对于任意线性子空间 $L = \langle F1, \ldots, F_r \rangle \subseteq \mathbb{K}[S,T]_d$，我们有

$$L^\perp = \bigcap_{i=1}^{r} F_i^\perp = \mathrm{Ann}(L)_d.$$

2.3. 形式消去性的基本事实。 本小节回顾并确立关于对偶理想及其相关 R-子模 W 的若干基本性质。在本小节中，设 R 是 $\mathbb{K}$上的标准分次多项式环，并设 $\mathscr{R}$ 为其对偶多项式环，R 通过微分作用于其上。本小节中的结果适用于变量数任意的一般分次多项式环。

引理 2.4. 设 $F_1, \ldots, F_r \in \mathscr{R}$ 为齐次多项式，且 $W = R \circ F_1 + \cdots + R \circ F_r$ 是由 $F_1, \ldots, F_r$ 生成的 R-子模。那么，我们有

$$\mathrm{Ann}(W) = \mathrm{Ann}(F_1, \ldots, F_r) = \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{Ann}(F_i),$$

其中，对于所有 $F \in W\}$，湮灭子$(W) := \{g \in R \mid g \circ F = 0$，且湮灭子$(F_1, \ldots, F_r) := \{g \in R \mid g \circ F_i = 0$对 $i = 1, \ldots, r\}$ 均成立。

证明。 根据定义，$\mathrm{Ann}(W) \subseteq \mathrm{Ann}(F1, \ldots, F_r)$ 显然成立。反之，设 $g \in \mathrm{Ann}(F1, \ldots, F_r)$。也就是说，对于每个 $i = 1, \ldots, r$，有 $g \circ F_i = 0$。由于定义 R-作用的微分算子彼此可交换，对于任意元素 $F = \sum_{i=1}^{r} h_i \circ F_i \in W$，其中 $h_i \in R$，我们有

$$g \circ (h_i \circ F_i) = h_i \circ (g \circ F_i) = 0.$$

因此，对于所有 $F \in W$，有 $g \circ F = 0$，这意味着 $g \in \mathrm{Ann}(W)$。 □

引理 2.5. 设 W 是 $\mathscr{R}$ 中非零的分次 R-子模，并且 湮灭子$(W) \subset R$ 是它的对偶理想。以下条件等价：

(1) V (湮灭子$(W)) = \{0\} \subset \mathbb{A}^n$。*(2)* 存在一个整数 $d \in \mathbb{N}$，
使得 湮灭子$(W)_d = R_d$。*(3)* W 是有限生成的 R-子模。

证明。 (1) $\iff$ (2) 的等价性可由（齐次）零点定理立即推出。
(3) $\implies$(2)：假设 W 有限生成。设 $\{F1, \ldots, F_r\}$ 是 W 的齐次生成元的极小集合，并取整数 d，使得 $d > \max\{\deg(F_i) \mid i = 1, \ldots, r\}$。对于任意型式 $g \in R_d$，由于 $\deg(g) = d > \deg(F_i)$，对于每个 $i = 1, \ldots, r$，均有 $g \circ F_i = 0$。这意味着对所有 $F \in W$，都有 $g \circ F = 0$，从而 $g \in$ 湮灭子$(W)_d$。因此，$R_d =$ 湮灭子$(W)_d$。

(2) $\implies$ (3)：假设 $\mathrm{Ann}(W)_d = R_d$ 对某个 $d \in \mathbb{N}$成立。该条件意味着 $R_{\geq d} \subseteq \mathrm{Ann}(W)$，因此商环 $R/\mathrm{Ann}(W)$ 是一个 Artin环。在 Macaulay 逆系统对应下，R-子模 W同构于 $R/\mathrm{Ann}(W)$ 的分次 $\mathbb{K}$-对偶。由于 $R/\mathrm{Ann}(W)$ 是有限维的 $\mathbb{K}$-向量空间，W 作为 R-模是有限生成的。□

引理 2.6。 设 F_1、...、$F_r \in \mathscr{R}$ 是生成 R-模 W 的形式。那么 $\{F_1$、...、$F_r\} \subset \mathscr{R}$ 是最小生成集，当且仅当对于每个 $i = 1$，...，r，

$$\bigcap_{j \neq i} \mathrm{Ann}(F_j) \nsubseteq \mathrm{Ann}(F_i). \tag{2.1}$$

特别地，如果 F_1、...、$F_r \in \mathscr{R}_d$ 是次数相同的 d 次形式，则当且仅当集合 $\{F_1$、...、$F_r\}$ 在 $\mathscr{R}_d$ 中线性无关时，该条件成立。

证明。 设 $\{F1, \ldots, F_r\}$ 是一个最小生成集。为导出矛盾，假设对于某个 i，有 $\bigcap_{j \neq i}$湮灭子$(F_j) \subseteq$湮灭子(F_i)。该包含关系意味着 $\bigcap_{j \neq i}$湮灭子$(F_j) = \bigcap_{j=1}$湮灭子(F_j)。这与 $\{F1, \ldots, F_r\}$ 是一个最小生成集的假设相矛盾。

反之，假设对于每个 i，(2.1) 均成立。如果该生成集不是最小的，则对于某个 i 以及某个 $h_j \in R$，有 $F_i = \sum_{j \neq i} h_j \circ F_j$。对于任意 $g \in \bigcap_{j \neq i}$ 湮灭子(F_j)，由微分算子的交换性可得 $g \circ F_i = \sum_{j \neq i} h_j \circ (g \circ F_j) = 0$。因此 $\bigcap_{j \neq i}$ 湮灭子$(F_j) \subseteq$湮灭子(F_i)，这就产生了矛盾。

最后，如果所有F_i的次数都为d，那么 $\sum_{j \neq i} R \circ F_j$的次数为$d$的部分，恰好是其他生成元的 $\mathbb{K}$-线性张成。因此，极小性等价于线性无关。□

根据定理 2.6，条件 (2.1) 可用作刻画R子模W的生成集极小性的另一种方式。

2.4. **典范模与对偶分解**。 我们回顾关于典范模和对偶分解的必要代数基础，参见 [Eis95]。

定义 2.7。 设A 是一个有限维分次 $\mathbb{K}$代数，且$A_0 = \mathbb{K}$。A的分次典范模记为 ω_A，定义为分次 $\mathbb{K}$对偶 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(A\ \mathbb{K})$，其中 $(\omega_A)_j = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(A_{-j}\mathbb{K})$。

定义 2.8 （参见 [Eis95，第 21 节。11]）**.** 设A 是正分次 Cohen–Macaulay 环，且$A_0 = \mathbb{K}$。若存在一个齐次元$x \in A$，其次数为正 δ，且它同时是A 和W 上的非零因子，使得（W/xW）$[\delta]$ 是A/xA的分次典范模，则称有限生成分次A-模W 是A 的一个分次典范模。

我们回顾 [Eis95 定理 21.15] 的分次版本：

定理 2.9。 设 R 是一个分次多项式环，其典范模为 $\omega_R = R[-$维数 $R]$。若 $A = R/I$，其中 I 是某个齐次理想，且 A 是 *Cohen-Macaulay*，则 A 存在一个典范模。事实上，若 $c =$ 维数$R -$ 维数A，则

$$\omega_A = \mathrm{Ext}^c_R(A, \omega_R).$$

例 2.10。 标准二元多项式环 $R = \mathbb{K}[s, t]$ 的典范模为 $\omega_R = R[-2]$。

我们回顾 [Eis95，推论 21.16] 的分次版本：

推论 2.11。 设 R 是一个分次多项式环，I 是 R 中余维为 c 的齐次理想。假设 $A = R/I$ 是 *Cohen-Macaulay*。若 $\mathscr{F}$ 是 A 作为 R-模的最小分次自由分解，那么 $\mathscr{F}$ 的长度为 c，且其对偶复形 $\mathscr{F}^* = \mathrm{Hom}_R(\mathscr{F}, \omega_R)$ 是典范模 ω_A 的最小分次自由分解。

定理 2.12. 设 W 是由形式 F_1、…、F_r 最小生成的 $\mathscr{R}$ 的 R-子模。那么 W 是 R/I 的典范模，其中 $I = \bigcap_{i=1} \text{湮灭子}(F_i)$。特别地，$W$ 和 R/I 具有对偶的最小分次自由分解。

证明. 由定理 2.4，得 $I = \mathrm{Ann}(W)$；由 [GMR23 引理 A.4]，可知，$W \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(R/I\ \mathbb{K})$。由于 R/I 是零维的，这个分次 $\mathbb{K}$-对偶与典范模 $\omega_{R/I}$ 一致。关于对偶分解的断言由定理 2.11 立即得出。

□

2.5. **二元形式的同时湮灭子的结构**。 在本小节中，我们将给出定理 1.1 的证明，并举例说明定理 1.1 的证明如何进行。

定理 *1.1* 的证明。 注意，$\mathrm{Ann}(W)$ 是 $R = \mathbb{K}[s,t]$ 中的有限生成齐次理想。设 $\mathrm{Ann}(W) = (g1, \ldots, g_m)$ 是一个最小生成集，其中某个 $m \in \mathbb{N}$，且对 $i = 1, \ldots, m$，有 $d_i = \deg(g_i)$。根据 Hilbert-Burch 定理（参见 [Eis05，命题 3.8]），由于 $R/\mathrm{Ann}(W)$ 是零维 Cohen-Macaulay 环，$R/\mathrm{Ann}(W)$ 的最小分次自由分解具有如下形式

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{j=1}^{m-1} R[-e_j] \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{m} R[-d_i] \longrightarrow R \longrightarrow R/\mathrm{Ann}(W) \longrightarrow 0,$$

其中移位量 $\{-d_i\}$ 和 $\{-e_j\}$ 满足关系 $\sum_{i=1}^{m} d_i = \sum_{j=1}^{m-1} e_j$。将 $\mathrm{Hom}_R(-, \omega_R)$ 应用于这个自由分解，其中 $\omega_R = R[-2]$，即可得到一个对偶复形。由于我们有

$$\mathrm{Ext}^2_R(R/\mathrm{Ann}(W), R[-2]) \cong \omega_{R/\mathrm{Ann}(W)},$$

定理 2.9 和定理 2.11 给出最小自由分解

$$0 \longrightarrow R[-2] \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{m} R[d_i - 2] \longrightarrow \bigoplus_{j=1}^{m-1} R[e_j - 2] \longrightarrow \omega_{R/\mathrm{Ann}(W)} \longrightarrow 0.$$

此外，根据定理 2.12，我们将 $\omega_{R/\mathrm{Ann}(W)} \cong W$ 视为。

由于 W 恰好由 r 个元素 $\{F1, \ldots, F_r\}$ 最小生成，与 W 的生成元对应的自由模的秩必须满足 $m - 1 = r$。因此，$\mathrm{Ann}(W)$ 最小生成于 r 个元素 $g1, \ldots, g_{r+1}$。此外，由于对于 $j = 1, \ldots, r$，$\deg(Fj) = e_j - 2$，

$$\sum_{i=1}^{r+1} \deg(g_i) = \sum_{j=1}^{r} (\deg(F_j) + 2).$$

反向结论可通过将前述论证应用于 Macaulay 逆系统 $W = I^{\perp}$ 得出，因为根据 Macaulay 逆系统对偶，$\mathrm{Ann}(W) = I$。□

例 2.13。令 $F_1 = S^{[5]}T^{[3]}$ 且 $F_2 = S^{[2]}T^{[4]}$。则

$$\mathrm{Ann}(F_1, F_2) = (s^6, s^3t^4, t^5).$$

令 $W = R \circ F_1 + R \circ F_2$。$R/$关于 $\mathrm{Ann}(W)$ 的分解如下：

$$0 \to R[-10] \oplus R[-8] \xrightarrow{M} R[-6] \oplus R[-7] \oplus R[-5] \to R \to R/\mathrm{Ann}(W) \to 0,$$

其中

$$M = \begin{bmatrix} t^4 & 0 \\ -s^3 & t \\ 0 & -s^3 \end{bmatrix}.$$

应用 $\mathrm{Hom}_R(-,\ R[-2])$ 函子后，我们得到对偶分解：

$$0 \to R[-2] \to R[4] \oplus R[5] \oplus R[3] \xrightarrow{M^T} R[8] \oplus R[6] \to W \to 0.$$

这是模 $W = R \circ F_1 + R \circ F_2$ 的最小分解。

对于由二元单项式生成的一般 R-子模W，在定理 3.5 之后给出了湮灭子(W)的最小自由分解及其对偶的显式描述。

3. 形式的同时 Waring 秩

作为定理 1.1 的直接应用，本节研究一组二元形式的同时 Waring 秩和边界 Waring 秩。我们首先利用联合湮灭理想的最低次数生成元刻画同时边界秩。

推论 3.1。设 F_1、...、$F_r \in \mathscr{R}$ 是 $R \circ F_1 + \cdots + R \circ F_r$ 的齐次极小生成元，其次数为 e_1、...、e_r，且 g 是湮灭子$(F_1$、...、$F_r)$ 中最低次数的非零生成元。那么 F_1、...、F_r 的同时边界 *Waring* 秩等于 次数 g。

特别地，如果 湮灭子$(F_1$、...、$F_r)$ 的最低次数生成元 g 是无平方因子的，那么 F_1、...、F_r 的同时 *Waring* 秩也等于 次数 g。

证明。设 $\deg g = d$。由于g是定义在 $\mathbb{K}$ 上的二元形式，我们可以将其分解为线性形式的乘积：$g = \prod^{q}_{j=1} \ell^{a_j}_j \in \mathrm{Ann}(F1, \ldots, F_r)$，其中 $\Sigma^{q}_{j=1} aj = d$。根据（广义）零化性（参见 [IK99，命题 1.36]），对每个$i = 1, \ldots, r$，存在F_i的唯一广义加性分解：

$$F_i = \sum_{j=1}^{q} l_j^{e_i - a_j + 1} G_{ij},$$

其中 $l_j \in \mathscr{R}_1$是 ℓ_j 的湮灭子，而 $G_{ij} \in \mathscr{R}_{a_j - 1}$。这一因式分解直接表明，$F1, \ldots, F_r$ 的同时边界 Waring 秩等于 d，因为 $\mathrm{Ann}(F1, \ldots, F_r)$ 中不存在次数小于d 的型式。

此外，如果g只有单根（即，对于所有$j = 1$、.....、q，$a_j = 1$），那么我们便得到每个F_i的标准同时分解：

$$F_i = \sum_{j=1}^{d} c_{ij} l_j^{e_i}.$$

因此，$F1$，...，F_r的同时 Waring 秩也等于 d，因为同时 Waring 秩大于或等于同时边界 Waring 秩。□

接下来，我们给出一个用于计算精确同时 Waring 秩的算法判据。我们首先介绍一个证明所必需的引理。

引理 3.2。设 $I = (g_1, \ldots, g_r)$ 是 $R = \mathbb{K}[s,t]$ 中的一个齐次理想，并且 $d_i = \deg g_i$对于 $1 \le i \le r$。对于任意整数 $d \ge \max\{d_1, \ldots, d_r\}$，令 $\{h_1, \ldots, h_q\}$ 为向量空间 I_d的一组基。

（*1*）则最大公因式满足

$$\gcd(g_1, \ldots, g_r) = \gcd(h_1, \ldots, h_q)$$

相差一个非零标量。

（*2*）设 最大公因式$(h_1, \ldots, h_q)$是无平方因子的。则线性空间 $\langle h_1, \ldots, h_q \rangle = I_d$ 中的一般元素是无平方因子的。

证明。(1) 该断言源于以下事实：分次分量 I_d 由形如 $R^{d-d_i} \cdot g_i$（其中 $1 \le i \le r$）的元素张成。因此，

$$\gcd(h_1, \ldots, h_q) = \gcd(R_{d-d_1} \cdot g_1, \ldots, R_{d-d_r} \cdot g_r) = \gcd(g_1, \ldots, g_r).$$

(2) 令 h $=$h1、...、h$_q$ 的最大公因式，并令 h$'_i$ $=$h$_i$/h 对每个 i $=$ 1、...、q 成立。根据构造，与 $\langle$h$'_1$、...、h$'_q\rangle$ 相关的线性系是无基点的。因此，根据贝尔蒂尼定理（见 [Har77，第 III 章推论 10.9]），一般元素 p $\in \langle$h$'_1$、...、h$'_q\rangle$ 的消失概形 V (p) 是约化的，也就是说，p 无平方因子。由于 h 无平方因子，且与一般的 p 没有公共根，一般元素 h $\cdot$p $\in \langle$h1、...、h$_q\rangle$ 也无平方因子。□

现在我们 给出一个用于确定二元形式同时 Waring 秩的算法定理 .

定理 3.3. 设 $F_1,\dots,F_r \in \mathscr{R}$ 是 $R\circ F_1+\cdots+R\circ F_r$ 的齐次极小生成元，且 $g_1,\dots,g_{r+1}\in$ 是 湮灭子$(F_1,\dots,F_r)$ 的极小生成元，并按 次数 $g_1\le$ 次数 $g_2\le\cdots\le$次数 g_{r+1} 排序。对于每个 $1\le i\le r+1$，令 $h_i=$ 最大公因式 $(g_1,\dots,g_i)$。那么，$F_1,\dots,F_r$ 的同时 *Waring* 秩等于 次数g_k，其中 k 是使 h_k 无平方因子的最小整数。

证明。 设 deg $g_k=d$。若 h_k无平方因子，则根据定理 3.2(2)，分次分量 $(\mathrm{Ann}(F1,\dots,F_r))_d$中的一般多项式无平方因子。因此，根据消去引理（参见 [IK99, 引理 1.31]），任何这样的多项式都会给出一个长度为 d 的同时 Waring 秩分解。

另一方面，若 $e<\deg g_1,$，则 $\mathrm{Ann}(F1,\dots,F_r)_e=0$，因此不存在长度为 e的同时华林分解。对于 $\deg g_1\le e<d$，令 j为满足 $\deg g_j\le e$的最大整数。由k的极小性可知，h_j不是无平方因子的。根据定理 3.2(1)，由于 h_j是整个分次分量 $\mathrm{Ann}(F1,\dots,F_r)_e$的最大公因式，$\mathrm{Ann}(F1,\dots,F_r)$中每个次数为 e的型式都必然被某个平方整除。因此，根据消去引理，不存在长度为e的同时华林分解。□

注 3.4. 同时 Waring 秩及其相应的分解也可以通过叠置催化矩阵直接确定。对于每个次数d，单个湮灭子 $\mathrm{Ann}(F_i)_d$ 可通过计算催化映射$R_d\to\mathscr{R}_{e_i-d}$的核得到。因此，$\mathrm{Ann}(F1,\dots,F_r)_d$是这些映射的公共核，可以通过将相应矩阵竖直叠置并求所得分块矩阵的核来求得。

作为定理 3.1 和定理 3.3 中算法结果的应用，我们确定二元单项式的同时秩和同时边界秩。为应用这些结果，我们首先刻画二元单项式的指数满足何种条件时能够极小生成一个R-子模W，随后确定其湮灭子的极小生成元。

Lemma 3.5. 设 $F_i:=S^{[a_i]}T^{[b^i]}$，其中 $i=1,\dots,r$，且二元单项式按 $a_1\le\cdots\le a$ 的顺序排列 $_r$.

(1) R-模 $W:=R\circ F_1+\cdots+R\circ F_r$ 当且仅当 $a_1<\cdots<a_r$和 $b_1>\cdots>b_r$时，由 $\{F_1,\dots,F_r\}$ 生成。 *(2)* 如果 W 是极小生成的，则

$$\mathrm{Ann}(F_1,\dots,F_r)=(t^{b_1+1},s^{a_1+1}t^{b_2+1},\dots,s^{a_{r-1}+1}t^{b_r+1},s^{a_r+1}).$$

证明。 (1) 假设 W由 $\{F1,\dots,F_r\}$极小生成。首先，反设$a_k=a_{k+1}$对某个 $1\le k\le r-1$成立。不妨设 $b_k\le b_{k+1}$。该假设立即推出 $\mathrm{Ann}(F_{k+1})\subset\mathrm{Ann}(F_k)$。因此，我们有

$$\bigcap_{i\neq k}\mathrm{Ann}(F_i)\subset\mathrm{Ann}(F_{k+1})\subset\mathrm{Ann}(F_k),$$

这与定理 2.6 中生成集的极小性矛盾。因此，必有 $a_1<\cdots<a_r$。接下来，反设 $b_k\le b_{k+1}$ 对某个 $1\le k\le r-1$ 成立。由于 $a_k<a_{k+1}$，我们有 $\mathrm{Ann}(F_{k+1})\subset\mathrm{Ann}(F_k)$。这意味着 $\bigcap_{i\neq k}\mathrm{Ann}(F_i)\subset\mathrm{Ann}(F_k)$，这与生成元的极小性矛盾。因此，我们得出 $b_1>\cdots>b_r$。

反过来，假设 $\mathrm{a}_1<\cdots<\mathrm{a}_r$且 $\mathrm{b}_1>\cdots>\mathrm{b}_r$。由定理 2.6，只需证明对每个 $\mathrm{i}=1,\dots,\mathrm{r}$，都有$\bigcap\mathrm{j}\neq\mathrm{i}\ \mathrm{Ann}(\mathrm{F}_j)\not\subseteq\mathrm{Ann}(\mathrm{F}_i)$。固定一个指标 i，我们断言 $\mathrm{g}_i:=\mathrm{s}^{a_i}\mathrm{t}^{b_i}$属于$\bigcap\mathrm{j}\neq\mathrm{i}\ \mathrm{Ann}(\mathrm{F}_j)$，但不属于 $\mathrm{Ann}(\mathrm{F}_i)$。事实上，显然 $\mathrm{g}_i\notin\mathrm{Ann}(\mathrm{F}_i)$，因为 $\mathrm{g}_i\circ\mathrm{F}_i=1\neq0$。另一方面，任取另一个指标 $\mathrm{j}\neq\mathrm{i}$。

- If $j<i$, then $g_i\circ F_j=s^{a_i}t^{b_i}\circ S^{[a_j]}T^{[b_j]}=s^{a_i}\circ S^{[a_j]}T^{[b_j-b_i]}=0.$
- If $j>i$, then $g_i\circ F_j=s^{a_i}t^{b_i}\circ S^{[a_j]}T^{[b_j]}=t^{b_i}\circ S^{[a_j-a_i]}T^{[b_j]}=0.$

因此，对所有i，都有$g^i\in\bigcap_{j\neq i}\mathrm{Ann}(F_j)\setminus\mathrm{Ann}(F_i)$。

(2) 我们对r进行归纳。对于$r=1$，有 $\mathrm{Ann}(F_1)=(t^{b_1+1},s^{a_1+1})$。现在，假设该命题对$r=k\ge1$成立。也就是说，

$$\mathrm{Ann}(F_1,\dots,F_k)=(t^{b_1+1},s^{a_1+1}t^{b_2+1},\dots,s^{a_{k-1}+1}t^{b_k+1},s^{a_k+1}).$$

为方便起见，令 $a_0=-1$。根据定理 2.4，我们有

$$\mathrm{Ann}(F_1,\dots,F_k,F_{k+1})=\mathrm{Ann}(F_1,\dots,F_k)\cap\mathrm{Ann}(F_{k+1})$$

由于单项式理想的交由其生成元的所有成对最小公倍数（lcm）生成（参见例如 [HH11，命题 1.2.1]），湮灭子（$F1,\dots,F_{k+1}$）由以下元素生成：

$$\begin{aligned}
\operatorname{lcm}(s^{a_{j-1}+1}t^{b_j+1}, s^{a_{k+1}+1}) &= s^{a_{k+1}+1}t^{b_j+1} \quad \text{for } j=1,\dots,k,\\
\operatorname{lcm}(s^{a_k+1}, s^{a_{k+1}+1}) &= s^{a_{k+1}+1},\\
\operatorname{lcm}(s^{a_{j-1}+1}t^{b_j+1}, t^{b_{k+1}+1}) &= s^{a_{j-1}+1}t^{b_j+1} \quad \text{for } j=1,\dots,k,\\
\operatorname{lcm}(s^{a_k+1}, t^{b_{k+1}+1}) &= s^{a_k+1}t^{b_{k+1}+1}.
\end{aligned}$$

由于对于所有$j = 1,\dots,k$，$s^{a_{j-1}+1}t^{b_j+1}$都整除$s^{a_{k+1}+1}t^{b_j+1}$，因此型式$s^{a_{k+1}+1}t^{b_j+1}$的生成元是冗余的。于是，我们得到

$$\operatorname{Ann}(F_1,\dots,F_{k+1}) = (t^{b_1+1}, s^{a_1+1}t^{b_2+1}, \dots, s^{a_k+1}t^{b_{k+1}+1}, s^{a_{k+1}+1}).$$

□

为展示定理 1.1 背后的代数结构，我们明确构造商环 R/Ann(F1, . . . , Fr) 的分次极小自由分解，其中 $F_i = S^{[a_i]}T^{[b_i]}$，对 i = 1, . . . , r，且 $a_1 < \cdots < a_r$、$b_1 > \cdots > b_r$。为方便记号，令 $a_0 := -1$、$b_{r+1} := -1$。我们将 Ann(F1, . . . , Fr) 的极小生成元记为 $g_i := s^{a_{i-1}+1}t^{b_i+1}$，并令 $d_i :=$ deg(g_i)，对 i = 1, . . . , r + 1。那么，R/Ann(W) 的分次极小自由分解，其中 W := R ∘F 1 + · · · + R ∘Fr，由如下型式的希尔伯特-伯奇复形给出：

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{r} R[-a_i-b_i-2] \xrightarrow{M} \bigoplus_{i=1}^{r+1} R[-d_i] \longrightarrow R \longrightarrow R/\operatorname{Ann}(W) \longrightarrow 0,$$

其中，合关系矩阵 M是一个（$r+1$）$\times r$矩阵，定义为

$$M = \begin{bmatrix}
s^{a_1+1} & 0 & 0 & \dots & 0\\
-t^{b_1-b_2} & s^{a_2-a_1} & 0 & \dots & 0\\
0 & -t^{b_2-b_3} & s^{a_3-a_2} & \dots & 0\\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\
0 & 0 & \dots & -t^{b_{r-1}-b_r} & s^{a_r-a_{r-1}}\\
0 & 0 & \dots & 0 & -t^{b_r+1}
\end{bmatrix}.$$

将典范对偶函子 $\operatorname{Hom}_R(-,R[-2])$ 应用于该分解，我们得到如下对偶分解：

$$0 \longrightarrow R[-2] \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{r+1} R[d_i-2] \xrightarrow{M^T} \bigoplus_{i=1}^{r} R[a_i+b_i] \longrightarrow \omega_{R/\operatorname{Ann}(W)} \longrightarrow 0.$$

根据反极性对偶，该对偶化复形恰好是 $W = R\circ F_1 + \cdots + R\circ F_r$ 的分次极小自由分解。特别地，M^T 的每个列向量都明确表示了由湮灭这些形式的微分算子所诱导的 W 的生成元之间的代数关系 $F1,\dots,F_r$。

利用定理 3.5，下面的定理给出了二元单项式的精确同时秩和同时边界秩。

定理 3.6。设 $F_i = S^{a_i}T^{b_i}$ 是对于 $i = 1$、...、r 而言的二元单项式，其中 $a_1 < \cdots < a_r$ 且 $b_1 > \cdots > b_r$。为方便记号，令 $a_0 = b_{r+1} = -1$。

(1) 若 $a_1 > 0$且 $b_r > 0$，则 $F_1,\dots,F_r$ 的同时秩恰好为

$$\max\{b_1, a_r\} + 1.$$

更确切地说，它等于

$$\begin{cases} b_1+1 & \text{if} \quad a_r \le b_1 \quad \text{and} \quad a_1 > 0,\\ a_r+1 & \text{if} \quad b_1 \le a_r \quad \text{and} \quad b_r > 0. \end{cases}$$

（2）单项式 F_1，...，F_r的同时边界秩为

$$\min\{a_i + b_{i+1} + 1 \mid 0 \le i \le r\} + 1.$$

证明。（1）令d为满足 $1 \le d \le \max\{a_r, b_1\}$的任意正整数。我们断言，同时秩严格大于$d$。

设 $a_r \le b_1$ 且 $a_1 > 0$。在这种情况下，注意到

$$\mathrm{Ann}(F_1,\dots,F_r)_d = (t^{b_1+1}, s^{a_1+1}t^{b_2+1},\dots,s^{a_r+1})_d = (s^{a_1+1}t^{b_2+1},\dots,s^{a_r+1})_d.$$

由于 $\gcd(s^{a_1+1}t^{b_2+1},\dots,s^{a_r+1}) = s^{a_1+1}$ 且 $a_1+1 \ge 2$，根据定理 3.3，$\mathrm{Ann}(F1,\dots,F_r)_d$中存在非平方自由单项式因子意味着同时秩必然严格大于d。

设 $a_r \ge b_1$ 且 $b_r > 0$。由对称论证，

$$\mathrm{Ann}(F_1,\dots,F_r)_d = (t^{b_1+1},\dots,s^{a_{r-1}+1}t^{b_r+1}, s^{a_r+1})_d = (t^{b_1+1},\dots,s^{a_{r-1}+1}t^{b_r+1})_d.$$

由于 $\gcd(t^{b_1+1},\dots,s^{a_{r-1}+1}t^{b_r+1}) = t^{b_r+1}$ 且$b_r+1 \ge 2$，根据定理 3.3，$\mathrm{Ann}(F1,\dots,F_r)_d$中存在非平方自由单项式因子意味着同时秩必然严格大于d。

现在，设 $d = \max\{b_1, a_r\}+1$。于是，$\mathrm{Ann}(F1,\dots,F_r)$ 中次数至多为d 的极小单项式生成元的最大公因式为 1，因为它们包含t^{b_1+1} 和s^{a_r+1}。因此，根据定理 3.3，我们得出同时秩至多为 $\max\{b_1,a_r\}+1$。综合上述所有论证，即得所需等式。

（2）同时边界秩立即由定理 3.1 和定理 3.5（2 得出 ）. □

在条件 $a_1 > 0$ 和 $b_r > 0$下，定理 3.6 表明，同时边界秩与同时秩相等，当且仅当

$$\min\{a_i + b_{i+1} + 1 \mid 0 \le i \le r\} = b_1 = a_r,$$

这是一个限制性极强的情形。

4. Rational curves

Let

$$\mathscr{C} := \overline{\{[f_0(\alpha,\beta) : \cdots : f_n(\alpha,\beta)] \mid [\alpha:\beta] \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}\}} \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$$

设其为一条由线性无关的二元形式 $f0,\dots,f_n \in \mathbb{K}[\alpha,\beta]_d$参数化的非退化射影曲线，其中 $\mathscr{X}$表示集合 $\mathscr{X}$ 的扎里斯基闭包。注意，每条有理曲线都具有这样的参数化，而曲线的非退化性意味着 $d \ge n$。

当 $d = n$时，曲线 $\mathscr{C}$ 是一条次数为 d的有理正规曲线。如果 $d > n$，则它可以实现为一条次数为 d的有理正规曲线在一个（$d-n-1$）维子空间上进行线性投影所得的像。这可以通过结合射影有理映射的标准结果得到（参见 [AR17，第 2]节）。

更明确地说，将 $V = \langle f0,\dots,f_n\rangle$ 视为 $\mathbb{K}[\alpha,\beta]_d \cong R_d$ 的子空间，我们取由微分作用诱导的消去配对下的 $L = V^\perp \subseteq \mathscr{R}_d$。于是，$\mathscr{C}$在射影意义下等价于次数为$d$ 的有理正规曲线在以 $\mathbb{P}(L)$ 为中心的线性投影下的像。

~现在我们反过来考察。考虑有理正规曲线$\widetilde{\mathscr{C}_d} \subset \mathbb{P}^d_{\mathbb{K}}$ 在如下线性投影 $\overline{\pi_{\mathscr{L}}}$: $\mathbb{P}^d_{\mathbb{K}} \dashrightarrow \mathbb{P}^{d-r}_{\mathbb{K}}$下的像 $\mathscr{C} = \pi_{\mathscr{L}}(\mathscr{C}_d \setminus \mathscr{L})$，其中 $\mathscr{L} \subset \mathbb{P}^d_{\mathbb{K}}$ 是一个维数为 $\mathscr{L} = r-1$ 的线性空间，且 $1 \le r \le d-1$。对于这个线性空间 $\mathscr{L}$，令 L为 $\mathbb{K}[S,T]_d$ 中与 $\mathscr{L}$ 对应的 $\mathscr{L} = \mathbb{P}(L)$ 所对应的 r 维向量子空间。于是，我们有有理映射

$$\pi_{\mathscr{L}} : \mathbb{P}(\mathbb{K}[S,T]_d) \dashrightarrow \mathbb{P}(\mathbb{K}[S,T]_d/L) \cong \mathbb{P}((L^\perp)^*) \cong \mathbb{P}^{d-r}_{\mathbb{K}}.$$

此外，如果我们采用第2.2节中引入的配对 $\circ$: $\mathbb{K}[s,t]_d \times \mathbb{K}[S,T]_d \to \mathbb{K}$，那么 $L^\perp$ =(湮灭子 $(F1,\dots,F_r)$)$_d$其中 $\{F1,\dots,F_r\}$是 L 的一组基。

4.1. 仿射缺陷。 湮灭子 $\mathrm{Ann}(L) = \mathrm{Ann}(F1,\dots,F_r)$ 的结构是定理 1.1 的一个特殊情形，其中形式 $F1,\dots,F_r$ 都具有相同的次数。以下命题给出了这一情形的几个等价条件。

命题 4.1。 设 $I \subset R$ 是一个齐次阿廷理想，它由 $r+1$ 个次数分别为 d_1、...、d_{r+1} 的形式极小生成，并设

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{j=1}^{r} R(-b_j) \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{r+1} R(-d_i) \longrightarrow R \longrightarrow R/I \longrightarrow 0 \tag{4.1}$$

是其最小分次自由分解。对于固定整数 $d \geq 0$，以下条件等价。

(i) 存在一个 r 维子空间 $L \subset \mathscr{R}_d$，使得 $I = \text{湮灭子}(L)$。(ii) 代数 $A = R/I$ 是底层次数为 d、型别为 r 的层代数。(iii) 逆系统模

$$I^{\perp} = \{F \in \mathscr{R} \mid I \circ F = 0\}$$

由 r 个次数为 d 的线性无关型式极小生成。

(iv) 最后的移位满足

$$b_1 = \cdots = b_r = d+2.$$

(v) 有

$$\dim_{\mathbb{K}} I_d = d+1-r \qquad \textit{and} \qquad I_{d+1} = R_{d+1}.$$

证明。 (i)、(ii) 和 (iii) 的等价性是通常的 Macaulay 逆系统对应：$I^{\perp}$ 的极小生成元与R/I的底层生成元互为对偶。由于R有两个变量，次数为e的底层生成元对应于最后一个自由模中的一个直和项$R(-e-2)$。因此，(ii) 等价于 (iv)。

如果A 是底层次数为d 、型别为r的 level 代数，那么$A_{d+1} = 0$ 和$A_d = \text{Soc}(A)$ 的维数为r。这就得到 (v)。反过来，假设 (v) 成立，则$A_d \subseteq \text{Soc}(A)$，且 $\dim_{\mathbb{K}} A_d = r$。希尔伯特–伯奇分解 (4.1) 表明，底层的总维数为r，因为最后一个自由模的秩为r。因此 $\text{Soc}(A) = A_d$，从而证明A 是底层次数为d 、型别为r的 level 代数。□

特别地，对于$L \in \text{Gr}(r, \mathscr{R}_d)$，理想$I = \text{Ann}(L)$ 由$r+1$个形式作极小生成元，且有如下分解

$$0 \longrightarrow R(-d-2)^r \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{r+1} R(-d_i) \longrightarrow I \longrightarrow 0.$$

因此，

$$\sum_{i=1}^{r+1} d_i = r(d+2). \tag{4.2}$$

定义 4.2. $L = \langle F_1, \ldots, F_r \rangle \subseteq \mathbb{K}[S,T]_d$的仿射缺陷（或底层生成缺陷），记为$\rho(L)$，定义为 $\text{Ann}(L)$ 中次数为$d+1$的极小生成元个数。

仿射缺陷 $\rho(L)$ 将在我们后续的几何分析中发挥重要作用。我们利用 [Iar04] 中关于层代数和祖先理想的已知结果，研究它的性质和等价刻画。

对于子空间$L \subset \mathscr{R}_d$，我们将其一阶延拓 $L^{(1)} \subset \mathscr{R}_{d+1}$ 定义为

$$L^{(1)} = \{G \in \mathscr{R}_{d+1} \mid R_1 \circ G \subseteq L\} = \{G \in \mathscr{R}_{d+1} \mid s \circ G, t \circ G \in L\}.$$

定理 4.3. 设 $L \in \text{Gr}(r, \mathscr{R}_d)$ 且湮灭子$(L) \subset R = \mathbb{K}[s,t]$。那么

$$\rho(L) = \dim_{\mathbb{K}} L^{(1)}.$$

等价地，湮灭子(L) 有一个次数为 $d+1$ 的极小生成元，当且仅当存在非零的 $G \in \mathscr{R}_{d+1}$ 使得 $s \circ G, t \circ G \in L$。

证明。 设I 是L的湮灭子。由于$I_{d+1} = R_{d+1}$，I 中次数为$d+1$ 的极小生成元空间为

$$\frac{I_{d+1}}{R_1 I_d} = \frac{R_{d+1}}{R_1 I_d}.$$

在次数$d+1$上的完美反极配对下，这个商的对偶是$(R_1 I_d)^{\perp}$。对于$G \in \mathscr{R}_{d+1}$，有

$$G \in (R_1 I_d)^{\perp} \iff f \circ (\ell \circ G) = 0 \quad \text{for every } f \in I_d \text{ and } \ell \in R_1.$$

由于$I_d = L^\perp$，这等价于：对每个 $\ell \in R_1$，$\ell \circ G \in L$。因此$(R_1 I_d)^\perp = L^{(1)}$。 □

令 $J \subseteq R$ 为 $I_d = \mathrm{Ann}(L)_d$ 的祖理想（其定义和性质见 [Iar04] ）。注意，$J \cap R_{\geq d} = (I_d)$ 且 $J_{d+1} = R_1 I_d$。于是，定理 4.3 蕴含 $L^{(1)}$ 与J_{d+1}的仿射对偶相同；也就是说，$L^{(1)} = J_{d+1}^\perp$。因此，我们得到

$$\rho(L) = \dim_{\mathbb{K}} R_{d+1} - \dim_{\mathbb{K}} J_{d+1} = \dim_{\mathbb{K}}(J_{d+1}^\perp).$$

特别地，仿射缺陷与 Iarrobino 不变量之间的关系为

$$\tau(L^\perp) = \dim_{\mathbb{K}}(R_1 L^\perp) - \dim_{\mathbb{K}} L^\perp = r + 1 - \rho(L).$$

根据 [Iar04，引理 2.2], ，该量等于祖理想J的极小生成元个数。

相应地，设$g_1, \ldots, g_m$为 $\mathrm{Ann}(L)$ 中次数不超过d的极小齐次生成元，其中$m = \tau(L^\perp) = r + 1 - \rho(L)$。下文将探讨仿射缺陷$\rho(L)$、最大公因式 $\gcd(g_1, \ldots, g_m)$ 与L的维数之间的关系。

C推论 4.4。 g =最大公因式$(g_1$、...、$g_m)$ 的次数由 L 的仿射缺陷界定；即 s,

$$\deg(g) \leq \rho(L) \leq \dim_{\mathbb{K}}(L).$$

证明。 令$d' = \deg(g)$，并令$J = (g_1$、...、$g_m)$。则$J_d \subset g R_{d-d'}$。由于J是I的祖理想，根据定理 4.1(v)，$\dim_{\mathbb{K}} J_d = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ann}(L)_d = d + 1 - r$，且 $\dim_{\mathbb{K}} J_{d+1} = d + 2 - \rho(L)$。这就得到

$$(d+2) - \rho(L) \leq d - d' + 2 \implies d' \leq \rho(L).$$

此外，$\mathrm{Ann}(L)_d \neq 0$，因为$r \leq d - 1$，所以$m \geq 1$。因此，

$$\rho(L) = r + 1 - m \leq r = \dim_{\mathbb{K}}(L).$$

□

正如我们将在第 4.2 节中所证明的，仿射缺陷 $\rho(L)$ 不仅决定曲线的参数化和包含滚曲面的维数，而且还界定交概形$\sim \mathscr{L} \cap \mathscr{C}_d$的长度。

当L 由单项式张成时（即，$\mathscr{L}$ 是一个坐标线性子空间），其仿射缺陷可以通过计算连续指数来显式求出。

推论 4.5。 设 $L \subset \mathbb{K}[S,T]_d$为由单项式 $\{S^{d-c_i} T^{c_i} \mid 1 \leq i \leq r\}$ $with$ $0 \leq c_1 < \cdots < c_r \leq d$ 张成的子空间。那么

$$\rho(L) = |\{1 \leq i \leq r-1 \mid c_{i+1} - c_i = 1\}| + |\{c_1, c_r\} \cap \{0, d\}|.$$

证明。 这立即由定理 3.5(2) 得出。 □

定理 4.5 说明了为什么不等式 $\deg(g) \leq \rho(L)$ 成立，以及两个项之间的差距是如何产生的。对于由单项式张成的线性空间L，$\deg(g)$ 等于包含边界点 0（若 $c_1 = 0$）和d （若 $c_r = d$）的极大连续指数块的长度之和。相反，$\rho(L)$ 计算整个序列（$c_1, \ldots, c_r$）中所有连续整数的相邻数对，包括内部的相邻数对，以及 $\{0, d\}$ 中的端点。

4.2. **参数化**。 我们得到了射影等价意义下有理曲线的参数化。

定理 *4.6.* 设 $L = \langle F_1, \ldots, F_r \rangle \subseteq \mathscr{R}_d$的维数为 r，且 $m := r + 1 - \rho(L)$。令 $\mathscr{L} = \mathbb{P}(L)$ 为 $\mathbb{P}^d_{\mathbb{K}} = \mathbb{P}(\mathscr{R}_d)$ 中的线性子空间。设 $g_1, \ldots, g_m$ 是 $Ann(L)$ 中次数不超过 d 的极小生成元，其中 $d_i := deg(g_i)$，并令 $g = gcd(g_1, \ldots, g_m)$，且 $g_i' := g_i / g$。则投影曲线$\sim \mathscr{C} = \pi_{\mathscr{L}}(\mathscr{C}_d \setminus \mathscr{L})$与由 *(1.1)* 参数化的曲线射影等价。

证明。 给定 r 维线性空间 $L \subset \mathbb{K}[S,T]_d$，我们有

$$L^\perp = (\mathrm{Ann}(L))_d = \bigoplus_{i=1}^{m} g_i \mathbb{K}[s,t]_{d-d_i}.$$

注意，这一直和分解可以通过对两边进行直接的维数计数论证来验证。

Si由于维数$L^{\perp}=d+1-r$，以下$d-r+1$多项式构成$L^{\perp}\subseteq\mathbb{K}[s,\ t]_d$的一个基：

$$\begin{array}{llll} v_r:=g_m s^{d-d_m}, & v_{r+1}:=g_m s^{d-d_m-1}t, & \ldots, & v_{r+d-d_m}:=g_m t^{d-d_m}, \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{d_1}:=g_1 s^{d-d_1}, & \ldots, & v_{d-1}:=g_1 s t^{d-d_1-1}, & v_d:=g_1 t^{d-d_1} \end{array}$$

我们通过非退化的阿波极乘积 ∘将 $\mathbb{K}[S,T]_d$ 视为 $\mathbb{K}[s,t]_d$ 的对偶向量空间。我们选取 {w_r、.....、w_d} $\subset\mathbb{K}[S,T]_d$ 作为 {v_r、.....、v_d} 的对偶系，满足对于 i, j ∈{r . . . , d}，$v_i\circ w_j=\delta_{ij}$。注意，由于对于所有 v ∈$L^{\perp}$ 和 F ∈L，都有 v ∘F =0，因此 L ∩⟨w_r、...、w_d⟩={0}。于是，我们可以将其扩充为 $\mathbb{K}[s,t]_d$ 的一个基 {v0、...、v_d}，该基与 $\mathbb{K}[S,T]_d$ 的一个基 {F1、...、F_r、w_r、...、w_d} 对偶。

对于任意点 $q=[F_q]\in\mathbb{P}^d_{\mathbb{K}}$，我们有如下展开式：

$$F_q=\sum_{j=1}^{r}\alpha_j F_j+\sum_{i=r}^{d}(v_i\circ F_q)w_i.$$

投影 $\pi_{\mathbb{P}(L)}$：$\mathbb{P}^d_{\mathbb{K}}\setminus\mathbb{P}(L)\to\mathbb{P}^{d-r}_{\mathbb{K}}$将$q$映射为$w_i$分量的系数：

$$\pi_{\mathbb{P}(L)}(q)=[v_r\circ F_q:v_{r+1}\circ F_q:\cdots:v_d\circ F_q].$$

设 $q=[\alpha^d:\ \alpha^{d-1}\beta:\ \cdots:\ \beta_d]\in\widetilde{\mathscr{C}_d}$是有理正规曲线上的一点，并选取代表元$F_q=(\alpha S+\beta T)^d$。根据定理 2.3，我们有

$$(g_i s^{d-d_i-k}t^k)\circ(\alpha S+\beta T)^d=d!\,g_i(\alpha,\beta)\alpha^{d-d_i-k}\beta^k.$$

将每个坐标除以最大公因式g，即可得到所需的参数化。

□

$\mathscr{C}$ 在 (1.1) 中的参数化也给出了公因子g的几何解释：它以重数记录了导致 $\pi_{\mathscr{L}}$中所涉及的内投影的点。考虑到该参数化的一般次数，我们还可得到投影曲线 $\mathscr{C}$ 的次数公式如下。

推论 4.7. 沿用定理 *4.6* 中的记号，令 $d'=\deg(g)$。令 $\varphi:\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}\longrightarrow\mathscr{C}$ 表示由参数化(1.1)定义的态射。令 δ 表示其到像上的一般次数；也就是说，$\mathscr{C}$ 中的一般点在 φ下有 δ 个原像，按重数计。于是

$$\deg(\mathscr{C})=\frac{d-d'}{\delta}\quad and\quad \operatorname{length}\left(\mathscr{L}\cap\widetilde{\mathscr{C}_d}\right)=d'.$$

证明。对于 $1\le i\le m$ 和 $0\le j\le d-d_i$，令 $h_{i,j}=g'_i(\alpha,\beta)\alpha^{d-d_i-j}\beta^j$。根据定理 4.6，$\mathscr{C}$的参数化由形式 $h_{i,j}$给出，它们的次数均为 $d-d'$。注意，由于 $\gcd(g'_1,\ldots,g'_m)=1$，形式 $h_{i,j}$ 在 $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ 上没有公共零点。

我们首先断言，$\delta\deg(\mathscr{C})=d-d'$。令$H\subset\mathbb{P}^{d-r}_{\mathbb{K}}$为一个一般超平面。由于 φ具有一般次数 δ，因此在 φ 下，$H\cap\mathscr{C}$ 的原像长度为 $\delta\deg(\mathscr{C})$。另一方面，这个原像是形式 $h_{i,j}$ 的某个非零线性组合的消失概形，因此其长度为$d-d'$。所以，$\delta\deg(\mathscr{C})=d-d'$。

现在，我们计算 $\mathscr{L}\cap\widetilde{\mathscr{C}_d}$ 的长度。根据消去配对，元素 $g_i(s,t)s^{d-d_i-j}t^j\in L^{\perp}$where $1\le i\le m$ and $0\le j\le d-d_i$ 表示定义 $\mathscr{L}$ 的线性方程。在 $\widetilde{\mathscr{C}_d}$ 的标准参数化 $q=[\alpha^d:\ \alpha^{d-1}\beta:\ \cdots:\ \beta d]$ 下，这些线性方程的拉回是次数为 d 的形式 $g_i(\alpha,\beta)\alpha^{d-d_i-j}\beta^j=gh_{i,j}$。因此，交概形 $\mathscr{L}\cap\widetilde{\mathscr{C}_d}$ 对应于形式 $gh_{i,j}$ 的公共零点概形。

由于形式 $h_{i,j}$ 没有公共零点，形式 $gh_{i,j}$ 的公共零点恰好是 g 的零点~（重数相同）。因此，长度为$\left(\mathscr{L}\cap\mathscr{C}_d\right)=d'$。□

推论 4.8。此外，假设态射 φ：$\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}\to\mathscr{C}$ 是到其像上的双有理态射。那么，以下条件等价：

(i) 次数(g) =维数$_{\mathbb{K}}(L)$.(ii) $\rho(L)$ =维数$_{\mathbb{K}}(L)$.(iii) $\mathscr{C}=\pi_{\mathscr{L}}($ $\widetilde{\mathscr{C}_d}\setminus\mathscr{L})\subset\mathbb{P}^{d-r}_{\mathbb{K}}$是次数为 $d-r$ 的有理正规曲线。

证明。对于这些等价关系，蕴含关系 (i) $\Longrightarrow$ (ii) 立即由上述不等式得到，而 (ii) $\Longrightarrow$ (iii) 由定理 4.6 得出。为证明 (iii) $\Longrightarrow$ (i)，假设 $\mathscr{C}$ 是次数为 d $-r$ 的有理正规曲线。由于 φ 到其像是双有理的，定理4.7 给出 $\deg(g)$ $=d-\deg(\mathscr{C})$ $=r$ $=$维数$_{\mathbb{K}}(L)$。□

对于次数为d ≥ 3, [的单点外投影，BS07 定理 7.3] 给出了一个包含它的有理正规曲面卷曲面。在定理 1.3 的范围内，我们的参数化构造了一个维数为$r+1-\rho(L)$的包含卷曲曲面，下面的论证将证明，在满足截面条件时，该卷曲曲面具有极小性。

令 $\mathrm{p}:\ \mathbb{P}(\bigoplus \mathrm{ni}_{=1}\ \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}}(\mathrm{a}_i))\ \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ 为自然投影。对于每个 $\mathrm{q}\ \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$，p 的纤维参数化了 $\bigoplus \mathrm{ni}$ $_{=1}\ \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}}(\mathrm{a}_i)|_q$ 的一维商。令 j 表示从射影丛$\mathbb{P}(\bigoplus \mathrm{ni}_{=1}\ \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}}(\mathrm{a}_i))$到 $\mathscr{S}=\mathrm{S}(\mathrm{a}1,\ldots,\mathrm{a}_n)$ 的态射，该态射由其典范线丛的整体截面定义。我们称 $\mathscr{C}$ 作为其直纹的一个截面被包含，如果存在一个态射 $\sigma\colon\ \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}\to\mathbb{P}(\bigoplus \mathrm{ni}_{=1}\ \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}}(\mathrm{a}_i))$，使得 $\mathrm{p}\circ\sigma=\mathrm{id}^{\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}}$，且诱导的态射 $\psi=\mathrm{j}\circ\sigma\colon\ \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}\to\mathscr{S}$ 的像为 $\mathscr{C}$。按照这一约定，下面的证明表明，在定理 1.3 的范围内，$\mathrm{r}\ +1-\rho(\mathrm{L})$ 是包含 $\mathscr{C}$ 作为其直纹截面的有理正规卷曲曲面的最小维数。

定理 *1.3* 的证明。令$L^{\perp}=$湮灭子$(L)_d=gW$，其中$W\ \subseteq R_{d-d'}$是定义 φ的线性系。于是 $\dim_{\mathbb{K}}$ $W\ =d-r+1$。由于 $\mathrm{Ann}(L)_{d+1}=R_{d+1}$，我们有

$$\rho(L)=d+2-\dim_{\mathbb{K}}(R_1L^{\perp})=d+2-\dim_{\mathbb{K}}(R_1W).$$

首先假设 $\rho(L)\ =r+1-m$。那么 $\mathrm{Ann}(L)$ 恰有m 个次数至多为d的极小生成元。设这些生成元为$g1,\ldots,g_m$，其中$d_i=\deg(g_i)$，且$g'_i=g_i/g$，如定理 4.6 所示。于是$W\ =\bigoplus_{mi=1}g'_iR_{d-d_i}$。通过计算维数，我们得到

$$\sum_{i=1}^{m}(d-d_i)=d-r+1-m>0.$$

因此，对于某个i，有$d\ -d_i>0$。对于这个i, 由于$\underline{g'_i\alpha^{d-d_i-1}\beta\, g'_i\alpha^{d-d_i}}\ \ =\frac{\beta}{\alpha}$在一个非空开子集上，$\varphi$ 是到其像的双有理映射。也就是说，$\delta=1$。

根据定理 4.6，经过射影坐标变换后，$\mathscr{C}$ 可参数化为

$$[\cdots:g'_i(\alpha,\beta)\alpha^{d-d_i-j}\beta^{j}:\ldots]$$

其中 $1\leq i\leq m$且 $0\leq j\leq d-d_i$。考虑有理正规卷曲 $\mathscr{S}=S(d-d1,\ldots,d-d_m)\ \subseteq\mathbb{P}^{d-r}_{\mathbb{K}}$，其参数化如下:

$$\{[\cdots:\gamma_i\eta^{d-d_i-j}\zeta^{j}:\ldots]_{1\leq i\leq m,0\leq j\leq d-d_i}\mid[\eta:\zeta]\in\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}},[\gamma_1:\cdots:\gamma_m]\in\mathbb{P}^{m-1}_{\mathbb{K}}\}. \tag{4.3}$$

由于对于每个 $i=1,\ldots,m$，都有 $d-d_i\geq 0$，并且 $\sum_{i=1}^{m}(d-d_i)\ >0$，因此该卷曲曲面的维数为 m。注意，将 $[\eta\colon\ \zeta]=[\alpha\colon\ \beta]$ 代入，并在局部直纹坐标中取 $\gamma_i=g'_i(\alpha,\beta)$，即可恢复 $\mathscr{C}$ 的参数化。由于形式 g'_i没有公共零点，这定义了直纹族在 $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ 上的一个截面，其像为 $\mathscr{C}$。因此，在 $\mathscr{S}$ 为锥时，可在标准射影丛模型上理解，$\mathscr{C}$ 作为其直纹的一个截面包含于 $\mathscr{S}$ 中。

为证明m的极小性，设 φ 是双有理的，并且 $\mathscr{C}$ 包含在一个 $\mathscr{S}=S(a1,\ldots,a_n)\ \subseteq\mathbb{P}^{d-r}_{\mathbb{K}}$维有理正规卷曲 $\mathscr{S}=S(a1,\ldots,a_n)\ \subseteq\mathbb{P}^{d-r}_{\mathbb{K}}$中，且是其直纹的一个截面。于是 $\sum_{i=1}^{n}(a_i+1)\ =d-r+1$。令$\psi\colon\ \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}\to\mathscr{C}$为该截面诱导的态射。我们断言 ψ是到 $\mathscr{C}$上的双有理映射。事实上，由于$\mathscr{C}$是非退化的，它不包含在 $\mathscr{S}$的顶点中。在顶点之外，j 是同构，而$p\circ j^{-1}$给出了 ψ在 $\mathscr{C}$的一个非空开子集上的逆映射。

由于 φ 和 ψ 是从非奇异射影曲线 $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$出发的双有理态射，因此它们是有限态射，从而是 $\mathscr{C}$ [的正规化态射（Har77，第二章，命题6.8及习题3.8]）。因此，由正规化的唯一性可得唯一的 $\sigma\in\mathrm{Aut}_{\mathbb{K}}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}})$，使得 $\psi\circ\sigma=\varphi$。

将直纹的底空间通过 σ 与 φ 的定义域等同后，截面参数化便与 φ 一致。该截面对应于一个满射

$$\bigoplus_{i=1}^{n}\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}}(a_i)\twoheadrightarrow\varphi^{*}\mathscr{O}_{\mathscr{C}}(1)\cong\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}}(d-d')$$

[Har77，第二章，命题 7。12]。因此，其分量是没有公共零点的形式 $f_i \in R_{d-d'-a_i}$。在适应该卷曲曲面的齐次坐标中，φ 的坐标形式为 $f_i\alpha^{a_i-j}\beta_j$，其中 $1 \le i \le n$ 且 $0 \le j \le a_i$。由于环境空间的射影坐标变换只会改变 W 的基，我们得到 $W = \sum_{i=1}^{n} f_i R_{a_i}$。

因此，$R_1W = \sum_{i=1}^{n} f_i R_{a_i+1}$，因此 $\dim_{\mathbb{K}}(R_1W) \le \sum_{i=1}^{n}(a_i+2) = d-r+n+1$。由此可得 th at

$$\rho(L) = d+2-\dim_{\mathbb{K}}(R_1W) \ge r+1-n. \tag{4.4}$$

特别地，若 $\rho(L) = r+1-m$，则 $m \le n$。结合上述构造，这就证明了 m 是可能的最小维数。

反过来，假设 φ 是双有理的，并且 m 是满足 $\mathscr{C}$ 包含于某个 m 重有理正规卷曲曲面中的最小正整数，其中 $\mathscr{C}$ 是其直纹的一个截面。取 $n = m$，将 (4.4) 应用于此情形，可得 $\rho(L) \ge r+1-m$。假设该不等式是严格的，并令 $n = r+1-\rho(L)$。那么 Ann(L) 恰有 n 个次数至多为 d 的极小生成元，且 $1 \le n < m \le d-r$。对这些生成元应用相同的构造，可得到一个 n 重有理正规卷曲曲面 $\mathscr{S}$，它包含 $\mathscr{C}$ 作为其直纹的一个截面。这与 m 的极小性矛盾。因此，$\rho(L) = r+1-m$，证毕。□

假设 φ 是双有理的，则 $m = 1$ 当且仅当 $\mathscr{C} \subset \mathbb{P}^{d-r}_{\mathbb{K}}$ 是次数 $d-r$ 的有理正规曲线时成立（由定理 4.8）。因此，若 $d \ge 2r+1$，那么定理 1.3 涵盖了整个范围 $1 \le m \le r+1 = \min\{r+1, d-r\}$。

结合这一情形，定理 1.3 表明，$m = r+1-\rho(L)$ 是包含 $\mathscr{C}$（作为其直纹的一个截面）的有理正规卷曲曲面的最小维数。然而，若不要求满足截面条件，$\mathscr{C}$ 可能包含在维数小于 m 的有理正规卷曲曲面中。

注 4.9. 假设 φ 双有理映到其像，且 $d-r \ge 3$。由定理 4.8、定理 1.3 以及 Green 的 $\mathscr{K}_{p,1}$ 定理 [Gre84]（另见 [KMP24，定理 1.1]），当 $\rho(L) \ge r-2$ 时，无需施加截面条件即可确定包含 $\mathscr{C}$ 的有理正规卷曲曲面的最小维数：

(1) 若 $\rho(L) = r$，则最小值为 1。(2) 若 $\rho(L) = r-1$，则最小值为 2。(3) 若 $\rho(L) = r-2$ 且 $d-r \ne 5$，则当 $\mathscr{K}_{d-r-2,1}(\mathscr{C}) \ne 0$ 时最小值为 2，否则为 3。

在第三种情形中，若 $d-r = 5$，则除非 $\mathscr{C}$ 位于 Veronese 曲面上，否则同一判据仍然成立；若位于其上，则最小值为 3（见 [KMP24, 定理 5.2]）。

例 4.10. 对于一个整数 $\mathrm{d} \ge 6$，令 $\mathscr{L} = \langle \mathrm{e}_1, \mathrm{e}_3 \rangle \subset \mathbb{P}^d$ 为对应于 $\mathrm{L} = \langle \mathrm{S}^{d-1}\mathrm{T}, \mathrm{S}^{d-3}\mathrm{T}^{3} \rangle \subset \mathbb{K}[\mathrm{S}, \mathrm{T}]_d$ 的直线。投影曲线 $\mathscr{C} := \pi_{\mathscr{L}}(\widetilde{\mathscr{C} \setminus \mathscr{L}}) \subset \mathbb{P}^{d-2}$ 的定义理想可通过从 $\mathrm{I}(\widetilde{\mathscr{C}})$ 中消去 $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_3$ 得到。由于 $\mathrm{Ann(L)} = (\mathrm{t}^4, \mathrm{s}^{d-2}\mathrm{t}^2, \mathrm{s}^d)$，根据定理 1.3，$\mathscr{C}$ 包含于三维卷曲面 $\mathrm{S}(0, 0, \mathrm{d}-4)$ 中。事实上，$\mathscr{C}$ 作为除子位于曲面卷曲面 $\mathscr{S} = \mathrm{S}(\lceil (\mathrm{d}-6)/2 \rceil, \lfloor \mathrm{d}/2 \rfloor)$ 上。在 $\mathscr{S}$ 的标准射影丛模型上，对应的曲线相对于极小截面和纤维类的双次数在 d 为奇数时是 (2, 5)，在 d 为偶数时是 (2, 6)。通过 $\mathscr{C}$ 的一维 toric 多面体或 Green 的 $\mathscr{K}_{p,1}$ 定理 [Gre84]，可以验证这一嵌入。对于 $\mathscr{L} = \langle \mathrm{e}_1, \mathrm{e}_{d-1} \rangle$ 和 $\mathscr{L} = \langle \mathrm{e}_{d-3}, \mathrm{e}_{d-1} \rangle$ 也会出现类似现象。

4.3. **格拉斯曼流形上的行列式簇**。由于我们可以将 r 维子空间 $L \subset \mathscr{R}_d$ 视为格拉斯曼流形 $\mathrm{Gr}(r, \mathscr{R}_d)$ 中的一个点，因此我们考察格拉斯曼流形中这类线性空间构成的簇。对于一个整数 $\tau \ge 0$，令

$$\mathfrak{D}_{\ge\tau} := \{L \in \mathrm{Gr}(r, \mathscr{R}_d) \mid \rho(L) \ge \tau\}.$$

那么 $\mathfrak{D}_\tau = \mathfrak{D}_{\ge\tau} \setminus \mathfrak{D}_{\ge\tau+1}$ 是满足 Ann(L) 恰有 τ 次数为 $d+1$ 的极小生成元的 L 所构成的簇。正如引言中所述，我们将证明 $\mathfrak{D}_{\ge\tau}$ 是一个扎里斯基闭集。

命题 4.11. 对于 $\tau \ge 0$,

$$\mathfrak{D}_{\ge\tau} = \{L \in \mathrm{Gr}(r, \mathscr{R}_d) \mid \rho(L) \ge \tau\}$$

它是格拉斯曼流形中的一个扎里斯基闭集，并且由一个矩阵的子式定义。

证明。令 $D_s^{(m)}$ 和 $D^{(m)}{}_t$ 为从 $\mathscr{R}_m$ 到 $\mathscr{R}_{m-1}$ 使用规范化基得到的微分矩阵。事实上，它们分别是由 $[I_m \mid \mathscr{O}]$ 和 $[\mathscr{O} \mid I_m]$ 给出的 $m \times \times m+1$ 矩阵，其中 $\mathscr{O} \in \mathbb{K}^m$ 是零列向量。利用格拉斯曼流形的 Stiefel 坐标，用一个满秩矩阵表示 L

$A \in \mathrm{Mat}^{r\times(d+1)}(\mathbb{K})$，其行构成$L$的一组基。那么，当且仅当存在$a,b \in \mathbb{K}^r$使得$G \in L^{(1)}$时，

$$D_s^{(d+1)} z = A^T a, \quad \text{and} \quad D_t^{(d+1)} z = A^T b,$$

其中z是G的系数向量。定义

$$\mathscr{N}(A) = \begin{pmatrix} D_s^{(d+1)} & -A^T & 0 \\ D_t^{(d+1)} & 0 & -A^T \end{pmatrix}.$$

那么$G \in L^{(1)}$当且仅当

$$\mathscr{N}(A) \begin{pmatrix} z \\ a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_s^{(d+1)} z - A^T a \\ D_t^{(d+1)} z - A^T b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

有解。因此，投影到z上得到$\ker \mathscr{N}(A) \cong L^{(1)}$，于是

$$\dim_{\mathbb{K}} L^{(1)} = d + 2 + 2r - \operatorname{rank} \mathscr{N}(A).$$

因此，

$$\dim_{\mathbb{K}} L^{(1)} \geq \tau \iff \operatorname{rank} \mathscr{N}(A) \leq d + 2 + 2r - \tau.$$

相应的斯蒂费尔方程是（$d+3+2r-\tau$）阶子式。 □

我们将介绍几种描述这个轨迹集的方法。

注 4.12. 理解这个轨迹集有几种不同的方法。

(1) 选取一个满秩矩阵$Q \in \mathrm{Mat}^{(d+1-r)\times(d+1)}(\mathbb{K})$，满足$QA^T = 0$。那么$Q$表示$\mathscr{R}_d \to \mathscr{R}_d/L$，而对偶地，点$L^\perp \in \mathrm{Gr}(d+1-r, R_d)$。定义

$$M(Q) = \begin{pmatrix} QD_s^{(d+1)} \\ QD_t^{(d+1)} \end{pmatrix}.$$

那么$L^{(1)} =$是$M(Q)$的核，因此$\dim_K L^{(1)} = d+2-$等于$M(Q)$的秩。因此

$$\dim_K L^{(1)} \geq \tau \iff \operatorname{rank} M(Q) \leq d + 2 - \tau,$$

方程为（$d+3-\tau$）阶子式。在标准图表$A = (I_r \mid X)$上，可以取$Q = (-X^T \mid I_{d+1-r})$。此外，

$$\operatorname{rank} \mathscr{N}(A) = 2r + \operatorname{rank} M(Q).$$

实际上，通过适当的列变换和行变换，我们可以将$\mathscr{N}(A)$化为

$$\begin{pmatrix} I_{2r} & 0 \\ 0 & M(Q) \end{pmatrix}$$

(2) 定义梯度映射$\nabla : \mathscr{R} \to \mathscr{R} \oplus \mathscr{R}$ by $\nabla(G) = (s \circ G, t \circ G)$，并定义旋度映射 curl : $\mathscr{R} \oplus \mathscr{R} \to \mathscr{R}$ by $\operatorname{curl}(P,Q) = t \circ P - s \circ Q$。那么齐次梯度–旋度序列

$$0 \longrightarrow \mathscr{R}_{d+1} \xrightarrow{\nabla} \mathscr{R}_d^{\oplus 2} \xrightarrow{\operatorname{curl}} \mathscr{R}_{d-1} \longrightarrow 0$$

是正合的。事实上，若$t \circ P = s \circ Q$，则$G = sP + TQ \, d+1$满足$s \circ G = P$且$t \circ G = Q$，由欧拉恒等式$S(s \circ F) + T(t \circ F) = dF$可得。

旋度在$L \oplus L$上的限制由下式表示

$$\Psi(A) = \begin{pmatrix} D_t^{(d)} A^T & -D_s^{(d)} A^T \end{pmatrix}.$$

因此$L^{(1)} \cong \ker \Psi(A)$，这意味着$\dim_{\mathbb{K}} L^{(1)} = 2r -$秩$\Psi(A)$。因此

$$\dim_{\mathbb{K}} L^{(1)} \geq \tau \iff \operatorname{rank} \Psi(A) \leq 2r - \tau,$$

且这些方程就是（$2r-\tau+1$）-子式。

（3）结合这些公式可得

$$\begin{aligned}\rho(L) = \dim_{\mathbb{K}} L^{(1)} &= d+2+2r-\operatorname{rank}\mathscr{N}(A)\\ &= d+2-\operatorname{rank}M(Q)\\ &= 2r-\operatorname{rank}\Psi(A)\end{aligned}$$

5. 曲面卷曲上的有理曲线

一旦建立了参数化 $\mathscr{C}=\{[f_0(\alpha,\beta):\cdots:f_{d-r}(\alpha,\beta)] \mid [\alpha:\ \beta]\in\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}\}\subset\mathbb{P}^{d-r}$，就可以通过从理想 $(z_0-f0,\ldots,z_{d-r}-f_{d-r})$ 中代数地消去参数 α 和 β，得到其定义方程。也就是说，

$$I(\mathscr{C})=(z_0-f_0,\ldots,z_{d-r}-f_{d-r})\cap\mathbb{K}[z_0,\ldots,z_{d-r}].$$

然而，利用 $\mathscr{C}$ 的几何性质，往往能更高效地计算其定义理想。我们重点研究曲线作为除子位于二维有理正规卷曲上的情形。

5.1. 包含在光滑曲面卷曲面中的光滑有理曲线。设 $\mathscr{C}=\pi_{\mathscr{L}}(\widetilde{\mathscr{C}_d}\setminus\mathscr{L})\subset\overline{\mathbb{P}^{d-r}_{\mathbb{K}}}$为投影有理曲线，且 $\mathrm{d}'=\mathrm{length}(\mathscr{L}\cap\widetilde{\mathscr{C}_d})$，$\mathrm{r}=\dim_{\mathbb{K}}\mathrm{L}$。设 $\varphi\colon\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}\to\mathscr{C}$ 为由式 (1.1) 中的参数化定义的态射，并令 $\delta=\deg(\varphi)$ 表示其到 $\mathscr{C}$ 的一般次数。回忆定理4.7，$\deg(\mathscr{C})=\mathrm{d}-\mathrm{d}_{\delta}{}'$。当 $1\le\mathrm{a}\le\mathrm{b}$ 时，S(a, b) 在 $\mathbb{P}^{d-r}_{\mathbb{K}}$ 中的嵌入由完全线性系 $|\mathrm{C}_0+\mathrm{bF}|$ 给出，其中 C_0 表示准线截面，且 $\mathrm{C}_0^2=-\mathrm{e}=\mathrm{a}-\mathrm{b}$，而 F 表示纤维类。由于卷曲曲面 S(a, b) 包含非退化曲线 $\mathscr{C}$，我们有 $\mathrm{a}+\mathrm{b}+1=\mathrm{d}-\mathrm{r}$。

定理 5.1。假设曲线 $\mathscr{C}$ 不是有理正规曲线，而是位于光滑有理正规曲面卷曲 $S(a,b)\subset\mathbb{P}^{d-r}_{\mathbb{K}}$ 上，其中 $1\le a\le b$。若 $\mathscr{C}$ 是 $S(a,b)$ 的直纹的截面，则 $\mathscr{C}$ 是光滑的。反之，若 $\mathscr{C}$ 是光滑的，且 $d\ge\frac{2}{3}(\text{次数}(\mathscr{C})+1)+r$，则 $\mathscr{C}$ 是 $S(a,b)$ 的直纹的截面。

证明。设 $\mathscr{C}\subset\mathscr{S}=S(a,b)$ 是 $\mathrm{Pic}(\mathscr{S})\cong\mathbb{Z}C_0\oplus\mathbb{Z}F$ 中一条双次数为 (m,n) 的曲线。应用光滑曲面上有效除子的伴随公式（参见 [Har77，第 V 章，练习 1.3]），可得

$$2p_a(\mathscr{C})-2=\mathscr{C}.(\mathscr{C}+K_{\mathscr{S}}),\tag{5.1}$$

其中 $K_{\mathscr{S}}$ 是 $\mathscr{S}$ 的典范除子。将 $\mathscr{C}\equiv mC_0+nF$ 和 $K_{\mathscr{S}}\equiv-2C_0-(e+2)F$ 代入 (5.1)，并利用 $C_0^2=-e, C_0.F=1$，以及 $F^2=0$，得到

$$p_a(\mathscr{C})=(m-1)(n-1)-e\binom{m}{2}.\tag{5.2}$$

特别地，若 $m=1$（即 $\mathscr{C}$ 是 $\mathscr{S}$ 的直纹的一个截面），则得到 $p_a(\mathscr{C})=0$。

反过来，假设 $\mathscr{C}$ 光滑，且 $2\deg(\mathscr{C})\le3(d-r)-2$。由 (5.2)，有 $(m-1)(2n-em-2)=0$。反设 $\mathscr{C}$ 不是截面，即 $m\ne1$。于是得到

$$2n=(b-a)m+2.\tag{5.3}$$

由于 $S(a,b)$ 的超平面截面类为 $H=C_0+bF$，其次数为

$$\deg(\mathscr{C})=H.\mathscr{C}=(C_0+bF).(mC_0+nF)=am+n.\tag{5.4}$$

结合 (5.3) 和 (5.4) 得到

$$m=\frac{2\deg(\mathscr{C})-2}{a+b}=2+\frac{2(\deg(\mathscr{C})-d+r)}{d-r-1}.$$

由于 $\mathscr{C}$ 不是有理正规曲线，$\deg(\mathscr{C})>d-r$。此外，条件 $d\ge\frac{2}{3}(\deg(\mathscr{C})+1)+r$ 意味着 $2(\deg(\mathscr{C})-d+r)<d-r$ {v30>。因此我们有 $2<m<3$，这与 m 是整数矛盾。因此 $m=1$，这意味着 $\mathscr{C}$ 必定是一个截面。□

注5.2. 如果 $\varphi\colon \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} \longrightarrow \mathscr{C}$是双有理映射到其像（即 $\delta = 1$），那么条件 $d \geq \frac{2}{3}\big(\deg(\mathscr{C})+1\big) + r$等价于 $d \geq 3r - 2d' + 2$。

另一方面，后一个不等式 $\mathrm{d} \geq 3\mathrm{r} - 2\mathrm{d}' + 2$ 迫使 $\delta = 1$成立。事实上，由于 $\mathscr{C} \subset \mathbb{P}^{d-r}_{\mathbb{K}}$是非退化的，我们有 $\deg(\mathscr{C}) \geq \mathrm{d} - \mathrm{r}$。若 $\delta \geq 2$，则定理4.7给出 $\mathrm{d} - \mathrm{d}' = \delta\deg(\mathscr{C}) \geq 2(\mathrm{d} - \mathrm{r})$，从而 $\mathrm{d} \leq 2\mathrm{r} - \mathrm{d}'$。结合 $\mathrm{d} \geq 3\mathrm{r} - 2\mathrm{d}' + 2$可得 $\mathrm{d}' \geq \mathrm{r} + 2$，这与 $\mathrm{d}' \leq \mathrm{r}$ 矛盾。

作为定理 5.1 证明的一个附加结果，若 $\mathscr{C}$ 是光滑有理正规曲面卷曲 $S(a,b)$ 上的一个除子，则可以显式求得其希尔伯特多项式。

注5.3。 设 $\mathscr{C}$是双次数为 (m,n) 的光滑卷曲曲面 $\mathscr{S} = S(a,b)$ 上的一个除子，其中 $\mathrm{Pic}(\mathscr{S}) \cong \mathbb{Z}C_0 \oplus \mathbb{Z}F$。则 $\mathscr{C}$ 的希尔伯特多项式 $\mathrm{HP}_{\mathscr{C}}(t)$ 由下式给出

$$\mathrm{HP}_{\mathscr{C}}(t) = \frac{d-d'}{\delta}t + \left(-mn + m + n + (b-a)\binom{m}{2}\right).$$

注意，定理 1.3 给出了 $\rho(L) = r - 1$ 的一个等价条件。此外，在次数假设 $d \geq 3r - 2d' + 2$（该假设迫使 φ 为双有理态射）下，我们得到更精细的几何刻画：条件 $\rho(L) = r - 1$ 以及 $\max\{d_1,d_2\} < d$ 等价于 $\mathscr{C}$ 光滑且位于一个光滑有理正规曲面卷曲上。

推论5.4。 设有理曲线 $\mathscr{C}$ 不是有理正规曲线。那么， $\rho(L) = r - 1$ 当且仅当

(i) 由 (1.1) 定义的态射 $\varphi\colon \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} \to \mathscr{C}$ 双有理地映到其像上，并且(ii) $\mathscr{C}$ 位于 $\mathbb{P}^{d-r}_{\mathbb{K}}$ 中的一个有理正规曲面卷曲上，作为其直纹的一个截面，该曲面卷曲可能是一个锥。此外，假设 $d \geq 3r - 2d' + 2$。那么， $\rho(L) = r - 1$ 且 $\max\{d_1,d_2\} < d$ 当且仅当(iii) 曲线 $\mathscr{C}$ 光滑；并且 (iv) $\mathscr{C}$ 位于 $\mathbb{P}^{d-r}_{\mathbb{K}}$ 中的一个光滑有理正规曲面卷曲上。

证明。 第一条结论由定理 1.3 及 $m = 2$立即得到 .

设 $d \geq 3r - 2d' + 2$。根据定理 5.2，有 $\delta = 1$。

假设 $\rho(L) = r - 1$ 且 $\max\{d_1,d_2\} < d$。根据定理 1.3，曲线 $\mathscr{C}$包含于有理正规曲面卷曲 $S(d - d_1, d - d_2)$ 中，且为一个截面。由于 $d - d_1$ 和 $d - d_2$ 均为正数，该卷曲曲面是光滑的。因此，根据定理 5.1，曲线 $\mathscr{C}$ 是光滑的。

反之，假设 $\mathscr{C}$是光滑的，并且位于光滑有理正规曲面卷曲 $\mathscr{S} = S(a,b)$ 上。由于 $d \geq 3r - 2d' + 2$, 根据定理 5.1，曲线 $\mathscr{C}$是 $\mathscr{S}$ 的直纹的一个截面。结合 $\delta = 1$，第一条结论给出 $\rho(L) = r - 1$。

还需证明 $\max\{d_1,d_2\} < d$。设 $\max\{d_1,d_2\} = d$。不妨设若 $d_2 = d$，则根据 (4.2) 有 $d_1 = r + 1$。由定理 4.6，经过射影坐标变换后， φ可表示为

$$\varphi([\alpha:\beta]) = [g'_1(\alpha,\beta)\alpha^{d-r-1} : \cdots : g'_1(\alpha,\beta)\beta^{d-r-1} : g'_2(\alpha,\beta)].$$

由于 $\gcd(g'_1, g'_2) = 1$， $[0\colon \cdots \colon 0\colon 1]$的原像恰好是 $V(g'_1)$。其长度为 $\deg(g'_1) = r + 1 - d' \geq 2$，其中不等式由 $d' \leq \rho(L) = r - 1$得出。另一方面，由于态射 φ 是双有理的，且 $\mathscr{C}$ 是光滑的，所以 φ 是同构。因此，任意点的原像长度均为 1，这就产生了矛盾。因此， $\max\{d_1,d_2\} < d$，如所要求。□

特别地，当 $\dim(L) = 2$ 且 $d \geq 8$ 时，一个不是有理正规曲线的光滑曲线 $\mathscr{C} = \pi_{\mathscr{L}}(\mathscr{C}_d \setminus \mathscr{L})$ 当且仅当 $\rho(L) = 1$ 时，依据定理 5.4，它作为除子位于一个光滑曲面卷曲上。然而，下面的例子说明定理 5.1 中的界是精确的。

例 5.5。 若 $L = \langle S^5T^2,\ S^2T^5\rangle$，则 $\mathrm{Ann}(L) = (s^6, s^3t^3, t^6)$。投影后曲线的参数化 $\mathscr{C} = \pi_{\mathscr{L}}(\mathscr{C}_d \setminus \mathscr{L})$ 由下式给出

$$\{[\alpha^7 : \alpha^6\beta : \alpha^4\beta^3 : \alpha^3\beta^4 : \alpha\beta^6 : \beta^7] \mid [\alpha:\beta] \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}\} \subset \mathbb{P}^5_{\mathbb{K}}.$$

注意，$p_a(\mathscr{C}) = 0$，但 $d = 7 < 8 = 3r - 2d' + 2$。

后续 根据定理 1.3，它包含于$S(1,\ 1,\ 1)$中。然而，它包含于一个曲面卷曲面$S(2,\ 2)$:

$$\begin{aligned}\mathscr{C} &\cong \{[(\alpha^3)^2\alpha : (\alpha^3)(\beta^3)\alpha : (\beta^3)^2\alpha : (\alpha^3)^2\beta : (\alpha^3)(\beta^3)\beta : (\beta^3)^2\beta] \mid [\alpha:\beta] \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}\}\\ &\subset \{[\gamma^2\eta : \gamma\delta\eta : \delta^2\eta : \gamma^2\zeta : \gamma\delta\zeta : \delta^2\zeta] \mid [\gamma:\delta], [\eta:\zeta] \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}\} = S(2,2).\end{aligned}$$

事实上，当$m = 2+ \ \ ^2_{rd-r-1} = 2+\frac{4}{4} = 3$时，情况确实如此。

例 5.6。 如果 $L = \langle S^7T,\ ST^7\rangle$，则 $\mathrm{Ann}(L) = (s^8, s^2t^2, t^8)$。投影曲线的参数化$\sim\mathscr{C} = \pi_{\mathscr{L}}(\mathscr{C}_8 \setminus \mathscr{L})$为

$$\{[\alpha^8 : \alpha^6\beta^2 : \alpha^5\beta^3 : \alpha^4\beta^4 : \alpha^3\beta^5 : \alpha^2\beta^6 : \beta^8] \mid [\alpha : \beta] \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}\} \subset \mathbb{P}^6_{\mathbb{K}}.$$

根据定理 1.3，它包含于$S(0,\ 0,\ 4)$中。注意，$d = 3r - 2d' + 2 = 8$，但$p_a(\mathscr{C}) = 2 > 0$，并且在此情形下，卷曲曲面$S(0,\ 0,\ 4)$并不光滑。事实上，曲线 $\mathscr{C}$包含于曲面卷曲面$S(1,\ 4)$中，但它不是其直纹的截面。（事实上，$m = 2$。）更明确地说，

$$\begin{aligned}\mathscr{C} &\cong \left\{[(\alpha^2)^4 : (\alpha^2)^3\beta^2 : \cdots : (\beta^2)^4 : \alpha^5\beta^3 : \alpha^3\beta^5] \mid [\alpha : \beta] \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}\right\} \\ &\subset \left\{[\gamma^4\eta : \gamma^3\delta\eta : \cdots : \delta^4\eta : \gamma\zeta : \delta\zeta] \mid [\gamma : \delta], [\eta : \zeta] \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}\right\} = S(1,4).\end{aligned}$$

5.2. 曲面卷曲面上有理曲线的定义方程。 已知，不是极大德尔佩佐的几乎最小次数曲线是有理正规曲线在 $\mathbb{P}^d$ 从一个点 $p \in \mathbb{P}^d$ 进行线性投影所得的像（参见 [BS07]）。这样的曲线 $\mathscr{C}$ 位于一个有理正规曲面卷曲上，其代数和几何不变量，包括其希尔伯特–塞缪尔多项式、二次生成以及分次 Betti 数，均由 $\mathrm{Ann}(F_P)$ 的极小生成元中次数最小者决定。此外，最近已证明，其定义理想的二次分量 $\mathscr{C}$ 由秩至多为 4 的二次型张成（详情参见 [Par22, JMP26]）。

在本节中，我们将这些结果推广到满足 $\rho(L) = r - 1$的有理曲线。我们假设 $d - r \geq 2$，并将次数至多为 d的两个湮灭子生成元排序，使得 $d_1 \leq d_2$。因此，$d_1 + d_2 = d + r + 1$且 $r + 1 \leq d_1 \leq d_2 \leq d$。设一条有理曲线 $\mathscr{C} \subset \mathbb{P}^{d-r}_{\mathbb{K}}$在射影意义下等价于有理正规曲线 $\widetilde{\mathscr{C}_d} \subset \mathbb{P}^d_{\mathbb{K}}$ 在一个（$r - 1$）维线性子空间$\mathscr{L} \subset \mathbb{P}^d_{\mathbb{K}}$ 上进行线性投影所得的像，其参数化为

$$\mathscr{C} = \left\{\left[g'_2\alpha^{d-d_2} : \cdots : g'_2\beta^{d-d_2} : g'_1\alpha^{d-d_1} : \cdots : g'_1\beta^{d-d_1}\right] \mid [\alpha : \beta] \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}\right\}, \tag{5.5}$$

其中$g'_1,\ g'_2 \in \mathbb{K}[\alpha, \beta]$是次数分别为$d'_1 = d_1 - d'$和$d'_2 = d_2 - d'$的二元形式，且$d' =$分别为 $\deg(\gcd(g_1, g_2))$。那么，根据定理 1.3，$\mathscr{C}$包含于有理正规曲面卷曲 $\mathscr{S} = S(d - d_2, d - d_1) \subset \mathbb{P}^{d-r}_{\mathbb{K}}$中，其参数化为

$$\mathscr{S} = \left\{\left[\gamma_1\alpha^{d-d_2} : \cdots : \gamma_1\beta^{d-d_2} : \gamma_2\alpha^{d-d_1} : \cdots : \gamma_2\beta^{d-d_1}\right] \mid [\alpha : \beta], [\gamma_1 : \gamma_2] \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}\right\}. \tag{5.6}$$

令$R(\mathscr{S}) = \mathbb{K}[u,\ v,\ x,\ y]$表示 $\mathscr{S}$的标准射影丛模型的全坐标环（即 Cox 环），其中 $[u:\ v]$ 和 $[x:\ y]$ 分别表示基坐标和局部纤维坐标。我们赋予$R(\mathscr{S})$ 如下的 $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$-分次：

$$\deg(u) = \deg(v) = (0,1), \quad \deg(x) = (1, d'_2), \quad \text{and} \quad \deg(y) = (1, d'_1).$$

注意，这种分次不同于通常约定，在通常约定中，

$$\deg(u) = \deg(v) = (0,1), \quad \deg(x) = (1, d'_2 - d'_1), \quad \text{and} \quad \deg(y) = (1, 0).$$

在这些坐标下，其像为 $\mathscr{C}$的截面由双齐次方程 $\mathrm{g}'_1(\mathrm{u},\mathrm{v})\mathrm{x} - \mathrm{g}'_2(\mathrm{u},\mathrm{v})\mathrm{y} = 0$定义，其双次数为 $(1,\ \mathrm{d}'_1 + \mathrm{d}'_2) = (1, \mathrm{d} - 2\mathrm{d}' + \mathrm{r} + 1)$。在射影丛模型上，该截面的除子类为 $\mathrm{H} + (\mathrm{r} - \mathrm{d}' + 1)\mathrm{F}$，其中 H 是 $\mathscr{S}$的超平面类，其双次数为 $(1, \mathrm{d} - \mathrm{d}')$，而 F 是纤维类。

对于整数$k \geq 0$和 $0 \leq i \leq k$，我们定义 Cox 环$R(\mathscr{S})$ 中固定纤维项$x^{k-i}y^i$ 的双分次向量子空间$V_{k,i}$和$W_{k,i}$：

$$V_{k,i} := x^{k-i}y^i\mathbb{K}[u,v]_{(k-i)(d-d_2)+i(d-d_1)-(r-d'+1)} \subset R(\mathscr{S})_{(k,k(d-d')-(r-d'+1))},$$

$$W_{k,i} := x^{k-i}y^i\mathbb{K}[u,v]_{(k-i)(d-d_2)+i(d-d_1)} \subset R(\mathscr{S})_{(k,k(d-d'))}.$$

对于$p \geq k$和 $i \leq j \leq i + p - k$，若$V_{p,j}$是V 的倍数$_{k,i}$，则称其为.....，如果自然乘法映射

$$V_{k,i} \otimes W_{p-k,j-i} \longrightarrow V_{p,j}$$

是满射。由于乘法映射 $\mathbb{K}[u,v]_a \otimes \mathbb{K}[u,v]_b \to \mathbb{K}[u,v]_{a+b}$对于所有非负次数 $a, b \geq 0$都是满射，因此只要 $V_{k,i}$和 $W_{p-k,j-i}$均非零，该映射就是满射。

引理 5.7. </style}若对于某个 k，V,$_i$ 是非零向量空间，且 $0 \le i \le k-1$，那么对于任意 $p \ge k$ 以及满足 $i \le j \le i+p-k$ 的任意 j，$V_{p-1,j}$ 是 $V_{k-1,i}$的倍数。

证明。 由满射乘法映射的传递性，只需针对$p = k+1$和$j \in \{i,\ i+1\}$证明该断言。由于$V_{k-1,\ i}$非平凡，其 $\mathbb{K}[u,\ v]$分量的次数必为非负，这意味着

$$(k-i-1)(d-d_2)+i(d-d_1)-(r-d'+1) \ge 0.$$

首先，设$p = k+1$且$j = i$。$V_{p-1,\ j} = V_{k,\ i}$的系数次数为

$$\begin{aligned}&(k-i)(d-d_2)+i(d-d_1)-(r-d'+1)\\ &=\big[(k-i-1)(d-d_2)+i(d-d_1)-(r-d'+1)\big]+(d-d_2).\end{aligned}$$

由于$d-d_2 \ge 0$，乘法映射$V_{k-1,\ i} \otimes W1,\ 0 \to V_{k,\ i}$是满射。

接下来，设$p = k+1$且$j = i+1$。$V_{p-1,\ j} = V_{k,\ i+1}$的系数次数为

$$\begin{aligned}&(k-(i+1))(d-d_2)+(i+1)(d-d_1)-(r-d'+1)\\ &=\big[(k-i-1)(d-d_2)+i(d-d_1)-(r-d'+1)\big]+(d-d_1).\end{aligned}$$

由于$d-d_1 \ge 0$，乘法映射$V_{k-1,\ i} \otimes W1,\ 1 \to V_{k,\ i+1}$是满射。

在这两种情形下，$V_{p-1,j}$都由$V_{k-1,i}$在相应乘法映射下的像张成，从而完成证明。□

根据定理 5.7，确定$I(\mathscr{C})/I(\mathscr{S})$的极小生成元，归结为找出那些非零分量$V_{k-1,i}$，它们不能通过乘法从低次分量得到。

若$d_2 = d$（等价地，$d_1 = r+1$），定义该态射的整体截面由$\{x, yu^{d-r-1}, \ldots, yv^{d-r-1}\}$表示。在此情形下，只要$i < k-1$，就有$V_{k-1,i} = xV_{k-2,i}$，因此这些分量不会产生新的极小生成元。于是，我们只需确定使$V_{k-1,\ k-1}$非零的最小整数k。相对理想由（$g'_1x - g'_2y$）乘以该空间的一组基，便可得到其极小生成元。

现在，我们证明 $I(\mathscr{C})$ 的极小生成元可表示为两个线性形式乘积之差，并确定 $I(\mathscr{C})$ 由二次型生成的条件。

定理 1.4 的证明。式 (5.5) 中的曲线 $\mathscr{C}$ 是式 (5.6) 所给出的有理正规曲面卷曲 $\mathscr{S} = \mathrm{S}(\mathrm{d}-\mathrm{d}_2,\ \mathrm{d}-\mathrm{d}_1)$ 上的一个除子。在 $\mathscr{S}$ 的标准射影丛模型上，映到 $\mathscr{C}$ 的截面由 $\mathrm{R}(\mathscr{S})$ 中的 $\mathrm{g}'_1\mathrm{x} - \mathrm{g}'_2\mathrm{y} = 0$ 切出。将 $\mathscr{S}$ 的坐标环与其超平面截面子环 $\mathbb{K}[\mathrm{xu}^{d-d_2}, \ldots, \mathrm{xv}^{d-d_2}, \mathrm{yu}^{d-d_1}, \ldots, \mathrm{yv}^{d-d_1}] \subset \mathrm{R}(\mathscr{S})$ 等同，相对理想 $\mathrm{I}(\mathscr{C})/\mathrm{I}(\mathscr{S})$ 的 k 次分量为

$$(I(\mathscr{C})/I(\mathscr{S}))_k \cong (g'_1x - g'_2y)\cdot\bigoplus_{i=0}^{k-1} V_{k-1,i}.$$

(1) 由于 $g'_1, g'_2 \in \mathbb{K}[u,v]$ 在代数闭域 $\mathbb{K}$ 上可分解为线性形式的乘积，因此将 $g'_1x - g'_2y$ 乘以V_{k-1}的任意单项式基元素，便会得到$R(\mathscr{S})$ 中两个线性形式乘积之差。因此，这些表达式可提升为 $\mathbb{P}^{d-r}_{\mathbb{K}}$ 的齐次坐标中 k 个线性形式乘积之差。结合定义 $\mathscr{S}$ 的二次型 k 子式，这些提升生成 $I(\mathscr{C})$，从而证明了该结论。

(2) 当且仅当 $\mathrm{I}(\mathscr{C})/\mathrm{I}(\mathscr{S})$ 在次数 2 生成时，二次生成成立。若 $\mathrm{d}_1 = \mathrm{r}+1$，则 $\mathrm{d}-\mathrm{d}_2 = 0$ and $\mathrm{V1},_0 = 0$。根据定理 5.7，相对理想当且仅当 $\mathrm{V1},_1 \neq 0$ 时在次数 2 生成。空间 $\mathrm{V}^{1,1}$ 非零，当且仅当 $(\mathrm{d}-\mathrm{d}_1)-(\mathrm{r}-\mathrm{d}'+1) = \mathrm{d}-2\mathrm{r}+\mathrm{d}'-2 \ge 0$。因此，二次生成等价于 $\mathrm{d} \ge 2\mathrm{r}-\mathrm{d}'+2$。

现在假设 $d_1 > r+1$（因此 $d-d_1$ 和 $d-d_2$ 均为正）。若 $V^{1,0}$ 和 $V^{1,1}$ 均非零，则定理 5.7 表明，所有更高次分量都由它们生成。若$V1,_0 = 0$，则首个非零的纯 x 分量$V_{k-1,}0$ 出现在某个 $k \ge 3$ 处。它不可能由 $V^{1,1}$ 生成，因为它们的所有倍数都具有正的 y 次数。因此，二次生成等价于$V1,_0 \neq 0$，因为 $d_1 \le d_2$ 蕴含其维数至多为$V^{1,1}$ 的维数。此条件是

$$(d-d_2)-(r-d'+1) = d_1-2r+d'-2 \ge 0,$$

或者等价地，$d_1 \ge 2r-d'+2$。 □

尽管一般而言，获取$I(\mathscr{C})$的所有极小生成元的完整数值数据较为复杂，但当$d_1 = r+1$或$d \geq 3r - 2d' + 2$时，这一过程会变得非常容易处理。

推论 5.8。沿用上文的记号，$I(\mathscr{C})$ 的极小生成元分类如下：

(1) 若 $d_1 = r+1$（等价地，$d_2 = d$），则 $I(\mathscr{C})$ 的极小生成元为：
- *(a)* $\binom{d-r}{2} - (r-d')$ *quadratic forms if* $d \geq 2r - d' + 2$;
- *(b)* $\binom{d-r}{2} - (d-r-1)$ *quadratic forms and* $k(d-r-1) - d + d' + 1$ *forms of degree* k *if* $r+1 < d \leq 2r - d' + 1$, *where* $k = \left\lceil \frac{r-d'+1}{d-r-1} \right\rceil + 1 \geq 3$.

(2) 若 $d \geq 3r - 2d' + 2$ 且 $d_1 > r+1$，则 $I(\mathscr{C})$ 的极小生成元为：
- *(a)* $\binom{d-r}{2} - 2(r-d')$ *quadratic forms if* $d_1 \geq 2r - d' + 2$;
- *(b)* $\binom{d-r}{2} - d_1' + 1$ *quadratic forms and* $k(d_1 - r - 1) - d_1' + 1$ *forms of degree* k *if* $d_1 \leq 2r - d' + 1$, *where* $k = \left\lceil \frac{r-d'+1}{d_1-r-1} \right\rceil + 1 \geq 3$.

证明。对每个 $k \in \mathbb{N}$，向量空间的正合列 $0 \to I(\mathscr{S})_k \to I(\mathscr{C})_k \to (I(\mathscr{C})/I(\mathscr{S}))_k \to 0$给出 $\dim I(\mathscr{C})_k = \dim I(\mathscr{S})_k + \dim(I(\mathscr{C})/I(\mathscr{S}))_k$。此外，$\dim I(\mathscr{S})_2 = \binom{d-r-1}{2}$。为简便起见，设

$$\delta_{k,i} := (k-i)(d-d_2) + i(d-d_1) - (r-d'+1),$$

使得 $\dim_{\mathbb{K}} V_{k,\,i} = \max\{\delta_{k,i}+1, 0\}$。

(1) 当$d_1 = r+1$时，空间$H^0(\mathscr{S},\ \mathscr{O}_{\mathscr{S}}(1))$在 Cox 环$R(\mathscr{S})$ 中表示为

$$\langle x, yu^{d-r-1}, \ldots, yv^{d-r-1} \rangle.$$

T因此，附加生成元的最小次数是第一个满足$V_{k-1,\ k-1} \neq 0$的k。

(1a) 若$d \geq 2r - d' + 2$，则 $\delta_{(1,1)} = d - 2r + d' - 2 \geq 0$，这意味着不需要更高次数的生成元。附加二次生成元的数量为 $\delta_{(1,1)} + 1 = d + d' - 2r - 1$。

(1b) 设$r+1 < d < 2r - d' + 2$。代入$d_1 = r+1$，得到 $\delta_{(k-1,k-1)} = (k-1)(d-r-1) - (r-d'+1)$。因此，$\delta_{(k-1,k-1)} \geq 0$当且仅当$k \geq \left\lceil \frac{r-d'+1}{d-r-1} \right\rceil + 1$，且附加极小生成元的数量为 $\delta_{(k-1,k-1)} + 1 = k(d-r-1) - d + d' + 1$。

(2) 从现在起，我们假设 $d \geq 3r - 2d' + 2$ 且 $d_1 > r+1$。

(2a) 假设 $d_1 \geq 2r - d' + 2$。$V1_{,i}$ 的系数次数为

$$\delta_{(1,i)} = d - r - 1 - d_2' + i(d_2' - d_1').$$

由于 $d - r - 1 - d_2' = d_1 - 2r + d' - 2 \geq 0$ 且 $d_1' \leq d_2'$，它对 $i = 0$ 和 $i = 1$ 都是非负的。因此，我们可以如下构造 $(g_1'x - g_2'y)(V1_{,0} \oplus V1_{,1})$ 的一组基：

$$\{u^{\delta_{(1,0)}-j} v^j g_1'(u,v)x^2 - u^{\delta_{(1,0)}-j} v^j g_2'(u,v)xy \mid 0 \leq j \leq \delta_{(1,0)}\}$$
$$\cup \{u^{\delta_{(1,1)}-j} v^j g_1'(u,v)xy - u^{\delta_{(1,1)}-j} v^j g_2'(u,v)y^2 \mid 0 \leq j \leq \delta_{(1,1)}\}.$$

因此，$I(\mathscr{C})$ 由 $\dim I(\mathscr{S})_2 + (\delta_{(1,0)} + \delta_{(1,1)} + 2) = \binom{d-r}{2} - 2(r-d')$ 个二次形式最小生成。

(2b) 假设 $r+1 < d_1 < 2r - d' + 2$。我们有 $\delta_{(1,0)} = d - r - d_2' - 1 < 0$，但 $\delta_{(1,1)} = d - r - d_1' - 1 \geq 0$，因为 $d \geq 3r - 2d' + 2$ 且 $d_1' < 2r + 2 - 2d'$。因此，根据定理 5.7，对于所有 $1 \leq i \leq k-1$，$V1_{,1}$ 通过与 $W_{k-2,i-1}$ 相乘生成分量 $V_{k-1,i}$。于是，额外的二次生成元为

$$\{u^{\delta_{(1,1)}-j} v^j g_1'(u,v)xy - u^{\delta_{(1,1)}-j} v^j g_2'(u,v)y^2 \mid 0 \leq j \leq \delta_{(1,1)}\},$$

这恰好为卷曲曲面的二次方程贡献 $\delta_{(1,1)} + 1 = d - r - d_1'$ 个元素。因此，$I(\mathscr{C})_2$ 由 $\dim I(\mathscr{S})_2 + (\delta_{(1,1)} + 1) = \binom{d-r}{2} - d_1' + 1$ 个二次型张成。为了确定其余的极小生成元，我们找出使$V_{k-1,0}$ 非平凡的最小整数k。这要求

$$(k-1)(d-d_2) - (r-d'+1) = (k-1)(d_1 - r - 1) - r + d' - 1 \geq 0.$$

该不等式给出了次数界 $k = \left\lceil \frac{r-d'+1}{d_1-r-1} \right\rceil + 1$，而附加的最小生成元数量为 $\delta_{(k-1,0)} + 1 = (k-1)(d_1 - r - 1) - r + d' = k(d_1 - r - 1) - d_1' + 1$。□

更一般地，设 $\mathscr{C}$ 包含于一个 m 重有理正规卷曲曲面 $\mathscr{S} = \mathrm{S}(\mathrm{d}-\mathrm{d}1,\ldots,\mathrm{d}-\mathrm{d}_m)$ 的直纹截面中，其中 $\mathrm{m} \geq 2$。沿用上述约定，记 $\mathrm{R}(\mathscr{S}) = \mathbb{K}[\mathrm{u},\mathrm{v},\mathrm{x}1,\ldots,\mathrm{x}_m]$，其中 $\deg(\mathrm{u}) = \deg(\mathrm{v}) = (0,1)$，$\deg(\mathrm{x}_i) = (1,\mathrm{d}_i - \mathrm{d}')$，且超平面类 $\mathrm{H} = (1,\mathrm{d}-\mathrm{d}')$。

设M是（$g1,\ldots,g_m$）的合关系矩阵，并令$J = ([x_1 \cdots x_m]M)$ 和$I_{\mathrm{irr}} = (u,v) \cap (x1,\ldots,x_m)$。相对齐次理想通过对$J$进行饱和化并取其超平面次数分量得到：

$$I(\mathscr{C})/I(\mathscr{S}) \cong \bigoplus_{k\geq 0} (J : I_{\mathrm{irr}}^{\infty})_{kH}.$$

在曲面情形中，$J = (g_1' x - g_2' y)$已经是饱和的。在高余维情形中，饱和化可能会在 Cox 环中引入额外的极小生成元，从而使确定环境方程更加困难。

例5.9。设 $\mathscr{C} = \pi_{\mathscr{L}}(\widetilde{\mathscr{C}_{13}} \setminus \mathscr{L})$，其中 $\mathscr{L} = \overline{\langle e_3, e_8 \rangle}$。由于 $\mathrm{Ann}(S^{10}T3, S^5T^8) = (s^{11}, s^6t^4, t^9)$，$\mathscr{C}$是三维有理正规卷 $\mathscr{S} = S(2,3,4)$的余维2子簇：

$$\mathscr{S} = \left\{ [\gamma_1\alpha^2 : \cdots : \gamma_1\beta^2 : \gamma_2\alpha^3 : \cdots : \gamma_2\beta^3 : \gamma_3\alpha^4 : \cdots : \gamma_3\beta^4] \mid [\alpha:\beta] \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}, [\gamma_1:\gamma_2:\gamma_3] \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}} \right\}.$$

$\mathscr{C}$ on $\mathscr{S}$的局部方程为

$$v^4 x_1 - u^5 x_2 = 0 \quad \text{and} \quad v^5 x_2 - u^6 x_3 = 0,$$

这些方程通过计算湮灭子生成元 $[u^{11}\ u^6v^4\ v^9]$的最小 syzygy 得到。

尽管局部理想仅由两个简单方程生成，但相对于无关理想 $I_{\mathrm{irr}} = (u,v) \cap (x_1, x_2, x_3)$ 进行饱和化会在 Cox 环中产生额外的生成元。更明确地说，使用软件系统 Macaulay2 [GS], ，我们可以通过饱和化找到以下额外的生成元：

$$ux_1x_3 - vx_2^2, \quad u^4x_2^3 - v^3x_1^2x_3, \quad u^3x_2^5 - v^2x_1^3x_3^2, \quad u^2x_2^7 - vx_1^4x_3^3, \quad ux_2^9 - x_1^5x_3^4.$$

致谢

作者感谢 Euisung Park 富有价值的讨论，这些讨论帮助澄清了本文所呈现结果的重要性。第一作者和第二作者得到韩国国家研究基金会（NRF）由韩国政府（科学技术信息通信部）资助的项目（编号：RS-2024- 00414849）支持。第二作者还得到由科学技术信息通信部资助的 NRF 项目（编号：RS- 2026-25482052）支持。第三作者得到诚信女子大学 2025 年研究项目（H20250019）的支持。

人工智能声明。本文所呈现的概念框架和主要数学论证均由作者在未使用人工智能的情况下完成。在审阅稿件期间，作者咨询了 ChatGPT（OpenAI；GPT-6 Astra），请其协助核查细微的技术细节和相关参考文献，并改进英文表达和稿件的呈现方式。作者对所有人工智能辅助建议均进行了独立评估，并对本文的准确性、完整性和最终内容承担全部责任。

参考文献

[AGMO18] Elena Angelini、Francesco Galuppi、Massimiliano Mella 和 Giorgio Ottaviani。关于一般多项式向量的 Waring 分解数量。纯粹与应用代数杂志，222(4):950–965，2018。[AR17] Alberto Alzati 和 Riccardo Re。具有给定法丛的有理曲线 Hilbert 概形的不可约分支。代数几何，4(1):79–103，2017。[BS07] Markus Brodmann 和 Peter Schenzel。几乎最小次数射影簇的算术性质。代数几何杂志，16(2):347–400，2007。[CC03] Enrico Carlini 和 Jaydeep V. Chipalkatti。关于多个代数形式的 Waring 问题。赫尔维蒂数学评论，78:494–517，2003。[CGLM08] Pierre Comon、Gene Golub、Lek-Heng Lim 和 Bernard Mourrain。对称张量与对称张量秩。*SIAM* 矩阵分析与应用杂志，30(3):1254–1279，2008。[CS11] Gonzalo Comas 和 Malena Seiguer。关于二元形式的秩。计算数学基础，11(1):65–78，2011。[CV17] Enrico Carlini 和 Emanuele Ventura。关于单项式同时 Waring 秩的一则札记。伊利诺伊数学杂志，61(3-4):517–530，2017。

[Eis95] David Eisenbud。《交换代数》，数学研究生教材第150卷。Springer-Verlag，纽约，1995。以代数几何为视角。[Eis05] David Eisenbud。《Syzygy几何》，数学研究生教材第229卷。Springer-Verlag，纽约，2005。交换代数与代数几何的第二门课程。[GMR23] Maciej Gałazka、Tomasz Ma´ndziuk 和 Filip Rupniewski。区分割线簇与仙人掌簇。计算数学基础，23(4):1167–1214，2023。[Gre84] Mark L. Green。Koszul上同调与射影簇的几何。微分几何杂志，19(1):125–171，1984。附录由 Robert Lazarsfeld 和 Green 撰写。[GS] Daniel R. Grayson 和 Michael E. Stillman。Macaulay2：用于代数几何研究的软件系统。网址：http://www2.macaulay2.com。[Har77] Robin Hartshorne。《代数几何》。数学研究生教材。Springer New York，1977。[HH11] Jürgen Herzog 和 Takayuki Hibi。《单项式理想》，数学研究生教材第260卷。Springer-Verlag London, Ltd.，伦敦，2011。[Iar04] Anthony Iarrobino。形式向量空间的祖先理想与层代数。代数杂志，272：530–580，2004。[IK99] Anthony Iarrobino 和 Vassil Kanev。《幂和、Gorenstein代数与行列式簇》，数学讲义第1721卷。Springer-Verlag，柏林，1999。附录 C 由 Iarrobino 和 Steven L. Kleiman 撰写。[JMP26] Jaewoo Jung、Hyunsuk Moon 和 Euisung Park。关于几乎最小次数射影曲线的秩指标。代数杂志，697:574–606，2026。[KMP24] Yeongrak Kim、Hyunsuk Moon 和 Euisung Park。关于 $\mathscr{K}_{p,1}$ 定理的一些评论。数学新闻，297(9):3531–3545，2024。[Lan17] J. M. Landsberg。《几何与复杂性理论》，剑桥高等数学研究第169卷。剑桥大学出版社，剑桥，2017。[LT10] J. M. Landsberg 和 Zach Teitler。关于对称张量的秩与边界秩。计算数学基础，10(3):339–366，2010。[Par07] Euisung Park。次数为 =余维+2 的射影曲线。数学杂志，256(3):685–697，2007。[Par14] Euisung Park。关于有理正规卷曲面上除子的 Syzygy。数学新闻，287(11-12):1383–1393，2014。[Par22] Euisung Park。关于高次数曲线二次方程的秩。地中海数学杂志，19(6):论文编号 244，9页，2022。

（Maciej Gałazka）大学街10号，78464 康斯坦茨，德国电子邮箱：maciej.galazka@uni-konstanz.de

（Jaewoo Jung）DGIST BRL-AGSTA，科技中央大道333号，玄风邑，达城郡，大邱，42988，大韩民国电子邮箱：jaewoojung@dgist.ac.kr

（Hyunsuk Moon）数学、统计学与数据科学学院，诚信女子大学，首尔 02844，大韩民国电子邮箱：hsmoon87@sungshin.ac.kr