arXiv:2611.32271v1 [math.RA] 24 Nov 2026

由半格诱导的半环*†

Jawad Abuhlail
abuhlail@kfupm.edu.sa;
abuhlail@yahoo.de 数学系 智能安全系统中心 法赫德国王石油与矿业大学 31261 宰赫兰, 沙特阿拉伯

2026年11月25日

摘要

我们研究由并半格（交半格）诱导的半环，其在排除乘法单位元的所有子集上具有退化的乘法。这些半环的定义方式使得作为起点的半格对相应半环产生了重大影响：半格的许多序论性质会反映在所诱导半环的代数性质中。这使我们能够构造具有所需性质的半环示例，同时也为旧论文和近期论文/预印本中的错误论断提供反例。特别地，我们构造了由非模 并半格诱导的半环示例族，其中减理想格是非模 的，从而推翻了 Henriksen 的一项论断；Henriksen 提出了半环的这一重要理想类。

引言

半环大致上是一种不一定带有减法的结合环。半环在现代代数中的最早源头可追溯到 Abel 1826 年和 Dedekind 1894 年（参见 [Glas2002]）。H. S. Vandiver 在 1934 [Van1934]中正式引入了半环 一词，将其定义为一种同时推广结合环和有界分配格的代数系统。

若干类半环以某种方式与（半）格相关联：它们的基本代数的性质反映了可能隐藏的、诱导出它们的（半）格结构的序理论性质。一个非平凡的有界格

*关键词：半环；减性理想（k-理想）；模格；分配格
†2020年数学主题分类：16Y60;06C05

$(L\ \wedge,\vee,0,1)$ 是一个半环，其加法/乘法分别定义为 $\vee/\wedge$（或 $\wedge/\vee$），当且仅当 L 是分配的（参见定理 1.19）。每个加法幂等半环S 都具有由自然序诱导的并半格结构，其中$x \leq_+ y \iff x+y=y$。有限的真半环H 是同余单的，当且仅当 $|H| \leq 2$，或者H 同构于加法幂等幺半群M [的自同态半环$End(M)$中的稠密子半环，Zum2008，定理 1.7]。

本文以一种方式，将每个带有 $|\mathrm{L}| \geq 2$ 和固定 $\mathrm{c} \in \mathrm{L}$ 的并半格 $(\mathrm{L}\ \vee)$ 关联到一个加法幂等半环 $\mathrm{D}^{\mathrm{c}}_{\vee}(\mathrm{L})$，使得序理想 $\mathrm{U}_c := [\mathrm{c}\ \uparrow)$ 的格 $\mathrm{Idl}(\mathrm{L})$ 与所关联半环的减性理想格 $\mathfrak{R}(\mathrm{D}^{\mathrm{c}}_{\vee}(\mathrm{L}))$ 同构。若 $(\mathrm{L}\ \vee, 0)$ 有界，则 $\mathrm{H}_{\vee}(\mathrm{L}) := \mathrm{D}^{0}_{\vee}(\mathrm{L})$ 是一个半环。此外，可以向 L 添加一个并不可约顶元 $1^\sharp \notin \mathrm{L}$（若 L 没有这样的顶元），并构造一个 Krull 零维局部半环 $\mathrm{S}_{\vee}(\mathrm{L}^\sharp)$，其底层集合为 $\mathrm{L}^\sharp := \mathrm{L} \cup \{1^\sharp\}$，使得 $\mathrm{L}^\sharp$ 的序理想格 $\mathrm{Idl}(\mathrm{L}^\sharp) = \mathrm{Idl}(\mathrm{L}) \cup \{\mathrm{L}^\sharp\}$ 与所诱导半环的减性理想格 $\mathfrak{R}(\mathrm{S}_{\vee}(\mathrm{L}^\sharp))$ 同构。其一大优势在于，这些构造可以对偶化，从而为每个（有界）带有固定 $\mathrm{c} \in \mathrm{M}$（$\mathrm{c} = \top$，M 的顶元）的交半格 $(\mathrm{M}\ \wedge)$ 赋予一个半环（半环）结构；当 $(\mathrm{M}\ \wedge, \top)$ 有界且具有交不可约最小元 $\bot \neq \top$. 时，还可构造一个半环。

由于由（有界）并半格诱导的半环的乘法是常值的，而由具有并不可约顶元的有界并半格诱导的半环，其乘法除涉及顶元的情形外均为常值，因此我们可以运用一套自然的方法，来构造具有或不具有某种特定性质的加法幂等交换半环、半环及半环：对适当选取的并半格施加条件，使其序性质反映为诱导半环所期望或所禁止的代数性质。运用这套方法，除了给出许多例子来说明我们的结果外，我们还成功构造了一族由半格诱导的半环，作为**反例**，推翻了最近发表于 [GD2024]中的两个错误论断：任意交换半环的减理想格具有模性 [GD2024，命题 26]，；以及任意交换半环的理想在交运算下的减闭包具有交换性 [GD2024，引理 2.1 (7)]。

在第1节中，我们汇集半环理论和格理论中的一些预备知识，并约定每个并半格、格、demiring、半环以及半环我们从的底层集合至少包含两个元素。在第2节中，我们研究由并半格（交半格）诱导的 demiring、半环和半环。设（$L\ \vee$）为一个并半格。在命题 2.4 中，对于任意固定的$c \in L$，我们构造了与之相关的、带常值乘法的 demiring $D^{c}_{\vee}$（L），并证明：$H_{\vee}$（L）$= D^{0}_{\vee}$（L）是带零乘法的半环，当且仅当L 是有界的，且具有底元 $\bot$ 和 $\bot = 0$；若（$L\ \vee$,0）是有界的并具有并不可约 顶元 $1 \neq 0$，，则我们在$L\backslash\{1\}$. 上得到一个带零乘法的半环结构$S_{\vee}$（L）。命题 2.20 证明了$S_{\vee}$（L）是局部的，并且

其唯一极大理想 $\mathfrak{m} = L \setminus \{1\}$ 是可减的。命题 2.15 和推论 2.16 是本文的核心技术结果，因为它们准确描述了 demiring $D^c_\vee(L)$（半环 $S_\vee(L)$）的理想和减性理想。在定理 2.25（定理 2.26）中，我们证明：$\mathfrak{R}(D^c_\vee(L))$ 是模的（分配的），当且仅当并半格 L 是模的（分配的）。在定理 2.27 中，这一结果被推广到半环 $\mathfrak{R}(S_\vee(L))$：若 $(L, \vee, 0)$ 是具有并不可约$1 \neq 0.$ 的有界并半格。随后，在命题 2.18 中，我们将这些基本结果对偶化到由交半格 $(M, \wedge)$ 及固定的 $c \in M$ 诱导的 demiring $D^c_\wedge(M)$、由带有交不可约底元 $\bot \neq \top$的有界交半格 $(M, \wedge, \top)$ 诱导的半环 $H_\wedge(M)$（半环 $S_\wedge(M)$）。接着，我们研究由并半格诱导的 demiring、半环和 demiring 的若干种单性。设 $(L, \vee)$ 为一个并半格。定理 2.36 分别刻画了 demiring $D^c_\vee(L)$ 成为同余单（分别为理想单、k-理想单）的条件。若 $(L, \vee, 0)$ 是有界的（具有并不可约 $1 \neq 0$），则定理 2.39（定理 2.41）表明，这三种单性分别等价于 $H_\vee(L) \cong \mathfrak{B}$、带零乘法的布尔半幺环（$S_\vee(L) \cong \mathbb{B}$ 布尔半环）。

在第 3 节中，我们研究了所谓的 Kuratowski 半环和核减法幺半环，其定义受到 [Nas] 的启发。我们称一个半环 $(D, +, \cdot)$ 为 Kuratowski 半环（分别为核减法幺半环），当且仅当其理想的减法闭包与二元和（二元交）可交换。给定一个并半格 $(L, \vee, 0)$（带有一个并不可约元 $1 \neq 0$），我们在定理 3.3 中证明，$H_\vee(L)$ 是 Kuratowski 半环（$S_\vee(L)$）当且仅当 L 是分配的。我们还证明，若 $(L, \vee)$ 是分配并半格，且 $c \in L$ 固定，则 L 的分配性蕴含 $D^c_\vee(L)$ 是 Kuratowski 半环（反之一般不成立，例 3.5 展示了这一点）。另一方面，定理 3.10（定理 3.11）表明，半环 $D^c_\vee(L)$（半环 $S_\vee(L)$）是核，当且仅当 $|L| = 2$($|L| = 2$ 或 $|L| = 3$）。尽管已有针对 [GD2024, 引理 2.1 (7)] 的反例（参见 [SGBS] 和 [Nas]），我们的定理不仅给出了无穷多个针对 [GD2024, 引理 2.1 (7)], 的反例，还说明了该断言在何种情况下适用于我们的结构。

第 4 节致力于研究由半格诱导的半环的链条件。定理 4.3 刻画了诺特（阿廷）半环 $D^c_\vee(L)$：它们恰好是使类 $\mathfrak{I}^c_\vee(U_c)$（即 L 的所有包含 c 且对并运算封闭的子集）满足升链条件（降链条件）的半环；同时也刻画了 k-诺特（k-阿廷）半环：它们恰好是使序理想类 $\mathrm{Idl}(U_c)$ 满足升链条件（降链条件）的半环。这些刻画可推广到由有界并半格 $(L, \vee, 0)$ 诱导的半环 $H_\vee(L) = D^0_\vee(L)$，以及由具有并不可约顶元的有界并半格诱导的半环 $S_\vee(L)$ $1 \neq 0.$。在特殊情形 $L = C$（一个链）中，我们在推论 4.4 中证明，$S_\vee(C)$ 是诺特/阿廷的，当且仅当 C 是有限的。此外，我们证明，$S_\vee(C)$ 是 k-诺特（k-阿廷）的，当且仅当 C 满足升链条件（降链条件）。由此我们能够给出 Krull 零维交换半环的例子：它们是 k-诺特但非 k-阿廷的，或是 k-阿廷但非 k-诺特的。这说明，真交换半环相当奇特；就链条件而言，它们的行为与交换环大不相同。

1 预备知识

本节介绍半环理论中的主要定义（遵循 Golan [Gol1999]）以及格论中的主要定义（遵循 Gr¨azer [Gra2010]）。

文献中对半环并没有统一的定义。为避免混淆，我们为文献中的每种主要半环类型赋予一个专门名称，以便与其他类型区分，并使任何升级都一目了然。

1.1. 半环是一个数据 $(\mathrm{S}\ +,\cdot)$，其中 $(\mathrm{S}\ +)$ 是交换半群，$(\mathrm{S}\ \cdot)$ 是半群，且乘法对加法满足左右分配律。预半环是半环 $(\mathrm{S};\ +,\ 0;\ \cdot)$，其中 $(\mathrm{S}\ +,\ 0)$ 是幺半群。半环是一个预半环，其中 0 是吸收元，即对所有 $\mathrm{s}\in\mathrm{S}$，$\mathrm{s}\cdot 0=0=0\cdot\mathrm{s}$。半环是一个半环 $(\mathrm{S};\ +,\ 0;\ \cdot,\ 1)$，其中 $(\mathrm{S}\ \cdot,\ 1)$ 是幺半群，且 $1\neq 0$. 为避免平凡情形，我们假设本文中任意半环均满足$|\mathrm{S}|\geq 2$。若半环 $(\mathrm{S}\ +,\cdot)$ 满足 $(\mathrm{S}\ \cdot)$ 是交换的，则称其为交换的；若对每个 $\mathrm{s}\in\mathrm{S}$，$\mathrm{s}+\mathrm{s}=\mathrm{s}$，则称其为加法幂等；若对每个 $\mathrm{s}\in\mathrm{S}$，$\mathrm{s}\cdot\mathrm{s}=\mathrm{s}$，则称其为乘法幂等；若 S 同时满足加法幂等和乘法幂等，则称其为幂等。半环 $(\mathrm{S}\ +,\cdot)$ 的理想是一个非空子集 $\mathrm{I}\subseteq\mathrm{S}$，满足 $\mathrm{I}+\mathrm{I}\subseteq\mathrm{I}$、$\mathrm{SI}\subseteq\mathrm{I}$ 且 $\mathrm{IS}\subseteq\mathrm{I}$。用 $\mathfrak{I}(\mathrm{S})$ 表示 S 的理想类。真 demiring 是指不是环的半环。

1.2. 设 $(S\ +,\cdot)$ 是一个半环。对于任意子集 $A\subseteq S$，定义**A** 的减法闭包为

$$\overline{A}:=\{s\in S\mid s+a\in A \text{ for some } a\in A\}.$$

称A 是**可减的**，当且仅当$A\subseteq\overline{A}$（若S是预半环，则$A=A$）。任意理想的减法闭包仍是理想。若$I\subseteq S$ 是一个理想，则I 是可减的，当且仅当$I=I$。可减理想也称为 **k-理想,** 可减理想（k-理想）在S 中的类记为 $\mathfrak{K}(S)$。若交换半环S 的每个理想都是可减的，则称该交换半环为**可减的**。

1.3. 设 $(S\ +,\cdot)$ 是一个半环。对于非空子集 $\varnothing\neq A\subseteq S$，定义$A$ 的**加法闭包**为

$$A^{+}:=\{x+s\mid x\in A \text{ and } s\in S\}.$$

我们称A 是**可加的**当且仅当$A^{+}\subseteq A$ ($A=A^{+}$ 若S 是预半环)。我们用 $\mathscr{A}(S)$表示S的所有可加子集的集合。S 的**余理想** 是一个可加子集$C\subseteq S$，且在乘法下封闭。我们用 $\mathscr{C}(S)$表示S的所有余理想的集合。S 的**双理想** 是同时也是余理想的理想。我们用 $\mathscr{B}(S)=\mathfrak{I}(S)\cap\mathscr{C}(S)$表示$S$的所有双理想的集合。

定义 1.4。 我们称带有 $|S| \geq 2$ 的半环$(S\ +,\cdot)$:

同余单 当且仅当S的所有同余组成的类是 $\mathrm{Cong}(S) = \{\Delta, \nabla\}$，其中 Δ是对角线（称为平凡同余），而 $\nabla = S \times S$（称为全同余）；

理想单 当且仅当S中满足 $|I| \geq 2$ 的唯一理想I是S;

k-理想单 当且仅当S中满足 $|I| \geq 2$ 的唯一k-理想I是S。

1.5. 设 $(\mathrm{S}\ +,\cdot)$ 是一个半环。S 的所有理想组成的类 $(\mathfrak{I}(\mathrm{S}) \cap, +)$ 是一个完备有界格，其底元为 $\{0\}$，顶元为 S。虽然 $(\mathfrak{K}(\mathrm{S}) \cap) \subseteq (\mathfrak{I}(\mathrm{S}) \cap)$ 是一个交半格，但 $\mathfrak{K}(\mathrm{S})$ 甚至对加法都不封闭（参见例 3.13）。为克服这一障碍，我们调整 $\mathfrak{K}(\mathrm{S})$上的并运算，并定义 $\mathrm{I} \vee_{\mathfrak{K}} \mathrm{J} := \mathrm{I} + \mathrm{J}$（且 $\wedge_{\mathfrak{K}} := \cap$）。容易验证，$(\mathfrak{K}(\mathrm{S}) \wedge_{\mathfrak{K}}, \vee_{\mathfrak{K}})$ 是一个格。

1.6. 我们称偏序集（$L \leq$）

并半格（上半格），当且仅当任意二元集合 $\{a,\ b\}$ 都有一个最小上界 $a \vee b :=\sup\{a,\ b\}$，称为**并**;

交半格（下半格），当且仅当任意二元集合 $\{a,\ b\}$ 都有一个最大下界 $a \wedge b :=\inf\{a,\ b\}$，称为**交**。

我们称一个并半格（交半格）

有界，当且仅当它有一个底元 0（最大元 $\top$）；

完备，当且仅当任意并（交）存在。

注 1.7. 设 $(L \vee)$ $((L \wedge))$ 为并半格（交半格）。任意并（交）包括空并（空交），因此完备并半格（交半格）有底元 $0 := \bigvee \varnothing (\top := \bigwedge \varnothing)$，以及最大元 $\bigvee L$（底元 $\perp := \bigwedge L$）。

1.8. 格是一个偏序集 $(L \leq)$，其中任意二元集合 $\{a,b\}$ 都有交和并。格 L 有界（完备）当且仅当两个半格 $(L \wedge)$ 和 $(L \vee)$ 都有界（完备）。显然，每个完备格都有界。

定义 1.9. 设 $\mathscr{L} = (L \wedge, \vee, 0, 1)$ 为完备格。若对每个子集 $A \subseteq L$： $c \in L$中的元素都满足，则称其为**紧致**:

$$c \leq \bigvee A \quad \Longrightarrow \quad c \leq \bigvee F \text{ for some } F \underset{\text{finite}}{\subseteq} A;$$

我们称 $\mathscr{L}$ 是<əstyle id='2'>代数的，当且仅当L 中的每个元素都是一组紧元（可能是无限集）的并。

1.10. 设（$P \leq$）是一个偏序集。对于任意非空子集$A \subseteq P$，我们定义

$$[A \uparrow) := \{x \in P \mid a \leq x \text{ for some } a \in A\};$$
$$(\downarrow A] := \{x \in P \mid x \leq a \text{ for some } a \in A\}.$$

如果$A = \{a\}$，a 为单元素集，则我们设

$$U_a := [a\uparrow) := [\{a\}\uparrow) \text{ and } D_a := (\downarrow a] := (\downarrow \{a\}].$$

我们称非空子集 $\varnothing \neq A \subseteq P$ 为

上集 当且仅当 $[A\uparrow) = A$，等价地，$[a\uparrow) \subseteq A$ 对每个 $a \in A$；

下集 当且仅当 $(\downarrow A] = A$，等价地 $(\downarrow a] \subseteq A$ 对每个 $a \in A$。

我们用 $\mathfrak{U}(P)$ $(\mathfrak{D}(P))$ 表示 P 的所有上集（下集）构成的集合。

1.11. 设 $(L, \vee)$ 是一个并半格。非空子集 $D \subseteq L$ 称为**序理想**，当且仅当 D 是一个下集且对二元并封闭，等价地，当且仅当

$$\forall\, a,b \in L:\ a \vee b \in D \Longleftrightarrow a,b \in D. \tag{1}$$ Gra-ideal

我们用理想格(L)表示 L 的所有序理想构成的集合。对于任意 $d \in D$，下集 $(\downarrow d]$显然是一个序理想，称为由 d 生成的**主序理想**。

并半格-序理想

引理 1.12. 设 $(L, \vee)$ 是一个并半格。

1. 理想格(L)是一个并半格，其并为

$$I \vee_{\mathrm{Idl}(L)} J := \{x \in L \mid x \leq a \vee b \text{ for some } a \in I, b \in J\}. \tag{2}$$ j-idl

此外，理想格(L)对任意非空 并封闭。

2. 若 L 有界，则 理想格(L) 是一个完备代数格，其交为交集，且其紧元集合恰为主序理想的集合 $\{(\downarrow d] \mid d \in L\}$.

证明。 设 $(L, \vee)$ 是一个并半格。

1. 对任意非空 集合 $(A_\lambda)_\Lambda \subseteq \mathrm{Idl}(L)$，考虑

$$\bigvee_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda := \{x \in L \mid x \leq a_1 \vee \cdots \vee a_n,\ n \geq 1,\ a_1, \cdots, a_n \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\}. \tag{3}$$ join-idl

显然，$\bigvee A_\lambda$ 满足 (1)，因此它是L的一个序理想。所以，$\mathrm{Idl}(L)$对$\lambda\in\Lambda$任意非空 并封闭。

2. 这是 [Gra2010，定理 42]。■

下面的例子表明，引理 1.12 中并半格有界这一假设不可省略。

例1.13。 考虑并半格

$$L : a, b < t, \quad a \parallel b.$$

注意，L不是有界的。此外，$\{a\}, \{b\} \in$是 $\mathrm{Idl}(L)$ 的元素，但 $\{a\} \cap \{b\} = \varnothing \notin$不是 $\mathrm{Idl}(L)$ 的元素。 因此，$\mathrm{Idl}(L)$ 甚至不是 一个格。■

1.14. 设 $(M\ \wedge;\ \top)$ 是一个具有最大元 $\top$. 的交半格。若子集 $U \subseteq$ 是M的子集，则称其为**滤子**，当且仅当U 是一个非空 上集，且对二元交封闭；等价地

$$\forall\, a,b \in M:\ a\wedge b \in U \iff a,b \in U. \tag{4}$$

Gra-滤子

我们用 Fil(M) =Idl(M^{op}) 表示M的所有滤子的集合。 对于每个$c \in M$， 上集$U_c := [c\ \uparrow)$显然是一个滤子，称为由c生成的**主滤子** 。

定义 1.15. （参见 [Gra2010], [Rho1975]）设$(L\ \leq)$为一个偏序集。

1. 若$(L\ \vee)$是一个并半格，则称L 为:
   模并半格 ，当且仅当对于所有$u,v,w \in L$，若$u \leq w \leq u\vee v$，则存在$y \in L$，使得$y \leq v$且$w = u \vee y$;
   分配并半格 ，当且仅当对于所有$u,v,w \in L$，若$u \leq v \vee w$，则存在$y,z \in L$，使得$y \leq v, z \leq w$且$u = y \vee z$。
2. 若 $(L\ \wedge)$ 是交半格，则称 L :
   模交半格 当且仅当对所有 $u,v,w \in L$，若 $u\wedge v \leq w \leq u$，则存在 $y \in L$，使得 $v \leq y$且 $w = u \wedge y$;
   分配交半格 当且仅当对所有 $u,v,w \in L$，若 $v\wedge w \leq u$，则存在 $y,z \in L$，使得 $v \leq y, w \leq z$且 $u = y \wedge z$。
3. 若 $(L\ \wedge,\vee)$ 是格，则称 L :
   模格 当且仅当对所有 $A,B,C \in L$，若 $A \leq C$，则有

   $$(A\vee B)\wedge C = A\vee(B\wedge C);$$

   分配格 当且仅当对所有 $A,B,C \in L$ 有

   $$\begin{aligned}(A\vee B)\wedge C &= (A\wedge C)\vee(B\wedge C);\\ \text{(equivalently } (A\wedge B)\vee C &= (A\vee C)\wedge(B\vee C)).\end{aligned}$$

以下结果广为人知（参见 [Cor1974，推论 1.2]）：

equiv-lat-semi

引理 1.16. 设 $(L\ \wedge,\vee)$ 是一个格。

1. L 是模格 $\iff (L\ \vee)$ 是模并半格 $\iff (L\ \wedge)$ 是模交半格。

2. L 作为格是分配的 $\iff$ （$L\ \vee$）作为并半格是分配的 $\iff$ （$L\ \wedge$）作为交半格是分配的。

1.17. 在下面的两幅图中，底层集合为 $\{e、a、b、c、t\}$，其中e是最小元，t是最大元。这些图是哈斯图：当且仅当两个元素中的一个覆盖另一个时，二者之间才有一条边。覆盖关系为

$$\begin{array}{lll} N_5 & : & e<a<c<t; \qquad e<b<t; \qquad b \parallel a,c; \\ M_3 & : & e<a,b,c; \qquad a,b,c<t; \qquad a \parallel b \parallel c. \end{array}$$

五边形

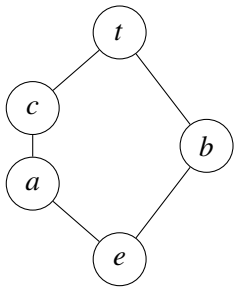


图1：**五边形** 格N_5。

五边形菱形

菱形格

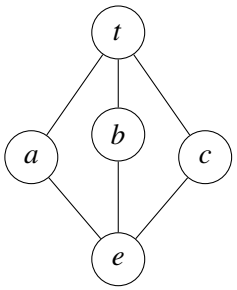


图2：**菱形格** 格M_3。

模分配

引理 1.18。 设 L 是任意格。

1. 当且仅当 L 不包含同构于 N_5. 的子格时，L 是模的

2. 当且仅当 L 不包含同构于 N_5 或 M_3. 的子格时，L 是分配的

以下结果是众所周知的结果（参见 [Gol1999]）。

经典-格

定理 1.19。 对于一个非平凡的 格$(L\ \wedge,\vee)$：，以下各条件等价

1. L 是分配的;

2. $Lat_\vee(L) := (L\ \vee,\wedge)$ 是一个（幂等）半环，其加法为 $\vee$，乘法为$\wedge$;

3. $Lat_\wedge(L) := (L\ \wedge,\vee)$ 是一个（幂等）半环，其加法为 $\wedge$，乘法为$\vee$.

此外，如果格 L 是有界的，具有底元 0 和最大元 1，并且是分配的，那么我们有半环的一个同构：

$$Lat_\vee(L) := (L;\vee,0;\wedge,1) \cong Lat_\wedge(L) := (L;\wedge,1;\vee,0).$$

2 由并半格诱导的半环

本文中的每个代数都是非平凡的，即至少包含两个元素。

定义 2.1。 有界并半格（$L\ \vee;\bot$）（交半格（$M\ \wedge,\top$））中的元素 z 称为并不可约（**交不可约**）[Gra2010，第 102] 页，当且仅当

$$z \neq \bot \text{ and for any } x,y\in L \text{ with } x\vee y=z, \text{ we have } x=z \text{ or } y=z; \tag{5}$$

$$z \neq \top \text{ and for any } x,y\in M \text{ with } x\wedge y=z, \text{ we have } x=z \text{ or } y=z. \tag{6}$$

覆盖

引理 2.2。 设 $(L\ \wedge,\vee,0,\ 1)$ 是一个具有 $1\neq 0$. 的有限有界格

1. 1 是并不可约的 $\Longleftrightarrow$ 1有唯一的下覆盖。

2. 0 是交不可约的 $\Longleftrightarrow$ 0 有唯一的上覆盖。

下面的例子表明，引理 2.2 中关于L 为有限的假设不可省略。

例 2.3。 考虑实数区间 $[0,1]$，将其视为按通常方式排序的格。由于$\vee_L$ =最大值和 $\wedge_L$ =最小值，我们知道 1 是并不可约的，0 是交不可约的。然而，既没有 1 的下覆盖，也没有 0 的上覆盖。

另一方面，考虑有界格 $(L\ \vee,\ \wedge,\ 0,\ 1)$，其中

$$\begin{aligned} L &= \{0,1,c\}\cup\{a_1,a_2,\cdots\}\cup\{b_1,b_2,\cdots\},\ 0<x<1 \text{ for all } x\in L,\\ c &\parallel a_n\parallel b_m \text{ for all } n,m, \qquad a_n<a_{n+1},\ b_n<b_{n+1} \text{ for all } n. \end{aligned}$$

尽管c 是L中 1 的唯一下覆盖，但由$a_1\vee b_1=1$ 可知，1并非并不可约。在对偶格L^{op}中，c 是 $0_{L^{\mathrm{op}}}=1$ 的唯一上覆盖，但 $0_{L^{\mathrm{op}}}$ 并非交不可约。■

半环-S0

命题 2.4. 设$(L\ \vee)$ 为一个并半格，并固定 $c\ \in L$。

1. 在以下运算下，$D^c_\vee(L)$:=$(L\ \vee,\cdot_c)$ 具有一个非幺（加法幂等）半环结构

$$x+y:=x\vee y, \qquad x\cdot_c y=c \quad \textit{for all } x,y\in L.$$

2. $D^c_\vee(L):=(L;\ \vee,c;\ \cdot_c)$ 是非幺半环，当且仅当 L 有界且底元为 $c\ =0_L$.

3. 设 L 有界且其顶元为 $1\neq 0$，并定义

$$x+y:=x\vee_L y, \quad x\cdot_\vee y:=\begin{cases} x, & y=1,\\ y, & x=1,\\ 0, & x\neq 1\neq y. \end{cases} \tag{7}$$

plus-dot-S0

那么，$S_\vee(L):=(L;\vee,\ 0;\cdot_\vee,1)$ 是一个半环，当且仅当1是并不可约的。

证明。 由于加法是并半格上的并，因此它满足结合性、交换性和幂等性。乘法显然是交换的。

1. 乘法是常值的，因此是结合的。对于任意x，y，$z \in L$，有

$$x \cdot_c (y+z) = c = c \vee c = (x \cdot_c y) + (x \cdot_c z).$$

若e是乘法单位元，则对每个$x \in L$，都有$x = e \cdot_c x = c$，这与假设 $|L| \geq 2$.矛盾

2. 显然。

3. 设L有界，且有顶元 $1 \neq 0$.。我们验证结合律。设x，y，$z \in L$。若$x = 1$，则

$$(x \cdot_\vee y) \cdot_\vee z = y \cdot_\vee z = 1 \cdot_\vee (y \cdot_\vee z) = x \cdot_\vee (y \cdot_\vee z).$$

若$y = 1$，则

$$(x \cdot_\vee y) \cdot_\vee z = x \cdot_\vee z = x \cdot_\vee (y \cdot_\vee z).$$

若$z = 1$，则

$$(x \cdot_\vee y) \cdot_\vee z = x \cdot_\vee y = x \cdot_\vee (y \cdot_\vee z).$$

若x，y，z均不为 1，则$xy = yz = 0$，且

$$(x \cdot_\vee y) \cdot_\vee z = 0 \cdot_\vee z = 0 = x \cdot_\vee 0 = x \cdot_\vee (y \cdot_\vee z),$$

这里用到了 0 是乘法的吸收元。因此乘法满足结合律。显然，1 是其单位元，而 0 是吸收元。因此，只需证明分配性成立当且仅当 1 是并不可约元。

($\Longrightarrow$) 假设$S_\vee(L)$ 是一个半环。设 1不是并不可约元。那么存在y，$z < 1$ 使得$y \vee_L z = 1$。y和z 均不为 0，因为 $0 \vee_L z = z$且$0 \vee_L y = y$。特别地，$y \neq 0$。由于y，$z \neq 1$，乘法规则给出

$$y \cdot_\vee (y+z) = y \cdot_\vee 1 = y, \qquad y \cdot_\vee y + y \cdot_\vee z = 0 \vee_L 0 = 0.$$

由于$y \neq 0$，分配性不成立，矛盾。

($\Longleftarrow$) 假设顶元 1 是并不可约元。

断言： 由乘法的交换性 $\cdot_\vee$，我们只需证明

$$x \cdot_\vee (y+z) = (x \cdot_\vee y) + (x \cdot_\vee z) \text{ for all } x, y, z \in L. \tag{8}$$

dist-over-L

情形 I： $x = 1$. 在这种情况下，恒等式（8）显然成立。

情形 II： $x \neq 1$ 和 $y = 1$ （或 $z = 1$）。假设 $y = 1$. 在这种情况下，我们有$x \cdot_\vee$（$y + z$）$= x \cdot_\vee$（$1 \vee z$）$= x \cdot_\vee 1 = x$。

• 如果 $z = 1$, 则

$$(x \cdot_\vee y) + (x \cdot_\vee z) = x \cdot_\vee 1 + x \cdot_\vee 1 = x \vee x = x = x \cdot_\vee 1 = x.$$

• 若$z \neq 1$, , 则

$$(x \cdot_\vee y) + (x \cdot_\vee z) = (x \cdot_\vee 1) \vee (x \cdot_\vee z) = x \vee 0 = x.$$

在这两个子情形中，分配条件 (8) 均成立。

情形 III: $x,y,z \neq 1$。由 1 的并不可约性可知，$y \vee z \neq 1$，因此

$$x \cdot_\vee (y+z) = x \cdot_\vee (y \vee z) = 0 = 0 \vee 0 = (x \cdot_\vee y) + (x \cdot_\vee z).$$

在所有情形下，分配性均成立，因此$S_\vee(L)$ 是一个加法幂等半环。■

非同构半环

注 2.5. 设 $(L \vee, 0)$ 是一个具有并不可约元的并半格。$1 \neq 0$. 半环 $(S_\vee(L); \vee, 0; \cdot_\vee)$ 和 $(H_\vee(L); \vee, 0; \cdot_0)$ 非同构。事实上，甚至不存在从 $S_\vee(L)$ 到 $H_\vee(L)$ 的半环满态射: 假设 $\varphi : S_\vee(L) \longrightarrow H_\vee(L)$ 是一个半环满态射。注意,

$$\varphi(1) = \varphi(1 \cdot_{S_\vee(L)} 1) = \varphi(1) \cdot_{H_\vee(L)} \varphi(1) = 0.$$

令 $h \in H_\vee(L)$, 并选取 $s \in \varphi^{-1}(h) \subseteq S_\vee(L)$。于是

$$\begin{array}{lllll} h & = & \varphi(s) & = & \varphi(s \cdot_{S_\vee(L)} 1) \\ & = & \varphi(s) \cdot_{H_\vee(L)} \varphi(1) & = & \varphi(s) \cdot_{H_\vee(L)} 0 \\ & = & 0. & = & \end{array}$$

因此，$H_\vee(L) = \{0\}$, 这与 $|L| \geq 2$.■ 矛盾

C_2-并-S

例 2.6。考虑二元链C_2： $\bot < \top$.

1. 固定 $c = 1$, $D^1_\vee(C_2)$ 的运算定义如下

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\cdot_1$	0	1
0	1	1
1	1	1

显然，$D^1_\vee(C_2)$ 是一个非幺偶半环。

2. 选择 $c = 0$, $H_\vee(C_2) := D^0_\vee(C_2)$ 的运算为

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\cdot_0$	0	1
0	0	0
1	0	0

那么 $H_\vee(C_2) \cong \mathfrak{B}$ （二元<style id='8'>布尔半幺环）显然是非幺的。

3. 根据 $S_{\vee}(C_2)$，的定义，它具有以下运算

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\cdot_{\vee}$	0	1
0	0	0
1	0	1

因此 $S_{\vee}$（C_2）$\cong \mathbb{B}$（二元 **布尔半环**）。■

有界

注释 2.7。 设（T $\vee$）是一个并半格，并假设T 没有最大元，或者其最大元 1不是 并不可约。我们构造一个有界并半格L，其新 最大元是并不可约的。保留T 的序，并向其中添加一个新 元素 $1^\sharp$，该元素不属于 T。如果T 有最小元 0， 则对所有$x \in T$， 规定$x < 1^\sharp$。如果T 没有最小元，则添加一个新元素$\mathbf{0}$， 令$L := T \cup \{\mathbf{0}, 1^\sharp\}$，并规定

$$\mathbf{0} < x < 1^\sharp \qquad \text{for every } x \in T \text{ and } \mathbf{0} < 1^\sharp.$$

于是L 是一个有界并半格，其最小元为$\mathbf{0}$，且具有一个并不可约 最大元 $1^\sharp$.

下面的例子说明，并不可约性 条件 (5) 对于$S_{\vee}$（L）成为半环是必不可少的。

例 2.8。 考虑四元布尔格

$$B_2 : e < a,\ b < t,\ a \parallel b.$$

注意，t 是B_2 的顶元，但t 并不可约：存在$a \vee b = t$，其中a、$b < t$。 将乘法公式（7）应用于 $1 = t$和 $0 = e$。 由于$a + b = a \vee_L b = t$且a、$b < t$，可得

$$a \cdot_{\vee} (a + b) = a \cdot_{\vee} t = a \neq e = e + e = a \cdot_{\vee} a + a \cdot_{\vee} b.$$

因此分配性不成立，该构造不能在B_2.上定义半环

添加一个真正新的最大元 $1^\sharp$ 不在B_2 中，可以避免这一障碍。另一方面，预先存在的最小元e 可以通过令 $\mathbf{0} = e$，而安全地重用，这与上述构造相同。■

注释 2.9。 通过向半格添加新的顶元，从有界并半格构造半环的想法，应该是众所周知的。虽然我们未能找到以我们所采用的方式正式阐述这一构造的出版物，但在修订稿件时，我们发现了 *MathOverflow*上 Keith Kearnes [MO2025]（发布于 2025年11月1日）的一则公开回答，该回答给出了与我们相同的、与并半格L相关联的半环$S_{\vee}(L)$的基本构造。

定义 2.10。（参见 [Gol1999，第 20 章，第 21] 章）设 $(S, +, \cdot)$ 是一个同时也是偏序集 $(S, \leq)$ 的半环，并固定 $c \in S$。 我们称 S 为

1. c-**偏序半环** 当且仅当对于所有满足 $s_1,s_2,s,t \in S$ 且 $t \geq c$ 的情形，均有

$$s_1 \leq s_2 \Longrightarrow s+s_1 \leq s+s_2, \quad ts_1 \leq ts_2, \quad s_1 t \leq s_2 t. \tag{9}$$

POH

2. 当且仅当**格序半环**S还具有格的结构（S $\wedge,\vee$），使得对所有s,t $\in S$，我们有

$$s+t = s \vee t, \qquad s \cdot t \leq s \wedge t. \tag{10}$$

格序的

例 2.11. 设（L $\vee$）是一个并半格，并固定$c \in L$. 诱导半环$D^c_{\vee}$（L）是加法幂等的，因此具有自然偏序$x \leq y$当且仅当$x+y=y$（这恰好是L的序）。由于乘法是常值的，$S^c_{\vee}$（L）显然是一个c-部分有序半环。

如果L 是有界的，且底元为0, ，那么$t \geq 0$ 对所有$t \in H_{\vee}$（L）成立，而$H_{\vee}$（L）是一个部分有序半环，其含义见 [Gol1999，第 20].■章

例2.12。设（L $\wedge,\vee$）是一个格，并固定 c $\in$L。那么，$D^c_{\vee}$(L)显然是格序半环，当且仅当L有底元0且c $=0$（此时，$H_{\vee}$(L) =$D^0_{\vee}$(L)是格序半环）。如果（L $\wedge,\vee$,0, 1）是有界的，且其并不可约元为 $1 \neq 0$，那么$S_{\vee}$(L)中的每个乘积x $\cdot$y要么为0，要么为交（当 $1 \in$ { x, y}时）；因此，对所有s,t都有s $\cdot_{\vee}$t $\leq$s $\wedge$t，而$S_{\vee}$(L)是一个格序半环。■

注2.13。 由并半格$S_{\vee}(L)$诱导的半环不一定是Mala和Rao [RM2008] (参见[MR2016], [Rao1981])意义上的半格序半环 （简称**半格序半环**）。除了半格序之外，半格序半环还具有一个额外的减法／剩余运算，并满足额外的公理。半环$S_{\vee}(L)$不一定具有这一额外运算。

非半格序半环

例2.14。考虑菱形格

$$M_3 : 0 < a,b,c < t.$$

添加一个新的顶元 $1^\sharp$（其中 $t < 1^\sharp$），并令 $L := M_3 \cup \{1^\sharp\}$. 新的最大元 $1^\sharp$ 显然是并不可约的，因此根据命题 2.4，$S_{\vee}(L)$是一个半环。

断言： $S_{\vee}(L)$不是 半格序半环。

sl-半环的一个必要条件是，对于任意a,b，都存在最小x 满足$a \leq b \vee x$（参见 [MR2016，定义 2.4]）。

对于目标 a 和固定的 b，x $=$a 和 x $=$c 都满足 a $\leq$b $\vee$x（因为 b $\vee$a $=$t $=$ b $\vee$c）。这样的最小 x 必须满足 x $\leq$a 和 x $\leq$c，因此 x $\leq$a $\wedge$c $=0$. 但 b $\vee 0 =$ b 并不高于 a。因此不存在最小剩余，$S_{\vee}$(L) 不满足这条 sl-半环公理。■

理想-并

命题 2.15. 设$(L \vee)$ 是一个并半格，固定 $c \in L$，并考虑 U_c 的序理想格：

$$\mathrm{Idl}(U_c) = \{D \subseteq [c\uparrow) \mid D \textit{ is down-set closed under} \vee\}. \tag{11}$$

Idl(Uc)

1. $D^c_\vee$的所有理想(L)的集合为

$$\mathfrak{I}(D^c_\vee(L)) = \{I \subseteq L \mid c \in I \text{ and } I \text{ closed under } \vee\}. \tag{12}$$

I(SO(L))

2. $D^c_\vee$（L）中理想 I 的减法闭包为

$$\bar{I} = \{x \in L \mid x \leq h \text{ for some } h \in I\} = \bigcup_{h\in I}(\downarrow h].$$

3. $D^c_\vee$（L）中的理想 I 是可减的，当且仅当 I 是包含 c 的 L 的序理想。

4. 存在完备格的典范同构

$$\mathfrak{K}(D^c_\vee(L)) \cong \mathrm{Idl}(U_c). \tag{13}$$

并的典范同构

5. $\mathfrak{K}$（$D^c_\vee$（L））是一个完备代数格，其底元为（$\downarrow c$]，最大元为 L，其紧元恰好是主序理想 $\{(\downarrow d] \mid c \leq d\}$.

证明。首先注意，对于任意 $c \in L$，上锥$U_c := [c \uparrow)$是一个有界半格，其底元为c，因此根据引理 1.12（2），Idl(U_c) 是一个完备代数格。

1. 设I 是$D^c_\vee(L)$的一个理想。那么I 在 $\vee$ 下封闭，因为并就是半环的加法；对于任意 $a \in I$，有$c = a \cdot a \in I$。

逆命题：设$I \subseteq L$ 包含c，且在 $\vee$. 下封闭。那么I 是L的一个可加子半群。

此外，若$s \in L$ 且$x \in I$，则$sx = c \in I$。因此，I 是$D^c_\vee(L)$的一个理想。

2. 设 I 是 $D^c_\vee$(L) 的一个理想。若 $x \in \bar{I}$，则 $x \leq x \vee_L a := x + a = \tilde{} a$，其中某个 $a \tilde{} a \in I$。反之，若对于某个 $h \in I$，有 $x \leq h$，则 $x + h := x \vee_L h = h$，因此 $x \in I$。

3. 设$I \in \mathfrak{K}(D^c_\vee(L))$。若$x \in I$且$y \leq x$，则$y + x = y \vee_L x = x \in I$，因此$y \in I = I$（因为$\bar{I}$是可减的）。由此$I$向下封闭。此外，$c \in I$ 且I 对并封闭，因为I 是一个理想，所以I 是L 的一个非空序理想，且包含c。

反之，设A 是L 的一个包含c.的序理想。根据 (1)，I 对并封闭，因此是$D^c_\vee(L)$的一个理想。若$x, x + y \in A$，则$y \leq x \vee_L y = x + y$，而$A$ 的向下闭包给出$y \in A$，所以A 是可减的。

4. 对任意$A \subseteq L$ 集合

$$(\downarrow A] := \{x \in L \mid x \leq a \text{ for some } a \in A\}.$$

考虑映射

$$\begin{aligned} \Phi &: \mathfrak{K}(D^c_\vee(L)) \longrightarrow \mathrm{Idl}(U_c),\ I \longmapsto I \cap U_c; \\ \Psi &: \mathrm{Idl}(U_c) \longrightarrow \mathfrak{K}(D^c_\vee(L)),\ A \longmapsto (\downarrow A]. \end{aligned}$$

断言： Φ和 Ψ 定义良好。

如果 I 是 $D^c_\vee$(L) 的减性理想，那么 I∩U_c 非空，因为其中包含 c；它在 U_c 中向下封闭，并且对并封闭。反之，如果 A ∈ Idl(U_c)，那么 c ∈ (↓A]，其向下封闭且对并封闭：如果 x ≤ a 且 y ≤ b，其中某些 a、b ∈ A，那么 x ∨y ≤a ∨b ∈A。

对于 $I \in \mathfrak{K}(D^c_\vee(L))$ 以及 $x \in I$，元素 $x \vee c$ 属于 $I \cap U_c$，且 $x \leq x \vee c$。因此Ψ(Φ(*I*)) = (↓ ($I \cap U_c$)] = *I*。

另一方面，对于 $A \in \mathrm{Idl}(U_c)$，如果 $u \in (\downarrow A] \cap U_c$，那么 $u \leq a$，其中某个 $a \in A$，而 *A* 在 U_c 中的向下闭包给出 $u \in A$。因此 $(\downarrow_L A] \cap U_c = A$。

因此， Φ 和 Ψ 是逆序同构，故也是完备格同构。

5. 有界并半格的任一理想格都是完备代数的，其中紧元为主序理想。将此结论应用于U_c，即可得到最后的结论。具体而言，交是交集，而

$$A \vee B = \{u \in [c\uparrow) \mid u \leq a \vee b \text{ for some } a \in A,\ b \in B\}.$$

主序理想（$_{U_c}\downarrow u$] 在 Ψ 下映射为（$_L\downarrow u$].■

理想-并-S

推论 2.16。 设$(L \vee, 0)$是一个具有并不可约 $1 \neq 0$.的有界并半格

1. $S_\vee(L)$的所有 理想的集合是

$$\mathfrak{I}(S_\vee(L)) = \{L\} \cup \{I \subseteq L\backslash\{1\} \mid 0 \in I,\ I \textit{ closed under } \vee\}. \tag{14}$$

理想-S-并

2. 存在完备格的典范同构

$$\mathfrak{K}(S_\vee(L)) \cong \mathrm{Idl}(L). \tag{15}$$

k-理想-半格-L

证明。 设*L* 是一个有界并半格，其顶元 $1 \neq 0$ 为并不可约元。

1. 通过选取$c = 0.$，由命题 2.15 可得此结论

2. 减法闭包仅取决于加法，因此 $\mathfrak{K}(S_\vee(L)) \subseteq \mathfrak{K}(H_\vee(L))$ Proposition 2.15 (4)=Idl(L)。反之，设 D ∈Idl(L)。若 $1 \in D$，则 D = L。若 $1 \notin D$，则 D ⊆ L\{1} 且0 ∈D。在这两种情况下，根据 (1)，D 都是 $S_\vee(L)$ 的理想。此外，D 是一个减性理想，因为它向下封闭。因此， $\mathfrak{K}(S_\vee(L))$ = $\mathfrak{K}(H_\vee(L))$ =Idl(L)，且格运算一致，因为 $\wedge_{\mathfrak{K}} = \cap$ 和 I $\vee_{\mathfrak{K}}$J = I +J 仅涉及加法。■

理想-并-1

注 2.17. 设 $(L \vee,0)$ 是一个有界并半格，其中并不可约 $1 \neq 0$. 在 14 的第二个族中排除 1 是必要的。例如，若 $|L| \geq 3$，则 $I = \{0,1\}$包含 0 且对并封闭，但对于任何 *a* ∈ *L*\，*I* 不是 理想；*I* 我们有 $a \cdot_\vee 1 = a \notin \{0,1\}$.■

利用对偶性并应用命题 2.4 和 2.15，我们得到

半环—交

命题 2.18. 设 $(M\ \wedge)$ 是一个交半格。

1. 固定 $c\ \in M$。我们在 $D^c_\wedge(M) := (M\ \wedge, \cdot_c)$ 上定义了一个 非幺 （加法幂等）半环结构，其运算如下

$$x + y := x \wedge y, \qquad x \cdot_c y = c \quad \textit{for all } x, y \in M.$$

此外，$(M^{\mathrm{op}}, \wedge^{\mathrm{op}})$ 是一个并半格，并且

$$D^c_\wedge(M) \cong D^c_{\wedge^{\mathrm{op}}}(M^{\mathrm{op}}), \quad \mathfrak{K}(D^c_\wedge(M)) \cong \mathrm{Fil}(D_c).$$

2. $H_\wedge(M) := (M; \wedge, c; \cdot_c)$ 是一个 非幺 半环，当且仅当 M 有界且最大元为 $c\ = \top$. 在此情况下，$(M^{\mathrm{op}}, \wedge^{\mathrm{op}}, \top)$ 是一个有界并格，其最小元为 $0 = \top$并且

$$H_\wedge(M) \cong H_{\wedge^{\mathrm{op}}}(M^{\mathrm{op}}), \quad \mathfrak{K}(H_\wedge(M)) \cong \mathrm{Fil}(M).$$

3. 设$(M\ \wedge, \top)$ 有界，底元为 $\bot \neq \top$，并定义

$$x + y := x \wedge y, \quad x \cdot_\wedge y := \begin{cases} x, & y = \bot, \\ y, & x = \bot, \\ \top, & x \neq \bot \neq y. \end{cases} \tag{16}$$

当且仅当底元 $\bot$ 是交不可约元时，$S_\wedge(M) := (M; \wedge, \top; \cdot_\wedge, \bot)$ 才是半环。在这种情况下，$(M^{\mathrm{op}}, \wedge^{\mathrm{op}}, \top)$ 是一个具有并不可约最大元 $1 = \bot \neq 0 = \top$ 的有界并格，并且

$$S_\wedge(M) \cong S_{\wedge^{\mathrm{op}}}(M^{\mathrm{op}}), \quad \mathfrak{K}(S_\wedge(M)) \cong \mathrm{Fil}(M).$$

以下结果直接由定义可得。

余理想—并

命题 2.19。 设 $(L\ \vee)$ 是一个并半格，并固定 $c\ \in L$。

1. $\mathscr{A}(D^c_\vee(L)) = \mathfrak{U}(L)$. *2.* $\mathscr{C}(D^c_\vee(L)) = \{C\ \in \mathfrak{U}(L)\ \mid c\ \in C\} = \mathscr{B}(D^c_\vee(L))$.

局部 j-半环

命题 2.20. 设$(L\ \vee, 0, 1)$ 是一个有并不可约顶元的有界并半格。$1 \neq 0$. 半环 $S_\vee(L)$ 是局部的；此外，其唯一极大理想 $\mathfrak{m}_\vee := L\backslash\{1\}$ 是可减的。

证明。 考虑理想 $\mathfrak{m}_\vee := L\backslash\{1\}$. 于是 $\mathfrak{m}_\vee$ 在加法（并）下封闭，因为 1 是并不可约的。此外， $\mathfrak{m}_\vee$ 显然在乘法下稳定。显然， $\mathfrak{m}_\vee$ 是极大的，并且包含 $S_\vee(L)$. 的所有真理想。注意， $\mathfrak{m}_\vee$ 是可减的：若 $x \in \mathfrak{m}_\vee$ 且 $x \vee y \in \mathfrak{m}_\vee$，则 $y \neq 1$，所以 $y \in \mathfrak{m}_\vee$.■

下面的例子表明，由半格诱导的半环可能不存在极大理想。

二进

例 2.21。 设 L 是由所有二进半开子区间的有限的 并构成的布尔代数

$$[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}), \qquad n \geq 0, \qquad 0 \leq k < 2^n$$

of $[0,1)$，其并为 $A \vee B := A \cup B$，底元为 $\varnothing$。每个非空的 $A \in L$ 都可写成 $A = A_1 \cup A_2$，其中$A_1, A_2 \subsetneq A$（将表示A的一个二进区间二等分）。

断言：$H_\vee(L)$ 没有极大理想。假设 $\mathfrak{m}$ 是一个极大理想。取 $A \notin \mathfrak{m}$。由于乘法为零，理想恰好是包含$\varnothing$.的并封闭子集。由 $\mathfrak{m} \cup A$ 生成的理想 I 由形如 B 或 $B \cup A$ 的元素构成，其中 $B \in \mathfrak{m}$。由于 $\mathfrak{m} \subsetneq I \subseteq H_\vee(L)$，$\mathfrak{m}$的极大性迫使 $I = L$。取 $A_1, A_2 \in L$，其中 $A = A_1 \cup A_2$且 $A_1, A_2 \subsetneq A$。A_1和 A_2都不可能具有 $A \cup B$ 的形式。由于 $I = L$，我们有 $A_1, A_2 \in \mathfrak{m}$，因此 $A = A_1 \cup A_2 \in \mathfrak{m}$，矛盾。所以，$H_\vee(L)$ 没有极大理想。■

下面的例子表明，由半格诱导的半环可能有一个不是素的极大理想。

极大但非素

例2.22。 考虑链C_2：$0 < a$。 半环$H_\vee(C_2)$只有一个真理想 $\mathfrak{m} := \{0\}$，它显然是极大的，但不是素的（因为$a^2 = 0 \in \mathfrak{m}$ 而$a \notin \mathfrak{m}$）。

下集同态

引理 2.23。 设$(L \vee)$ 是一个并半格，并考虑

$$f : L \longrightarrow \mathrm{Idl}(L), \qquad a \longmapsto (\downarrow a]. \tag{17}$$

f:L-Idl(L)

1. f 是并半格的单射态射，也是序嵌入。此外，若 L 是有界的且底元为 0 （具有最大元 1），则 $\mathrm{Idl}(L)$ 有界，底元为 $\{0\}$（具有最大元 $f(1) = L$）。

2. 若 $(L \wedge, \vee, 0, 1)$ 是有界格，则 f 是有界格的单射态射。特别地，L 同构于 L 的主理想所构成的有界子格 $\mathfrak{D}_p(L) \subseteq \mathrm{Idl}(L)$。

证明。首先注意，f 定义良好，因为对每个 $a \in L$，$f(a) = (\downarrow a]$ 都是一个序理想。对所有 $a,b \in L$，有 $a \leq b \iff (\downarrow a] \subseteq (\downarrow b]$，因此 f 是单射序嵌入。此外，若 L 有界且底元为 0，则 $f(0) = (\downarrow 0] = \{0\}$ 显然是 Idl(L) 的底元。若 L 有最大元 1，则 $f(1) = (\downarrow 1] = L$，即 Idl(L) 的最大元。

1. **断言：** f 保持并。回顾第 2 条中给出的序理想的并。特别地，对于任意 a、$b \in L$，我们有

$$\begin{aligned} f(a) \vee_{\mathrm{Idl}(L)} f(b) &= \{x \in L \mid x \leq u \vee v \text{ for some } u \leq a,\ v \leq b\} \\ &\subseteq \{x \in L \mid x \leq a \vee b\} = f(a \vee b) \end{aligned}$$

反之，任取 $x \in f(a \vee b) = (\downarrow a \vee b]$。则 $x \leq a \vee b$。由于 $a \in f(a)$ 且 $b \in f(b)$，由 (2) 可知 $x \in f(a) \vee_{\mathrm{Idl}(L)} f(b)$。因此，我们有 $f(a \vee_L b) \subseteq f(a) \vee_{\mathrm{Idl}(L)} f(b)$。结合这两个包含关系，我们得到

$$f(a \vee_L b) = f(a) \vee_{\mathrm{Idl}(L)} f(b).$$

2. **断言：** f 保持交。设 $a, b \in L$。由于 $\mathrm{Idl}(L)$ 中的交就是集合的交，我们有

$$f(a) \wedge_{\mathrm{Idl}(L)} f(b) = f(a) \cap f(b) = (\downarrow a] \cap (\downarrow b] = (\downarrow a \wedge_L b] = f(a \wedge_L b).$$

由 (1) 可知 f 保持并，结合上面的论证，它也保持交，因此 f 是有界格的态射。由于 f 是单射，因此 $L \cong \mathfrak{D}_p(L)$ 是 $\mathrm{Idl}(L)$ 的有界子格.■

例 2.24. 考虑带有通常序和并的全体自然数 $\mathbb{W} = \{0, 1, 2, \cdots\}$，其中 $x \vee y = \max\{x, y\}$. 那么 $(\mathbb{W}, \max; 0)$ 是一个底元为 0 且没有最大元的有界并半格。它的序理想恰好是

$$\mathrm{Idl}(\mathbb{W}) = \{\mathbb{W}\} \cup \{0, 1, \ldots, n\} \mid n \in \mathbb{W}\}.$$

主理想嵌入为

$$n \longmapsto (\downarrow n] = \{0, 1, \cdots, n\}$$

并且显然保持 0 和二元并，因为 $(\downarrow \max\{m, n\}] = (\downarrow m] \vee (\downarrow n]$. $\mathrm{Idl}(\mathbb{W})$ 的最大元是 $\mathbb{W}$，它不是主理想；相应地，$\mathbb{W}$ 自身没有最大元。因此，引理 2.23 给出了一个保持已有底元的嵌入，并未声称保持一个并不存在的最大元。■

mod-S-join

定理 2.25。 设 $(L \vee)$ 为一个并半格，并固定 $c \in L$。以下命题等价：

1. $\mathfrak{K}(D^c_\vee(L))$ 是模格；*2.* 理想格 (U_c) 是模格；*3.* U_c 是模并半格。

证明。 等价性（$1 \Longleftrightarrow 2$）由格同构（13）推出。等价性（$2 \Longleftrightarrow 3$）对任意并半格成立，正如 [Ruz2017，第 282–283] 页所述（关于交半格对偶情形的证明可见 [Cor1974]）。■

dist-S-join

T定理 2.26。 设 $(L \vee)$ 为一个并半格，并固定 $c \in L$。以下命题等价 *nt:*

1. $\mathfrak{K}(D^c_\vee(L))$ 是一个分配格；

2. 理想格（U_c）是一个分配格；

3. U_c 是一个分配并半格。

证明。 等价性 (1 $\Longleftrightarrow$ 2) 由格同构 (13) 得出。等价性 (2 $\Longleftrightarrow$ 3) 是关于并半格的一个经典事实（例如 [Gra1998，引理 II，5.1]）。■

1-hash

定理 2.27。 设 $(L\ \vee, 0)$ 是一个有界并半格。

1. 如果 L 有一个并不可约顶元 $1 \neq 0$，那么

(a) $\mathfrak{K}(S_\vee(L))$是一个模格 $\Longleftrightarrow L$ 是一个模并半格。*(b)* $\mathfrak{K}(S_\vee(L))$是一个分配格 $\Longleftrightarrow L$ 是一个模并半格。

2. 如果 L 没有并不可约顶元，并且我们将 $1^\sharp \notin L$ 添入其中，那么令 $L^\sharp := L \cup \{1^\sharp\}$，我们有

(a) $\mathfrak{K}(S_\vee(L^\sharp))$ 是模格 $\Longleftrightarrow L^\sharp$ 是模并半格 $\Longleftrightarrow L$ 是模并半格。*(b)* $\mathfrak{K}(S_\vee(L^\sharp))$ 是分配格 $\Longleftrightarrow L^\sharp$ 是分配并半格 $\Longleftrightarrow L$ 是分配并半格。

证明。 设 $(L\ \vee, 0)$ 是一个有界并半格。

1. 该结论由格的典范同构 (15) 得出。

2. 显然，L 是模（分配）并半格，当且仅当 $L^\sharp$ 是模（分配）并半格。该结论由定理 2.25、定理 2.26 以及以下事实得出：

$$\mathfrak{K}(S_\vee(L)) \cong \mathrm{Idl}(L^\sharp) = \mathrm{Idl}(L) \cup \{L^\sharp\}.\blacksquare$$

遗传的

推论 2.28. 设$(L\ \vee)$ 是一个并半格，并固定 $c \in L$。若 L 是模的（分配的），则 $\mathfrak{K}(D^c_\vee(L))$是模的（分配的）。

证明. 根据命题 3.7，上锥U_c 继承了L的模性（分配性）。 现在对并半格U_c.■应用定理 2.25（定理 2.26），即可得到结论

推论 2.28 的逆命题不成立：

例 2.29。 考虑最小非模格 N_5，并令t 为其最大元。则$U_t = \{t\}$，因此 $\mathfrak{K}(D^t_\vee(N_5))$ $= \{N_5\} \cong$ 理想格$_t(N_5)$ 是单元素格，它显然是模的（分配的）。■

格 $\mathfrak{R}(S)$是非模的

定理 2.25 给出了反驳**错误断言** 的反例族：任意交换半环的减性理想格都是模的。首先，取任意一个带有并不可约顶元的非模有界并半格（$L\ \vee_L,\ 0_L$）（带有交不可约最小元的非模有界交半格（$M\ \wedge_M,\ \top_M$）），然后构造相应的加法幂等半环 $S_\vee(L)$（$S_\wedge(M)$）。于是，减性理想的格 $\mathfrak{R}(S_\vee(L))$（$\mathfrak{R}(S_\wedge(M)$）是非模的。

半环的所谓减法理想 （也称为k-理想）由 Henriksen [Hen1958] 引入，事实证明它们在研究真半环时非常有用。然而，Henriksen 宣称（但未给出证明），任意交换半环所有减法理想构成的格 $\mathfrak{R}(S)$ 是模格。这一**错误论断** 在 [GD2024 的命题 2 中再次出现，6] 其中引用了 [Gol1999 的命题 6，38] 以及 [SGBS 第 3] [SA1992 的定理 24]。值得一提的是，被引用的结果本身是正确的，但证明时采用了特殊背景： [Gol1999 的命题 638]针对的是减性半环，而 [SA1992 的定理 24]则针对加法可逆半环上全体减法理想构成的子格。

虽然定理 2.25 为我们提供了一个针对这一错误断言构造反例的工具，但下面我们将给出半格诱导半环 $S_\vee(L)$ 的具体例子，使得$\mathfrak{R}(S_\vee(L))$是非模的。我们将直接说明其减理想格的非模性，而不援引定理 2.25。

下面的例子表明，即使 L 是一个格， $\mathfrak{R}(S_\vee(L))$仍然是非模的（如果L 是非模的）。

N5+1 例 2.30。 设$N_5 = \{e、a、b、c、t\}$为五边形格，其中

$$e < a < c < t, \qquad e < b < t,\ a \parallel b \text{ and } c \parallel b.$$

其交与并特别满足：

$$a \wedge b = e, \quad c \wedge b = e, \quad a \vee b = t, \quad b \vee c = t.$$

令 $\mathrm{L} := \mathrm{N}_5 \sqcup \{1^\sharp\}$，其中 $1^\sharp$ 是一个新的最大元，严格高于 N_5中的每个元素。L 的最小元是 e（原有的最小元）。因此，$(\mathrm{L}\ \wedge_L, \vee_L, \mathrm{e}\ 1^\sharp)$ 是一个以 e 为底元、以 $1^\sharp$为最大元的有界格。此外，最大元 $1^\sharp$ 是并不可约的：若 $\mathrm{x}, \mathrm{y} < 1^\sharp$，则 $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathrm{N}_5$,且 $\mathrm{x} \vee_L \mathrm{y} \leq \mathrm{t} < 1^\sharp$。因此，$\mathrm{x} \vee_L \mathrm{y} = 1^\sharp$会推出 $\mathrm{x} = 1^\sharp$或 $\mathrm{y} = 1^\sharp$。根据命题 2.4，代数 $\mathrm{S}_\vee(\mathrm{L})$ 是交换加法幂等半环。

除了上述论证外，还可以直接通过以下

加法表和乘法表

$+$	e	a	b	c	t	$1^\sharp$
e	e	a	b	c	t	$1^\sharp$
a	a	a	t	c	t	$1^\sharp$
b	b	t	b	t	t	$1^\sharp$
c	c	c	t	c	t	$1^\sharp$
t	t	t	t	t	t	$1^\sharp$
$1^\sharp$	$1^\sharp$	$1^\sharp$	$1^\sharp$	$1^\sharp$	$1^\sharp$	$1^\sharp$

$\cdot_\vee$	e	a	b	c	t	$1^\sharp$
e	e	e	e	e	e	e
a	e	e	e	e	e	a
b	e	e	e	e	e	b
c	e	e	e	e	e	c
t	e	e	e	e	e	t
$1^\sharp$	e	a	b	c	t	$1^\sharp$

这是一个交换半环：$S_\vee(L) := (S_\vee(N_5 \sqcup \{1^\sharp\});\ \vee, e;\ \cdot_\vee, 1^\sharp)$。

断言： $\mathfrak{K}(S_\vee(L)) = \{O, A, B, C, N_5, L\}$，其中

$$O := \{e\}, \qquad A := \{e, a\}, \qquad B := \{e, b\}, \qquad C := \{e, a, c\}.$$

在直接证明这一点之前，我们注意到这与命题 2.15 (3) 一致（该命题指出，减法理想恰好是L的序理想）。

首先，我们注意到列出的每个集合确实都是减性理想。直接观察可知，集合O,A,B,C都向下封闭且对并封闭。此外，$N_5 = (\downarrow t]$ 由t 生成的主理想，以及$L = (\downarrow 1^\sharp]$整个格；二者也都向下封闭且对并封闭。

其次，我们验证这个列表是完备的。设 I 是 $S_\vee$(L) 的减性理想。若$1^\sharp \in$ I，则 I $=S_\vee$(L)，因为对每个 x $\in S_\vee$(L)，都有 x $=$ x $\cdot_\vee 1^\sharp \in$ I。若 I 是真减法理想且 t $\in$I，则 I $=$N$_5$：若 y $\in$ N$_5$,，则 y $+$t $=$y $\vee$t $=$t $\in$I，因此 y$\in$I $=$I。接下来假设 t $\notin$I。那么 I 不可能同时包含 a 和 b：否则，t $=$a$\vee_L$b $\in$I。若 b,t $\notin$I 且 c $\in$I，则 a $+$c $=$c $\in$I，因此 a $\in$I $=$I，从而 I $=$C。若 c $\notin$I，则仅有 O、A 和 B 这几种可能。因此，所列出的列表是完备的。

包含序为

$$O < A < C < N_5 < L,\ O < B < N_5 < L,\ B \parallel A,\ B \parallel C.$$

特别地，我们有

$$A \cap B = O, \qquad B \cap C = O, \qquad A \cap C = A.$$

现在计算A与B的调整并。它们的普通理想和为

$$A + B = \{x + y \mid x \in A,\ y \in B\} = \{e, a, b, t\},$$

因此，$A + B$不是可减的：$c + t = t \in A + B$，由此$c \in \overline{A + B}$，但$c \notin A + B$。直接计算可得$A + B = N_5$（这与应用命题 2.15 (2) 的结果一致）。

注意，$A \subseteq C$，但是

$$\begin{aligned} (A \vee_{\mathfrak{K}} B) \wedge_{\mathfrak{K}} C &= \overline{A + B} \cap C = N_5 \cap C = C; \\ A \vee_{\mathfrak{K}} (B \wedge_{\mathfrak{K}} C) &= A \vee_{\mathfrak{K}} O = A \neq C. \end{aligned}$$

因此，这直接违背了模模恒等式。所以， $\mathfrak{K}(S_\vee(L))$ 是非模的。这与定理 2.25 一致，因为L 是非模的（由于L 包含N_5 作为子格，L 根据引理 1.16 是非模的）。■

6-极小

注 2.31. 设 $(L\ \vee,0)$ 是一个有界并半格，且顶元为并不可约元$1\neq 0$. 若 $|L|\leq 5,$则 $T:=L\backslash\{1\}$ 是一个有界并半格，并且 $\mathrm{Idl}(L)\ =\mathrm{Idl}(T)\cup\{L\}$作为偏序集。注意， $|T|\leq 4.$

情形 I： $T\ =B_2$ (即 四元布尔格)，即

$$B_2: e\leq a\leq t,\qquad e\leq b\leq t,\qquad a\parallel b.$$

在这种情形下，我们有

$$\mathrm{Idl}(B_2):\{e\}<\{e,a\},\{e,b\}<B_2,$$

它与布尔格B_2.同构

情形 II： T 是一条链，因此 $\mathrm{Idl}(T)$ 是一条链。

在这两种情况下，根据引理 1.18，添加新的顶元 L 即可得到一个模格（甚至是分配格）。因此，如果 $|L|\leq 5,$ 那么

$$\mathfrak{K}(S_\vee(L))\overset{\text{Corollary 2.17}}{\cong}\mathrm{Idl}(L)=\mathrm{Idl}(T)\cup\{L\}$$

对于任意具有并不可约顶元 $1\neq 0.$ 的有界并半格（$L\ \vee,\ 0$），它都是模的（甚至是分配的）。例 2.30 给出了一个六元并半格 $L:=N_5\cup\{\mathbf{1}\}$，其具有并不可约元 $\mathbf{1}\neq 0$，满足 $\mathfrak{K}$（$S_\vee$（L））是非模的，并且它在这一族中具有最小大小。■

半格诱导的半环的简单性

在下文中，我们研究由半格诱导的半环何时是理想单、k-理想单以及同余单的。

2.32. 设（$L\ \vee$）为一个并半格。若 $\equiv$ 是 $\mathbf{L}$ 上的一个**并半格同余**，则称其为L上的并半格同余，当且仅当 $\equiv$ 是一个与 $\vee$ 兼容的等价关系，即对于所有$x\in L,\ a\equiv b\Longrightarrow$（$a\vee x$）$\equiv$（$b\vee x$）。我们用 Cong（L）表示L上所有并半格同余的集合。若 Cong（L）$\ =\{\Delta_L,\nabla_L\}.$，则称$L$ 为一个**同余简单并半格**

chain-cc

注记 2.33。 若$L=C_n: a_1<a_2<\cdots<a_n$是含有$n$个元素的有限链，则|同余格$(L)|=2^{n-1}.$ 因此，C_2 是唯一的同余单链。

join-congr

定理 2.34。 设$(L\ \vee)$ 是一个并半格。

1. 固定 $c\in L$。则 同余格$(D_\vee^c(L))=$同余格(L)。

2. 如果$(L\ \vee,\ 0)$ 是一个有界并半格，那么同余格$(H_\vee(L))\ =$同余格(L)。

3. 如果$(L\ \vee,\ 0)$是一个具有并不可约顶元 $1\neq 0$ 的有界并半格，那么

$$\mathrm{Cong}(S_{\vee}(L))=\{\theta\in\mathrm{Cong}(L)\mid [1]_{\theta}=\{1\}\}\cup\{\nabla_L\}.$$

证明。 设 $(L\ \vee)$ 是一个并半格。

1. 取 $c\ \in L$。 与 L 的底层并运算相容，恰好等价于与 $D^{c}_{\vee}(L)$ 的加法相容。与常值乘法相容是自动成立的。

2. 选取 $c\ =0$ 并应用 (1)。

3. 设 $(L\ \vee,0)$ 是一个有界并半格，且具有并不可约顶元 $1\neq 0$.

令 $\equiv\in\mathrm{Cong}(L)$ 满足 $[1]_{\equiv}=\{1\}$. 假设对于 $x,y\in L$，有 $x\equiv y$，并令 $z\in L$。若 $z=1$，则

$$x\cdot_{\vee}z=x\cdot_{\vee}1\equiv x\equiv y=y\cdot_{\vee}1=y\cdot_{\vee}z.$$

若 $z\neq 1$，则有以下几种情况：

- $x=y=1$. 在这种情况下，$x\cdot_{\vee}z=z=y\cdot_{\vee}z$。
- $x\neq 1,\ y\neq 1$. 在这种情况下，$x\cdot_{\vee}z=0=y\cdot_{\vee}z$。

其余情况（其中x，y 恰有一个为 1）将与该假设矛盾$[1]_{\equiv}=\{1\}$. 因此 $\equiv\in$同余格$(S_{\vee}(L))$。

反之，设 $\theta\in$ 同余格$(S_{\vee}(L))$。 假设 $1\theta a$ 对某个 $a\ \neq 1$. 成立。我们有以下几种情况：

- $a=0$. 在这种情况下，$(b\cdot_{\vee}1)\theta(b\cdot_{\vee}0)$，因此 $b\theta 0$ 对所有$b\in L$，均成立，也就是说 $\theta=L\times L$。
- $0<a<1$. 在这种情况下，将 $1\theta a$ 乘以 a，得到 $(a\cdot_{\vee}1)\theta(a\cdot_{\vee}a)$，也就是说 $a\theta 0$，因此$1\theta 0$. 同前一种情况一样，这迫使 $\theta=L\times L$。

因此，每个非全同半环同余都有并单位余生成元

并单位余生成元

推论 2.35。 设 $(L\ \vee,0)$ 是一个有界并半格，$L^{\sharp}:=L\sqcup\{1^{\sharp}\}$ 其中 $1^{\sharp}$ 是一个新添加的最大元 $1^{\sharp}$，并且对任意 $\theta\in$同余格(L)，令 $\theta^{\sharp}:=\theta\cup\{(1^{\sharp},1^{\sharp})\}$。则

$$\mathrm{Cong}(S_{\vee}(L^{\sharp}))=\{\theta^{\sharp}:\theta\in\mathrm{Cong}(L)\}\cup\{L^{\sharp}\times L^{\sharp}\}.\tag{18}$$

并单位化

推论 2.35 所表达的是，$\mathrm{Cong}(L)$自然嵌入$\mathrm{Cong}(S_{\vee}(L^{\sharp}))$ 中，成为保持添加的顶元 $1^{\sharp}$ 彼此分离的那些同余，而 $\mathrm{Cong}(S_{\vee}(L^{\sharp}))$ 则是在该嵌入副本上添加一个新的最大同余得到的。

并单纯性

定理 2.36. 设$(L\ \vee)$ 是一个并半格，并固定 $c\ \in L$。

1. $D^{c}_{\vee}$（L）当且仅当（$L\ \vee$）是同余单的。

2. $D^c_\vee$（L）当且仅当 $|L|=2$.是理想单的。

3. $D^c_\vee(L)$是 k-理想单的，当且仅当

$$|U_c|=1 \quad or \quad |U_c|=2 \textit{ and } c \textit{ is } \text{minimal } \textit{in } L.$$

证明。 设 $(L\ \vee)$ 是一个并半格，并固定 $c\in L$。

1. 由定理 2.34 中的等式 $\mathrm{Cong}(D^c_\vee(L))=\mathrm{Cong}(L)$ 可得。

2. ($\Longrightarrow$) 假设 $D^c_\vee(L)$ 是理想单的。设 $|L|\geq 3$，并取 $x\neq c$。若$c\vee x\in\{c,x\}$，则 $\{c,x\}$ 是一个真理想。否则，$\{c,c\vee x\}$ 是一个真理想。无论哪种情况，都存在一个大小至少为二的真理想，因此 $D^c_\vee(L)$ 不是 理想单的，这与假设矛盾。

($\Longleftarrow$) 假设 $|L|=2$. 。$D^c_\vee(L)$ 的唯一理想是 $\{c\}$ 和 L, 因此该半环是理想单的。

3. 应用定理 2.15。若 $|\mathrm{U}_c|=1$，则 U_c 的序理想格仅有一个元素，因此 $\mathrm{D}^c_\vee(\mathrm{L})$ 是唯一的 k-理想。若 $|\mathrm{U}_c|=2$，该格恰有两个元素，而 $\mathrm{D}^c_\vee(\mathrm{L})$ 唯一的真减法理想是 $(\downarrow \mathrm{c}]$，其大小恰在 c 是 L 的极小元时为一。若 $|\mathrm{U}_c|\geq 3$，取 $\mathrm{u}\in\mathrm{U}_c$，使得 $\mathrm{c}<\mathrm{u}$ 且 u 不是 U_c· 中的最大元。于是 $(\downarrow \mathrm{u}]$ 是一个包含 $\{\mathrm{c},\mathrm{u}\}$ 的真减法理想，因此 $|(\downarrow \mathrm{u}]|\geq 2$，这与 $\mathrm{D}^c_\vee(\mathrm{L})$ 的 k-理想单性矛盾。关于交的断言由对偶性得出。■

cc-k-单

引理 2.37. 设 $(S\ +,\cdot)$是一个半环。若 S 是同余单的，则 S 是 k-理想单的。

证明。 设 S 是一个同余单半环。设 I 是 S 的任意真 k-理想，且 $|I|\geq 2$.由 $x\equiv_I y \iff x+a=y+b$（其中 $a,b\in I$）定义的 Bourne 关系构成一个有效的半环同余。由于 S 是同余单的，同余关系 $\equiv_I$ 必定是平凡 同余 Δ_S 或全 同余 ∇_S。

情形 I: $\equiv_I=\Delta_S$. 取 $a,b\in I$ 使得 $a\neq b$。显然，$a\equiv_I b$，矛盾。

情形 II。 $\equiv_I=\nabla_S$。取任意 $x\in I$。对于任意 $y\in S$，有 $x\equiv_I y$，即存在 $a,b\in I$使得 $y+a=x+b\in I$。由于 I是一个 k-理想，因此 $y\in I$。于是，$I=S$.■

Uc-3

注记 2.38. 设 $(\mathrm{L}\ \vee)$ 为并半格。若 $\mathrm{c}\in\mathrm{L}$ 满足 $|\mathrm{U}_c|\geq 3$，则 U_c包含一个三元素链 C_3.。任取 U_c 中两个不同的元素 x、y∈，使得 $\mathrm{c}<\mathrm{x},\mathrm{y}$。若 x、y 可比较，不妨设 $\mathrm{x}<\mathrm{y}$，则 $\mathrm{c}<\mathrm{x}<\mathrm{y}$。若 $\mathrm{x}\parallel\mathrm{y}$，则 $\mathrm{c}<\mathrm{x}<\mathrm{x}\vee\mathrm{y}$.■

H-CC-素元

定理 2.39. 设 $(L\ \vee,0)$ 为有界并半格。那么

$$\mathrm{Cong}(H_\vee(L))=\mathrm{Cong}((L,\vee,0)) \tag{19}$$

CH=CL-并

且以下各项等价:

1. $H_\vee(L)$是理想单；*2.* $H_\vee($
$L)$是同余单；*3.* $H_\vee(L)$是 k-理
想单；*4.* $L \cong C_2$;；*5.* $H_\vee(L)$
$\cong \mathfrak{B}$.

证明。 由于乘法是常值的，因此与加法相容的每个同余都自动与乘法相容。这证明了关于同余格的断言。设 $(L\ \vee,0)$ 是一个有界并半格。

$(2 \Longrightarrow 3)$ 任何同余单半环都是k-理想单的（参见引理 2.37）。

$(3 \Longrightarrow 4)$ 假设 $|L| \geq 3$. 根据注记 2.38，L 包含一个三元素链C_3： $0 < a < b$。 理想 $(\downarrow a]$ 显然是$H_\vee(L)$ 的一个非零真减法理想，这就产生矛盾。因此，$L \cong C_2$.

$(4 \Longrightarrow 5)$ 根据$H_\vee(C_2)$ 的定义，其加法表和乘法表为，因此$H_\vee(C_2) \cong \mathfrak{B}$.

$(5 \Longrightarrow 2)$ 和 $(5 \Longrightarrow 1 \Longrightarrow 3)$ 显然成立。■

下面的例说明，(19) 不适用于由半格诱导的半环。

三元素链

例 2.40。 考虑链C_3： $x < y < z$。 那么

$$\mathrm{Cong}(C_3) = \{\Delta, \{\{x,y\},\{z\}\}, \{\{x\},\{y,z\}\}, \nabla\}.$$

唯一的另一个等价关系 $\tau := \{\{\mathrm{x},\mathrm{z}\},\{\mathrm{y}\}\}$ 不是同余，因为 $\mathrm{x} \sim \mathrm{z} \Longrightarrow \mathrm{x} \vee \mathrm{y} \sim \mathrm{z} \vee \mathrm{y}$，从而 $\mathrm{y} \sim \mathrm{z}$。另一方面，$\mathrm{x} \sim \mathrm{z} \Longrightarrow \mathrm{x} \wedge \mathrm{y} \sim \mathrm{z} \wedge \mathrm{y}$，从而 $\mathrm{x} \sim \mathrm{y}$。任一关系与 $\mathrm{x} \sim \mathrm{z}$ 一起都迫使 $\tau = \nabla$.

对于并构造，令 L： $0 < a < 1$. 它的四个半格同余为

$$id_L, \quad \theta_{0a} := \{\{0,a\},\{1\}\}, \quad \theta_{a1} := \{\{0\},\{a,1\}\}, \quad \nabla_L.$$

对于 $S_\vee(L)$，加法表和乘法表为

$\vee$	0	a	1
0	0	a	1
a	a	a	1
1	1	1	1

$\cdot_\vee$	0	a	1
0	0	0	0
a	0	0	a
1	0	a	1

.

同余 θ_{0a}是相容的，因为其非单元素集类 $\{0,a\}$ 不包含例外元素 1，且小于 1 的任意两个元素的乘积都是 0。另一个非平凡半格同余则不相容：尽管 $a\theta_{a1}1$，我们有

$$a \cdot_\vee a = 0 \qquad \text{whereas} \qquad 1 \cdot_\vee a = a,$$

以及 $(0,a)\notin\theta_a 1$。因此，$\mathsf{Cong}(S_\vee(L))=\{id_L,\theta_{0a}\ \nabla_L\}$，所以 $|\mathsf{Cong}(S_\vee(L))|=3<4=|\mathsf{Cong}(L)|$.

对于交构造，令 M： $\bot<a<\top$，并使用 $0:=\top$ 和 $1:=\bot$。其半格同余为 id_M、$\theta_{\bot a}=\{\{\bot,a\},\ \{\top\}\}$、$\theta_{a\top}=\{\{\bot\},\{a\ \top\}\}$以及 ∇_M。对于$S_\wedge(M)$，加法表和乘法表为

$\wedge$	$\bot$	a	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
a	$\bot$	a	a
$\top$	$\bot$	a	$\top$

$\cdot_\wedge$	$\bot$	a	$\top$
$\bot$	$\bot$	a	$\top$
a	a	$\top$	$\top$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$

.

这里 $\theta_{a\top}$ 具有相容性，因为乘法单位元 $\bot$ 是一个单元素集类。同余 $\theta_{\bot a}$ 不具备相容性:

$$\bot\cdot_\wedge a=a\qquad\text{whereas}\qquad a\cdot_\wedge a=\top,$$

以及 $(a\ \top)\notin\theta_{\bot a}$。因此 $\mathsf{Cong}(S_\wedge(M))=\{id_M,\ \theta_{a\top},\ \nabla_M\}$从而 $|\mathsf{Cong}(S_\wedge(M))|=3<4=|\mathsf{Cong}(M)|$.

在这两种情况下，半环同余都是将乘法单位元单独分离出来的半格同余，再加上全同余。■

∨-c-单

定理 2.41。 设 $(L\ \vee 0)$是一个带有并不可约顶元的有界并半格 $1\neq 0$. 以下命题等价:

1. $S_\vee(L)$是理想单的；*2.* $S_\vee(L)$是同余单的；*3.* $S_\vee(L)$是k-理想单的；*4.* $L\cong C_2$；*5.* $S_\vee(L)\cong\mathbb{B}$.

证明。 $(2\Longrightarrow 3)$ 对于同余单半环，这是一个众所周知的事实（参见 [KNT2011，命题 4.4]）。

$(3\Longrightarrow 4)$ 假设 $S_\vee(L)$ 是 k-理想单的。设 $|L|\geq 3$ 并取 $a\in L$使得 $0<a<1$. 根据推论 2.16，主理想 $(\downarrow a]$ 是一个非零真减法理想，矛盾。因此，$L=\{0,1\}\cong C_2$.

$(4\Longrightarrow 5)$ 根据定义，$S_\vee(C_2)$ 的加法和乘法表为

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\cdot_\vee$	0	1
0	0	0
1	0	1

因此 $S_\vee(C_2)\cong\mathbb{B}$.

$(5\Longrightarrow 2)$ and $(5\Longrightarrow 1\Longrightarrow 3)$ are obvious.■

下面的例子表明，由具有并不可约顶元的有界并半格诱导的半环的同余单性、理想单性和k-理想单性 2.41 之间的等价性，并不适用于由任意并半格诱导的半环。

simple-3

例 2.42. 考虑链$C_3: x < y < z$，并选取$c = z$。

1. $S^z_\vee(C_3)$ 不是 同余单。事实上，它的四个同余构成布尔格B_2：

$$\Delta, \quad \{\{x,y\},\{z\}\}, \quad \{\{x\},\{y,z\}\}, \quad \nabla.$$

2. 每个包含z 的子集都是理想，即

$$\mathfrak{I}(S^z_\vee(C_3)) = \{\{z\},\{x,z\},\{y,z\},\{x,y,z\}\}.$$

由于 $|\{x,z\}| = 2$, 可知$S^z_\vee(C_3)$ 不是 理想单。

3. 由于z 是最大元，这些理想的减法闭包均为C_3,，因此 $\mathfrak{K}(S^z_\vee(C_3)) = \{C_3\}$，且$S^z_\vee(C_3)$ 是k-理想单。■

3 由半格诱导的 Kuratowski 与核半环

受 [Nas], 中引入的*Kuratowski* 映射 和核映射 概念启发，我们提出以下两类半环。

定义 3.1. 称半环S 是**Kuratowski**的，当且仅当对于S的任意理想I,J，都有$\overline{I+J} = \overline{I} + \overline{J}$；称其为**核** 的，当且仅当对于$S$的任意理想$I,J$，都有$\overline{I} \cap J = I \cap J$。

注 3.2. 设（S $+,\cdot$）是一个半环。

1. 对于S的任意理想I,J，有$\overline{I} + J \subseteq \overline{I} + \overline{J}$且$\overline{I \cap J} \subseteq \overline{I} \cap \overline{J}$。

2. 等式$\overline{I} + J = \overline{I} + \overline{J}$可能对$\overline{I} = S = J$就不成立（当$S$ 不是前半环时）。考虑半环 $S = 2\mathbb{N} = \{2,4,6,\cdots\}$，其加法和乘法取通常定义。于是

$$\overline{S} + \overline{S} = S + S = \{4,6,\cdots\} \subsetneq S = \overline{\{4,6,\cdots\}} = \overline{S+S}.$$

j-K-分配

定理 3.3。 设$(L \vee)$ 是一个并半格。

1. 固定 $c \in L$。若 L 是分配的，则 $D^c_\vee(L)$ 是一个 *Kuratowski* 半环。

2. 如果 $(L \vee,0)$ 是有界的，则

$$H_\vee(L) \textit{ is Kuratowski hemiring} \iff L \textit{ is a distributive join-semilattice.}$$

3. 如果 $(L\ \vee, 0)$ 是有界的，且具有并不可约最大元 $1 \neq 0$，则以下各项等价：

(a) $H_{\vee}(L)$是 *Kuratowski* 半幺环；
(b) $S_{\vee}(L)$是 *Kuratowski* 半环；
(c) L 是分配并半格。

证明。 设 I,J 是 $S_{\vee}(L)$. 我们有

$$\overline{I+J} = \{z \in L : z \leq i \vee j \text{ for some } i \in I,\ j \in J\},$$

而

$$\bar{I}+\bar{J} = \{x \vee y : x \leq i,\ y \leq j \text{ for some } i \in I,\ j \in J\}.$$

包含关系 $I+\bar{J} \subseteq \overline{I+J}$总是成立。

1. 固定 c $\in$L。假设 L 是分配并半格。若 z $\in$I +J，则对某些 i $\in\overline{\text{I 和}}$j $\in$ J，有 z $\leq$ i $\vee$j。由于 L 是分配的，存在 x $\leq$i 和 y $\leq$ j，使得 z $=$x $\vee$y。由命题 2.15 (2)，我们有 x$\in$I 且 y $\in$J，因此 z $=$x $\vee$y $\in$I +J。因此，$D^c_{\vee}$(L) 是 Kuratowski 半环。

2. 设 (L $\vee$, 0) 是有界并半格。假设 $H_{\vee}$(L) 是 Kuratowski 半幺环。设 a、b、z $\in$L 满足 z $\leq$a $\vee$b。若 z $\leq$a（或 z $\leq$b），则写作 z $=$z $\vee$0(z $=0\vee$z)。因此，假设 z $\leq$a 且 z $\leq$b 均不成立（即 a 和 b 都不是 L 中的最大元）。考虑理想 I $=\{0,$a$\}$、J $=\{0,$b$\}$，并注意到 I $+$J $=\{0,$a、b、a $\vee$b$\}$.。由于 $H_{\vee}$(L) 是 Kuratowski 半幺环，我们有

$$\overline{I+J} = \bar{I}+\bar{J} = (\downarrow I]+(\downarrow J]$$

因此，对于某个 $z = x \vee y$，有$x \leq a$且$y \leq b$。因此L是分配的。

3. (2) 中的相同论证可应用于半环情形，从而证明：L 是分配的 $\Longleftrightarrow$ $S_{\vee}(L)$ 是 Kuratowski 半环。■

m-lattcice-dist **推论 3.4**。 设$(L\ \wedge, \vee)$是一个有界格。

1. 固定 $c \in L$。若 L 是分配的，则 $D^c_{\vee}(L)$ 和 $D^c_{\wedge}(L)$ 是 *Kuratowski* 减法幺半环；

2. 假设$(L\ \wedge, \vee, 0, 1)$是一个有界格。那么以下条件等价：

(a) $H_{\vee}(L)$是 *Kuratowski* 半幺环；
(b) $H_{\wedge}(L)$是 *Kuratowski* 半幺环；
(c) L 是分配格。

3. 假设 $(L\ \wedge,\vee,0,1)$ 是一个有界格，其中 1 是并不可约的，且 0 是交不可约的。那么以下各项等价：

(a) $S_\vee(L)$ 是 *Kuratowski* 半环；
(b) $S_\wedge(L)$ 是 *Kuratowski* 半环；
(c) L 是分配格。

证明。 由定理 3.3 可得，相关同构

$$D^c_\wedge(L)\cong D^c_{\wedge^{\mathrm{op}}}(L^{\mathrm{op}}),\quad H_\wedge(L)\cong H_{\wedge^{\mathrm{op}}}(L^{\mathrm{op}}),\quad S_\wedge(L)\cong S_{\wedge^{\mathrm{op}}}(L^{\mathrm{op}}),$$

来自命题 2.18；再由格L 是分配格当且仅当其对偶格L^{op} 是分配格这一事实可得 [Gra2010，推论 62].■

下面的例子表明，定理 3.3 (1) 的逆命题对任意$c\in L$ 并 不成立：

N$_5$-not-Kurat

例 3.5。令 L $=$ N$_5$, ，取 c $=$t（N$_5$的最大元），并考虑半环 D$^c_\vee$(N$_5$)。D$^c_\vee$(N$_5$) 的每个理想都包含 t，因此任意理想的减法闭包都是 L。若 I、J 是 D$^c_\vee$(N$_5$) 的理想，则 I $+$J $=$L $=$L $+$L $=$I $+$J。因此，D$^c_\vee$(N$_5$) 是 Kuratowski 半环。然而，N$_5$ 是非分配的（事实上是非模的）。■

模格（分配格）的子格仍然是模的（分配的）。这些事实并不适用于并半格。

例 3.6。 考虑按包含关系排序的八元布尔格$B_3=\mathscr{P}(\{1,2,3\})$，其中并运算为并集，交运算为交集。那么$B_3$ 是分配格（也是模格）。令

$$p=\{1,2\},\qquad q=\{1,3\},\qquad r=\{2,3\},\qquad \top=\{1,2,3\}.$$

那么$L:=\{p,q,r\ \top\}\subseteq B_3$ 在并运算下封闭，即L是分配格B_3的子并半格。

断言 I： L是非模的。取$a=b=p$ 以及$z=q$。那么$p\le p\le p\vee q=\top$. 但是L 中唯一小于q 的元素是q，并且$p\vee q=\top\neq p$。因此，L中不存在模性见证。

断言 II： L是非分配的。注意$p\le q\vee r=\top$.L中小于q 的唯一元素是q，而L 中小于r 的唯一元素是r。因此，不存在$u,v\in L$ 满足$u\le q$、$v\le r$，且$p=u\vee v$，因为$q\vee r=\top\neq p$.■

虽然并半格的模性（分配性）不一定会被任意子并半格继承，但上锥U_c 是一个特例。

Uc-遗传

命题 3.7. 设$(L\ \vee)$ 是一个并半格，并固定 $c\in L$。

1. 如果 L 是模并半格，那么U_c 是模的。

2. 如果 L 是分配并半格，那么 U_c 是分配的。

证明。 考虑上锥$U_c := [c \uparrow)$。

1. 设 a,b, z $\in U_c$ 满足 a $\leq$b $\leq$a $\vee$z。由 L 的模性，存在 d $\in$L，使得 d $\leq$z 且 b $=$a $\vee$ d。若 d $\in U_c$，则证毕。若 d $\notin U_c$，令 d′:=c $\vee$d $\in U_c$·。由于 d $\leq$z 且 c $\leq$z，我们有 d′ $\leq$ z。又由于 c $\leq$ a，我们有

$$a \vee d' = a \vee (c \vee d) = (a \vee c) \vee d = a \vee d = b.$$

因此，d' 是在U_c·内体现模性的一个见证

2. 设 x，y，$z \in U_c$ 满足 $x \leq y \vee z$。由L的分配性，存在 u，$v \in L$，使得

$$u \leq y, \qquad v \leq z, \qquad x = u \vee v.$$

若 u,v $\in U_c$，则证毕。否则，令 u′:=u $\vee$c $\in U_c$ 且 v′:=v $\vee$c $\in U_c$·。由于 c $\leq$y 且 c $\leq$ z，我们有 u′ $\leq$y 且 v′ $\leq$ z。最后，由于 c $\leq$ x，我们有

$$u' \vee v' = (u \vee c) \vee (v \vee c) = (u \vee v) \vee c = x \vee c = x.$$

因此，所需的分解发生在U_c之内。■

读者应注意，尽管模性和分配性是格的遗传性质（这可直接由引理 1.18 得出），但它们都不是并半格的遗传性质。正如上文所示，U_c 继承了L, 的模性（分配性），这是由U_c 作为主上集的结构所致，不能推广到连接格的任意子并半格。

例 3.8. 考虑按包含关系排序的八元布尔格$B_3 := \mathscr{P}(\{1,2,3\})$及其子并半格$T$ $= \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$.。显然，$B_3$是分配的（因而也是模的），而$T$ 甚至不是模的: 设$u = w = \{1,2\}$ 且$v = \{1,3\}$.。于是$u \leq w \leq u \vee v$, 但不存在$no\, y \in T$使得$y \leq v$且$w = u \vee y$.■

下面的例子说明，仅有U_c 的分配性不足以保证$D^c_\vee(L)$是定理 3.3 (1) 中的 Kuratowski 半环:

Uc-not-suff

例 3.9. 考虑由三个元素构成的并半格

$$V : p \parallel q,\ p \vee q = t,$$

并取$c = p$。 其并运算表和乘法表为

$\vee$	p	q	t
p	p	t	t
q	t	q	t
t	t	t	t

$\cdot_p$	p	q	t
p	p	p	p
q	p	p	p
t	p	p	p

.

上锥 $U_p = \{p,t\} \cong C_2$ 是一个链，因而是分配的，但 $D^p_\vee(V)$ 不是一个库拉托夫斯基半环。令 $I = \{p\}$ 和 $J = \{p,t\}$，并注意到 $I + J = J$。因此，我们有

$$\overline{I} + \overline{J} = I + V = \{p,t\} \subsetneq V = \overline{J} = \overline{I + J}.$$■

核半环

定理 3.10。 设 $(L\ \vee)$ 是一个并半格。

1. 固定 $c\ \in L$。那么，当且仅当 $|U_c| \leq 2.$ 时，$D^c_\vee$（L） 是核减法幺半环。*2.* 假设 （$L\ \vee$，0） 是有界并半格。那么，当且仅当 $|L| = 2.$ 时，$H_\vee$（L） 是核半环

证明。 设（$L\ \vee$）是一个并半格。

1. 固定 c $\in$L。（$\Longrightarrow$）假设 $D^c_\vee$(L) 是一个核减法幺半环，并设 $|U_c| \geq 3$.根据注记 2.38，U_c 包含一个三元素链 C_3 : c $<$ a $<$ b。令 I: $=\{$c，a$\}$，J: $=\{$c，b$\}$。于是 a$\in$I $\cap$J，而 a $\notin$I $\cap$J $=\{$c$\}=$（$\downarrow$c]. 因此，I $\cap$J $\subsetneq$I $\cap$J，矛盾。

($\Longleftarrow$) 假设 $|U_c| \leq 2.$

情形 I: $U_c = \{c\}.$ 在此情形下，c 是L的最大元，并且对于$D^c_\vee(L)$的每个理想I，$I = L$。显然，在此情形下，$D^c_\vee(L)$是核。

情形 II: $U_c = \{$c，u$\}$ 满足 c $<$ u。于是 u 是 L 的最大元。对于 $D^c_\vee$(L) 的任意理想 K，要么 K $\cap U_c = \{$c$\}$，从而 K $=(\downarrow$c], ；要么 I $\cap U_c = \{$c，u$\}$，从而 I $=$L。令I 和J 为$D^c_\vee(L)$的理想。

- $I \cap Uc = \{c,u\} = J \cap Uc.$ 在此情形下，我们有 $I \cap J = L = L \cap L = I \cap J$。
- $I \cap Uc = \{c,u\}$ 以及 $J \cap Uc = \{c\}.$ 在此情形下，$I \cap J = (\downarrow c] = L \cap (\downarrow c] = I \cap J$。
- $I \cap Uc = \{c\}$ 且 $J \cap Uc = \{c,u\}.$ 在此情形下，$I \cap J = (\downarrow c] = (\downarrow c] \cap L = I \cap J$。
- $I \cap Uc = \{c\} = J \cap Uc = \{c\}.$ 在此情形下，$I \cap J = (\downarrow c] = (\downarrow c] \cap (\downarrow c] = I \cap J$。

在所有子情形中，$I \cap J = I \cap J$，因此$D^c_\vee(L)$是核。

2. 选取$c = 0$ 并应用 (1)。■

并核距离

定理 3.11。 设$(L\ \vee)$ 是一个有界并半格，且具有一个并不可约顶元 $1 \neq 0$.以下条件等价:

1. $S_\vee$（L）是一个核半环；*2.* （$\downarrow a] \cap$（$\downarrow b$] $= \{0\}$ 对于所有不同的 a、$b\ \in L\backslash\{0,1\}$；*3.* | $L| = 2$ 或 $|L| = 3.$

证明。 $(1 \Longrightarrow 2)$ 假设 $S_\vee(L)$ 是一个核半环。对于互异的 a、$b\ \in L\backslash\{0,1\}$，对于理想 I: $= \{0,a\}$ 和 $J = \{0,b\}$，我们有:

$$(\downarrow a] \cap (\downarrow b] = I \cap J = \overline{I \cap J} = \overline{\{0\}} = \{0\}.$$

$(2 \Longrightarrow 3)$ 假设 $|L| \geq 4$. 令 a、$b \in L \backslash \{0,1\}$ 是 L中的互异元素。

情形 I： a与b可比较，不妨设$a \leq b$。在此情形下，$0 \neq a \in (\downarrow a] \cap (\downarrow b]$, 矛盾。

情形 II： $a \parallel b$。在此情形下，$c := a \vee b \notin \{a\ 1\}$（因为 1 是并不可约的），并且 $0 \neq a \in (\downarrow a] \cap (\downarrow c]$, 矛盾。

$(3 \Longrightarrow 1)$ 假设 $|L| \leq 3$. 则L 是一个链:

情形 I： $L = C_2$： $0 < 1$. 在此情形下，$S_\vee(L) \cong \mathbb{B}$ 显然是核。

情形 II： $L = C_3$： $0 < a < 1$对于某个$a \in L$。在此情形下，$\mathfrak{I}(S_\vee(L)) = \{\{0\}, \{0,a\}, L\} = \mathfrak{K}(S_\vee(L))$，即 $S_\vee(L)$ 是可减的，因此是核。■

在 [GD2024, 引理 2.1 (7)] 中有人声称，任意交换半环中理想的（任意）交集的减法闭包，等于这些理想的减法闭包的交集。定理 3.11 不仅为我们提供了无穷多个不满足这一声称的交换半环，还提供了一种构造具体反例的方法；与最近给出的反例 [SGBS, 注 2.6] 和 [Nas, 定理 3.6]) 相比，这显然是一大优势。

下面的例子表明，在保证 $|L| \leq 3$ 中的假设下，$S_\vee(L)$ 是核时，上界 3 是紧的。

C4-not-N

例 3.12. 考虑 4 元链

$$C_4 : 0 < a < b < 1$$

以及半环 $S_\vee(C_4)$. 考虑理想 $I := \{0,a\}$ 和 $J := \{0,b\}$，并注意到 $\overline{I} = I$，而 $\overline{J} = \{0,a,b\}$.。于是

$$\overline{I \cap J} = \overline{\{0\}} = \{0\} \neq \{0,a\} = \{0,a\} \cap \{0,a,b\} = \overline{I} \cap \overline{J}.$$

因此，$S_\vee(C_4)$并非核半环，这正如定理 3.11 所预测的那样。直接检验可知，$S_\vee(C_4)$是一个 Kuratowski 半环，这正如推论 3.4 所预测的那样（因为根据引理 1.18，Idl(L)是分配的）。

N5+1-无-KN

例 3.13。考虑例 2.30 中的半环 $S_\vee(N_5 \cup \{1^\sharp\})$以及理想$I = \{e、c\}$、$J = \{e、a\}$和$K = \{e、b\}$.。那么我们有

$$\begin{aligned} \overline{I \cap J} &= \overline{\{e\}} = \{e\} \subsetneq \{e,a\} = \{e,a,c\} \cap \{e,a\} = \overline{I} \cap \overline{J}; \\ \overline{J + K} &= \overline{\{e,a,b,t\}} = N_5 \supsetneq \{e,a,b,t\} = \{e,a\} + \{e,b\} = \overline{J} + \overline{K}. \end{aligned}$$

因此，$S_\vee(N_5 \cup \{1^\sharp\})$ 既不是 Kuratowski 半环，也不是核半环。■

4 诺特与阿廷性质

设 S 是一个交换半幺环。素理想 P $\subseteq$ S 是一个真理想 P $\subsetneq$ S，满足：对于任意 s,t $\in$ S，若 st $\in$P，则 s $\in$ P 或 t $\in$ P。我们用 Spec(S)（分别用 Spec$_k$(S)）表示 S 的素理想（分别为可减素理想）类。我们将半环 S 的克鲁尔维数 K. dim(S)（克鲁尔 k-维数 K. dim$_k$(S)）定义为 S 的素理想（可减素理想）链的长度的上确界。事实上，对于任意交换半幺环 S，都有 K.dim$_k$(S) $\leq$ K.dim(S)。

定义 4.1. 我们称交换半幺环 S

诺特 (阿廷) 当且仅当全体理想的集合 $\mathfrak{I}(S)$ 满足升链条件（降链条件）；**k-诺特 (k-阿廷)** 当且仅当全体减性理想的集合 $\mathfrak{R}(S)$ 满足升链条件（降链条件）。

素理想塌缩

定理 4.2. *1.* 设 $(L\ \vee, 0)$ 是一个有界并半格，其最大元 $1 \neq 0$. 为并不可约。则

$$\mathrm{Spec}(S_\vee(L)) = \mathrm{Spec}_k(S_\vee(L)) = \{L\backslash\{1_L\}\}.$$

特别地，我们有

$$K.\dim(S_\vee(L)) = 0 = K.\dim_k(S_\vee(L)).$$

2. 设$(M\ \wedge, \top)$ 是一个有界交半格，且其最小元为交不可约元$\bot \neq \top$. 那么

$$\mathrm{Spec}(S_\wedge(M)) = \{M\backslash\{\bot\}\} = \mathrm{Spec}_k(S_\wedge(M)).$$

特别地，我们有

$$K.\dim(S_\wedge(M)) = 0 = K.\dim_k(S_\wedge(M)).$$

证明。 1. 令 $\mathfrak{m} := L\backslash\{1\}$. 显然， $0 \in \mathfrak{m}$，且 1 的并不可约性意味着 $\mathfrak{m}$对并封闭。因此， $\mathfrak{m}$ 是$S_\vee(L)$的真理想。 若$a,b \notin \mathfrak{m}$，则$a = b = 1$，因此$a \cdot_\vee b = 1_L \notin \mathfrak{m}$. 于是， $\mathfrak{m}$ 是$S_\vee(L)$的素理想。

反之，设 P 是 S$_\vee$(L) 的任意素理想。由于 P 是真理想， $1 \notin$P。对于每个 x $\in$ L$\backslash\{1\}$，都有 $x^2 = 0 \in$ P，因此 x $\in$ P。于是 L$\backslash\{1\} \subseteq$ P $\subseteq$ L$\backslash\{1\}$，从而 P $=$ L$\backslash\{1\}$. 显然，L$\backslash\{1\}$ 是一个下集，且对并运算封闭，因此 L$\backslash\{1\} \in$ Idl(L) 推论 $\cong$ 2 17。 K(S$_\vee$(L))。所以，我们有

$$\begin{aligned} \mathrm{Spec}(S_\vee(L)) &= \{L\backslash\{1\}\} = \mathrm{Spec}_k(S_\vee(L)); \\ K.\dim(S_\vee(L)) &= 0 = K.\dim_k(S_\vee(L)). \end{aligned}$$

2. 利用命题 2.18 中的对偶性，我们有

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Spec}(S_\wedge(M)) & = & \mathrm{Spec}(S_{\wedge^{\mathrm{op}}}(M^{\mathrm{op}})) & = & \mathrm{Spec}_k(S_{\wedge^{\mathrm{op}}}(M^{\mathrm{op}})) \\ & = & \{M\backslash\{1_{M^{\mathrm{op}}}\}\} & = & \{M\backslash\{\perp\}\}. \end{array}$$

因此

$$K.\dim(S_\wedge(M)) = 0 = K.\dim_k(S_\wedge(M)).\blacksquare$$

由命题 2.15 和推论 2.16 可直接得出：

j-半环-NA

定理 4.3. 设 $(L\ \vee)$ 是一个并半格。

1. 固定 $c \in L$。

(a) $D^c_\vee(L)$ 是诺特（阿廷）的，当且仅当 $\mathfrak{I}^c_\vee(L)$满足升链条件（降链条件）。*(b)* $D^c_\vee(L)$ 是 k-诺特（k-阿廷）的，当且仅当 理想格(U_c) 满足升链条件（降链条件）。

2. 假设 $(L\ \vee、0)$ 是一个有界并半格。

(a) $H_\vee(L)$ 是诺特（阿廷）的，当且仅当 $\mathfrak{I}_\vee(L) :=\mathfrak{I}^0_\vee(L)$ 满足升链条件（降链条件）。*(b)* $H_\vee(L)$ 是 k-诺特（k-阿廷）的，当且仅当理想格(L)满足升链条件（降链条件）。

3. 假设 $(L\ \vee、0)$ 是一个具有并不可约元 $1 \neq 0.$ 的有界并半格

(a) $S_\vee(L)$ 是诺特（阿廷）的，当且仅当 $\mathfrak{I}_\vee(L)$满足升链条件（降链条件）。*(b)* $S_\vee(L)$ 是 k-诺特（k-阿廷）的，当且仅当 理想格(L)满足升链条件（降链条件）。

链的四种类型

推论 4.4。 设$(C\ \leq;\ 0_C、\ 1_C)$ 是一个非平凡有界链，并考虑相应的半环

$$S_\vee(C) := (C;\max,0_C;\cdot_\vee,1_C), \qquad S_\wedge(C) := (C;\min,1_C;\cdot_\wedge,0_C).$$

1. $\mathfrak{R}(S_\vee(C))$和 $\mathfrak{R}(S_\wedge(C))$是分配的（也是模的）。

2. 以下各项等价：

(a) C 是有限的；*(b)*
$S_\vee(C)$是诺特的；*(c)* $S_\vee$
(C)是阿廷的；*(d)* $S_\wedge$
(C)是诺特的；*(e)* $S_\wedge$
(C)是阿廷的。

3. $S_\vee(C)$ 是 k-诺特的（k-阿廷的）当且仅当 C 满足升链条件（降链条件）。

4. $S_\wedge(C)$ 是 k-诺特（k-阿廷）的，当且仅当 C 满足降链条件（升链条件）。

证明。 由于C 是非平凡链，其最大元 1_C 是并不可约的，其最小元 0_C是交不可约的：$\max(x,y) = x \vee y = 1$ 蕴含$x = 1$ 或$y = 1$，而 $\min(x,y) = x \wedge y = 0$ 蕴含$x = 0$ 或 $y = 0.$。因此，$S_\vee(C)$ 和$S_\wedge(C)$都是加法幂等半环。

1. 根据推论 2.16 (2)及其对偶，我们有

$$\mathfrak{K}(S_\vee(C)) \cong \mathrm{Idl}(C), \qquad \mathfrak{K}(S_\wedge(C)) \cong \mathrm{Fil}(C).$$

链C 的序理想是其非空初始段，而滤子是其非空末段。每个集合族都按包含关系线性排序。因此，这两个格都是模且分配的。

2. 由于任意链的每个子集都对二元最大值和最小值封闭，命题 2.15(1)及其对偶给出

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}(S_\vee(C)) &: = \{C\} \cup \{A \subseteq C \backslash \{1_C\} \mid 0_C \in A\}; \\ \mathfrak{I}(S_\wedge(C)) &: = \{C\} \cup \{B \subseteq C \backslash \{0_C\} \mid 1_C \in B\}. \end{aligned}$$

事实上， 1_C 是$S_\vee(C)$中的乘法单位元，而 0_C 是$S_\wedge(C)$中的乘法单位元。因此，$S_\vee(C)$中包含 1_C 的唯一理想是$S_\vee(C)$，而$S_\wedge(C)$中包含 0_C 的唯一理想是$S_\wedge(C)$。如果 C 是有限的，那么两个半环都是有限的，因此二者既是诺特的，也是阿廷的。

假设C 是无限的，并令$C^\circ := C \backslash \{0,1\}.$。选取两两不同的元素$c_1, c2, \cdots \in C^\circ$（不作单调性假设）。对于$n \geq 1$，定义

$$\begin{aligned} G_n &: = \{0, c_1, \cdots, c_n\}, \qquad I_n := \{0, c_{n+1}, c_{n+2}, \cdots\}; \\ J_n &: = \{1, c_1, \cdots, c_n\}, \qquad K_n := \{1, c_{n+1}, c_{n+2}, \cdots\}. \end{aligned}$$

每个G_n 和I_n 都包含 0 且不包含 1，因此是$S_\vee(C)$的真理想。每个J_n 和K_n 都包含 1 且不包含 0，因此是 $S_\wedge(C)$ 的真理想。由于链中任意两个元素的最大值或最小值必为其中一个元素，所有这些集合都关于相应的加法运算封闭。由于c_k 彼此不同，我们得到以下严格链

$$\begin{aligned} G_1 &\subsetneq G_2 \subsetneq \cdots, \quad I_1 \supsetneq I_2 \supsetneq \cdots, \\ J_1 &\subsetneq J_2 \subsetneq \cdots, \quad K_1 \supsetneq K_2 \supsetneq \cdots. \end{aligned}$$

因此，半环 $S_\vee(C)$ 和 $S_\wedge(C)$ 都既不是诺特的，也不是阿廷的。

3. 根据命题 2.15 (3)， $\mathfrak{K}(S_\vee(C)) \cong \mathrm{Idl}(C)$，即 C 的非空初始段所成的链。这个格满足升链条件，当且仅当 C 满足升链条件：C 中任意严格上升序列 $a_1 < a_2 < \cdots$ 都会给出主始段的严格上升序列。反之，对于任意严格上升的初始段序列 $D_1 \subsetneq D_2 \subsetneq \cdots \subsetneq D_n \subsetneq D_{n+1} \cdots$，选取 $x_n \in D_{n+1} \backslash D_n$. 对于 $m > n$，元素 $x_n \in D_m$ 但 $x_m \notin D_m$. 若 $x_m \leq x_n$，则 D_m 的向下闭包将推出 $x_m \in D_m$，矛盾。因此，我们在 C 中得到一个严格上升序列: $x_1 < x_2 < \cdots < x_n < x_{n+1} \cdots$. 相应的降链条件等价性可对偶地得到。这就证明了该断言。

4. $\mathfrak{K}(S_\wedge(C)) \cong \mathfrak{K}(S_{\wedge^{\mathrm{op}}}(C^{\mathrm{op}})) \cong \mathrm{Idl}(C^{\mathrm{op}}) \cong \mathrm{Fil}(C)$（$C$ 的非空末段所成的链）。这是 $\mathrm{Idl}(C)$ 的序对偶，因此它满足升链条件（分别为降链条件）当且仅当C 满足降链条件（分别为升链条件）。■

k-N-k-A 例4.5：1. 考虑有界链

$$\mathbb{W} \cup \{\infty\} : 0 < 1 < 2 < \cdots < n < n+1 < \cdots < \infty.$$

由于该链是无限的，根据推论 4.4（2），$S_\vee(\mathbb{W} \cup \{\infty\})$ 和 $S_\wedge(\mathbb{W} \cup \{\infty\})$ 既不是诺特也不是阿廷。由于该链满足降链条件但不满足升链条件，根据推论 4.4（3），可知 $S_\vee($ $\mathbb{W} \cup \{\infty\})$ 是k-阿廷的，但不是 k-诺特的；而$S_\wedge(\mathbb{W} \cup \{\infty\})$ 是k-诺特的，但不是 k-阿廷的。

2. 考虑有界链$C = \{0\} \cup \{{}^1{}_n \mid \in \mathbb{N}\}$：

$$C : 0 < \cdots < \frac{1}{n+2} < \frac{1}{n+1} < \cdots < \frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < 1.$$

由于C 是无限的，根据推论 4.4 (2)，$S_\vee(C)$ 和$S_\wedge(C)$既非诺特，也非阿廷。由于C 满足升链条件但不满足降链条件，由推论 4.4 (3)可知，$S_\vee(C)$是k-诺特的，但不是k-阿廷的；而$S_\wedge(C)$是k-阿廷的，但不是k-诺特的。

3. 考虑赋予通常序的单位区间 $[0,1]$。由于无限链 $[0,1]$既不满足升链条件，也不满足降链条件，由推论 4.4 (3)可知，$S_\vee([0,1])$和$S_\wedge([0,1])$既非k-诺特，也非k-阿廷。

声明

- **资助：** 本稿件的准备工作未获得任何资助。
- **经济利益：**作者没有需要披露的相关经济或非经济利益。
- **人工智能的使用：**本文稿由*ChatGPT 6 Luna* 和*Claude Sonnet5.5*审查。作者对本文稿中所有结果以及例子/反例的正确性负全部责任。

参考文献

Cor1974 [Cor1974] W. H. Cornish，伪补模半格，《澳大利亚数学会杂志》18，239-251（1974）。7，18 GD2024 [GD2024] A. Goswami 和 T. Dube，半环 k-理想的若干方面，《巴勒莫数学会会刊》第二辑 73（2024），3105–3117。2，3，20，32 Gla2002 [Glas2002] K. Głazek，关于半环及其在数学和信息科学中应用的文献指南，附完整书目。多德雷赫特：克吕维尔学术出版社（2002）。1 Gol1999 [Gol1999] J. S. Golan，《半环及其应用》，《数学及其应用》，克吕维尔学术出版社，多德雷赫特，1999。4，8，12，13，20 Gos2023 [Gos2023] A. Goswami，半环的减性空间，arXiv:2303.14799 [math.RA],2023 arXiv:2303.14799。Gra1998 [Gra1998] G. Gr¨atzer，《一般格论》，第2版，Birkhauser（1998）。19 Gra2010 [Gra2010] G. Gr¨atzer，《格论：基础》，Birkhauser（2010）。4，6，7，9，29 Hen1958 [Hen1958] M. Henriksen，具有交换加法的半环中的理想，《美国数学会通报》，第6卷（3），第31期，1958年6月，第321页。20 KNT2011 [KNT2011] Y. Katsov、T. G. Nam 和 N. X. Tuyen，关于减性半环的进一步研究：简单性、完美性及相关问题，《代数通讯》39（2011）4342-4356。DOI：10.1080/00927872.2010.524183 26 MO20025 [MO2025]K. Kearnes，对“不是格的加法幂等半环”的回答，MathOverflow，发布于2025年11月1日，https://mathoverflow.net/questions/503271/additively-idempotent-semirings-that-are-not-lattices（访问于2026年11月7日）。12 MR2016 [MR2016] M. S. Mala 和 P. V. S. Rao，关于一类半格序半环的理想，《国际数学趋势与技术杂志》38（3）（2016），138-143。13 Nas [Nas] P. Nasehpour，半环中减性闭包算子对理想运算的分配性，arXiv:2607.23746。3，27，32 Ruz2017 [Ruz2017] P. R˚uˇziˇcka，并半格的图与粒子格同余格的形状，《查理大学数学评论》58（3）（2017），275-291。18

SA1993 [SA1993] M. K. Sen 和 M. R. Adhikari，关于半环的极大 *k*-理想，美国数学会会刊 118，第 3 期，699-703（1993）。SA1992 [SA1992] M. K. Sen 和 M. R. Adhikari，关于半环的 *k*-理想，国际数学与数学科学杂志 15（2）（1992）347-350。20SGBS [SGBS] P. Sengupta、A. Goswami、P. Biswas 和 S. K. Sardar，交换半环的减性理想结构，arXiv:2601.02120 [math.RA], 版本 2，发布于 2026年9月1日。arXiv:2601.02120。3、20、32RM2008 [RM2008] N. P. Rao 和 M. S. Mala，关于一类半格序半环，Acta Ciencia I ndica XXXIV M（2008），第 1 期，345-350。13Rho1975 [Rho1975] J. B. Rhodes，模半格与分配半格，《美国数学会汇刊》201（1975），31–41。7Rao1981 [Rao1981] P. Ranga Rao，格序半环，《数学研讨会札记》9（1981），119–149。13Van1934 [Van1934] H. S. Vandiver，关于一种加法不满足消去律的简单类型代数的注记，《美国数学会通报》40（1934年），914–921。1Zum2008 [Zum2008] J. Zumbr¨agel，有限含零同余单半环的分类，代数与应用杂志 7，第 3 期，363-377（2008）。

2