arXiv:2611.32272v1 [math.RA] 24 Nov 2026

中心多项式环上带除环系数的交换子关系子与纯分解

Hoang Anh Tu*[1] 和 Huynh Viet Khanh†[1]

[1]数学与信息学系，胡志明市师范大学，胡志明市，越南。

摘要

设 D为一个除环，并设 $A = D[x, y, z]$为带有中心不定元的环。对于正整数 p， q和 a， $b \in D$，令 $f = x^p + az^p$和 $g = y^q + bz^q$。我们计算它们的左侧关系子模以及 $A/(Af + Ag)$的最小分次自由分解。当 $ab = ba$时，该商的投射维数为二，否则为三。在后一种情况下，它是有限长度模，总贝蒂数为 (1，2，2，1)；当 $p = q = d$时，它具有类型为 (0， d， $3d$， $4d$) 的纯分解。这些贝蒂表不会出现在域上的多项式环中。若 D 在其中心 K上是有限维的，则对于任意 $n \geq 1$， $K[x_1, \ldots, x_n]$上的有限长度模与 $D[x_1, \ldots, x_n]$上的有限长度左模的贝蒂表生成相同的有理锥。在三个变量的情形下，当 D 为非交换时， K 上的半群严格包含于 D 上的半群。

*2020*年数学主题分类。 主要分类 13P10，16E05；次要分类 13D02，16S36关键词。 除环，中心的多项式环，Gr¨obner 基，关系子，极小自由分解，纯分解，贝蒂表

1 引言

设 $S = k[x_1, \ldots, x_n]$，其中 k是一个域，并假设齐次多项式 u， $v \in S$极小地生成一个理想。这一对多项式的一个关系子是一个行 $(r, s) \in S^2$，满足 $ru + sv = 0$。若 c是 u， v的最大公因式，则它们的关系模由 $(v/c, -u/c)$ 自由生成。因此，$S/(u, v)$ 的投射维数为二，总贝蒂数为 (1，2，1)（引理 3.4）。若在某个单项式序下， u， v具有互素首项单项式，则 $\{u, v\}$ 是 (u, v) 的 Gr¨obner 基[12, 第 2 章，第 9 节，定理 3，第 105 页，以及命题 4，第 106] 页。我们要研究，当不定元仍保持中心性而系数属于除环时，这些结论将如何变化。

一个相关问题是，哪些贝蒂表可以在这类环上出现。§1 中的图示 D_1（方程 (1)，第 343] 页）是类型为 (0，1，3，4) 的纯分解，其总贝蒂数为 (1，2，2，1)。Erman 证明， D_1 不可能是域上的多项式环上某个模的贝蒂表。他构造了贝蒂表为 $2D_1$ 和 $3D_1$ 的模，因此对每个整数 $m \geq 2$，都实现了 mD_1 [2, （定理 1.6(1) 的证明，第 359] 页）。

Erman 和 Sam 将 D_1 实现为海森堡李代数分次包络代数的剩余域的贝蒂表；参见 [3, §6，方程 (2)，第 296] 页。在该代数中，生成元 X， Y

*电子邮件：hoanganhtu.nth.522005@gmail.com。

†电子邮件：khanhhv@hcmue.edu.vn。

的次数为一， $XY-YX=[X,Y]\neq 0$ 的次数为二。他们的例子促使我们思考：D_1 是否也能出现在系数取自除环的中心不定元多项式环上?

设 D 是一个除环，并设 $A=D[x,y,z]$，其中 x， y， z 是次数为一的中心元素。固定正整数 p， q 和 a， $b\in D$，并令 $\kappa=ba-ab$。当 $\kappa\neq 0$ 时，多项式 x^p+a 和 y^q+b 在 $D[x,y]$ 中生成单位左理想。为了得到非零分次商模，我们在 z 中齐次化并令

$$f=x^p+az^p,\qquad g=y^q+bz^q,\qquad I=Af+Ag,\qquad M=A/I.$$

对于任意满足 $z\prec y\prec x$ 的单项式序， f， g 的首项单项式为 x^p， y^q；对于任意 a， b 的取值，它们都互素。它们的交换子为 $gf-fg=(ba-ab)z^{p+q}=\kappa z^{p+q}$。

当 $\kappa=0$ 时， $\{f,g\}$ 是一个左 Gr¨obner 基，在 $\prec(I)=Ax^p+Ay^q$ 中，且左侧关系子模由 $(g,\ -f)$ 生成。当 $\kappa\neq 0$ 时，初始理想为 $Ax^p+Ay^q+Az^{p+q}$。这三个生成元是极小的，而 f， g 仍极小地生成 I。因此，当系数不交换时，互素的首项单项式不足以保证 $\{f,g\}$ 是一个 Gr¨obner 基。

定理 3.3 确定了对每个 D 和所有 p， $q\geq 1$， M 的最小分次自由分解，其中各映射写作由矩阵右乘给出。对于 $\kappa=0$，模 M 的投射维数为二，且 $\dim_D M=\infty$。对于 $\kappa\neq 0$，其投射维数为三，$\dim_D M=pq(p+q)$，总贝蒂数为 (1，2，2，1)。若 $p=q=d$，则后一个分解是类型为 $(0,\ d,\ 3d,\ 4d)$ 的纯分解。特别地，情形 $p=q=1$ 对任意非交换除环 D 上的 $D[x,y,z]$ 实现了 D_1。推论 3.5 表明，带有 $\kappa\neq 0$ 的表格均不会出现在域上的多项式环中。我们还利用 Schreyer 构造计算首一左 Gr¨obner 基的齐次关系，随后使用更换生成元的公式转到一对 $(f,\ g)$。关于除环上的左 PBW 环的这些构造，详见 [5, §4.2]。

交换子计算也引出了与 Adams 和 Loustaunau 关于两个 Cauchy–Fueter 算子的工作的比较。他们在八个变量的实多项式环上计算了一个极小分解，并在其 Gr¨obner 基中使用了矩阵交换子的列向量。引理 2.1 的方程（5）和（9）以及推论 3.6给出的分解是纯型的，类型为 (0，1，3，4)，秩为 (4，8，8，4)。对于 $D=\mathbb{H}$，命题 4.1 指出，按通常分次来看，他们的分解与八个坐标的四元数多项式环上的一个自由分解的限制相同。给两个四元数的坐标赋予次数 p， q 后，在 f，g 处特化的复形与定理 3.3(2) 中 M 的分解同构，其中 $\kappa\neq 0$。

在 [2,定义 1.1–1.2，第 343], 页中考察的贝蒂图半群与其有理锥之间的区别，促使我们比较系数域替换为除环时这两个对象的变化。设 K 是 D 中心的子域，且 $\delta=$ 维数为 ${}_K D<\infty$。定理 5.1 表明，从 $D[x_1,\dots,x_n]$ 限制到 $K[x_1,\dots,x_n]$ 会使贝蒂表乘以 δ，而标量扩张则保持贝蒂表不变。因此，对于有限长度模，推论 5.2 得出，对每个 $n\geq 1$，这两个有理锥都相同。在三个变量的情形下，当 D 是非交换环时， K上的半群真包含于 D 上的半群。实现 D_1 的例子证明了这一包含关系是严格的。

本文结构如下。第 2 节介绍关于分次左模和齐次关系的预备结果。第 3 节中，我们计算交换系数与非交换系数下的极小分解，并将其贝蒂表与域上的贝蒂表进行比较。第 4 节讨论四元数特化，第 5 节比较标量扩张与标量限制下的贝蒂表，并探讨其在半群和有理锥方面的应用。

对于一般结果，我们记作 $A=D[x_1,\dots,x_n]=\bigoplus_{\nu\geq 0}A_\nu$，其中 D 是除环，$n\geq 1$，且不定元是中心的。对于 $\alpha\in\mathbb{N}^n$，令 $x^\alpha=x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}$。我们采用标准分次，其中 $A_0=D$，且 deg $x^\alpha=|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$。环同态 $A\to D$ 定义为

由 $\sum_\alpha a_\alpha x^\alpha \mapsto a_0$ 给出，其核为 $A_+ = \bigoplus_{\nu>0} A_\nu$，因此 $A/A_+ \cong D$。对于分次左 A-模 M 和 $d \in \mathbb{Z}$，移位 $M(-d)$ 是模 M，其分次为 $M(-d)_j = M_{j-d}$。特别地，$1 \in A(-d)_d$ 作为左 A-模生成 $A(-d)$。我们将有限自由左模的元素写成行，将生成元列表写成列向量。

附录 A 描述了计算验证。Python 脚本及其随附文档可在 Zenodo [14] 上获取。

2 分次左模与齐次关系

2.1 符号与基本事实

引理 2.1. 每个 $f \in A$ 都有唯一的表达式 $f = \sum_\alpha a_\alpha x^\alpha$，其中 $a_\alpha \in D$，且只有有限多个系数非零。这些单项式构成 A的左 D-基和右 D-基。此外，$x^\beta \in x^\alpha A$ 当且仅当 $x^\beta \in Ax^\alpha$，而这些条件成立当且仅当对所有 i都有 $\alpha_i \le \beta_i$。此时 $x^\beta = x^{\beta-\alpha}x^\alpha$。这定义了单项式的左右整除性 divisibility of monomials。

证明。对于 $f \in A$，写作 $f = \sum_\gamma a_\gamma x^\gamma$，其中系数写在左侧。由于 $a_\gamma x^\gamma = x^\gamma a_\gamma$，我们也有 $f = \sum_\gamma x^\gamma a_\gamma$。若 $f = \sum_\gamma x^\gamma b_\gamma$，则

$$0 = \sum_\gamma x^\gamma(a_\gamma - b_\gamma) = \sum_\gamma (a_\gamma - b_\gamma)x^\gamma.$$

由此可知，对于每个 $\gamma \in \mathbb{N}^n$，都有 $a_\gamma = b_\gamma$。由于 x^α 是中心的，因此 $x^\alpha A = Ax^\alpha$。将 $A = \bigoplus_{\eta\in\mathbb{N}^n} Dx^\eta$ 两边右乘 x^α，得到 $Ax^\alpha = \bigoplus_{\eta\in\mathbb{N}^n} Dx^{\eta+\alpha}$。因此，当且仅当 $\beta-\alpha \in \mathbb{N}^n$ 时，$x^\beta \in Ax^\alpha$；或者等价地，对于 $1 \le i \le n$，有 $\alpha_i \le \beta_i$。在此情况下，$x^\beta = x^{\beta-\alpha}x^\alpha$。 □

为了定义非零多项式的首单项式，我们在 A 的单项式上取一个单项式序，该单项式序在与单项式相乘时保持不变。

定义 2.2。单项式序 $\prec$ 是单项式集合 $\{x^\alpha \mid \alpha \in \mathbb{N}^n\}$ 上的一个全序，并具有以下性质。

(1) 对每个 $\gamma \in \mathbb{N}^n$，$x^\alpha \prec x^\beta$ 蕴含 $x^{\alpha+\gamma} \prec x^{\beta+\gamma}$；

(2) 每个非空的单项式集合都有一个最小元素。

例 2.3。在 $D[x,y]$ 的单项式上，定义字典序如下：

$$x^a y^b \prec x^c y^d \iff a < c \quad \text{or} \quad (a = c \text{ and } b < d).$$

例如，$y^3 \prec x \prec xy$。将两个单项式都乘以 $x^r y^s$，会使每个指数对增加 $(r,\ s)$，并保持比较关系。对于一个非空的单项式集合 T，令 a_0 为其元素中 x 的最小指数。取 $b_0 = \min\{b \mid x^{a_0}y^b \in T\}$，则 T 的最小元素为 $x^{a_0}y^{b_0}$。先比较总次数，对于次数相同的情况使用 $\prec$，可定义另一种单项式序，即分次字典序 $\prec_{\text{grlex}}$，其中 $x \prec_{\text{grlex}} y^3$。

在 A 的单项式上固定一种单项式序 $\prec$。对于 $0 \ne f = \sum_\alpha a_\alpha x^\alpha$，令 $\mathrm{LM}(f)$ 表示非零系数对应的最大单项式，令 $\mathrm{LC}(f)$ 表示该系数，并令 $\mathrm{LT}(f) = \mathrm{LC}(f)\,\mathrm{LM}(f)$。若 f 满足 $\mathrm{LC}(f) = 1_D$，则称其为首一。

命题 2.4。对于非零的 u、$v \in A$，有

$$\mathrm{LM}(uv) = \mathrm{LM}(u)\,\mathrm{LM}(v), \qquad \mathrm{LC}(uv) = \mathrm{LC}(u)\,\mathrm{LC}(v), \quad \textit{and} \quad \mathrm{LT}(uv) = \mathrm{LT}(u)\,\mathrm{LT}(v).$$

证明。设 $u=\sum_\eta a_\eta x^\eta$ 和 $v=\sum_\theta b_\theta x^\theta$，其中 $\mathrm{LM}(u)=x^\alpha$ 且 $\mathrm{LM}(v)=x^\beta$。由于这些单项式是中心的，$uv=\sum_{\eta,\ \theta} a_\eta b_\theta x^{\eta+\theta}$。对于 $a_\eta,\ b_\theta\neq 0$，单项式序的乘法性意味着 $x^{\eta+\theta}\preceq x^{\alpha+\theta}\preceq x^{\alpha+\beta}$，并且当 $\eta\neq\alpha$ 或 $\theta\neq\beta$ 时有 $x^{\eta+\theta}\prec x^{\alpha+\beta}$。因此，$x^{\alpha+\beta}$ 的系数为 $a_\alpha b_\beta\neq 0$。所以 $\mathrm{LM}(uv)=x^{\alpha+\beta}$，$\mathrm{LC}(uv)=a_\alpha b_\beta$，且 $\mathrm{LT}(uv)=a_\alpha b_\beta x^{\alpha+\beta}=\mathrm{LT}(u)\,\mathrm{LT}(v)$。 □

推论 2.5. (1) 环 A 是整环。

(2) 对于非零的 u、$v\in A$，有 $\deg(uv)=\deg u+\deg v$。

(3) 有 $A^\times=D^\times$。

证明。对于非零的 $u,v\in A$，命题 2.4 推出 $uv\neq 0$，因此 A 是整环。设 $u=\sum_{i=0}^r u_i$ 和 $v=\sum_{j=0}^s v_j$，其中 $u_i\in A_i$、$v_j\in A_j$，且 $u_r,v_s\neq 0$。每个乘积 u_iv_j 都属于 A_{i+j}。由于 $i\le r$ 和 $j\le s$，我们有 $i+j\le r+s$，并且 $i+j=r+s$ 当且仅当 $(i,j)=(r,s)$。因此，对于 $k>r+s$，$(uv)_{r+s}=u_rv_s$ 且 $(uv)_k=0$。由于 $u_rv_s\neq 0$，有 $\deg(uv)=r+s=\deg u+\deg v$。

若 $u\in A^\times$，我们应用 (2) 得到 $0=\deg(uu^{-1})=\deg u+\deg(u^{-1})$。由于 $0\le\deg u\le\deg u+\deg(u^{-1})=0$，因此 $\deg u=0$，从而 $u\in A_0\setminus\{0\}=D^\times$。反过来，$D^\times$ 中元素的逆元属于 $D\subseteq A$。 □

注2.6。 (1) 设 B 是含幺环，t 是中心不定元。若 $q=ut^r+\cdots$ 且 $u\in B^\times$，则右乘映射 L_q: $B[t]\to B[t]$ 定义为 $L_q(v)=vq$ 是单射。

(2) 由于 D 是左诺特的，根据 [11,第 1 章，定理 2.9(iv)]，A 也是左诺特的。

2.2 极小分次分解

在 §§ 2.2–2.3 中，我们假设模是有限生成的分次左 A-模。对于这类模 M 和 N，我们考虑一个次数为 0 的 A-线性映射 $\varphi\colon M\to N$，因此对每个 j，都有 $\varphi(M_j)\subseteq N_j$。

对于模 M，我们首先建立分次同构 $D\otimes_A M\cong M/A_+M$。对于分次右 A-模 L，分量 $(L\otimes_A M)_k$ 由张量 $w\otimes m$ 作为阿贝尔群生成，其中 $w\in L_i$、$m\in M_j$ 和 $i+j=k$。对于 $w\in L_i$、$m\in M_j$ 和 $a\in A_\ell$，元素 $(wa)\otimes m-w\otimes(am)$ 属于 $L\otimes_{\mathbb{Z}} M$ 的次数 $i+j+\ell$。由可加性，这些元素生成商映射 $L\otimes_{\mathbb{Z}} M\to L\otimes_A M$ 的核，因此 $L\otimes_A M$ 继承了分次。将 $D=A/A_+$ 视为分次 $(D,\ A)$-双模，并记 $\overline{a}=a+A_+$ 为 $a\in A$。考虑映射

$$\begin{aligned}&\Phi\colon D\otimes_A M\longrightarrow M/A_+M\quad\text{defined by}\quad\Phi(\overline{a}\otimes m)=am+A_+M,\\&\Psi\colon M/A_+M\longrightarrow D\otimes_A M\quad\text{defined by}\quad\Psi(m+A_+M)=\overline{1}\otimes m.\end{aligned}$$

D 对 M/A_+M 的作用诱导出分次 D-线性映射 Φ。对于 $a\in A_+$，有 $1\otimes am=a\otimes m=0$，因此 Ψ 定义良好。这些公式意味着 $\Phi\Psi(m+A_+M)=m+A_+M$ 且 $\Psi\Phi(a\otimes m)=1\otimes am=a\otimes m$。因此，作为分次左 D-向量空间，$\overline{D}\otimes_A M\cong M/A_+M$。特别地，$D\otimes_A A(-d)\cong D(-d)$。

如果一个模具有齐次基，则称其为分次自由；参见 [7,§1.2.4]。

对于带单位元的环 R 以及 $P\in M_{r\times s}(R)$，由 $\rho_P(u)=uP$ 定义的映射 $\rho_P\colon R^{1\times r}\to R^{1\times s}$ 是左 R-线性的。对于相容的矩阵 Q，有 $\rho_Q\circ\rho_P=\rho_{PQ}$。

引理 2.7. 设 $F=\bigoplus_{i=1}^r A(-d_i)$ 和 $G=\bigoplus_{j=1}^s A(-d'_j)$ 是分次自由左 A-模，并且 $P=(p_{ij})\in M_{r\times s}(A)$。映射 $\rho_P\colon F\to G$ 的次数为 0，当且仅当每个 p_{ij} 为零或是次数为 $d_i-d'_j$ 的齐次元素。

证明。设 e_i 和 e'_j 分别是 F 和 G的典范基向量，其次数分别为 d_i 和d'_j。 $\rho_P(e_i) = \sum_j p_{ij}e'_j$的第 j 个坐标是 p_{ij}，且 $G_{d_i} = \bigoplus_j A_{d_i-d'_j}e'_j$。因此，当且仅当对每个 j， $p_{ij} \in A_{d_i-d'_j}$ 时， $\rho_P(e_i) \in G_{d_i}$。若 ρ_P 的次数为 0，则由 $e_i \in F_{d_i}$ 可得 $\rho_P(e_i) \in G_{d_i}$，所以对所有 i, j， $p_{ij} \in A_{d_i-d'_j}$。反过来，设对所有 i, j， $p_{ij} \in A_{d_i-d'_j}$。元素 $w = \sum_i a_ie_i \in F_k$满足 $a_i \in A_{k-d_i}$，因此 $a_i\rho_P(e_i) \in G_k$。将 P从右侧乘到 $w = \sum_i a_ie_i$两边，得到 $\rho_P(w) = \sum_i a_i(e_iP) = \sum_i a_i\rho_P(e_i) \in G_k$。因此 ρ_P的次数为 0。

□

设 F 和 G 是分次自由左 A-模，分别具有齐次基 u_1、……、u_r 和 v_1、……、v_s。令 $d_i = \sum_{i=1}^r a_iu_i$ 的次数为 0 G G $\bigoplus_{j=1}^s A$ $-d'_j$ ，且 $d'_j =$ 的次数为。由 (、) 定义的映射 $\bigoplus_{i=1}^r A(-d_i) \to F$ 是一个次数为的同构。的基以同样的方式对应于 ( )。对于一个 A-线性映射 φ: $F \to G$，令 $P = (p_{ij})$ 表示由 $\varphi(u_i) = \sum_{j=1}^s p_{ij}v_j$ 定义的矩阵。于是

$$\varphi\Big(\sum_{i=1}^r a_iu_i\Big) = \sum_{j=1}^s\Big(\sum_{i=1}^r a_ip_{ij}\Big)v_j,$$

因此，坐标行 (a_1、……、 a_r) 被映射为 (a_1、……、 a_r)P。所以，引理 2.7 在任意齐次基下均适用。

定义 2.8。 M的分次自由分解是一个正合列 $\cdots \to F_2 \xrightarrow{\partial_2} F_1 \xrightarrow{\partial_1} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \to 0$，其中的映射均为零次映射，且每个 F_i 都有有限齐次基。令 $\partial_0 = \varepsilon$，如果对于所有 $i \geq 1$都有 $\partial_i(F_i) \subseteq A_+F_{i-1}$，则称该分解为极小的。

模 M 的生成集在没有任何真子集生成 M时称为极小的。

命题 2.9。 设 M 是有限生成的分次左 A-模，并令 $M = M/A_+M$。则有以下结论。

(1) 模 M 有一个有限齐次生成集。存在一个整数 d_0，使得对于所有 $j < d_0$都有 $M_j = 0$。

(2)（分次中山引理）如果 N 是 M 的一个分次子模，且 $M = N + A_+M$，则 $M = N$。

(3) 令 m_1，…… m_r 为 M 中互不相同的齐次元素，并令 $m_i = m_i + A_+M$。则

$$M = \sum_{i=1}^r Am_i \quad \Longleftrightarrow \quad \overline{M} = \sum_{i=1}^r D\overline{m}_i.$$

集合 $\{m_1, \ldots, m_r\}$ 是 M 的极小生成集，当且仅当 $(m_i)_{i=1}^r$ 是 M的 D-基。

(4) 若 S 是 M 的极小齐次生成集，则对于每个 $d \in \mathbb{Z}$， $|S| =$ 维数$_D M$ 和 $|S \cap M_d| =$维数$_D M_d$。 M 的每个生成集都至少含有 维数$_D M$ 个元素。若 $F_\bullet \to M$ 是一个最小分次自由分解，并且 $i \geq 1$，则 F_i 的任意齐次基在 ∂_i 下的像构成 像∂_i 的极小齐次生成集。

证明。 (1) 选择 u_1、……、u_s的生成元，并将 $u_a = \sum_k u_{a,\ k}$写作 $u_{a,\ k} \in M_k$。非零分量 $u_{a,\ k}$ 生成 M，因为它们的 A-张成包含每个 u_a。因此 $M_j = \sum_{a,\ k} A_{j-k}u_{a,\ k}$。只有有限多个 $u_{a,\ k}$ 非零，所以存在一个整数 d，使得当 $u_{a,\ k} \neq 0$时有 $k \geq d$。对于$j < d$，对每个这样的 k，我们都有 $A_{j-k} = 0$，因此 $M_j = 0$。

(2) 分次商模 $Q = M/N$ 满足 $Q = A_+Q$。如果 $Q \neq 0$，令 d 为其最小非零次数，该次数由(1)知存在。由于对每个 $\nu > 0$都有 $Q_{d-\nu} = 0$，我们得到

$$0 \neq Q_d = (A_+Q)_d = \sum_{\nu>0} A_\nu Q_{d-\nu} = 0.$$

因此 $Q = 0$ 和 $M = N$。右模和左模的分次中山引理相应形式分别见 [7, §3.8]和 [8,推论 2.9。2],

(3) 令 $\overline{M} = M/A_+M$，并用 m_j 表示 $\overline{m}_j$的等价类。由于 A 通过 D作用于 M， $\overline{N} = \sum_j Am_j$在 M 中的像为 $\sum_j Dm_j$。因此，这些等价类张成 M当且仅当 $M = N + A_+\overline{M}$，根据 (2)，这等价于 $M = N$。

假设这些等价类 m_1、.....、 m_r张成 M。将张成判据应用于除 m_k以外的元素，得到

$$M = \sum_{j\neq k} Am_j \iff \overline{M} = \sum_{j\neq k} D\overline{m}_j \iff \overline{m}_k \in \sum_{j\neq k} D\overline{m}_j.$$

若 $\sum_j c_j m_j = 0$ 且 $c_k \neq 0$，则 $m_k = -\sum_{j\neq k}(c_k^{-1}c_j)m_j$。反过来，将 m_k 表示为其他等价类的线性组合，可得到一个在 m_k处系数为 1 的关系。因此，当且仅当这些等价类在 D上线性无关时，才能确保没有任何 m_k 可以省略；此时它们构成 M的一组基。

由 (1)，有限齐次生成集的像张成 M，因此 $\dim_D M < \infty$。选取 $\overline{M}$ 的一个齐次 D-基，并将每个基元素提升为 M 中次数相同的元素。根据最小性判据，这些提升构成 M的一个极小齐次生成集。

(4) 由 (3)，极小齐次生成集的等价类构成 M的一个基，其中次数为 d 的元素有 $\dim_D \overline{M}_d$ 个，总计 $\dim_D M$ 个。任何生成集的像都在 D上张成 M，因此每个生成集至少有 $\dim_D M$ 个元素。

设 $F_\bullet$是 M的一个极小分次自由分解。对于 $i \geq 1$，令 $N_i = \operatorname{im} \partial_i$，并将 ∂_i视为一个满射 $F_i \to N_i$。由正合性和最小性，$\ker \partial_i = \operatorname{im} \partial_{i+1} \subseteq A_+F_i$。由于 $\partial_i(A_+F_i) = A_+N_i$， $\partial_i^{-1}(A_+N_i) = A_+F_i + \ker \partial_i = A_+F_i$。因此， ∂_i 诱导出分次同构

$$F_i/A_+F_i \xrightarrow{\sim} N_i/A_+N_i \quad \text{defined by} \quad u + A_+F_i \longmapsto \partial_i(u) + A_+N_i.$$

若 (e_a) 是 F_i 的齐次基，则其等价类构成 F_i/A_+F_i 的 D-基。由 (3)，元素 $\partial_i(e_a)$ 构成 N_i 的极小齐次生成集。 □

命题 2.10。 设 M 是有限生成分次左 A-模。以下结论成立。

(1) 对于分次自由分解 $F_\bullet \to M$，设 P_i 是 ∂_i 在齐次基下的矩阵。当且仅当对每个 $i \geq 1$ 都有 $P_i \equiv 0$ （模 A_+），该分解是极小的。对于每个 $i \geq 1$，此同余等价于 $D \otimes_A \partial_i = 0$，也等价于 P_i 的每个元素都是非单位元。

(2) 任意两个极小分次自由分解 $F_\bullet \to M$ 和 $G_\bullet \to M$，连同增广映射 ε_F 和 ε_G，作为 M 的分次分解彼此同构。若 $\alpha_\bullet\colon\ F_\bullet \to G_\bullet$ 是内次数为 0 且满足 $\varepsilon_G\alpha_0 = \varepsilon_F$ 的链映射，则 $\alpha_\bullet$ 是同构。

*(3) </style>*模 M 有一个极小分次自由分解 $F_\bullet \to M$，且每一项都有有限齐次基。对于任意这样的分解，令 ∂_0 表示增广映射。于是

$$\operatorname{rank}_A F_i = \dim_D(N_i/A_+N_i) \quad \textit{for all } i \geq 0,$$

where $N_i = \operatorname{im} \partial_i$。这些秩与所选的极小分解无关。

证明。 (1) 设 $F_\bullet \to M$ 是一个分次自由分解，并固定 $i \geq 1$。选取 F_i 的齐次基 (e_a) 以及 F_{i-1}的齐次基 (e'_b)，并写作 $\partial_i(e_a) = \sum_b p_{ab}e'_b$，于是 $P_i = (p_{ab})$。包含关系 $\partial_i(F_i) \subseteq A_+F_{i-1}$成立，当且仅当对所有 a，b都有 $p_{ab} \in A_+$，也就是说，当 $P_i \equiv 0$ (模 A_+) 时成立。在 $D \otimes_A F_{i-1}$ 中，我们有

$$(D \otimes_A \partial_i)(\overline{1} \otimes e_a) = \sum_b \overline{1} \otimes p_{ab}e'_b = \sum_b \overline{p_{ab}}(\overline{1} \otimes e'_b).$$

张量$1 \otimes e_a$构成 $D \otimes_A F_i$的 D基，张量 $1 \otimes e'_b$构成 $D \otimes_A F_{i-1}$的 D基。因此，对于所有 a，b，$D \otimes_A \partial_i = 0$ 当且仅当 $p_{ab} = 0$。根据引理 2.7，每个非零$\overline{p_{ab}}$ 都是齐次的。由于 $A^\times = D^\times$ 根据推论 2.5，我们有 $p_{ab} \notin A^\times$ 当且仅当 $p_{ab} \in A_+$。

（2）由于 A 是左诺特的，带有次数为 0 的映射的有限生成分次左 A模构成一个阿贝尔范畴。次数为 0 的映射 $A(-d) \to L$ 由 L_d中 1 的像唯一确定。对于任意分次满射 $L \to L'$，映射 $L_d \to L'_d$ 是满射，因此 $A(-d)$ 在该范畴中是投射的。根据命题 2.9(1)，每个对象都是 A的有限直和平移的商。

设 $F_\bullet \to M$ 是一个最小分次自由分解，$G_\bullet \to M$ 是一个分次自由分解。根据比较定理 [9, 定理 2.2。6], 存在链映射 $\alpha\colon F_\bullet \to G_\bullet$ 以及 $\beta\colon G_\bullet \to F_\bullet$，它们的次数均为 0，并提升了 id_M。对于任意这样的链映射对，$\beta\alpha$ 在未增广复形 $F_\bullet$上同伦于单位元。令 $\varphi_i = \beta_i\alpha_i$。同伦映射 $h_i\colon F_i \to F_{i+1}$ 的次数为 0。对于每个 $i \geq 0$，它们满足

$$\varphi_i - \mathrm{id}_{F_i} = \partial_{i+1}h_i + h_{i-1}\partial_i,$$

其中，当 $i = 0$ 时省略第二项。

由最小性，$\partial_{i+1}(F_{i+1}) \subseteq A_+F_i$。对于 $i \geq 1$，最小性和 A-线性映射 h_{i-1} 的 h_{i-1}性意味着 $\partial_i(F_i(\subseteq h_{i-1}))\ A_+F_{i-1}(\subseteq A_+F_i)\ \varphi_i -$。因此 $(F_i\mathrm{id}F_i)(\subseteq A_+F_i)\ F_i = \varphi_i$，所以 $F_i(+A_+F_i)\ \varphi_i$。根据命题 2.9(2)中的分次中山引理，F_i 是满射。由于 $\varphi_i \subseteq$ 是诺特的，链 $\ker\varphi_i^2 \subseteq \cdots \ker\ r \geq 1$ 稳定。取 $\varphi_i^r =$ 使得 $\ker\varphi_i^{r+1}\ker\ u \in$。如果 $\varphi_i\ker v \in F_i$，则利用满射性取 φ_i^r 使得 $v(=u)\ \varphi_i^{r+1}$。于是 $v(=0)\ v \in$，因此 $\varphi_i^r\ker\ u = 0$ 且 φ_i。所以每个 $\beta\alpha$ 都是同构，$G_\bullet$ 也同样是同构。如果 $F_\bullet$ 也是极小的，交换 $G_\bullet$ 和 $\alpha\beta$ 可知 α 是同构。因此 $\beta\alpha$ 具有左逆 $(^{-1}\beta)\ \beta$ 和右逆 $\alpha\beta(^{-1})\ \alpha$，所以 是同构。

(3) 置 $K_{-1} = M$。给定一个有限生成分次模 K_{i-1} for $i \geq 0$，选择齐次元素 $m_{i,\ 1}$，.....，$m_{i,\ s_i}$，使其类构成 K_{i-1}/A_+K_{i-1}的 D-基。置 $F_i = \bigoplus_{a=1}^{s_i} A(-\deg m_{i,\ a})$，其标准生成元为 e_a。令

$$\pi_i\colon F_i \longrightarrow K_{i-1} \quad \text{be defined by} \quad \pi_i(e_a) = m_{i,a}.$$

由于 $\deg e_a = \deg m_{i,\ a}$，映射 π_i 的次数为 0。根据命题 2.9(3)，它是满射。其约化 $F_i/A_+F_i \to K_{i-1}/A_+K_{i-1}$ 将 e_a 的类映射到所选基，因此它是同构。特别地，$K_i = \ker\pi_i \subseteq A_+F_i$。子模 K_i 是分次的，并且由于 F_i 是诺特的，它是有限生成的，因此构造可通过归纳继续进行。

置 $\partial_0 = \pi_0$。对于 $i \geq 1$，通过将 π_i 与包含映射 $K_{i-1} \hookrightarrow F_{i-1}$ 复合，定义 $\partial_i\colon F_i \to F_{i-1}$。由于每个 π_i 都是满射且这些包含映射是单射，

$$\mathrm{im}\,\partial_0 = M \quad \text{and} \quad \mathrm{im}\,\partial_{i+1} = K_i = \ker\partial_i \subseteq A_+F_i \quad \text{for all } i \geq 0.$$

因此，$F_\bullet \to M$ 是一个最小分次自由分解。

对于任意最小分次自由分解 $F_\bullet \to M$，令 $N_i = \mathrm{im}\ \partial_i$ 表示 $i \geq 0$，于是 $N_0 = M$。我们有$\partial_i(A_+F_i) = A_+N_i$，且 $\ker\partial_i = \mathrm{im}\ \partial_{i+1} \subseteq A_+F_i$。由此可知，由 ∂_i 诱导的映射 $F_i/A_+F_i \to N_i/A_+N_i$是一个同构。取 D维数，得到

$$\mathrm{rank}_A F_i = \dim_D(F_i/A_+F_i) = \dim_D(N_i/A_+N_i).$$

根据 (2)，F_i 的秩与极小分解的选择无关。 □

2.3 贝蒂数与 Hilbert 级数

对于模 M，记 $H_M(t) = \sum_{j\in\mathbb{Z}}(\dim_D M_j)t^j$ 为其 Hilbert 级数。由于每个 M_j 都是有限个 A 移位的有限直和的分次商模，并且对每个 j 都有 $\dim_D A_j < \infty$，因此每个 M_j 都是 D 上的有限维向量空间。设 $F_\bullet \to M$ 为一个最小分次自由分解，其中 $F_i \cong \bigoplus_j A(-j)^{b_{i,j}}$。这里，$i$ 表示同调次数，j 表示内次数。$D \otimes_A F_\bullet$ 上的分次诱导出.....上的内分次

$$\operatorname{Tor}_i^A(D, M) = H_i(D \otimes_A F_\bullet) \quad \text{for } i \geq 0.$$

根据命题 2.10(2)，任意两个极小分解之间都存在一个次数为 0、提升 id_M 的链同构。将其与 D 张量化后，该映射在同调上诱导出一个分次同构。

对于极小分解，由命题 2.10(1)，我们得到 $D\otimes_A \partial_i = 0$ for $i \geq 1$。因此，次数 i 的同调为 $D \otimes_A F_i$。利用 $D \otimes_A A(-j) \cong D(-j)$，我们得到

$$\operatorname{Tor}_i^A(D, M) \cong \bigoplus_j D(-j)^{b_{i,j}} \quad \text{and} \quad b_{i,j} = \dim_D\big(\operatorname{Tor}_i^A(D, M)_j\big).$$

定义 2.11（贝蒂数）。我们用 $\beta_{i,j}^A(M) = b_{i,j}$ 表示分次贝蒂数，用 $\beta_i^A(M) = \sum_j \beta_{i,j}^A(M)$ 表示总贝蒂数，并用 $\beta^A(M)$ 表示贝蒂表；另见 [6, 定义 12.1]。

下面的命题 2.13 表明，极小分解是有限的。

定义 2.12。对于 $M \neq 0$，置

$$\operatorname{pd}_A(M) = \max\{i \mid \beta_{i,j}^A(M) \neq 0 \text{ for some } j\} \quad \text{and} \quad \operatorname{reg}_A(M) = \max\{j - i \mid \beta_{i,j}^A(M) \neq 0\}.$$

第二个不变量是根据最小分解定义的正则性，正如 [10, §20.5] 中所述。

设 $F_\bullet$ 是 $M \neq 0$的有限最小分次自由分解，并令 $s = \max\{i \mid F_i \neq 0\}$。由于 $F_s \neq 0$，至少有一个 $\beta_{s,j}^A(M)$ 为正。根据 Tor 公式，

$$\operatorname{Tor}_s^A(D, M) \cong D \otimes_A F_s \cong \bigoplus_j D(-j)^{\beta_{s,j}^A(M)} \neq 0.$$

长度小于 s 的投射分解在与 D进行张量化后，会在次数 s 处具有零同调。由于 $F_\bullet$ 的长度为 s，我们有 $\operatorname{pd}_A(M) = s$，正如交换局部情形 [10,推论 19.5]中所述。用贝蒂数表示，$\operatorname{pd}_A(M) = \max\{i \mid \beta_{i,j}^A(M) \neq 0$，其中某个 $j\}$成立。

如果对于某个 $i \geq 0$有 $\partial_{i+1} = 0$，则正合性和最小性意味着

$$F_{i+1} = \ker \partial_{i+1} = \operatorname{im} \partial_{i+2} \subseteq A_+F_{i+1}.$$

由分次中山引理，$F_{i+1} = 0$。特别地，若 $F_i = 0$，则 $\partial_{i+1} = 0$，并且通过归纳可知，对所有 $j > i$，$F_j = 0$。

命题 2.13。每个有限生成的分次左 A-模都有一个长度至多为 n 的极小分次自由分解。特别地，对于 $M \neq 0$，$\operatorname{pd}_A(M) \leq n$。

证明。环 R的左整体维数为 $\operatorname{l.gl.dim}(R) = \sup_N \operatorname{pd}_R(N)$，其中 N遍历所有左 R-模 [9, 定理 4.1.2 后的注记，第 92] 页。由于每个左 D-模都是自由的，$\operatorname{l.gl.dim}(D) = 0$。根据 [9, 定理 4.3.7], $\operatorname{l.gl.dim}(A) = n$，当 $A = D[x_1, \ldots, x_n]$ 具有中心不定元时。因此，对于 $i > n$，$\operatorname{Tor}_i^A(D, M) = 0$。令 $F_\bullet \to M$为一个极小分次自由分解，它由命题 2.10(3)保证存在。对于 $i > n$，Tor 公式意味着

$$0 = \operatorname{Tor}_i^A(D, M) \cong D \otimes_A F_i \cong \bigoplus_j D(-j)^{\beta_{i,j}^A(M)}.$$

$A(-j)$ 的每个直和项都会对这个直和贡献一个非零项 $D(-j)$。因此，对于 $i > n$， $F_i = 0$。该分解的长度至多为 n，所以当 $M \neq 0$ 时，$\mathrm{pd}_A(M) \leq n$。 □

定义 2.14。长度为 s 的最小分次自由分解是纯的，类型为 $(d_0, \ldots, d_s)$，如果 $F_i \cong A(-d_i)^{\beta_i}$，其中 $\beta_i > 0$ 对 $0 \leq i \leq s$成立；参见 [4, 定义 5.4，第 426] 页。于是 $d_0 < \cdots < d_s$。

对于 $0 \leq i < s$，我们有 $F_{i+1} \neq 0$。由于 $\partial_{i+1} = 0$ 会推出 $F_{i+1} = 0$，矩阵 ∂_{i+1} 有一个非零项 a。根据引理 2.7，$\deg a = d_{i+1} - d_i$。由于根据最小性有 $a \in A_+$，因此 $d_{i+1} - d_i > 0$。贝蒂表确定了 s，并且对每个 $0 \leq i \leq s$，确定次数 j，使得 $\beta_i^A{}_{,\,j}(M) \neq 0$。纯性意味着在这些同调次数中，每个次数都恰有一个这样的次数，而这些次数按顺序构成类型。

命题 2.15。有限生成的分次左 A-模 M 具有有限长度，当且仅当维数$_D\, M < \infty$。在这些条件下，H_M 是一个 *Laurent* 多项式，且维数$_D\, M = H_M(1)$。

证明。设 $\dim_D M < \infty$。对于 M的 A-子模 $L \subsetneq N$，有 $\dim_D L < \dim_D N$。因此，从 0 到 M 的严格链至多包含 $\dim_D M$次包含关系。取长度最大的链 $0 = U_0 \subsetneq \cdots \subsetneq U_\ell = M$。 U_j/U_{j-1} 的非零真子模会提升为严格介于 U_{j-1} 和 U_j之间的子模。因此，该链是一个合成列。

反之，设 M具有有限长度。以 $A_+^0 M = M$开头的子模降链 $A_+^r M$最终稳定。取 $r \geq 0$使得 $A_+^r M = A_+^{r+1} M$，并令 $N = A_+^r M$。于是

$$N = A_+^r M = A_+^{r+1} M = A_+ N.$$

子模 N 是分次且有限生成的，因为 M 是诺特的。因此，命题 2.9(2) 推出 $N = 0$。如果 $|\alpha| \geq r$，那么 x^α 可被 r 个变量的乘积整除，因此 $x^\alpha \in A_+^r$ 且 $x^\alpha M = 0$。如果 m_1、.....、m_k 是 M 的齐次生成元，那么满足 $|\alpha| < r$ 的元素 $x^\alpha m_i$ 因此在 D 上张成 M，所以 $M = \sum_{i=1}^k \sum_{|\alpha|<r} D x^\alpha m_i$。这是有限和，因此 $\dim_D M < \infty$。

$M = \bigoplus_j M_j$ 中只有有限多个分量非零。因此， $H_M(t)$ 是 Laurent 多项式，并且 $H_M(1) = \sum_j \dim_D M_j = \dim_D M$。 □

2.4 更换生成元

为了计算同一理想的另一组生成元所对应的齐次关系，我们用另一组生成元来表示每一组生成元。以下公式对任意含幺环都成立。左 PBW 环和交换多项式环对应的公式分别见 [5, §4.2, (4.3)] 和 [13, 第 5 章，§3，命题 (3.8)]。

定义 2.16（关系子）。设 R 是含幺环， $H \in R^{k\times 1}$ 是列向量。 H 的一个左 *Syzgy*是满足 $uH = 0$ 的行 $u \in R^{1\times k}$。这些行构成左 R-模

$$\mathrm{Syz}_{\ell,R}(H) = \{u \in R^{1\times k} \mid uH = 0\}.$$

对于 $R = A$，我们记作 $\mathrm{Syz}_\ell(H)$；当列向量已知时，也记作 $\mathrm{Syz}_\ell(h_1, \ldots, h_k)$。若 P 是一个有 k 列的矩阵，则 $\mathrm{Row}_R(P) \subseteq R^{1\times k}$ 表示由其各行生成的左子模。

命题 2.17。设 R 是含幺环， $F \in R^{s\times 1}$，且 $G \in R^{m\times 1}$。假设 $F = UG$ 和 $G = VF$，其中 $U \in M_{s\times m}(R)$ 且 $V \in M_{m\times s}(R)$。那么

$$\mathrm{Syz}_{\ell,R}(F) = \mathrm{Syz}_{\ell,R}(G)V + \mathrm{Row}_R(I_s - UV),$$
$$\mathrm{Syz}_{\ell,R}(G) = \mathrm{Syz}_{\ell,R}(F)U + \mathrm{Row}_R(I_m - VU).$$

特别地，如果 $UV = I_s$，那么 $\mathrm{Syz}_{\ell,\,R}(F) = \mathrm{Syz}_{\ell,\,R}(G)V$。如果 $w_1, \ldots, w_k$生成 $\mathrm{Syz}_{\ell,\,R}(G)$，那么$w_1V, \ldots, w_kV$连同 $I_s - UV$ 的各行生成 $\mathrm{Syz}_{\ell,\,R}(F)$。

证明。对于 $w \in \mathrm{Syz}_{\ell,\,R}(G)$，有 $(wV)F = wG = 0$。又有 $(I_s - UV)F = F - UG = 0$，因此 $I_s - UV$ 的每一行都属于 $\mathrm{Syz}_{\ell,\,R}(F)$。于是 $\mathrm{Syz}_{\ell,\,R}(G)V + \mathrm{Row}_R(I_s - UV) \subseteq \mathrm{Syz}_{\ell,\,R}(F)$。反过来，取 $u \in \mathrm{Syz}_{\ell,\,R}(F)$。则 $(uU)G = uF = 0$，并且

$$u = (uU)V + u(I_s - UV).$$

第一项属于齐次关系 $_{\ell,\,R}(G)V$。第二项是 $I_s - UV$ 的各行的一个左 R-线性组合。这证明了反向包含。第二个等式通过交换 F 与 G 以及 U 与 V 得到。

如果 $w_1, \ldots\ldots, w_k$ 生成齐次关系 $_{\ell,\,R}(G)$，那么由右乘 V 的左 R-线性性可知，齐次关系 $_{\ell,\,R}(G)V = \sum_{j=1}^{k} R(w_j V)$。因此，$w_j V$ 的各行以及 $I_s - UV$ 的各行生成齐次关系 $_{\ell,\,R}(F)$。当 $UV = I_s$ 时，行模 $\mathrm{Row}_R(I_s - UV)$ 为零，因此齐次关系 $_{\ell,\,R}(F)$ = 齐次关系 $_{\ell,\,R}(G)V$。 □

2.5 Gröbner 基的齐次关系

我们计算左 Gröbner 基的齐次关系。然后，§ 2.4 中的公式确定同一理想的另一个生成列表的齐次关系。

定义 2.18（Gröbner 基）。设 $J \subseteq A$ 为一个左理想。J 中非零元素的一个有限有序列表 $H = (h_1, \ldots\ldots, h_m)$（允许重复）称为 J 的一个左 ***Grö¨bner* 基**，如果对于每个非零 $r \in J$，都存在某个 h_i，使得 $\mathrm{LM}(r)$ 被其整除。相对于 $\prec$，J 的初始理想 为 $\mathrm{in}_{\prec}(J) = \sum_{0 \neq r \in J} A\,\mathrm{LM}(r)$。

设 $G = (g_1, \ldots\ldots, g_m)^t$ 是一列首一多项式，$e_1, \ldots\ldots, e_m$ 是 $A^{1\times m}$ 的标准基。模单项式是一个元素 $x^\alpha e_i$；若 $i = j$ 且 $x^\alpha \mid x^\beta$，则它整除 $x^\beta e_j$。与交换情形 [13, Chapter 5, §3, Theorem (3.3)]，中一样，通过规定 $x^\alpha e_i \prec_G x^\beta e_j$（当且仅当 $x^\alpha \mathrm{LM}(g_i) \prec x^\beta \mathrm{LM}(g_j)$，或这两个乘积相等且 $i > j$）来定义施赖尔序。在此序下，记 LM_G、LC_G 和 LT_G 分别为首单项式、首项系数和首项。系数写在左侧。子模的左 Gr¨obner 基由首项模单项式的整除关系定义。

引理 *2.19*。*</style}*序 $\prec_G$ 是模单项式上的单项式序。

证明。对于模单项式 $u = x^\alpha e_i$，令 $w(u) = x^\alpha \mathrm{LM}(g_i)$。有序对 $(w(u), -i)$ 确定了 u，因为 $x^\alpha = w(u)/\mathrm{LM}(g_i)$。对这些有序对进行字典序比较，定义了全序 $\prec_G$。乘以 x^γ 会固定基索引，并满足 $w(x^\gamma u) = x^\gamma w(u)$。由 $\prec$ 的乘法性，$u \prec_G v$ 推出 $x^\gamma u \prec_G x^\gamma v$。

设 U 是一个非空的模单项式集合。选取 $u_0 = x^{\alpha_0} e_{i_0} \in U$，使得 $w(u_0) = \min_{\prec}\{w(u) \mid u \in U\}$，并令 i_0 尽可能大。由于 $\prec$ 是良序，且这些指标属于 $\{1, \ldots, m\}$，因此这样的选取是可行的。对于 $u = x^\alpha e_i \in U$，有 $w(u_0) \preceq w(u)$；若 $w(u_0) = w(u)$，则 $i_0 \geq i$。因此，对于每个 $u \in U$，都有 $u_0 \preceq_G u$。 □

对于 $0 \neq a \in A$ 和 $0 \neq s \in A^{1\times m}$，设 $\mathrm{LT}(a) = cx^\gamma$ 和 $\mathrm{LT}_G(s) = dx^\alpha e_{i_0}$。$a$ 的单项式 x^η 与 s 的单项式 $x^\beta e_j$ 的每个乘积都满足 $x^{\eta+\beta} e_j \preceq_G x^{\eta+\alpha} e_i \preceq_G x^{\gamma+\alpha} e_{i_0}$。当且仅当 $\eta = \gamma$ 和 $(\beta,\ j) = (\alpha,\ i)$ 时，等号处处成立。因此，as 中 $x^{\gamma+\alpha} e_i$ 的系数为 $cd \neq 0$，所以 $\mathrm{LT}_G(as) = \mathrm{LT}(a)\,\mathrm{LT}_G(s)$。

引理 2.20. 设 $g_1, \ldots, g_m \in A$ 均为首一，且设 $f \in A$。存在一个表达式 $f = \sum_k q_k g_k + \rho$，使得 ρ 中没有任何单项式可被任何 $\mathrm{LM}(g_k)$ 整除。若 $f \neq 0$，则当 $q_k \neq 0$ 时，$\mathrm{LM}(q_k)\,\mathrm{LM}(g_k) \preceq \mathrm{LM}(f)$。对于 $f = 0$，令所有 q_k 和 ρ 均为零。若 g_k 构成 J 的左 ***Gr¨obner* 基**，且 $f \in J$，则 $\rho = 0$。特别地，J 的左 ***Gr¨obner* 基**生成 J。

证明. 对于 $f=0$，令所有 q_k 和 ρ 均为零。设 $f\neq 0$。从 $h=f$ 和 $q_1=\cdots=q_m=\rho=0$ 开始。左除法算法 [5, §4.1，算法 3] 推出等式

$$f=\sum_{k=1}^{m} q_k g_k + h + \rho.$$

若 $h\neq 0$，则记 LT(h) $=cx^{\gamma}$。当 LM(g_k) $=x^{\delta_k}$ 整除 x^{γ}时，将 $cx^{\gamma-\delta_k}$ 加到 q_k 上，并从 h中减去$cx^{\gamma-\delta_k}g_k$。由于 g_k 是首一的，被减去的多项式的首项为 cx^{γ}。如果没有 LM(g_k) 整除 x^{γ}，则从 h 中减去 cx^{γ}，并将其加到 ρ上。

每一步都保持等式不变，并且只要新的 h非零，就会严格减小 LM(h)。由于 $\prec$ 是良序，该过程最终以 $h=0$结束。ρ 中的每个单项式都来自这样的一步：没有 LM(g_k) 整除它。最终 q_k 中的每个单项式 x^{η}，都是在减法之前满足 x^{η}LM(g_k) =LM(h) $\preceq$LM(f)的一步中加入的。特别地，只要 $q_k\neq 0$，就有 LM(q_k) LM(g_k) $\preceq$LM(f)。

如果 g_k构成 J和 $f\in J$的左 Gr¨obner 基，那么 $\rho=f-\sum_k q_k g_k\in J$。对于 $\rho\neq 0$，根据 Gr¨obner 基的性质，某个 LM(g_k) 将整除 LM(ρ)。ρ的构造排除了这种情况，因此 $\rho=0$。于是 $J=\sum_k Ag_k$。 □

x^{α} 和 x^{β} 的 最小公倍数 是 lcm(x^{α}, x^{β}) $=x^{\gamma}$，其中 $\gamma_i=\max(\alpha_i,\ \beta_i)$。它整除每一个单项式公倍数。对于 $i<j$，令 $m_{ij}=$ lcm(LM(g_i)，LM(g_j))，并通过 μ_{ij} LM(g_i) $=m_{ij}=\nu_{ij}$ LM(g_j) 定义 μ_{ij}，ν_{ij}。左 S-多项式 为 $S_\ell(g_i,\ g_j)=\mu_{ij}g_i-\nu_{ij}g_j$。按照第 2 章 §9 定义 5 第 107], 页中的交换定义， $S_\ell(g_i,\ g_j)$ 的一个 最小公倍数表示 是一个表达式

$$S_\ell(g_i,g_j)=\sum_{k=1}^{m} q_{ijk}g_k,\qquad \mathrm{LM}(q_{ijk})\,\mathrm{LM}(g_k)\prec m_{ij}\quad \text{whenever } q_{ijk}\neq 0.$$

当 g_k 构成左 Gr¨obner 基时，引理 2.20 给出一个最小公倍数表示，因为$S_\ell(g_i,\ g_j)=0$或 LM($S_\ell(g_i,\ g_j)$) $\prec m_{ij}$。对每一对固定一个这样的表示，并令 $s_{ij}=\mu_{ij}e_i-\nu_{ij}e_j-\sum_k q_{ijk}e_k$。

命题 2.21。设 G 是由其元素生成的左理想的首一左 *Gr¨obner* 基，并为每一对 $i<j$固定一个最小公倍数表示。那么， $\{s_{ij}\}_{i<j}$ 是关于 $\prec_G$ 的 $\mathrm{Syz}_\ell(G)$ 的首一左 *Gr¨obner* 基，并且 $\mathrm{Syz}_\ell(G)=\sum_{i<j}As_{ij}$。若 $m=1$，则此模为零。

证明。构造与 [5, §4.2 中的推论 6]相同。这里 $s_{ij}G=0$，而所选最小公倍数表示中的界保证了 $\sum_k q_{ijk}e_k$ 的每一项都严格小于 $\mu_{ij}e_i$，且属于 $\prec_G$。由于 μ_{ij} LM(g_i) $=\nu_{ij}$LM(g_j) $=m_{ij}$ 并且 $i<j$，因此 LT$_G$(s_{ij}) $=\mu_{ij}e_i$。

设 $0\neq s=(a_1,\ \ldots\ldots,\ a_m)\in\mathrm{Syz}_\ell(G)$，并令 $T=\max_{a_k\neq 0}$LM(a_k) LM(g_k)。T在 sG中的系数为零。由于每个首单项式为 T 的加项都会贡献一个非零系数，因此至少有两个指标取得 T。令 i 为其中最小的指标，并选取另一个取得T的指标 $j>i$。LM(g_i) 和 LM(g_j) 都整除 T，因此 $m_{ij}\mid T$。根据平局规则，

$$\mathrm{LM}_G(s)=\mathrm{LM}(a_i)e_i=(T/m_{ij})\mu_{ij}e_i=(T/m_{ij})\,\mathrm{LM}_G(s_{ij}).$$

减去 LC(a_i)$(T/m_{ij})s_{ij}$ 后会消去 LT$_G$(s)，并留下一个关系子。引理 2.19 中的良序保证反复约化最终会得到零。因此，s_{ij} 生成 Syz$_\ell$(G)，且它们的首项模单项式满足所需的整除关系。若 $m=1$，则不可能存在非零关系子，因为A 是整环且 $g_1\neq 0$。

□

命题 2.22. 设 $H=(h_1,\dots,h_m)^t$ 是由首一多项式组成的列向量，并令 $J=\sum_i Ah_i$。若每个满足 $i<j$ 的 $S_\ell(h_i,h_j)$ 都有关于 H 的最小公倍数表示，则 H 是 J 的首一左 *Gr¨obner* 基。

证明。交换情形的 Buchberger 判据使用最小公倍数表示 [12, 第 2 章 §9，定理 6]。对于左 PBW 环，该判据以将S-多项式约化为零的形式表述 [5, §4.2，定理 7]。对于 $i<j$，令 $m_{ij}=\mathrm{lcm}(\mathrm{LM}(h_i),\mathrm{LM}(h_j))$。对于$0\neq r\in J$，选取一个表达式 $r=\sum_k a_kh_k$，使得 $T=\max^{a_k\neq 0}\mathrm{LM}(a_k)\,\mathrm{LM}(h_k)$ 最小。令 Λ 为达到 T的指标集合。对于 $k\in\Lambda$，写作 $\mathrm{LT}(a_k)=c_kn_k$。如果 $\sum_{k\in\Lambda}c_k\neq 0$，则 $\mathrm{LM}(r)=T$ 且 $\mathrm{LM}(h_k)\mid\mathrm{LM}(r)$，对于 $k\in\Lambda$。

设 $\sum_{k\in\Lambda}c_k=0$，并令 $i=\min\Lambda$。则对于 $j\in\Lambda\smallsetminus\{i\}$，有 $m_{ij}\mid T$，且

$$\sum_{k\in\Lambda}c_kn_kh_k=-\sum_{j\in\Lambda\smallsetminus\{i\}}c_j(T/m_{ij})S_\ell(h_i,h_j).$$

用所选的最小公倍数表示写出 $S_\ell(h_i,h_j)=\sum_k q_{ijk}h_k$。于是，只要 $q_{ijk}\neq 0$，就有 $\mathrm{LM}(q_{ijk})\,\mathrm{LM}(h_k)\prec m_{ij}$。因此，$\mathrm{LM}(c_j(T/m_{ij})q_{ijk})\,\mathrm{LM}(h_k)\prec T$。对 $k\in\Lambda$，从 a_k中减去 c_kn_k，并代入上面显示的和。所得表达式 $r=\sum_k a'_kh_k$ 的 $\max^{a'_k\neq 0}\mathrm{LM}(a'_k)\,\mathrm{LM}(h_k)\prec T$，这与 T的选取矛盾。因此，适用非零系数的情形。 □

命题 2.23。$\prec\mathrm{in}J(J)$ 之外的单项式是 J 相对于 $\prec$的标准单项式 。如果 J 有一个首一左 *Gr¨obner* 基，则它们的等价类构成 A/J的左 D-基。

证明。 设 $H=(h_1,\dots,h_m)^t$是 J的首一左 Gr¨obner 基。由于 $h_i\in J$，每个 $A\,\mathrm{LM}(h_i)$ 都包含在 $\mathrm{in}_\prec(J)$ 中。反过来，对于每个 $0\neq f\in J$，都有某个 $\mathrm{LM}(h_i)$ 整除 $\mathrm{LM}(f)$，因此 $A\,\mathrm{LM}(f)\subseteq A\,\mathrm{LM}(h_i)$。于是 $\mathrm{in}_\prec(J)=\sum_{i=1}^m A\,\mathrm{LM}(h_i)$。根据 A的单项式基，这个理想中的单项式恰好是至少能被一个 $\mathrm{LM}(h_i)$ 整除的单项式。令 W 为标准单项式的左 D-张成空间。

由引理 2.20，每个 $f\in A$ 都可以写成 $f=\sum_i q_ih_i+\rho$，其中 $\rho\in W$。因此 $A=J+W$。若 $0\neq r\in J\cap W$，则 $\mathrm{LM}(r)\in$ 在 $\prec(J)$ 中，因为 $r\in J$。但 $\mathrm{LM}(r)$ 是标准单项式，因为 $r\in W$。于是 $J\cap W=0$，且商映射限制为左 D-向量空间之间的一个同构

$$W\xrightarrow{\sim}A/J\quad\text{defined by}\quad w\longmapsto w+J.$$

标准单项式构成 W 的一组基，因此它们的类构成 A/J 的一组左 D-基，这与域上的多项式环情形相同 [13,第 2 章，§2]。 □

3 齐次关系与极小分解

设 D 是一个除环，令 $A=D[x,y,z]$，其中 x，y，z 是次数为 1 的中心不定元。固定一个满足 $z\prec y\prec x$ 的单项式序。对于正整数 p，q 和 a，$b\in D$，令

$$f=x^p+az^p,\qquad g=y^q+bz^q,\qquad \kappa=ba-ab,\qquad I=Af+Ag,\qquad M=A/I.$$

如果 $\kappa\neq 0$，因子 κ^{-1} 不必是中心的，因此在诸如 $f\kappa^{-1}g$ 这样的乘积中，因子的顺序很重要。

由于 f和 g 具有正次数，$I\subseteq A_+$ 和 $M/A_+M\cong A/A_+\cong D$ 的次数为零。因此$\beta_0^A{}_{,\,0}(M)=1$。序关系 $z\prec y\prec x$ 意味着 $z^p\prec x^p$ 和 $z^q\prec y^q$。于是 f 和 g 是首一的，其首项单项式分别为 x^p和 y^q。在 $gf-fg$的展开式中，涉及 x^p或 y^q的项相互抵消，因此$gf-fg=\kappa z^{p+q}$。由于 x^p和 y^q互素，它们的最小公倍数是 x^py^q，并且

$$S_\ell(f,g)=y^qf-x^pg=gf-fg-(bz^q)f+(az^p)g=(-bz^q)f+(az^p)g+\kappa z^{p+q}.$$

命题 3.1。 如果 $\kappa = 0$，那么 $\{f, g\}$ 是 I 的首一左 *Gr¨obner* 基，并且 属于$\prec(I) = Ax^p + Ay^q$。

证明。 当 $\kappa = 0$ 时，左 S-多项式的公式化简为 $S_\ell(f, g) = (-bz^q)f + (az^p)g$。将 $z^q \prec y^q$ 乘以 x^p，并将 $z^p \prec x^p$ 乘以 y^q，我们得到

$$\begin{aligned} \mathrm{LM}(-bz^q)\,\mathrm{LM}(f) = x^p z^q \prec x^p y^q \quad \text{if } b \neq 0, \\ \mathrm{LM}(az^p)\,\mathrm{LM}(g) = z^p y^q \prec x^p y^q \quad \text{if } a \neq 0. \end{aligned}$$

这些不等式表明， $S_\ell(f, g)$ 的表达式是一个最小公倍数表示。根据命题 2.22， $\{f, g\}$ 是 I 的首一左 Gr¨obner 基。因此， $\mathrm{in}_\prec(I) = A\,\mathrm{LM}(f) + A\,\mathrm{LM}(g) = Ax^p + Ay^q$。

□

命题 3.2。 若 $\kappa \neq 0$，令 $h = z^{p+q}$。则 $h = (\kappa^{-1}g)f - (\kappa^{-1}f)g \in I$, f, g, h 构成 I 的首一左 *Gr¨obner* 基，并且 $\mathrm{in}_\prec(I) = Ax^p + Ay^q + Ah$。

证明。 假设 $\kappa \neq 0$并令 $h = z^{p+q}$。由 $gf - fg = \kappa h$可得 $h = (\kappa^{-1}g)f - (\kappa^{-1}f)g$。两个系数的次数均为正，因此 $h \in A_+I \subseteq I$。由于 $\mathrm{LM}(f) \nmid h$且 $\mathrm{LM}(g) \nmid h$， $\{f, g\}$ 不是 I的左 Gr¨obner 基。

多项式 f, g, h 生成 I。它们的首单项式 x^p, y^q, h 两两互素，因此三个配对的最小公倍数分别为 $x^p y^q$、 $x^p h$ 和 $y^q h$。相应的左 S-多项式为

$$\begin{aligned} S_\ell(f, g) &= (-bz^q)f + (az^p)g + \kappa h, \\ S_\ell(f, h) &= hf - x^p h = (az^p)h, \\ S_\ell(g, h) &= hg - y^q h = (bz^q)h. \end{aligned}$$

由于 $\kappa \neq 0$， a 和 b 均非零。 $S_\ell(f, g)$的表达式中三个加项的首单项式分别为 $x^p z^q$、 $z^p y^q$ 和 h。根据单项式序的乘法性， $z^p \prec x^p$和 $z^q \prec y^q$ 推出

$$h = z^p z^q \prec x^p z^q \prec x^p y^q \quad \text{and} \quad z^p y^q \prec x^p y^q.$$

$(az^p)h$ 的首单项式是 $z^p h \prec x^p h$，而 $(bz^q)h$ 的首单项式是 $z^q h \prec y^q h$。因此，这三个表达式都是最小公倍数表示。根据命题 2.22， $\{f, g, h\}$ 是I的首一左 Gr¨obner 基。其首单项式生成了 $\mathrm{in}_\prec(I) = Ax^p + Ay^q + Ah$。

□

定理 3.3。 沿用上述记号，有以下结论。

(1) 若 $\kappa = 0$，则 $\{f, g\}$ 是 I的首一左 *Gr¨obner* 基，且 M 具有如下最小分次自由分解

$$0 \longrightarrow A(-(p+q)) \xrightarrow{\cdot(g,-f)} A(-p) \oplus A(-q) \xrightarrow{\cdot(f,g)^t} A \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

其中 $H_M(t) = (1-t^p)(1-t^q)(1-t)^{-3}$， $\mathrm{pd}_A(M) = 2$， $\mathrm{reg}_A(M) = p+q-2$，且 $\dim_D M = \infty$。若 $p \neq q$，则非零分次贝蒂数为 $\beta^A_{0,0} = 1$, $\beta^A_{1,p} = \beta^A_{1,q} = 1$， 以及 $\beta^A_{2,p+q} = 1$。若$p = q = d$，则它们为 $\beta^A_{0,0} = 1$, $\beta^A_{1,d} = 2$， 以及 $\beta^A_{2,2d} = 1$。总贝蒂数为 *(1, 2,1)*。

*(2) </style}*若 $\kappa \neq 0$，令 $h = z^{p+q}$。多项式 f、 g、 h 构成 I 的首一左 *Gr¨obner* 基，而 M 具有最小分次自由分解

$$0 \to A(-2p-2q) \xrightarrow{\cdot P_3} A(-(2p+q)) \oplus A(-(p+2q)) \xrightarrow{\cdot P_2} A(-p) \oplus A(-q) \xrightarrow{\cdot P_1} A \to M \to 0,$$

其中

$$P_1 = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \qquad P_3 = \begin{pmatrix} -\kappa^{-1}g & \kappa^{-1}f \end{pmatrix}, \qquad P_2 = \begin{pmatrix} h - f\kappa^{-1}g & f\kappa^{-1}f \\ -g\kappa^{-1}g & h + g\kappa^{-1}f \end{pmatrix}.$$

此外，$H_M(t) = (1-t^p)(1-t^q)(1-t^{p+q})(1-t)^{-3}$，$\dim_D M = pq(p+q)$，$\mathrm{pd}_A(M) = 3$，且 $\mathrm{reg}_A(M) = 2p+2q-3$。若 $p \neq q$，非零分次贝蒂数为 $\beta^A_{0,0} = 1, \beta^A_{1,p} = \beta^A_{1,q} = 1$，$\beta^A_{2,2p+q} = \beta^A_{2,p+2q} = 1$，以及 $\beta^A_{3,2p+2q} = 1$。若 $p = q = d$，则它们为 $\beta^A_{0,0} = 1, \beta^A_{1,d} = 2$，$\beta^A_{2,3d} = 2$，以及 $\beta^A_{3,4d} = 1$。总贝蒂数为 *(1, 2,2, 1)*。

证明。情形 $\kappa = 0$。令 $C = (f, g)^t$。由命题 3.1，$\{f, g\}$ 是 I 的单项式左 Gr¨obner 基。根据最小公倍数表示 $S_\ell(f, g) = (-bz^q)f + (az^p)g$，命题 2.21 表明，$\mathrm{Syz}_\ell(C)$ 由 $s_{12} = y^q e_1 - x^p e_2 - \big((-bz^q)e_1 + (az^p)e_2\big) = (g, -f)$ 生成。C的各项次数为 p, q，而 s_{12} 的各项次数为 $q = (p+q) - p$ 和 $p = (p+q) - q$。因此，根据引理 2.7，这两个映射的次数均为零。

由于 $s_{12}C = gf - fg = 0$，这些映射构成一个复形。在 $A(-p) \oplus A(-q)$ 处以及在 A处的正合性分别由 $\mathrm{im}\ \rho_{s_{12}} = As_{12} = \ker \rho_C$和 $\mathrm{im}\ \rho_C = I = \ker(A \to M)$推出。若 $us_{12} = 0$，则 $ug = 0$，因此根据推论 2.5(1)和 $g \neq 0$，有$u = 0$。结合 $A \to M$的满射性，即可证明正合性。C和 s_{12} 的元素均属于 A_+，因为 $p, q \geq 1$，所以根据命题 2.10(1)，该分解是极小的。

根据命题 2.23，对于 $0 \leq i < p$、$0 \leq j < q$和 $k \geq 0$，$x^i y^j z^k$ 的类构成 M的左D-基。该基是无限的。按次数计算其元素个数，我们得到

$$H_M(t) = \left(\sum_{i=0}^{p-1} t^i\right)\left(\sum_{j=0}^{q-1} t^j\right)\left(\sum_{k\geq 0} t^k\right) = \frac{(1-t^p)(1-t^q)}{(1-t)^3}.$$

根据定义 2.11，分次贝蒂数分别统计对应同调次数下列表 (0)、(p, q) 和 $(p+q)$ 中的移位。若 $p \neq q$，则同调次数为一的两个移位分别计数；若 $p = q = d$，则它们在 d 处按重数二计数。总贝蒂数为 (1，2，1)，因此 $\mathrm{pd}_A(M) = 2$。由于 $p, q \geq 1$，我们有 $\mathrm{reg}_A(M) = \max\{0, p-1, q-1, p+q-2\} = p+q-2$。

情形 $\kappa \neq 0$。令 $h = z^{p+q}$ 和 $G = (f, g, h)^t$。根据命题 3.2，G 的各项构成 I 的一个首一左 Gr¨obner 基。记 $C = P_1 = (f, g)^t$ 和 $R = P_3 = (-\kappa^{-1}g, \kappa^{-1}f)$。

步骤 *1.* 复形及其分次。这些矩阵满足 $P_2 = hI_2 + CR$和 $RC = \kappa^{-1}(fg - gf) = -h$。由于 h 是中心的，

$$P_2P_1 = hC + C(RC) = hC - Ch = 0,$$
$$P_3P_2 = Rh + (RC)R = Rh - hR = 0.$$

P_1 的元素依次属于 A_p, A_q，而 P_3 的元素属于 A_q, A_p。由于 $h \in A_{p+q}$ 和$\kappa^{-1} \in A_0$，P_2 的元素属于指标为

$$\begin{pmatrix} p+q & 2p \\ 2q & p+q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2p+q)-p & (2p+q)-q \\ (p+2q)-p & (p+2q)-q \end{pmatrix}.$$

这些指标以及 P_1, P_3 对应的指标，都是源移位减去目标移位。因此，根据引理 2.7，这三个映射的次数均为零。

步骤 *2.* 在 $F_1 = A(-p) \oplus A(-q)$处的正合性。要计算 $\ker \rho_{P_1}$，取

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \kappa^{-1}g & -\kappa^{-1}f \end{pmatrix}.$$

于是 $C = UG$和 $UV = I_2$。 VC的最后一个元素是 $(\kappa^{-1}g)f - (\kappa^{-1}f)g = h$，因此 $G = VC$。最后一行各元素的次数分别为 $q = (p+q)-p$ 和 $p = (p+q)-q$。因此 $\rho_V\colon\ F_1 \oplus A(-(p+q)) \to F_1$ 根据引理 2.7，次数为零。

根据命题 2.21，与命题 3.2 中的最小公倍式表示相关的齐次关系生成 $\mathrm{Syz}_\ell(G)$。它们是

$$s_{12} = (g, -f, -\kappa), \qquad s_{13} = (h, 0, -f), \qquad s_{23} = (0, h, -g).$$

它们在右乘 V 后的像为

$$\begin{aligned} s_{12}V &= (0, 0), \\ s_{13}V &= (h - f\kappa^{-1}g, f\kappa^{-1}f), \\ s_{23}V &= (-g\kappa^{-1}g, h + g\kappa^{-1}f). \end{aligned}$$

最后两个像是 P_2 的各行。由 $UV = I_2$ 和命题 2.17 可得

$$\ker \rho_{P_1} = \mathrm{Syz}_\ell(C) = \mathrm{Syz}_\ell(G)V = \mathrm{Row}_A(P_2) = \operatorname{im} \rho_{P_2}.$$

步骤 *3.* 在 F_2 处的正合性。单位元 $P_3P_2 = 0$ 蕴含 $AR \subseteq \ker \rho_{P_2}$。对于反向包含，取 $s = (u,\ v) \in \ker \rho_{P_2}$，并令 $t = sC$。于是 $0 = sP_2 = hs + tR$。在第一个坐标中，该等式表示为 $hu = t\kappa^{-1}g$。

由于 h 是中心的，$Ah = hA$ 是一个双边理想，并且对于 $B = D[x, z]/(z^{p+q})$ 有 $A/Ah \cong B[y]$。用上横线表示模 Ah 约化。坐标单位元约化为

$$\overline{t}(\kappa^{-1}\overline{g}) = 0, \qquad \kappa^{-1}\overline{g} = \kappa^{-1}y^q + \kappa^{-1}b\overline{z}^q.$$

$\kappa^{-1}g$ 作为关于 y 的多项式，其首项系数为 $\kappa^{-1} \in B^\times$。由注记 2.6(1)，右乘该多项式是单射，因此 $t = 0$。将 $t = hw$ 写成 $w \in A$。于是 $0 = hs + tR = h(s + wR)$。由于 $h \neq 0$ 且 A 是整环，故 $s = -wR$。因此 $\ker \rho_{P_2} = AR = \operatorname{im} \rho_{P_3}$。

步骤 *4.* ρ_{P_3} 的单射性与最小性。若 $uR = 0$，则由第一个坐标可得 $u\kappa^{-1}g = 0$，因此 $u = 0$，因为 $\kappa^{-1}g \neq 0$ 且 A 是整环。在 A 处，$\operatorname{im} \rho_{P_1} = Af + Ag = I = \ker(A \to M)$，且商映射是满射。因此该序列正合。根据步骤 1 的次数计算，P_1, P_2, P_3 的所有项都属于 A_+，并且 $p, q \geq 1$。因此，根据命题 2.10(1)，该分解是极小的。根据命题 2.9(4)，f, g 构成 I的极小齐次生成集。

步骤 *5.* 贝蒂数和 *Hilbert* 级数。根据命题 3.2，初始理想为 $Ax^p + Ay^q + Ah$。I 的标准单项式是满足 $0 \leq i < p$、$0 \leq j < q$ 和 $0 \leq k < p + q$ 的 $x^iy^jz^k$。根据命题 2.23，它们的等价类构成了 M 的左 D基。按次数对这些 pq（$p + q$）个等价类进行计数，得到

$$H_M(t) = \left(\sum_{i=0}^{p-1} t^i\right)\left(\sum_{j=0}^{q-1} t^j\right)\left(\sum_{k=0}^{p+q-1} t^k\right) = \frac{(1-t^p)(1-t^q)(1-t^{p+q})}{(1-t)^3}.$$

同调次数 $0, 1, 2, 3$ 中的移位依次为 (0)、(p, q)、$(2p+q, p+2q)$ 和 $(2p+2q)$。对于 $p \neq q$，次数 1 和 2 中的两个移位各不相同。对于 $p = q = d$，它们在 d 和 $3d$ 处的重数分别为二。因此，分次贝蒂数如上所述，总数为 $(1, 2, 2, 1)$，且 $\mathrm{pd}_A(M) = 3$。最后，$p, q \geq 1$ 意味着

$$\begin{aligned} \mathrm{reg}_A(M) &= \max\{0, p-1, q-1, 2p+q-2, p+2q-2, 2p+2q-3\} \\ &= 2p + 2q - 3. \end{aligned}$$

□

对于 $\kappa \neq 0$，由正合性可知 $\operatorname{im}\rho_{P_2} = \operatorname{Syz}_\ell(f,g)$。由于该分解是极小的，命题 2.9(4) 表明，$P_2$ 的第 $s_{13}V$ 行和第 $s_{23}V$ 行构成 $\operatorname{Syz}_\ell(f,g)$ 的极小齐次生成集。

定理 3.3(2) 中的模的投射维数为三，其定义左理想有两个极小生成元。下面的引理描述了域上的相应商模。

引理 3.4. 设 $S = K[x_1,\dots,x_N]$，其中 K 是一个域且 $N \geq 1$，并设 M 是一个有限生成分次 S-模，满足 $\beta_0^S(M) = \beta_{0,0}^S(M) = 1$ 以及 $\beta_1^S(M) = 2$。那么 投射维数$_S(M) = 2$ 且$\beta_2^S(M) = 1$。

证明。设 $F_\bullet \to M$ 是一个最小分次自由分解。贝蒂数表明，$F_0 \cong S$和 $F_1 \cong S(-d)\oplus S(-d')$，其中 d, d'为某些整数。选取齐次基，并将映射 $\partial_1(r,s) = ru+sv$所定义的 ∂_1写为 $S(-d)\oplus S(-d')$。正合性意味着$M \cong S/(u,v)$，且根据命题 2.9(4)，u,v 是 (u,v) 的极小生成元。特别地，$u,v \neq 0$ 且$d,d' > 0$。

令 c 为 u,v 的最大公因式，并令 $e = \deg c$。则 c 是齐次的，因为 S 中非零齐次多项式的因子都是齐次的。写作 $u = cu'$ 和 $v = cv'$，其中 $\gcd(u',v') = 1$。则 $\deg u' = d-e$ 且 $\deg v' = d'-e$。若 $e = d$，则 $u' \in K^\times$ 和 $v = u(u')^{-1}v' \in (u)$，这与最小性矛盾。同理，$e = d'$ 将推出 $u \in (v)$。因此 $0 \leq e < \min\{d,d'\}$，故 $u',v' \in S_+$。

对每个 $w \in S$，条件 $\gcd(u',v') = 1$ 蕴含 $v'w \in (u') \Rightarrow w \in (u')$。因此，在 $S/(u')$ 上乘以 v' 是单射。由于 S 是整环且 $(u',v') \subseteq S_+$，数对 u',v' 构成正则序列。其 Koszul 复形将关系模计算为 $S(v',-u')$ [10, 推论 17.5]。在 $ru+sv = c(ru'+sv')$ 中约去 $c \neq 0$，得到

$$\ker\partial_1 = \{(r,s) \in S^2 \mid ru'+sv' = 0\} = S(v',-u').$$

令 $\sigma = d+d'-e$。映射 $\partial_2\colon S(-\sigma) \to S(-d)\oplus S(-d')$ 由 $\partial_2(t) = (tv', -tu')$ 定义，其次数为 0，因为 $\deg v' = \sigma - d$ 且 $\deg u' = \sigma - d'$。若 $\partial_2(t) = 0$，则 $tv' = 0$，所以 $t = 0$。结合核的计算，这就证明了下列序列的正合性

$$0 \longrightarrow S(-\sigma) \xrightarrow{\partial_2} S(-d)\oplus S(-d') \xrightarrow{\partial_1} S \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

各项 u，v，v'，$-u'$均属于 S_+，因此根据命题 2.10(1)，此分解是极小的。同调次数 2 对应的项为 $S(-\sigma)$，因此 $\operatorname{pd}_S(M) = 2$ 且 $\beta_2^S(M) = 1$。 □

推论 3.5。设 K 是一个域，且设 $N \geq 1$。定理 *3.3(2)* 中没有任何贝蒂表是有限生成分次 $K[x_1,\dots,x_N]$-模的贝蒂表。

证明。令 $S = K[x_1,\dots,x_N]$，并假设某个有限生成的分次 S-模 N'具有定理 3.3(2) 中给出的贝蒂表，其中某个 p，q。在极小分解 $F_\bullet \to N'$ 中，该表规定了$F_0 \cong S$和 $F_1 \cong S(-p)\oplus S(-q)$。因此 $\beta_0^S(N') = \beta_{0,0}^S(N') = 1$ 以及 $\beta_1^S(N') = 2$。根据引理 3.4，$\operatorname{pd}_S(N') = 2$。于是 $F_3 = 0$，这与条目$\beta_{3,2p+2q}^S(N') = 1$所要求的直和项 $S(-2p-2q)$ 矛盾。 □

4 四元数情形

设 $\mathbb{H} = \mathbb{R}\oplus\mathbb{R}i\oplus\mathbb{R}j\oplus\mathbb{R}k$ 为实四元数除环，且 $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$。共轭定义为 $\overline{a_0 + a_1i + a_2j + a_3k} = a_0 - a_1i - a_2j - a_3k$，其中 $a_0, \dots, a_3 \in \mathbb{R}$。

设 $R=\mathbb{R}[t_{r\ell}\mid r=1,2,\ 0\le\ell\le 3]$ 并令 $\mathcal{A}=\mathbb{H}\otimes_{\mathbb{R}}R$。对于 $r=1,\ 2,$ 令 $q_r=t_{r0}+it_{r1}+jt_{r2}+kt_{r3}\in\mathcal{A}$。

令 $U_r\in M_4(R)$ 表示在 R-基 $(1,i,j,k)$ 下，$\bar{q}_r$ 在 $\mathcal{A}$ 上左乘所对应的矩阵，并令 $M_2=\operatorname{coker}(U_1\ U_2)$。Adams 和 Loustaunau 计算了 $\operatorname{im}(U_1\ U_2)$ 的一个最小分次自由分解，见式 (5)，第 8] 页。将其包含映射接入 R^4，再接上商映射，便得到最小分次自由分解

$$0\longrightarrow R(-4)^4\longrightarrow R(-3)^8\longrightarrow R(-1)^8\xrightarrow{(U_1\ U_2)}R^4\longrightarrow M_2\longrightarrow 0,$$

其中 $\deg t_{r\ell}=1$。平移和秩也可由式 (9) 和第 13] 页的推论 3.6 得出 .

命题 4.1. 在通常分次下，上文回顾的 M_2 的分解同构于左 $\mathcal{A}$-模 $\mathcal{M}=\mathcal{A}/(\mathcal{A}q_1+\mathcal{A}q_2)$ 的一个最小分次自由分解在 R 上的限制。令 p、q 为正整数，并令 a、$b\in\mathbb{H}$ 满足 $\kappa=ba-ab\neq 0$。将次数 p 赋给 q_1 的坐标，将次数 q 赋给 q_2 的坐标。令 $\varphi\colon\ \mathcal{A}\to A=\mathbb{H}[x,y,z]$ 为一个固定 $\mathbb{H}$ 并由以下代换定义的同态

$$q_1\longmapsto f=x^p+az^p\quad and\quad q_2\longmapsto g=y^q+bz^q.$$

沿 φ扩张此分解所得的复形，同构于定理 *3.3(2)*中的极小分次分解。

证明。共轭是 R-线性的，并满足 $\bar{q}_1u+\bar{q}_2v=\overline{\bar{u}q_1+\bar{v}q_2}$。因此，它将 M_2 与 $\mathcal{M}$的底层 R模对应起来。在此对应下，上述分解将 $\mathcal{M}$分解为一个R模。对于 $u,v\in\mathcal{A}$，记 $N(u)=u\bar{u}=\bar{u}u\in R$，并令

$$B(u,v)=\begin{pmatrix}v\bar{u} & -N(u)\\ N(v) & -u\bar{v}\end{pmatrix}.$$

对于 $n=2$，定理 3.1(1) 中 [1, 相 syzygy 块的列向量是 $(q_1\bar{q}_2,-N(q_1))^t$ 和 $(N(q_2)\ -q_2\bar{q}_1)^t$ 乘以基元素 $e=1,i,j,k$所得的右倍。共轭再转置将每个列向量变为 $\bar{e}$ 乘以 $B(q_1,q_2)$ 对应行所得的左倍。因此，令 $C=(q_1,q_2)^t$ 且 $L=\ker\ \rho_C\subseteq\mathcal{A}(-1)^2,$，则有 $\operatorname{im}\rho_{B(q_1,q_2)}=L$。

在通常分次下，M_2 的分解中的满射 $R(-3)^8\to L$ 在次数 3 上是同构，因为其核同构于 $R(-4)^4$。通过共轭和转置得到的八行张成 L_3，因此构成一组基。次数 3 上的基变换将 $\rho_{B(q_1,q_2)}\colon\ \mathcal{A}(-3)^2\to L$ 与该满射对应起来。特别地，$\ker\rho_{B(q_1,q_2)}\cong R(-4)^4$。令 $T=(-\bar{q}_2,\bar{q}_1)$。由于范数是中心的，

$$TB(q_1,q_2)=\big(-N(q_2)\bar{q}_1+\bar{q}_1N(q_2),\ \bar{q}_2N(q_1)-N(q_1)\bar{q}_2\big)=(0,0).$$

行 T,iT,jT,kT在 $\mathbb{R}$ 上线性无关，因为 $cT=0$对 $c\in\mathbb{H}$成立意味着 $c=0$。它们构成核的 4次齐次分量的一组基，并在 R 上生成该分量。

因此，$\ker\rho_{B(q_1,q_2)}=\mathcal{A}T$。此外，$\rho_T$是单射，因为 $\mathcal{A}$是整环且 $T\neq 0$。$C,B(q_1,q_2)$ T的各项均具有正次数，因此 $\mathcal{A}$上的自由分解在通常分次下是极小的。它在 R 上的限制也同样是极小的，因为 $\mathcal{A}_+=R_+\mathcal{A}$。根据唯一性，该限制同构于上文回顾的 M_2 的分解。

现在赋予 $t_{1\ell}$次数 p，并赋予 $t_{2\ell}$次数 q。C的各项次数为 $p,\ q;\ B\ (q_1,\ q_2)$ 的各项次数按行排列为 $p+q,\ 2p,\ 2q,\ p+q$；而 T的各项次数为 $q,\ p$。所得的分次自由分解为

$$0\to\mathcal{A}\ (-2p-\ 2q)\xrightarrow{\rho_T}\mathcal{A}(-2p-q)\oplus\mathcal{A}(-p-2q)\xrightarrow{\rho_{B(q_1,q_2)}}\mathcal{A}(-p)\oplus\mathcal{A}(-q)\xrightarrow{\rho_C}\mathcal{A}\to\mathcal{M}\twoheadrightarrow 0$$

对于 $a=a_0+a_1i+a_2j+a_3k$和 $b=b_0+b_1i+b_2j+b_3k$，赋值 $\varphi(t_{1\ell}) = \delta_{\ell 0}x^p+a_\ell z^p$以及$\varphi(t_{2\ell}) = \delta_{\ell 0}y^q+b_\ell z^q$ 定义了分次映射 φ，其中当 $\ell=0$ 时 $\delta_{\ell 0}=1$，否则为 $\delta_{\ell 0}=0$。由于其在 R 上的像具有实系数，φ与共轭交换。将 A 视为右 $\mathcal{A}$-模，其中 $c\cdot u=c\varphi(u)$。对于每个移位 d，由 $c\otimes u\mapsto c\varphi(u)$ 定义的映射 $A\otimes_{\mathcal{A}}\mathcal{A}(-d)\to A(-d)$ 是一个分次同构。在这些同构下，张量化将每个矩阵项 u替换为 $\varphi(u)$。

由于 $\varphi(q_1)=f,\varphi(q_2)=g$，且 φ 与共轭可交换，对上面的分解应用 $A\otimes_{\mathcal{A}}-$ 可得复形

$$\begin{aligned}0\longrightarrow A(-2p-2q)&\xrightarrow{\rho_{R_0}}A(-2p-q)\oplus A(-p-2q)\\&\xrightarrow{\rho_{B(f,g)}}A(-p)\oplus A(-q)\xrightarrow{\rho_{(f,g)^t}}A\longrightarrow M\longrightarrow 0,\end{aligned}$$

其中 $R_0=(-\bar{g},f)$，而右正合性表明 $A\otimes_{\mathcal{A}}\mathcal{M}$与 $M=A/(Af+Ag)$ 相同。对于 $u,v,w\in A$，这三个映射定义为 $\rho_{(f,g)^t}(u,v)=uf+vg$，$\rho_{B(f,g)}(u,v)=(uv)B(f,g)$，以及 $\rho_{R_0}(w)=w(-\bar{g},f)$。

为了比较这些矩阵，令 $h=z^{p+q}$，$S=-\kappa^{-1}I_2$和 $\lambda=-\kappa^{-2}$。设 $u=\mathrm{Im}(a)$ 且$v=\mathrm{Im}(b)$，于是 $\kappa=vu-uv$。由于 $u^2,v^2\in\mathbb{R}$，交换子满足

$$\kappa u+u\kappa=vu^2-u^2v=0\quad\text{and}\quad\kappa v+v\kappa=v^2u-uv^2=0.$$

因此 $\kappa f\kappa^{-1}=\bar{f}$和 $\kappa g\kappa^{-1}=\bar{g}$。由于 $f+\bar{f}$和 $g+\bar{g}$是中心的，$\bar{f}g-g\bar{f}=f\bar{g}-\bar{g}f=gf-fg=\kappa h$。利用 $P_2=hI_2+P_1P_3$，我们得到

$$\begin{aligned}S^{-1}P_2=-\kappa hI_2+\begin{pmatrix}\bar{f}\\ \bar{g}\end{pmatrix}(g,-f)=\begin{pmatrix}g\bar{f}&-N(f)\\ N(g)&-f\bar{g}\end{pmatrix}=B(f,g),\\ P_3S=(\kappa^{-1}g\kappa^{-1},-\kappa^{-1}f\kappa^{-1})=\kappa^{-2}(\bar{g},-\bar{f})=\lambda R_0.\end{aligned}$$

根据 $SB(f,g)=P_2$和 $P_3S=\lambda R_0$，同调次数为 0，1，2，3 时的映射 id，id ρ_S，ρ_λ分别定义了从定理 3.3(2)中的分解到特化复形的链同构。由于 S 是一个对角矩阵，其对角元属于 $\mathbb{H}$ 和 $\lambda\in\mathbb{H}^\times$，因此这些映射的次数为零。这证明特化复形是 M的一个最小分次自由分解。□

5 标量扩张与限制下的贝蒂表

设 D 为一个除环，且 $K\subseteq Z(D)$ 是一个子域，$\delta=\dim_K D<\infty$。对于 $n\geq 1$，令 $S=K[x_1,\dots,x_n]$ 和 $A=D[x_1,\dots,x_n]$，其中的中心不定元次数为一。用 ${}_SM$ 表示左 A-模 M 限制到 S 后的模。

定理 5.1。采用上述记号，有如下结论。

(1) 若 M 是有限生成分次左 A-模，则 ${}_SM$ 是有限生成分次 S-模，且对所有 i、j，$\beta_i^S({}_SM)=\delta\beta_i^A(M)$。若 $M\neq 0$，则 $\mathrm{pd}_S({}_SM)=\mathrm{pd}_A(M)$，且 $\mathrm{reg}_S({}_SM)=\mathrm{reg}_A(M)$。此外，$\dim_K {}_SM=\delta\dim_D M$，因此 M 是有限维的（作为 D 上的模）当且仅当 ${}_SM$ 是有限维的（作为 K 上的模）。

(2) 如果 N 是有限生成分次 S-模，那么 $A\otimes_S N$ 是有限生成分次左 A-模，并且对所有 i、j，$\beta_i^A(A\otimes_S N)=\beta_i^S(N)$。若 $N\neq 0$，则 $A\otimes_S N\neq 0$，$\mathrm{pd}_A(A\otimes_S N)=\mathrm{pd}_S(N)$，且 $\mathrm{reg}_A(A\otimes_S N)=\mathrm{reg}_S(N)$。此外，$\dim_D(A\otimes_S N)=\dim_K N$，因此 N 是有限维的（关于 K）当且仅当 $A\otimes_S N$ 是有限维的（关于 D）。

证明。 由 $d\otimes s\mapsto ds$ 定义的映射 $D\otimes_K S\to A$ 是分次 K-代数的一个同构，因为 $S\subseteq Z(A)$，且 $x_1,\dots,x_n$ 中的单项式分别构成关于 K 和 D 的基。若 $d_1,\dots,d_\delta$ 是 D 的一个 K-基，则 $A=\bigoplus_{r=1}^{\delta} Sd_r=\bigoplus_{r=1}^{\delta} d_rS$。特别地， A 在 S 上左右两侧都是秩为 δ 的自由模，并且 $A_+=S_+A$。

(1) 设 $F_\bullet\to M$ 是一个极小分次自由分解。限制到 S 保持正合性和分次，且每个 $A(-j)$限制为 $S(-j)^\delta$。特别地， ${}_SF_0\to {}_SM$ 表明 ${}_SM$是有限生成的。由最小性可知，对于 $i\geq 1$，有 $\partial_i(F_i)\subseteq A_+F_{i-1}=S_+F_{i-1}$。因此，限制后的分解是极小的，并且$\beta_i^S(_SM)=\delta\beta_i^A(M)$。如果$(m_\alpha)$是 M的左 D-基，那么$(d_rm_\alpha)_{r,\alpha}$是 ${}_SM$的K-基，因此 $\dim_K {}_SM=\delta\dim_D M$。

(2) 设 $G_\bullet\to N$ 是 S上的一个极小分次自由分解。由于 A 作为右 S-模是自由的，在 S 上与 A 张量化可保持正合性。直和项 $S(-j)$扩张为 $A(-j)$，微分矩阵的元素不变，只是现在将其视为 $S_+\subseteq A_+$ 中的元素。因此， $A\otimes_S G_\bullet$ 是一个极小分次自由分解，并且$\beta_i^A(A\otimes_S N)=\beta_i^S(N)$。满射 $A\otimes_S G_0\to A\otimes_S N$表明 $A\otimes_S N$是有限生成的。作为分次左 D-模， $A\otimes_S N\cong(D\otimes_K S)\otimes_S N\cong D\otimes_K N$。 N的一个 K-基诱导出 $D\otimes_K N$的一个 D-基，因此 $\dim_D(A\otimes_S N)=\dim_K N$。

由于 $\dim_K {}_SM=\delta\dim_D M$ 且 $0<\delta<\infty$，模 ${}_SM$ 在 K 上有限维，当且仅当 M在 D上有限维。同样，等式 $\dim_D(A\otimes_S N)=\dim_K N$表明， $A\otimes_S N$ 在 D 上有限维，当且仅当 N 在 K 上有限维；并且当 $N\neq 0$时，$A\otimes_S N\neq 0$。

结合 $\delta>0$，由 (1) 和 (2) 证明的贝蒂数等式可推出

$$\beta_{i,j}^S({}_SM)\neq 0\iff \beta_{i,j}^A(M)\neq 0,$$
$$\beta_{i,j}^A(A\otimes_S N)\neq 0\iff \beta_{i,j}^S(N)\neq 0$$

对每个 i，j均成立。对于每个非零模，pd 是满足 $\beta_{i,j}\neq 0$ 的各对中 i 的最大值，而 reg 是 $j-i$ 的最大值。因此，这两个等价关系证明了投射维数和正则性的等式。

□

设 $R=D'[x_1,\dots,x_n]$ 是一个带有除环D'上中心不定元的多项式环。用 $\mathcal{B}(R)$表示有限长度的非零有限生成分次左 R-模的贝蒂表集合。对于两个这样的模 M，N，模 $M\oplus N$ 有限长度，且它们的最小分次自由分解的直和是极小的。因此 $\beta^R(M\oplus N)=\beta^R(M)+\beta^R(N)$，故 $\mathcal{B}(R)$ 在加法下构成一个半群。沿用域上的术语，参见 [2, 定义 1.1–1.2，第 343]，页，将由 $\mathcal{B}(R)$ 生成的有理锥定义为

$$\mathcal{C}(R)=\left\{\sum_{\nu=1}^{r}\lambda_\nu\gamma_\nu\;\middle|\; r\in\mathbb{Z}_{\geq 1},\ \lambda_\nu\in\mathbb{Q}_{\geq 0},\ \gamma_\nu\in\mathcal{B}(R)\right\}.$$

推论 5.2。 设 S 和 A 如定理 *5.1* 中所述，则有 $\mathcal{B}(S)\subseteq\mathcal{B}(A)$ 以及 $\delta\mathcal{B}(A)\subseteq\mathcal{B}(S)$。特别地， $\mathcal{C}(S)=\mathcal{C}(A)$。如果 $n=3$ 和 D 是非交换的，则 $\mathcal{B}(S)\subsetneq\mathcal{B}(A)$。

证明。 设 N 是一个非零的有限生成分次 S-模，且具有有限长度。由命题 2.15 和定理 5.1(2),

$$0<\dim_D(A\otimes_S N)=\dim_K N<\infty\quad\text{and}\quad\beta^A(A\otimes_S N)=\beta^S(N).$$

因此 $A\otimes_S N$具有有限长度，且 $\beta^S(N)\in\mathcal{B}(A)$。因此 $\mathcal{B}(S)\subseteq\mathcal{B}(A)$。

对于一个非零、有限生成的分次 A-模 M，由定理 5.1(1)可得

$$0 < \dim_K {}_S M = \delta \dim_D M < \infty \quad \text{and} \quad \beta^S({}_S M) = \delta \beta^A(M).$$

根据命题 2.15， ${}_S M$ 具有有限长度。因此， $\delta\beta^A(M) \in \mathcal{B}(S)$，所以 $\delta\mathcal{B}(A) \subseteq \mathcal{B}(S)$。

包含关系 $\mathcal{B}(S) \subseteq \mathcal{B}(A)$ 蕴含 $\mathcal{C}(S) \subseteq \mathcal{C}(A)$。对于 $\gamma \in \mathcal{B}(A)$，我们有 $\delta\gamma \in \mathcal{B}(S)$以及$\gamma = \delta^{-1}(\delta\gamma) \in \mathcal{C}(S)$，因为 $\delta^{-1} \in \mathbb{Q}_{>0}$。因此， $\mathcal{C}(A) \subseteq \mathcal{C}(S)$，且这些锥相等。

设 $n = 3$ 和 D 是非交换的。取 $a,\ b \in D$，满足 $ba - ab \neq 0$，并令 $M = A/(A(x + az) + A(y + bz))$。根据定理 3.3(2)，$\dim_D M = 2$ 且 $\beta^A(M) = D_1$。因此，命题 2.15 和推论 3.5 蕴含 $D_1 \in \mathcal{B}(A) \setminus \mathcal{B}(S)$。结合 $\mathcal{B}(S) \subseteq \mathcal{B}(A)$，这就证明了$\mathcal{B}(S) \subsetneq \mathcal{B}(A)$。 □

A 计算验证

补充脚本在带有 $\kappa = 0$ 和$\kappa \neq 0$ 的示例上测试定理 3.3 中的矩阵恒等式，并将希尔伯特函数与标准单项式的计数进行比较。它们还验证纯情形、域上两个生成元的计算、命题 4.1 中的四元数特化，以及定理 5.1 中的贝蒂公式。

我们在 $\mathbb{Q}$ 上验证多项式和矩阵恒等式。在内次数 j 下，记 $d_{i,j}\colon V_{i,j} \to V_{i-1,j}$ 为 $\mathbb{Q}$-向量空间复形的微分。在秩测试中，矩阵元素的分母与 $\ell = 2^{31} - 1$ 互素。记 r_i 为在 $\mathbb{Q}$ 上的秩，记 $\overline{r}_i$ 为模 ℓ 约化后的秩。模 ℓ 的非零子式在 $\mathbb{Q}$ 上也非零，因此 $r_i \le \overline{r}_i$。一旦在 $\mathbb{Q}$ 上验证了 $d_{i,j}d_{i+1,j} = 0$，

$$0 \le \dim_{\mathbb{Q}} H_i(V_{\bullet,j}) = \dim_{\mathbb{Q}} V_{i,j} - r_i - r_{i+1} \le \dim_{\mathbb{Q}} V_{i,j} - \overline{r}_i - \overline{r}_{i+1}.$$

因此，$\overline{r}_i + \overline{r}_{i+1} = \dim_{\mathbb{Q}} V_{i,j}$ 证明了在 $V_{i,j}$ 处的正合性。在最左端项，测试为 $r_i = \dim_{\mathbb{Q}} V_{i,j}$，这证明了单射性。

对于贝蒂数比较，令 M 为将表示模素数 s 化简后所得的余核。令 $K_\bullet(x; M)$ 为以中心变量为变量、系数取自 M 的 Koszul 复形。若 C 是该表示在 $\mathbb{Q}$ 上的系数代数，我们将其与

$$\frac{\dim_{\mathbb{F}_s} H_i(K_\bullet(x; \overline{M}))_j}{\dim_{\mathbb{Q}} C}$$

文中的贝蒂数进行比较。这些比较使用 $s = \ell$，对于某些交换例子，还使用 $s = 2,\ 3$。每种情况下的比较均在 $\mathbb{F}_s$ 上进行。

利益冲突声明

作者声明，他们不存在任何利益冲突。

数据和代码的可用性

附录 A 的 Python 脚本可在 Zenodo [14] 上获取。随附文档的第 1 节介绍了如何运行这些脚本。

参考文献

[1] W. W. Adams 和P. Loustaunau，《分析确定多个四元数变量正则函数性质的模》，Pacific J. Math.**196**（2000），第 1 期，1–15，https: // msp.org/pjm/2000/196-1/pjm-v196-n1-p01-s.pdf。[2] D. Erman，《贝蒂图半群》，《代数与数论》**3** （2009），第 3 期，341–365，DOI 10.2140/ant.2009.3.341；arXiv:0806.4401。[3] D. Erman 和 S. V. Sam，《关于 Boij–S》¨*oderberg* 理论的问题，载于《代数几何最新进展综述》（I. Coskun 、 T. de Fernex 和 A. Gibney 编），《纯数学研讨会论文集》 **95**，美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，2017，285–304，DOI 10.1090/pspum/095/01635。[4] G. Fløystad、J. McCullough 和 I. Peeva，《协同子的三个主题》，Bull. Amer. Math. Soc.（N.S.）**53** （2016），第 3 期，415–435，DOI 10.1090/bull/1533。[5] J. G´omez-Torrecillas，《非交换环上的基本模论及算子代数的计算方面》，载于《微分与积分算子的代数和算法方面》（M. Barkatou、T. Cluzeau、G. Regensburger 和 M. Rosenkranz 编），《计算机科学讲义》，第 8372 卷，施普林格，柏林，2014，第 23–82 页，DOI 10.1007/978-3-642- 54479-8 2。[6] I. Peeva，《分次协同子》，《代数与应用》，第 14 卷，施普林格，伦敦，2011，DOI 10.1007/978-0-85729-177-6。[7] R. Hazrat，《分次环与分次格罗滕迪克群》，伦敦数学学会讲义丛书，第 435 卷，剑桥大学出版社，剑桥，2016，DOI 10.1017/CBO9781316717134；作者版本 arXiv:1405.5071v4（2016）。[8] C. N˘ast˘asescu 和 F. Van Oystaeyen，《分次环的方法》，《数学讲义》，第 1836 卷，施普林格，柏林，2004，DOI 10.1007/b94904。[9] C. A. Weibel，《同调代数导论》，剑桥高等数学研究丛书，第 38 卷，剑桥大学出版社，剑桥，1994，DOI 10.1017/CBO9781139644136。[10] D. Eisenbud，《从代数几何视角看交换代数》，《数学研究生教材》，第 150 卷，施普林格，纽约，1995，DOI 10.1007/978-1-4612-5350-1。[11] J. C. McConnell 和 J. C. Robson，《非交换诺特环》，修订版，《数学研究生研究丛书》，第 30 卷，美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，2001，DOI 10.1090/gsm/030。[12] D. A. Cox、J. Little 和 D. O’Shea，《理想、簇与算法》，第 4 版，《数学本科教材》，施普林格，查姆，2015，DOI 10.1007/978-3-319-16721-3。[13] D. Cox、J. Little 和 D. O’Shea，《代数几何的应用》，第 2 版，《数学研究生教材》，第 185 卷，施普林格，纽约，2005，DOI 10.1007/b138611。[14] Hoang Anh Tu 和 Huynh Viet Khanh，《交换子协同子与纯分解的计算检验》，1.0.0 版，Zenodo，2026，https://doi.org/10.5281/zenodo.24362380。