参数振荡器受迫天平动中的准周期性破坏与同宿分岔

Pierpaolo Belardinelli[a,*]

[a]*DICEA*，马尔凯理工大学，安科纳，*60131*，意大利

arXiv:2611.32278v1 [nlin.CD] 24 Nov 2026

摘要

超过失稳阈值后，参数激励振荡器会稳定在两种相位态中的一种。本文研究了这些相位态对同一刚度的第二种、速度慢得多的调制所产生的响应。在旋转坐标系中，该调制使失谐呈周期性变化，并驱动相位振荡。当调制相对于振荡频率较慢时，相位态绝热地跟随调制。随着两个频率变得相当，这一近似失效，受驱天平动与内禀天平动发生共振。本文考察了具有非线性阻尼的Duffing振子所处的这一非绝热区间。平均方程描述了一个受到周期扰动的平面系统，其可积未扰动力学的同宿环可用闭式形式导出。相位态以支撑准周期运动的不变环面形式持续存在。它们的稳定性和倍周期分岔可由阻尼马蒂厄方程刻画，其中调制同时对参数刚度和参数阻尼产生作用。梅尔尼科夫分析给出了分界轨道分裂及同宿交点出现的显式阈值，这些结果也得到了不变流形数值计算的验证。数值结果揭示，这些交点早在持续的混沌运动形成之前便已出现。参数振荡的最终状态显著取决于共振条件：以振荡频率进行调制会破坏不变环面并抑制振荡，而以两倍振荡频率进行调制则能使其保持完整。

1. 引言

线性振动理论鲜有未解之谜：叠加原理适用，每一种响应都能追溯到其成因。另一方面，非线性行为总会以出乎意料且有趣的动力学表现带来惊喜。微纳力学领域中这样的例子不胜枚举，在这里，非线性效应不是例外，而是常态 [1, 2, 3, 4]。

该领域一个新兴方向超越了构成我们许多直觉基础的单谐波激励，转而探索多个驱动频率的影响。例如，通过调制激励的振幅或

* 通讯作者电子邮箱：p.belardinelli@univpm.it (Pierpaolo Belardinelli)

频率，已有人在微机械谐振器中生成混沌，并将其应用于混沌信号生成和随机数生成 [5]。即使是作用于杜芬谐振器的两个失谐力，也能产生单音理论无法解释的动力学行为，包括在共存的低振幅态和高振幅态之间转换 [6]。在与主音一同旋转的参考系中，次音表现为相空间流的调制。对主激励的稳定响应对应于该参考系中的不动点，而微小扰动则会产生称为天平动的振荡运动，这一术语源自天体力学 [7]。天平动频率决定了受驱非线性模态频谱中载波周围观测到的卫星峰 [8, 9]。反馈甚至能够维持这些振荡，使谐振器变成天平动器 [10]。因此，天平动频率提供了一个内禀动力学时间尺度，它不同于决定系统趋近定态过程的弛豫时间。

当拍周期远长于振铃衰减时间时，系统状态会绝热地跟随漂移吸引子；随着拍频增大，系统状态会滞后于 [6]。吸引子间跃迁的发生已被描述为一种动力学相变，其临界位置并非仅由振铃衰减时间决定，还取决于定态的共振特性 [11]。双音激励也被提议用于传感器读出 [12], ；与此同时，一种独立的旋转坐标系方法已被发展为非线性微纳机电谐振器产生混沌的一种通用途径 [13]。

在这些研究中，附加音调通过外加力引入。当次音调制谐振器的内禀参数（例如刚度），而非施加外力时，情况则有所不同。一个例子是对承受主共振驱动的谐振器施加张力调制，从而调制其刚度 [14]。针对参数激励与外部激励相结合的情况，也已有相关的非线性分析；例如，Yagasaki 等人运用平均法和 Melnikov 方法，在一个弱非线性单自由度系统中证实了不变环面和混沌动力学的存在 [15]。一种尤为有趣的情况是，主激励本身就是参数激励。

超过参数失稳阈值后，参数泵浦振子具有两个稳定的相位态，它们之间的相位差为 π。这些相位态以及区分亚临界和后临界状态的阈值，使参数振荡器成为一种用途广泛的平台。在阈值以下，它会放大一个正交分量，并压缩另一个正交分量中的噪声 [16]。在阈值以上，这些相位态可作为比特 [17], 并可用于模拟伊辛哈密顿量 [18], 、玻尔兹曼机 [19], 和量子比特 [20]。除了这些定态之外，近期实验还展示了在参数驱动谐振器产生的共存极限环吸引子之间发生的噪声激活切换 [21]。与直接驱动的对应振荡器相比，非线性阻尼使参数振荡器具有更好的短期频率稳定性 [22]。

现在考虑一种参数泵浦振子，其刚度受到第二种、慢得多的调制。在以泵浦频率一半旋转的坐标系中，这种调制会周期性改变有效失谐，并直接驱动相位动力学。关于双音参数激励的早期研究

可分为两类。第一类主要是线性的：两个具有非公度频率的刚度调制会导出准周期马丢方程，其稳定性图比经典舌形区复杂得多 [23, 24, 25]；其非线性版本则通过结合椭圆函数的李变换微扰理论进行了研究 [26]。第二类是非线性且具有绝热性质。对于浅拱，人们分析了延迟分岔以及在一个慢参数激励周期中依次经过的平衡态，并通过梅尔尼科夫分析确定了混沌区域 [27]。相关的双音研究将共振或快速激励与慢得多的参数调制相结合，得到了准周期解和周期性爆发的条件 [28, 29]。在共振外力和慢参数支撑运动作用下，爆发包括定态、准周期和混沌状态；研究还表明，慢参数激励能够抑制共振外力诱发的混沌 [30]。在快慢参数激励下，有研究报告了准周期爆发，其中包括导致滞回混沌的倍周期和三倍周期序列。快速激励还能够抑制慢调制诱发的混沌 [31]。这些研究主要关注由显著时间尺度分离所产生的动力学，在这种情况下，慢参数激励可以采用绝热处理或置于慢快框架中。另一种互补情形是：调制虽然相对于载波振荡仍然较慢，但其速率开始与旋转坐标系中动力学的振荡/弛豫时间尺度相当。近期，人们在受到共振直接驱动和膜张力慢调制的石墨烯谐振器中，通过实验探索了这种非绝热区间 [14]。当调制速率与机械弛豫速率相当时，对定态的绝热跟踪会失效。随后，慢动力学中会出现参数不稳定性，其频率由围绕这些定态的振荡决定，而非由机械共振决定。更强的调制会产生倍周期和混沌。

本研究考察了一种不同的构型，其中主激励本身是参数激励，而非共振的直接驱动。本文所要回答的问题是：次级刚度调制如何激发参数相位态周围的天平动，如何影响由此产生的不变环面的稳定性，以及如何改变整体相空间结构，尤其是同宿分界线。平均方程保留了零振幅平衡态；该平衡态在参数阈值处失稳，并产生两个具有对称关系的有限振幅相态。此外，线性阻尼和非线性阻尼都会对临界后的动力学产生影响。与直接驱动的杜芬谐振器相比，这些特征从根本上改变了相空间结构。

分析得出了三个主要结果。首先，围绕相位态的受迫天平动是完整系统的一个不变环面，其上的运动是拟周期的，而鞍点则以鞍型环面的形式保持存在。本文对二者都给出了显式近似。在这一近似下，随着调制频率接近振荡频率，受迫天平动将无限增长。这一主共振标志着绝热图景的终结。

该环面通过倍周期失稳。其变分方程是一个阻尼马蒂厄方程

其中，调制同时充当参数刚度和参数阻尼；已知二者的相对相位决定了放大还是抑制 [32]。不稳定舌以振荡频率的两倍为中心。刘维尔变换表明，阻尼调制会向有效刚度中馈入二次谐波，而数值延拓揭示出一条比经典马蒂厄舌丰富得多的边界。静止态也有其自身的舌形区，这里通过Floquet理论获得。

最后，通过对闭式同宿轨道 [33, 34] 上的梅尔尼科夫积分求值，得到解析阈值与调制频率之间的函数关系；这些阈值对应于分界线内、外分支上稳定流形与不稳定流形的横截相交。对流形进行数值计算证实了这些阈值。切触会在观测到混沌之前很久就形成马蹄映射。稳定周期轨道仍吸引几乎所有初始条件；只有当环面经由本文记录的分岔序列破裂后，在调制深度大幅增大时，才会出现持续混沌。本文考察了两种调制频率下的分岔序列：一种接近振荡频率，另一种接近其两倍。

2. 运动方程与平均法

为深入理解次级刚度调制如何作用于参数振荡器的相位态，并确定起主要作用的参数，本文引入该振荡器的最简单模模型：

$$\ddot{x} + \tilde{\delta}\dot{x} + \tilde{\alpha}x^3 + \tilde{\delta}_{\mathrm{NL}}x^2\dot{x} + \left(\omega_0^2 + \tilde{\gamma}\cos(2\omega_{\mathrm{F}}t) + \tilde{\beta}\cos\phi\right)x = 0 \tag{1}$$

其中，x 表示位移，上方的点表示对时间求导，ω_0 表示线性共振频率，ω_{F} 表示泵浦频率（参数泵浦作用于 $2\omega_{\mathrm{F}}$），$\phi(t) = \omega_\beta t$ 表示次级调制的相位，~ ~其中 $\omega_\beta t \ll \omega_{\mathrm{F}}$。参数 $\tilde{\gamma}$ 和 β 分别为泵浦振幅和调制振幅，$\tilde{\delta}$ 和 δ_{NL} 分别为线性阻尼系数和非线性阻尼系数，$\tilde{\alpha}$ 为 Duffing 系数。

~在没有次级调制时 $\beta = 0$，方程（1）描述了参数驱动杜芬振子，这是经典参数共振模型的非线性扩展。这一现象有着悠久的历史，可追溯到法拉第对次谐波表面波的观察 [35]。分析这类系统的数学框架建立在马蒂厄–希尔方程 [36, 37] 和Floquet理论 [38]之上。当参数激励的振幅超过某一阈值时，零振幅态变得不稳定，系统出现参数共振 [25]。固定泵浦振幅下产生的动力学如图1（a）的分岔图所示。在红色菱形标记的两个频率处，平凡态发生倍周期（PD）分岔：零振幅解失去稳定性，系统转变为有限振幅响应（黑色实线）。由此产生两个对称相关相位态，它们的相位相差 π。随着频率进一步失谐，

稳定分支在鞍结（SN）分岔处终止（绿色圆点），此后稳态响应折返至不稳定分支（灰色虚线）。

这种失稳对参数的依赖关系由图中插图所示的阿诺德舌描述。1在泵浦振幅 $\tilde{\gamma}$ 和驱动频率 $2\omega_F$构成的平面上，红色边界将稳定区域与不稳定区域分隔开来：参数低于该边界时，零振幅态稳定；高于该边界时，系统不稳定。失稳阈值在 $2\omega_F = 2\omega_0$处达到最小，此时泵浦频率与振荡器的固有频率相匹配。

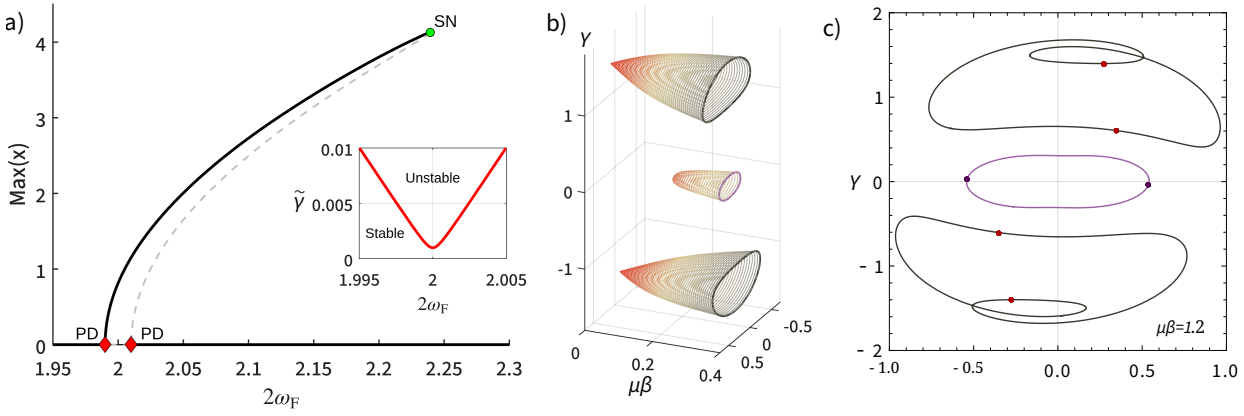

图 1：参数振荡器及其受迫天平动。(a) 无调制时的频率响应（$\tilde{\beta} = 0$）：最大位移随泵浦频率的变化。实线：稳定相态分支；虚线：不稳定分支；坐标轴上的粗线表示静止态。PD：静止态的倍周期分岔（即慢流中的叉形分岔）；SN：鞍结分岔。插图：英斯-斯特鲁特图，即倍周期轨迹平面，它将稳定静止态与不稳定静止态分隔开来。(b) 调制深度 $\mu\beta$ ($\nu_0 = 3.5$) 逐渐增大时，平均系统在（X，Y）平面上的不变闭曲线。由相态产生的两条曲线从 $\mu\beta = 0$ 起存在；围绕静止态的曲线则在有限调制深度下出现。颜色表示 $\mu\beta$。(c) $\mu\beta = 1.2$ 处的三条曲线。圆点为调制周期下的频闪点。参数：$\tilde{\delta} = 0.00049505$、$\tilde{\alpha} = 0.02$、$\tilde{\delta}_{\rm NL} = 0.0019802$、$\tilde{\beta} = 0$。

引入小参数是为了区分主导阶动力学与较弱的耗散效应和调制效应。具体而言，考虑两个微扰参数 ϵ 和 μ，其中 $0 < \epsilon \ll \mu \ll 1$，使得 $\tilde{\gamma} = \epsilon\gamma$, $\tilde{\alpha} = \epsilon\alpha$, $\beta = \epsilon\mu\beta$, $\delta = \epsilon\mu\delta$, $\delta_{\rm NL} = \epsilon\mu\delta_{\rm NL}$。因此，主要参数激励和三次刚度非线性出现在 ϵ阶，而阻尼和次级刚度调制的作用较弱，处于 $\epsilon\mu$阶。

由于振动频率远高于系统中的所有其他速率和频率，因此可以在旋转坐标系中描述这些振动。引入缓慢变化的复振幅 $z(\tau)$后，位移表示为 $x(t) = \frac{1}{2}\left(z(\tau)e^{-i\omega_{\rm F}t} + z(\tau)e^{i\omega_{\rm F}t}\right)$，其中慢时间变量为 $\tau = \epsilon t/2\omega_{\rm F}$。将该试探解代入方程（1），随后在快速振荡周期 [39], 上进行平均法，消去

非共振项，并得到慢流方程

$$\dot{z} = \frac{3}{4} i\alpha |z|^2 z - \frac{1}{4}\mu\delta_{\mathrm{NL}}\overline{z}\omega_{\mathrm{F}} z^2 + i\mu\beta\cos\phi_0 z - i\Omega z - \mu\delta\omega_{\mathrm{F}} z + \frac{1}{2} i\gamma\overline{z} \tag{2}$$

其中上方的点表示对 τ求导，缩放失谐和调制相位定义为 $\omega^2{}_{\mathrm{F}} - \omega_0^2 = \epsilon\Omega$ 和 $\phi_0(\tau) = \nu_0\tau$。这里，$\nu_0 = 2\omega_{\mathrm{F}}\omega_\beta/\epsilon$ 是慢时间尺度上次级调制的频率。将复振幅表示为实部和虚部的形式，$z = X + iY$，其中 $X = \Re(z)$ 和 $Y = \Im(z)$，方程（2）等价地可表示为一组耦合的一阶微分方程构成的平面系统:

$$\begin{cases} \dot{X} = \Omega Y - \dfrac{3}{4}\alpha(X^2+Y^2)\,Y - \mu\delta\omega_{\mathrm{F}} X + \dfrac{\gamma}{2} Y - \mu\dfrac{\delta_{\mathrm{NL}}\omega_{\mathrm{F}}}{4}(X^2+Y^2)\,X - \mu\beta\, Y\cos\nu_0\tau, \\ \dot{Y} = -\Omega X + \dfrac{3}{4}\alpha(X^2+Y^2)\,X - \mu\delta\omega_{\mathrm{F}} Y + \dfrac{\gamma}{2} X - \mu\dfrac{\delta_{\mathrm{NL}}\omega_{\mathrm{F}}}{4}(X^2+Y^2)\,Y + \mu\beta\, X\cos\nu_0\tau. \end{cases} \tag{3}$$

对于 $\beta = 0$，平均系统是自治的，其稳态响应对应于正交分量 (X, Y) 平面中的不动点。对于 $\beta \neq 0$，次级调制使慢流方程显式地呈现时间周期性，这些不动点因而被调制驱动轨迹取代。图1(b) 展示了随着调制振幅 $\mu\beta$ 增大，相应轨道的演化。除了与两个有限振幅相态相关的轨迹外，原点周围还形成了一条中心轨道，这表明与原本不稳定的零振幅态相关的稳定有限振幅响应开始出现。在原始振子中，所有受调制的响应都对应于准周期运动。当调制振幅增大到 $\mu\beta = 1.2$时，图 1(c) 所示的频闪庞加莱映射对每种响应均呈现两个不同的点，表明相应轨道的周期已加倍。这一观察促使我们详细研究调制驱动响应的稳定性，以及导致其失稳的分岔。特别是，我们将考察完整系统中相应的不变环面及其倍周期分岔。

通过变换

$$J = \frac{X^2+Y^2}{2}, \quad \psi = \tan^{-1}(Y/X), \tag{4}$$

物理正交分量系统（3）被写入正则作用量-角度框架

$$\begin{cases} \dot{J} = \gamma J\sin(2\psi) - 2\mu\delta\omega_{\mathrm{F}} J - \mu\delta_{\mathrm{NL}}\omega_{\mathrm{F}} J^2, \\ \dot{\psi} = -\Omega + \dfrac{3}{2}\alpha J + \dfrac{\gamma}{2}\cos(2\psi) + \mu\beta\cos\nu_0\tau. \end{cases} \tag{5}$$

揭示其哈密顿结构，并明确展示同宿分界线环。式（5）中未受扰动的系统，在 $\mu = 0$ 条件下，是一个具有哈密顿能量的哈密顿系统

$$H(J,\psi) = \frac{3}{4}\alpha J^2 - \Omega J + \frac{\gamma}{2} J\cos 2\psi. \tag{6}$$

哈密顿方程给出

$$\begin{cases} \dot{J} = -\dfrac{\partial H}{\partial \psi} = \gamma J \sin(2\psi), \\ \dot{\psi} = \dfrac{\partial H}{\partial J} = -\Omega + \dfrac{3}{2}\alpha J + \dfrac{\gamma}{2}\cos(2\psi). \end{cases} \tag{7}$$

假设 $\alpha > 0$，非平凡不动点 $p_i = (j_i,\ \psi_i)$ 是中心点，$p_1 = (\frac{2\Omega+\gamma}{3\alpha},\ \pi/2 + k\pi)$，而 $p_2 = (\frac{2\Omega-\gamma}{3\alpha},\ k\pi)$ 是双曲鞍点（$k \in \mathbb{Z}$）。注意，$0 < j_2 < j_1$。同宿轨道 $\Gamma_\pm = \{(J_\pm(\tau)\ \psi_\pm(\tau)) \mid \tau \in \mathbb{R}\}$，位于鞍点的能级 $H_s = H(j_2,\ 0) = -\frac{3}{4}\alpha j_2^2$ 上，由下列隐式方程给出

$$\frac{3}{4}\alpha J^2 - \Omega J + \frac{\gamma}{2} J \cos 2\psi + \frac{1}{3\alpha}\left(\Omega - \frac{\gamma}{2}\right)^2 = 0. \tag{8}$$

求解 (8) 中的 J，得到分界线环的两个分支：

$$J_\pm(\psi) = \frac{2\Omega - \gamma\cos 2\psi \pm 2\sqrt{\gamma \sin^2\psi\,(2\Omega - \gamma\cos^2\psi)}}{3\alpha}. \tag{9}$$

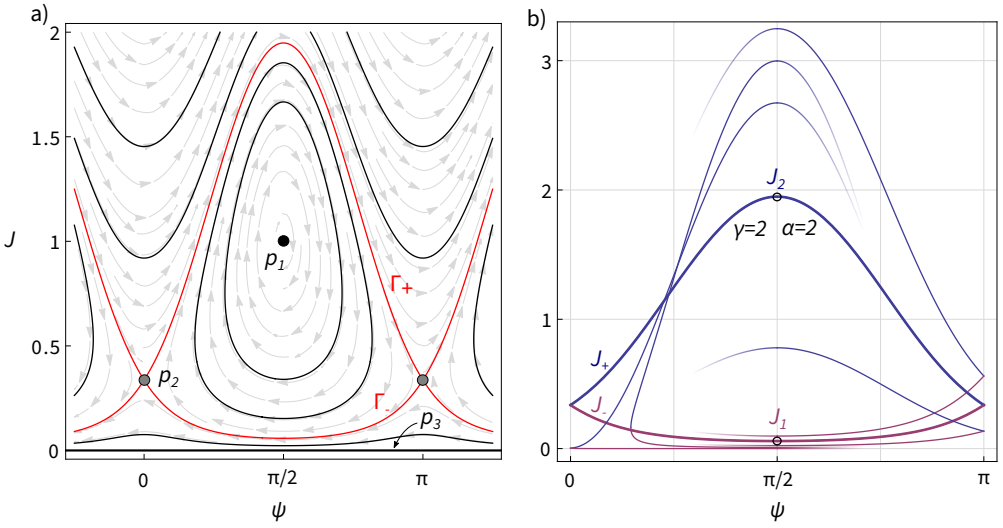

图 2：平均系统（$\mu = 0$）的哈密顿骨架。(a) 作用量-角度平面上的相图：H 的等值曲线，见式 (6)，以及流动方向（灰色箭头）。p_1：中心点（相位态）；p_2：鞍点；p_3：静止态，$J = 0$。分界线（红色）具有外分支 Γ_+ 和内分支 Γ_-。它将围绕 p_1 的天平动与 Γ_+ 上方及 Γ_- 下方的旋转分隔开。能级：$H = \{-10, -2, 1., 2.5, 5\} \times H_s$。(b) 分界轨道分支 $J_+(\psi)$（蓝色）和 $J_-(\psi)$（紫色），见式 (9)。粗线：$\gamma = 2$, $\alpha = 2$, $\Omega = 2.01$。圆圈：转向点 J_1,2，见式 (11)。

图 2(a) 的哈密顿相图决定了系统的动力学及后续的一切。分界线 $H(J, \psi) = H_s$（红色曲线）将平面分为三个区域：围绕一个相位态的天平动位于环内；围绕静止态的内侧旋转位于 Γ_-下方；外侧旋转位于 Γ_+上方，它们环绕着两个相位态和静止态。两条分支 $J_\pm(\psi)$在鞍点处相交，此处方程（9）中的平方根为零。

同宿解 $J(\tau)$ 可通过结合（7）中的两个方程，以分界能量 $H = H_s$的闭式形式求得，结果为

$$\dot{J}^2 = 3\alpha\,(J - j_2)^2\left[\gamma J - \frac{3}{4}\alpha(J - j_2)^2\right]. \tag{10}$$

分界线上的运动被限制在括号内因子非负的区域。其根 $0 < J_1 < j_2 < J_2$ 为

$$J_{1,2} = j_2 + \frac{2(\gamma \mp \sqrt{\gamma^2 + 3\alpha\gamma j_2})}{3\alpha}, \tag{11}$$

或者，利用 $j_2 = (2\Omega - \gamma)/(3\alpha)$，可等价地写为

$$J_{1,2} = \frac{1}{3\alpha}\left(\sqrt{2\Omega} \mp \sqrt{\gamma}\right)^2. \tag{12}$$

它们分别对应于分界线环的内侧（J_1）和外侧（J_2）转向点（图 2（b）中泪滴形曲线上的圆点）。由式（12）可明显看出，分界线几何形状对系统参数的依赖关系。增大失谐Ω会使两个转向点都向更大的作用量移动，并增大它们之间的间距；而增大参数激励强度 γ 会使内侧转向点向更小的作用量移动、外侧转向点向更大的作用量移动，从而扩大分界线。相比之下，增大 Duffing 系数 α 会缩小整个结构的作用量尺度。特别地，两个转向点之间的间距为 $J_2 - J_1 = 4\sqrt{2\gamma\Omega}/3\alpha$。因此，分界线直接展现了失谐、参数激励与非线性刚度之间的竞争如何组织保守相空间动力学。分界线的存在要求式（9）中的被开方数对所有 ψ均为非负。对于 $\gamma > 0$，当 $\Omega \geq \gamma/2$时，该条件得到满足。只有当非平凡鞍点具有正作用量时，才存在有限作用量的分界线，这要求 $\Omega > \gamma/2$。对于 $\gamma = 4$，该条件得到满足；但对于 $\gamma = 5$则不满足，如图 2（b）所示。

外侧（+）和内侧（-）分支的同宿轨道可通过求解（10）得到，即 .

$$\frac{dJ}{|J - j_2|\,\sqrt{(J_2 - J)(J - J_1)}} = \pm\frac{3}{2}\alpha\,d\tau, \tag{13}$$

由此得到

$$J_\pm(\tau) = j_2 \pm \frac{2\gamma j_2}{\sqrt{\gamma^2 + 3\alpha\gamma j_2}\cosh(\kappa\tau) \mp \gamma}, \qquad \kappa = \sqrt{3\alpha\gamma j_2}. \tag{14}$$

当 $\tau = 0$ 时，该方程恢复转折点$J_{1,\ 2}$。当 $\tau \to \pm\infty$， $J_\pm(\tau) \to j_2$，即双曲鞍点。表达式（14）将在第5 节中作为未扰动轨道，用于计算包含阻尼和外力扰动时的 Melnikov 计算。

哈密顿相图提供了动力学的保守骨架。对于 $\mu > 0$，阻尼和次级刚度调制会扰动这一结构，并以调制驱动轨迹取代未扰系统的稳态响应。接下来将研究这些轨迹的存在性和稳定性。

3. 准周期运动的稳定性

当 $\mu > 0$ 足够小时，平均系统（5）在不动点 p_i 附近存在双曲周期解 $(J_i(\tau)\ \psi_i(\tau))$，$i = 1,\ 2$。平均系统的这些双曲周期轨道对应于庞加莱映射的正规双曲不变闭曲线（一维环面） $T_i,\ \ i = 1,\ 2$（通过以快速激励周期对原始流采样来定义） $\mathcal{P}_\mu$。源自中心点的解描述了围绕参数相位态的受迫天平动，而鞍点则持续表现为鞍型周期轨道，并继续组织整体相空间结构。等价地，它们对应于完整系统悬挂流的正规双曲不变二维环面。这些不变环面上的轨迹代表准周期动力学。

环面的近似表达式$T_{1,\ 2}$ 通过摄动方法确定。我们假设平均系统（5）的解具有如下形式

$$J_i(\tau) = j_i + \mu\xi(\tau), \quad i = 1, 2, \qquad \psi_1(\tau) = \frac{k\pi}{2} + \mu\eta(\tau), \qquad \psi_2(\tau) = k\pi + \mu\eta(\tau), \tag{15}$$

从而得到

$$\dot{\xi} = \mp 2\gamma j_i \eta - 2\delta\omega_{\mathrm{F}} j_i - \delta_{\mathrm{NL}}\omega_{\mathrm{F}} j_i^2, \qquad \dot{\eta} = \frac{3}{2}\alpha\xi + \beta\cos\nu_0\tau \tag{16}$$

其中符号的上部选择表示 $i = 1$。方程（16）的解为

$$\xi(\tau) = \pm\frac{2\gamma\beta j_i}{\nu_0^2 \mp \lambda_i^2}\cos\nu_0\tau, \qquad \eta(\tau) = \frac{\nu_0\beta}{\nu_0^2 \mp \lambda_i^2}\sin\nu_0\tau \mp \frac{\omega_{\mathrm{F}}}{2\gamma}\left(2\delta + \delta_{\mathrm{NL}} j_i\right) \tag{17}$$

其中 $\lambda_i^2 = 3\gamma\alpha j_i$，$(\lambda_{1,\ 2}^2 = \gamma(2\Omega \pm \gamma)$ 是线性化系统的固有频率的平方。

由于 $(J_2(\tau)\ \phi_2(\tau))$ 不稳定，因此研究轨道 $(J_1(\tau)\ \phi_1(\tau))$ 的稳定性很有意义。该轨道受到弱摄动，可表示为

$$J = J_1(\tau) + \Delta J, \qquad \psi = \psi_1(\tau) + \Delta\psi, \tag{18}$$

将其代入（5）可得

$$\begin{cases} \dot{\Delta J} = -\left[2\gamma j_1 + 2\mu\gamma\xi\right]\Delta\psi - \mu\left[2\omega_{\mathrm{F}}\left(\delta + \delta_{\mathrm{NL}} j_1\right) + 2\gamma\eta\right]\Delta J \\ \dot{\Delta\psi} = \dfrac{3}{2}\alpha\Delta J + 2\mu\gamma\eta\Delta\psi. \end{cases} \tag{19}$$

.在首阶近似下，$\Delta\psi \approx -\dfrac{\Delta J}{2\gamma j_1}$，因此方程（19）变为

$$\ddot{\Delta J} + \left[2\mu\omega_{\mathrm{F}}\left(\delta + \delta_{\mathrm{NL}} j_1\right) + 2\mu\beta\frac{\gamma\nu_0}{\nu_0^2 - \lambda_1^2}\sin\nu_0\tau\right]\dot{\Delta J} + \left[\lambda_1^2 + 2\mu\beta\frac{\gamma(\nu_0^2 + \lambda_1^2)}{\nu_0^2 - \lambda_1^2}\cos\nu_0\tau\right]\Delta J = 0, \tag{20}$$

这是一个同时具有参数阻尼和参数刚度的阻尼马蒂厄方程。通过引入以下变换，可对方程（20）进行解析求解：

$$\Delta J = z_1(\tau)\cos\left(\frac{\nu_0}{2}\tau\right) - z_2(\tau)\sin\left(\frac{\nu_0}{2}\tau\right), \quad \Delta\psi = \frac{\nu_0}{4\gamma j_1}\left[z_1(\tau)\sin\left(\frac{\nu_0}{2}\tau\right) + z_2(\tau)\cos\left(\frac{\nu_0}{2}\tau\right)\right]. \tag{21}$$

并应用平均法。这得出

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = -\mu\omega_{\mathrm{F}}\left(\delta + \delta_{\mathrm{NL}} j_1\right) z_1 + \left(\dfrac{(\nu_0/2)^2 - \lambda^2}{\nu_0} + \dfrac{3\mu\beta\gamma\nu_0}{4(\nu_0^2 - \lambda_1^2)} \right) z_2, \\ \dot{z}_2 = \left(-\dfrac{(\nu_0/2)^2 - \lambda^2}{\nu_0} + \dfrac{3\mu\beta\gamma\nu_0}{4(\nu_0^2 - \lambda_1^2)} \right) z_1 - \mu\omega_{\mathrm{F}}\left(\delta + \delta_{\mathrm{NL}} j_1\right) z_2. \end{cases} \tag{22}$$

为确定轨道的稳定性，我们分析（22）的特征值。当某个特征值的实部变为正值时，轨道便不稳定，此时满足条件

$$(\mu\beta)^2 > \frac{16(\nu_0^2 - \lambda_1^2)^2}{9\gamma^2\nu_0^2} \left\{ [\mu\omega_{\mathrm{F}}(\delta + \delta_{\mathrm{NL}} j_1)]^2 + \left[\frac{(\nu_0/2)^2 - \lambda_1^2}{\nu_0} \right]^2 \right\}. \tag{23}$$

图3（a）中以红色标出了失稳阈值及相应的不稳定区域。失稳条件（23）在共振中心附近 $\nu_0 \approx 2\lambda_1$ 处的伪零点 $\nu_0 \approx \lambda_1$ 超出了平均法的有效域（它对应于主线性共振，此时周期轨道振幅发散（见（22））），微扰展开也随之失效。可在共振区域的中心（即展开有效的区域中心）处计算式（23）右侧的前因子，并将其视为常数，从而消除这一伪影。具体而言，$4(\nu_0^2 - \lambda_1^2)/3\nu_0 \approx 2\lambda_1$。式（23）的数值计算结果以及采用常数前因子得到的相应结果见图3（a）。将依赖频率的前因子替换为常数后，解析预测恢复了典型的马蒂厄舌形状。非线性阻尼增大时，失稳舌向上移动，从而提高倍周期的激活阈值，如图3（b）所示。

通过延续倍周期分岔的轨迹，也可以数值确定失稳边界。数值结果揭示出一种更为复杂的结构，与经典的马蒂厄型失稳舌有显著差异（图 3（a）中的黑色曲线/区域）。为了进一步研究这一形状以及参数刚度和阻尼调制的综合作用，我们引入刘维尔变换

$$\Delta J(\tau) = \exp\left[-\mu\omega_{\mathrm{F}}\left(\delta + \delta_{\mathrm{NL}} j_1\right) t + \frac{\mu\beta\gamma}{\nu_0^2 - \lambda_1^2} \cos(\nu_0\tau) \right] y(\tau). \tag{24}$$

以消除方程（20）中的时变阻尼系数，并将其改写为希尔形式，即

$$\begin{aligned} \ddot{y} + \Bigg[& \lambda_1^2 - \mu^2\omega_{\mathrm{F}}^2\left(\delta + \delta_{\mathrm{NL}} j_1\right)^2 - \frac{\mu^2\beta^2\gamma^2\nu_0^2}{2(\nu_0^2 - \lambda_1^2)^2} + \frac{\mu\beta\gamma(\nu_0^2 + 2\lambda_1^2)}{\nu_0^2 - \lambda_1^2} \cos(\nu_0\tau) \\ & - \frac{2\mu^2\beta\gamma\omega_{\mathrm{F}}\nu_0\left(\delta + \delta_{\mathrm{NL}} j_1\right)}{\nu_0^2 - \lambda_1^2} \sin(\nu_0\tau) + \frac{\mu^2\beta^2\gamma^2\nu_0^2}{2(\nu_0^2 - \lambda_1^2)^2} \cos(2\nu_0\tau) \Bigg] y = 0. \end{aligned} \tag{25}$$

有趣的是，所得有效周期系数不仅包含参数激励频率 ν_0 处的基频谐波，还包含在 $2\nu_0$处额外的二次谐波刚度调制。这个额外的二次谐波项与 $(\mu\beta)^2$ 成正比，揭示了另一种途径，通过这种途径

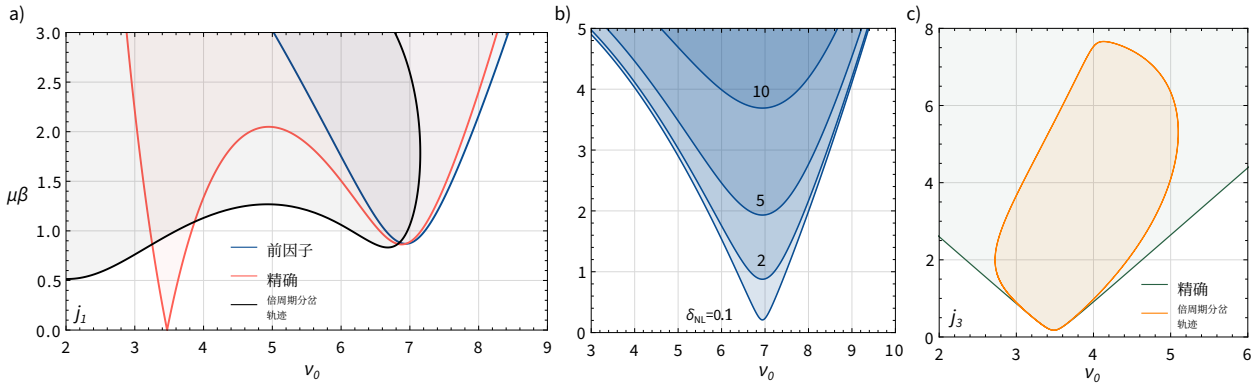

图3：受迫天平动在 $(\nu_0,\ \mu\beta)$ 平面中的稳定性。（a）相位态 j_1附近环面的倍周期不稳定性。红色：方程（23）；其在 $\nu_0 = \lambda_1$ 处的零点是展开造成的伪影。蓝色：冻结前因子 $4(\nu_0^2 - \lambda_1^2)/3\nu_0 \approx 2\lambda_1$。黑色：通过数值延拓得到的倍周期轨迹。阴影表示每条曲线的不稳定侧。（b）非线性阻尼 δ_{NL} 对舌形区临界阈值的影响。（c）静止态 $j_3 = 0$的不稳定性。绿色：弗洛凯阈值，方程（26）。橙色：通过数值延拓得到的倍周期轨迹，其闭合形成一个孤岛。参数： $\mu\beta = 0.25$， $\delta = 0.49505$，$\delta_{\mathrm{NL}} = 1.9802$ $\Omega = 2.01$。

参数阻尼可以促进主马蒂厄共振的激发。特别是，当 ν_0 接近 λ_1时，二次谐波接近未调制变分动力学的固有频率的两倍，可能导致参数不稳定性。值得注意的是，式（25）中的系数继承了 $\nu_0 = \lambda_1$ 处的奇异性，而这一奇异性已存在于用于推导式（17）的周期解中。式（20）因此，尽管刘维尔变换是精确的，但在这一共振附近，微扰展开不再具有一致有效性，所以应谨慎解释所得的谐波分解。

$j_3 = 0$ 平衡态也会失去稳定性。阈值可以通过Floquet理论计算，结果为

$$\mu\beta = \frac{4\omega_0}{\gamma}\sqrt{(\mu\delta\omega_{\mathrm{F}})^2 + \left(\omega_{j_3} - \frac{\nu_0}{2}\right)^2}, \tag{26}$$

对应于 $\omega_{j_3} = \sqrt{\Omega^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$，在精确共振时 $\nu_0 = 2\omega_0$ 则简化为 $\beta = \frac{4\omega_{j_3}\,\delta\omega_{\mathrm{F}}}{\gamma}$。越过阈值后，动力学从稳定的 $j_3 = 0$ 平衡态直接转变为一个在庞加莱映射的二次迭代下保持不变、但在 $\mathcal{P}_\mu^2$ 映射本身下不保持不变的环面。尽管 Floquet理论能够正确确定激活时的 $\mathcal{P}_\mu$ 取值，却无法预测分岔后动力学；后者由三次项 $\mu\beta$ 和 δ_{NL} 所支配。解析与数值失稳阈值的比较见图 α。3(c)。关于分岔情景的深入分析见第4节。

4. 数值分析

在 $\nu_0 = 7$处，次级调制作用于接近固有摆动频率两倍的位置，同时远离主共振。图4(a)中的分岔图显示，受迫振荡环面在通过倍周期失稳 $\mu\beta \approx 1.06$之前始终相对较小。原有的周期一响应在 $\mu\beta \approx 2.6$处恢复稳定性，从而界定出一个倍周期泡。在调制频率固定时，这一失稳区间对应于图3(a)中黑色曲线所示的折叠倍周期边界。越过该泡后，受迫天平动在所考虑的最大调制深度以内持续存在。零振幅态在整个研究范围内也保持稳定，因为 $\nu_0 = 7$ 位于其自身倍周期不稳定区域之外（见图3(c)中的轨迹）。

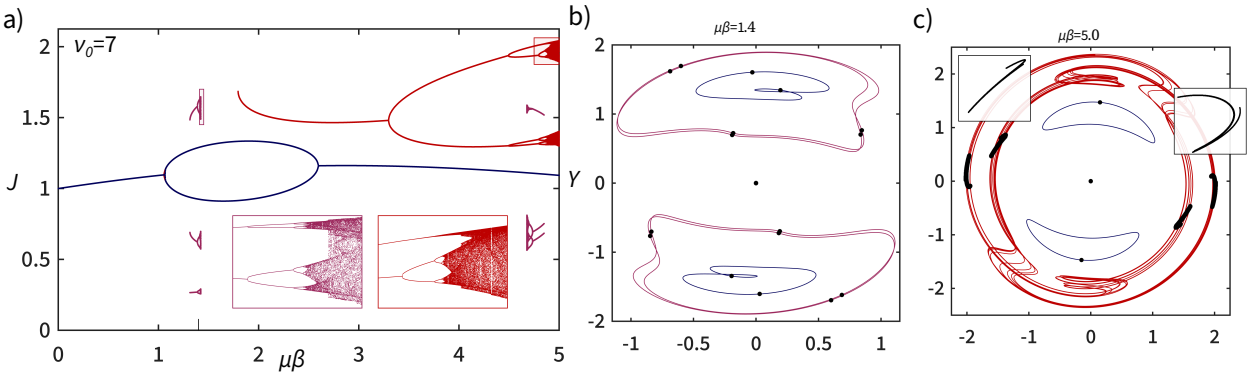

图 4：振荡频率两倍处的调制，$\nu_0 = 7$。（a）方程（$\mathcal{P}_\mu$ 3）的庞加莱映射分岔图，随 $\mu\beta$ 变化。蓝色：围绕相位态的环面，在 $1.06 \lesssim \mu\beta \lesssim 2.6$ 处出现倍周期泡。红色：外部轨道，在 $\mu\beta \approx 1.8$ 处出现，在 $\mu\beta \approx 3.3$ 处发生倍周期分岔，并通过级联进入混沌（红色插图）。紫色：在 $\mu\beta \approx 1.35$ 和 4.7 附近的狭窄窗口中存在的稀有吸引子（紫色插图）。（b）在（X，Y）平面上 $\mu\beta = 1.4$ 处共存的吸引子：静止态（原点处的点）、围绕两个相位态的倍周期环面（蓝色）以及稀有吸引子（紫色）。（c）在 $\mu\beta = 5.0$ 处的相同情况：静止态、围绕相位态的环面（蓝色）以及混沌吸引子（红色）。黑点：频闪点。（c）中的插图：混沌吸引子的频闪截面放大图。

额外的吸引子仅存在于狭窄的参数窗口内，靠近 $\mu\beta \approx 1.35$ 和4。7。这些响应也会经历自身的倍周期级联，如图 4(a) 以及图中相应的轨迹所示。4(b)。

复杂的持久动力学在其他区域发展起来。在 $\mu\beta \approx 1.8$ 处出现了一个独立的外部轨道，并在 $\mu\beta \approx 3.3$ 处经历倍周期。随后，分岔级联在 $\mu\beta \approx 4.6$附近导致混沌。在$\mu\beta = 5$处，庞加莱映射形成了一个有界的折叠结构，呈现出显著的亨农式外观，参见图4(c)。轨迹反复进行拉伸与折叠，产生了一个混沌吸引子；它与两个相位态环面及稳定的零振幅态共存，并包围着它们。每次映射迭代的李雅普诺夫指数 $\lambda_1^{(P)} = 0.215$ 和 $\lambda_2^{(P)} = -1.004$证实了耗散混沌：最大的正指数

表明其对初始条件具有指数敏感性，而第二个负指数则反映了沿另一李雅普诺夫方向的收缩。

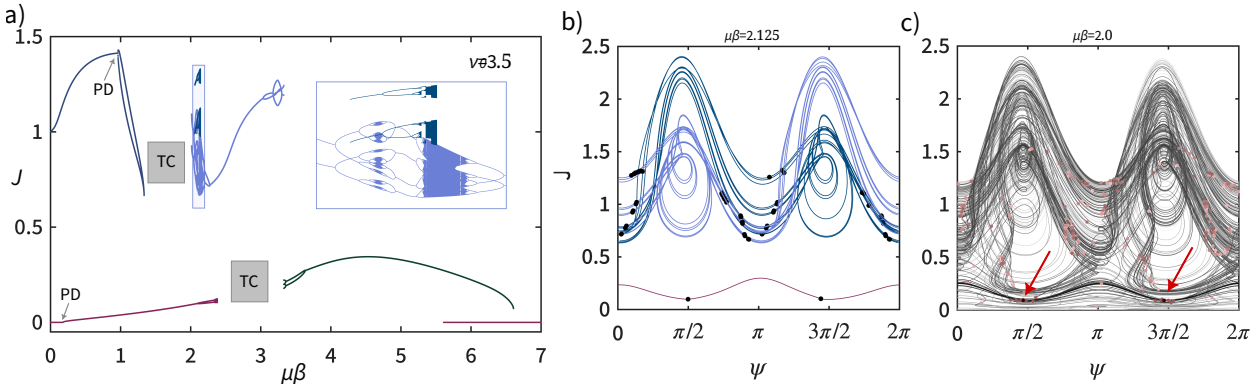

图5：振荡频率处的调制，$\nu_0 = 3.5$。（a）分岔图：J 的频闪值与 $\mu\beta$的关系。上支族：相位态周围的环面（深蓝色）在 $\mu\beta \approx 1.0$ 处发生周期倍增（PD），并在 $\mu\beta \approx 1.35$处终止；当 $2.05 \lesssim \mu\beta \lesssim 2.2$时还存在其他吸引子（浅蓝色），其放大图见插图，$2.3 \lesssim \mu\beta \lesssim 3.3$时也存在其他吸引子。下支族：静止态在 $\mu\beta \approx 0.2$ 处发生周期倍增，形成低振幅轨道（紫色），并在 $\mu\beta \gtrsim 5.6$时再次稳定；当 $3.3 \lesssim \mu\beta \lesssim 6.6$时还存在第二个低振幅轨道（绿色）。TC：瞬态混沌区间。（b） $\mu\beta = 2.125$时（ψ，J）平面中的共存吸引子：两个对称相关的大轨道（浅蓝色和深蓝色）以及低振幅周期二轨道（紫色）。黑点：频闪点。（c） $\mu\beta = 2.0$：从相位态附近出发的轨迹在最终落到低振幅周期二轨道（黑线）之前呈混沌游荡（灰色；其频闪点以深浅不同的粉色表示）；箭头标出了该轨道的两个频闪点。

在 $\nu_0 = 3.5$，调制作用于振荡频率，其结果在性质上有所不同（图5）。受迫天平动处于共振状态：在图5（a）的频闪截面上，作用量从1.0 上升至约1.4，到达 $\mu\beta \approx 1$时，环面发生周期倍增；而周期倍增后的环面在 $\mu\beta \approx 1.0$处消失。在此之后，找不到与任一相位态相关的吸引子。事实上，对于 $\mu\beta \approx 1.35$，从相位态附近出发的轨迹会在两个振荡区域内无规则游荡，最终落在低振幅轨道上（图 $1.35 \lesssim \mu\beta \lesssim 2.055$（c））：混沌是暂态的。只有在一个狭窄区间内才能发现持续混沌，即 $2.05 \lesssim \mu\beta \lesssim 2.2$，此时大振幅轨迹会经过两个相位态。该吸引子见图5（a）中的插图以及图5（b）。在 $\mu\beta = 2.15$处，庞加莱映射呈现耗散混沌，每次映射迭代对应的李雅普诺夫指数为 $\lambda_1^{(P)} = 0.176$ 和 $\lambda_2^{(P)} = -1.330$。最大的指数为正，表明存在指数拉伸；第二个指数为负，反映了横向收缩，从而证实了有界吸引子的混沌性质。

由于调制频率接近振荡频率，静止态也会受到调制的影响，因为 $\nu_0 = 3.5$ 同样位于其不稳定岛的尖端（图 3（c））。它在 $\mu\beta \approx 0.2$ 处发生倍周期分岔，进入低振幅轨道，并在 $\mu\beta \approx 5.6$处恢复。在所发现的吸引子中，只有低振幅运动在超过 $\mu\beta \approx 3.4$后仍然存在，而只有静止态在超过 $\mu\beta \approx 6.6$后仍然存在。因此，调谐至振荡频率的慢音调会抑制

参数振荡，而频率为其两倍的相同音调则会使其保持不变。

数值结果表明，只有当调制振幅远大于不变环面失稳时对应的振幅，才会出现持续混沌。为了解这种复杂动力学的起源，尤其是未受扰动的哈密顿系统中同宿分界线所发挥的作用，下一节将考察次级调制诱发鞍点的稳定流形与不稳定流形相交的条件。

5. Melnikov方法

为从解析角度研究同宿交点的出现，考虑式（5）在以下形式下 m

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mu \mathbf{g}(\mathbf{x}, t), \qquad \mathbf{x} = [J \quad \psi]^{\mathrm{T}} \tag{27}$$

其中， μ 是记账参数，用于控制由阻尼和慢调制引入哈密顿系统的扰动，即

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \gamma J \sin 2\psi \\ -\Omega + \dfrac{3}{2}\alpha J + \dfrac{\gamma}{2}\cos 2\psi \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} -2\delta\omega_{\mathrm{F}} J - \delta_{\mathrm{NL}}\omega_{\mathrm{F}} J^2 \\ \beta \cos(\nu_0 \tau) \end{pmatrix}. \tag{28}$$

梅尔尼科夫函数定义为 [1]

$$M(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{f}(\mathbf{q}_0(t)) \wedge \mathbf{g}(\mathbf{q}_0(t), \tau + \tau_0)\, dt. \tag{29}$$

将式（29）应用于式（28），可得 $\Gamma_{\pm}$ 的梅尔尼科夫函数为

$$\begin{aligned} M_{\pm}(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \Big\{ & [\gamma J_{\pm}(\tau) \sin(2\psi_{\pm}(\tau))] \cdot \beta \cos(\nu_0(\tau + \tau_0)) \\ & - \left[-\Omega + \frac{3}{2}\alpha J_{\pm}(\tau) + \frac{\gamma}{2}\cos(2\psi_{\pm}(\tau)) \right] \left[-2\delta\omega_{\mathrm{F}} J_{\pm}(\tau) - \delta_{\mathrm{NL}}\omega_{\mathrm{F}} J_{\pm}^2(\tau) \right] \Big\} dt \end{aligned} \tag{30}$$

该积分通过采用留数法 [15]求得。对于外部（+）和内部（–）同宿分支，有

$$M_{\pm}(t_0) = \pm\beta\, \nu_0\, \frac{4\pi}{3\alpha}\, \frac{\sinh\left(\dfrac{\nu_0}{\kappa}\Theta_{\pm}\right)}{\sinh\left(\dfrac{\pi\nu_0}{\kappa}\right)} \sin(\nu_0 \tau_0) + K_{\pm}, \tag{31}$$

with

$$\begin{aligned} K_{\pm} &= 2\omega_{\mathrm{F}} \Big[\pm j_2 \left(2\delta + \delta_{\mathrm{NL}} j_2\right) \Theta_{\pm} + \frac{\left(2\delta + 3 j_2 \delta_{\mathrm{NL}}\right)}{3\alpha} \left(\kappa \pm \gamma \Theta_{\pm}\right) + \frac{\delta_{\mathrm{NL}}\gamma}{3\alpha^2} \left[\pm\Theta_{\pm}\left(\gamma + \alpha j_2\right) + \kappa\right] \Big], \\ \kappa &= \sqrt{3\alpha\gamma j_2}, \qquad \Theta_{\pm} = \arccos\left(\mp \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 + 3\alpha\gamma j_2}} \right). \end{aligned} \tag{32}$$

[1]楔积定义为 $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = a_1 b_2 - a_2 b_1$

$$\beta_{\pm}^{\mathrm{cr}}(\nu_0) = \frac{3\alpha\,|K_{\pm}|}{4\pi}\,\frac{\sinh\!\left(\dfrac{\pi\nu_0}{\kappa}\right)}{\nu_0\,\left|\sinh\!\left(\dfrac{\nu_0}{\kappa}\Theta_{\pm}\right)\right|} \tag{33}$$

由式（33）给出的阈值曲线绘于图6中。临界调制幅度关于 ν_0 的函数关系显示在图 a 中，对应于两条分界轨道分支。两条曲线均表现出对调制频率的非单调依赖性，其中的最小值对应于最易发生同宿交点的频率范围。对于 M_- 分支（红色）的阈值始终低于M_+ 分支（蓝色）的阈值，表明前者首先发生横截相交。虚线表示 $\nu_0 = 3.5$，箭头表示随着 β 增加，两个阈值依次发生交叉。图 b 和图 c 分别展示了作为 ν_0 和 γ 函数的 M_+ 和 M_- 分支对应的阈值曲面，其中在 $\gamma = 2$ 处的曲线恢复了图 a 中的结果。在两幅图中，阈值曲面均终止于边界 $\gamma = 2\Omega$处，此时鞍点平衡态趋近于零作用量态，有限作用量同宿轨道不再存在；这与同宿分界线存在的条件 $\gamma < 2\Omega$ 一致。

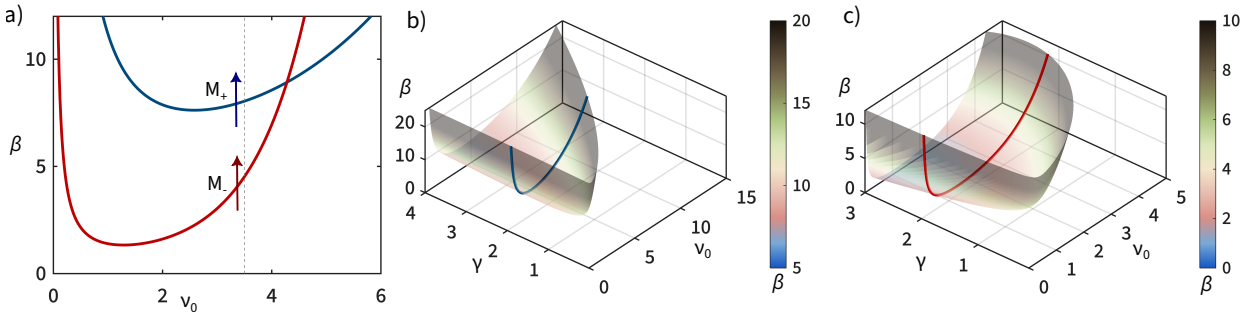

图 6：横向同宿交点的梅尔尼科夫阈值。(a) 临界调制幅度 β 随 ν_0 变化，适用于 $\gamma = 2$(，方程 (33))，对应分界线的两个分支（红色：M_-；蓝色：M_+）。虚线表示 $\nu_0 = 3.5$，箭头标示随 β 增大时依次越过的两个阈值。(b) 阈值 M_+ 随 ν_0 和泵浦振幅 γ的变化；蓝线是 (a) 中所示的截面 $\gamma = 2$ 。(c) 对 M_-也作同样处理；红线：$\gamma = 2$。

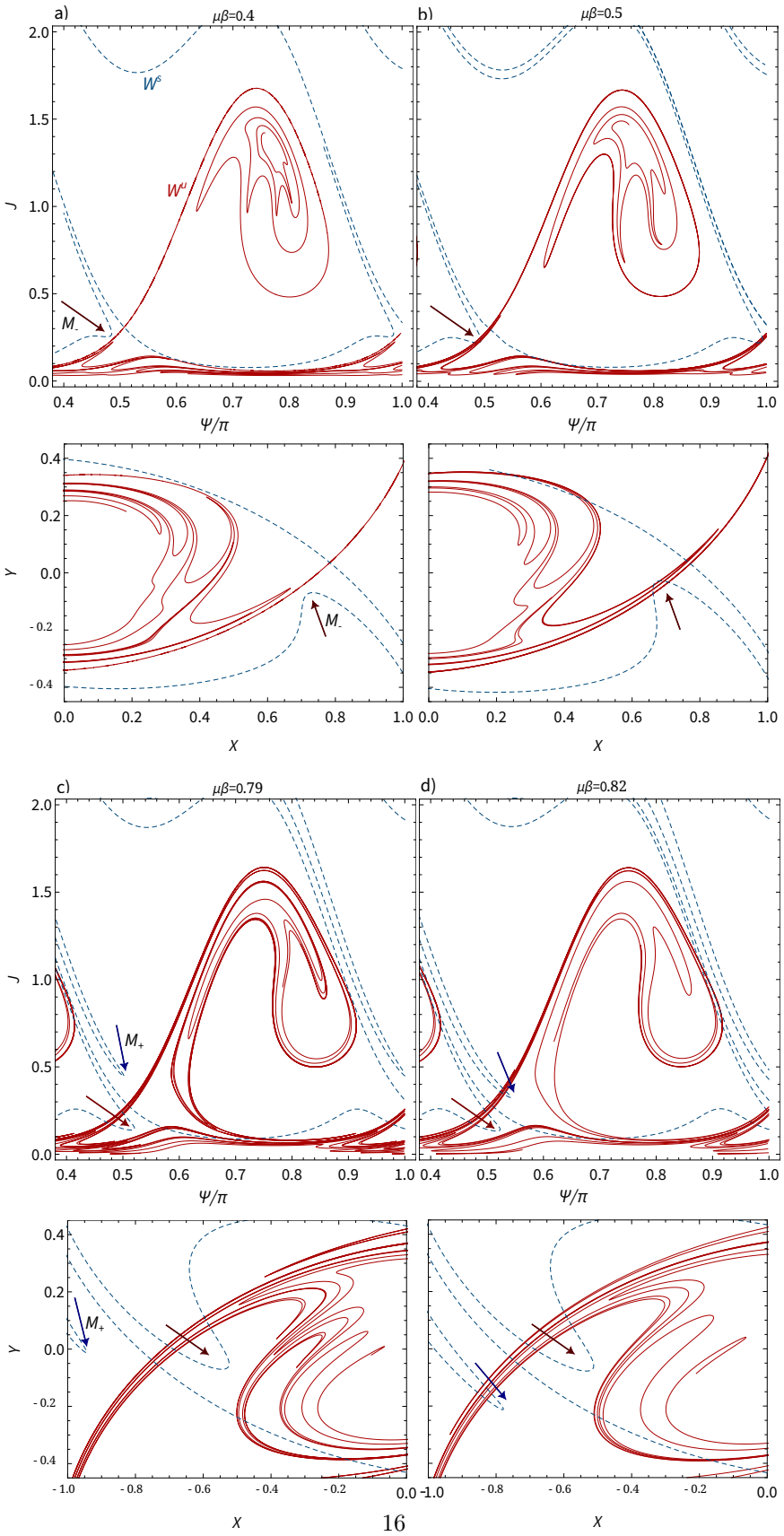

图7：方程（3）的 $\mathcal{P}_\mu$ 的鞍型轨道的稳定（W^s，蓝色虚线）与不稳定（W^u，红色实线）流形，在 $\nu_0 = 3.5$ 时，位于图6(a)预测的两处相切的两侧。上排：(ψ, J) 平面；下排：(X, Y) 平面中的放大图。(a) $\mu\beta = 0.4$ 和 (b) $\mu\beta = 0.5$：第一次相切前后（M_-，深红色箭头；预测值为 $\mu\beta = 0.4522$）。(c) $\mu\beta = 0.79$ 和 (d) $\mu\beta = 0.82$：第二次相切前后（M_+，蓝色箭头；预测值为 $\mu\beta = 0.8043$）。流形使用参考文献 [40] 中的算法计算。

图 6(a) 将这些结果置于绝热与非绝热图景中。方程（33）的两个阈值在 ν_0 趋于零时均发散为 $1/\nu_0$，因为缓慢变化的失谐会使分界线发生位移，却不会使其分裂。在 ν_0较大时，两个阈值均呈指数增长，此时调制效应被平均掉。因此，同宿缠结是一种非绝热效应，仅存在于调制频率与 λ_2 同量级的范围内； λ_2是鞍点的特征速率，其本身与振荡频率同量级。具体而言，针对 $\nu_0 = 3.5$ 的梅尔尼科夫分析预测，在 $\mu\beta = 0.452$ 和 0.804 处会发生相切（图6(a)）。计算所得的流形证实了这两处相切。图7展示了稳定流形 W^s（蓝色）和不稳定流形 W^u（红色）的图像，它们是通过方程（3）的庞加莱映射 $\mathcal{P}_\mu$ 计算得到的。下方的稳定流形和不稳定流形最先在约为 $0.4 < \mu\beta < 0.5$ 时相交（图 a 和 b），而上方的流形则在 $0.79 < \mu\beta < 0.82$ 时相交。这两处相切都先于环面的倍周期及其消失。对于 $0.45 < \mu\beta < 1.35$，马蹄映射因此与规则吸引子共存。它在分岔图中没有留下痕迹，却为后续现象埋下伏笔。图8中的缠结将振荡区域与静止态附近区域连接起来。环面一旦消失，缠结便同时提供了混沌瞬态和通往低振幅轨道的路径，后者见图5(c)。

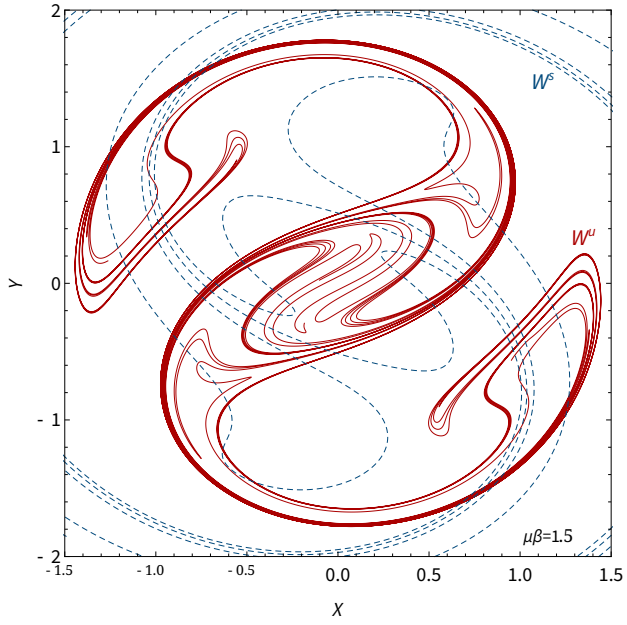

图 8：在 $\mu\beta = 1.5, \nu_0 = 3.5$处的（$X$，$Y$）平面中的同宿缠结：鞍型轨道的稳定（$W^s$，蓝色虚线）和不稳定（$W^u$，红色实线）流形。该图在（$X$，$Y$）$\to$（$-X$，$-Y$）变换下保持不变，该对称性互换了两个相位态。

6. 结论

本研究考察了受到刚度次级调制的参数激励 Duffing振子的动力学。尽管次级调制相较于主激励较慢，但其时间尺度可能与参数相位态的固有摆动时间尺度相当，从而导致绝热响应失效。对于非零次级调制，完整流的动力学会经由不变二维环面演化。这些解描述了围绕参数相位态的调制驱动摆动。其稳定性由阻尼马蒂厄方程决定，其中次级调制同时影响有效刚度和阻尼。该形式为解析确定倍周期不稳定边界提供了途径，同时还识别出与零振幅态相关的一个独立不稳定区域。

当调制频率接近固有摆动频率时，受迫天平动会发生共振放大，最终导致相位态不变环面消失。由此产生的动力学包括瞬态混沌运动，以及一个有限参数区间内的持续混沌，之后参数振荡最终被抑制。在振荡频率的两倍处，系统响应则显著不同：除一个有界的倍周期不稳定区域外，相位态环面在宽得多的调制振幅范围内保持稳定。在这种情况下，持续混沌会在一个独立的外部吸引子上发展，并与相位态环面和稳定的零振幅态共存。因此，取决于共振条件，相同的次级调制既可能抑制参数振荡，也可能在保持相位态完整的同时促成复杂动力学。

通过Melnikov方法，本文考察了复杂动力学出现背后的全局机制。稳定流形与不稳定流形发生横截相交所需的显式临界调制振幅，随调制频率呈非单调变化。在准静态极限和高频极限下，这些振幅均发散，并在由鞍点附近特征动力学决定的中间频率处达到最小值。对不变流形的数值计算证实了这些预测。值得注意的是，同宿交点出现时的调制振幅远低于持续混沌吸引子形成所需的振幅。因此，这些交点预示着相空间结构开始发生全局重组，而非持续混沌立即出现。

总的来说，这些结果表明，调制与内禀相位动力学的相对时间尺度决定了相位态能否跟随外部驱动、发生共振放大，或失去稳定性。基于不变环面稳定性与同宿流形动力学的综合描述，为理解参数驱动非线性振子趋向复杂行为的这些不同路径提供了一个框架。

参考文献

[1] R. Lifshitz 和 M. C. Cross，载于《非线性动力学与复杂性评论》（约翰·威利父子公司，2008年）第1章，第1–52页。[2] A. Bachtold、J. Moser 和 M. I. Dykman，《现代物理学评论》94，045005（2022年）。[3] P. G. Steeneken、R. J. Dolleman、D. Davidovikj、F. Alijani 和 H. S. J. van der Zant，《二维材料》8，042001（2021年）。[4] P. Belardinelli、W. Yang、A. Bachtold、M. I. Dykman 和 F. Alijani，《纳米快报》25，8443（2025年）。[5] M. Defoort、L. Rufer、L. Fesquet 和 S. Basrour，《微系统与纳米工程》7，17（2021年）。[6] L. Catalini、J. del Pino、S. S. Kumar、V. Dumont、G. Margiani、O. Zilberberg 和 A. Eichler，《物理评论研究》7，033058（2025年）。[7] K. C. Howell、B. T. Barden 和 M. W. Lo，《宇航科学杂志》45，161（1997年）。[8] J. S. Huber、G. Rastelli、M. J. Seitner、J. Kölbl、W. Belzig、M. I. Dykman 和 E. M. Weig，《物理评论X》10，021066（2020年）。[9] J. S. Ochs、M. Seitner、M. I. Dykman 和 E. M. Weig，《物理评论A》103，013506（2021年）。[10] S. Houri、M. Asano、H. Okamoto 和 H. Yamaguchi，《物理评论应用》16，064015（2021年）。[11] S. S. Kumar、J. del Pino、L. Catalini、A. Eichler 和 O. Zilberberg，《物理评论研究》8，023298（2026年）。[12] S. Houri、R. Ohta、M. Asano、Y. M. Blanter 和 H. Yamaguchi，《日本应用物理学杂志》58，SBBI05（2019年）。[13] S. Houri、M. Asano、H. Yamaguchi、N. Yoshimura、Y. Koike 和 L. Minati，《物理评论快报》125，174301（2020年）。[14] C. F. D. Wattjes、H. Lim、P. Belardinelli、J. E. Sader、P. G. Steeneken 和 F. Alijani，《慢参数调制下非线性石墨烯谐振器中的非绝热动力学》（2026年）。[15] K. Yagasaki、M. Sakata 和 K. Kimura，《应用力学杂志》57，209（1990年）。[16] D. Rugar 和 P. Grütter，《物理评论快报》67，699（1991年）。[17] I. Mahboob 和 H. Yamaguchi，《自然·纳米技术》3，275（2008年）。[18] I. Mahboob、H. Okamoto 和 H. Yamaguchi，《科学进展》2，e1600236（2016年）。[19] G. Margiani、O. Ameye、O. Zilberberg 和 A. Eichler，《物理评论快报》135，097201（2025年）。

[20] A.Grimm, N.E. Frattini, S.Puri, S.O.Mundhada, S.Touzard, M.Mirrahimi, S.M.Girvin, S.Shankar, and M. H. Devoret, 《自然》584, 205 (2020年).[21] G. Margiani, O. Ameye, O. Zilberberg, and A. Eichler, 共存极限环之间的激活切换 (2026年), arXiv:2608.19060 [math.DS] .[22] E. Kartal, O. Shoshani, E. Botnaru, A. Martín-Pérez, T. Manzaneque, and F. Alijani, 《纳米快报》26, 7501 (2026年).[23] R. S. Zounes and R. H. Rand, 《SIAM应用数学杂志》58, 1094 (1998年).[24] R. Rand, K. Guennoun, and M. Belhaq, 《非线性动力学》31, 367 (2003年).[25] I. Kovacic, R. Rand, and S. Mohamed Sah, 《应用力学评论》70, 020802 (2018年).[26] R. S. Zounes and R. H. Rand, 《非线性动力学》27, 87 (2002年).[27] F. Lakrad and W. Schiehlen, 《混沌、孤子与分形》22, 1149 (2004年).[28] F. Lakrad, A. Azouani, N. Abouhazim, and M. Belhaq, 《混沌、孤子与分形》24, 813 (2005年).[29] F. Lakrad and M. Belhaq, 《非线性科学与数值模拟通讯》14, 2426 (2009年).[30] F. Lakrad, A. Chtouki, and M. Belhaq, 《力学》51, 2577 (2016年).[31] A. Chtouki, F. Lakrad, and M. Belhaq, 《非线性动力学》99, 283 (2020年).[32] J. Ardister, F. Afzali, and B. F. Feeny, 《振动与声学杂志》146, 011003 (2024年).[33] V. Melnikov, 《莫斯科数学会会刊》12, 3 (1963年).[34] J. Guckenheimer and P. Holmes, 《非线性振荡、动力系统与向量场分岔》, 应用数学科学丛书（施普林格，纽约，2013年).[35] M. Faraday, 《伦敦皇家学会哲学汇刊》, 299 (1831年).[36] E. Mathieu, 《纯粹与应用数学杂志》13, 137 (1868年).[37] G. W. Hill, 《数学学报》8, 1 (1886年).[38] G. Floquet, 《高等师范学校科学年刊》12, 47 (1883年).[39] N. Kryloff, N. Bogoliubov, and S. Lefschetz, 《非线性力学导论》, 数学研究年刊（普林斯顿大学出版社，1947年).[40] T

. Parker 和 L . Chua, IEEE会刊**75** , 982（1987）.

数据可用性

支持本文研究结果的数据可应要求提供。

利益冲突

我们声明不存在任何利益冲突。