# 一维费米气体中杂质动量的弛豫动力学

**Felipe Taha Sant'Ana**[1⋆]

1 数学、计算与认知中心，ABC联邦大学，圣安德烈 09210-580，巴西

⋆ t.felipe@ufabc.edu.br

arXiv:2611.32280v1 [cond-mat.quant-gas] 24 Nov 2026

## 摘要

**我们研究了一维中由排斥性接触相互作用耦合到等质量自由无自旋费米子气体的单个移动杂质。利用相互作用本征态与自由费米子态之间的行列式重叠，我们推导出了有限系统任意贝特拟设本征态之间杂质动量算符及其平方的矩阵元的封闭行列式公式。在无限耦合下，我们证明了一个选择定则：对于具有相同快度的不同本征态，这两个算符的矩阵元均为零，并且每个本征态都携带总动量按粒子数平均分配的部分。对于注入费米海中的杂质，我们得到如下结果：在无限耦合下，平均杂质动量在热力学极限中完全弛豫，而在有限耦合下，弛豫仍不完全。这些封闭形式的矩阵元将平均杂质动量的谱表示转化为对本征态的显式有限求和。我们计算了注入后的动力学过程，解析了量子颤振，并研究了其趋近对角系综值的过程，同时绘制了平稳动量随注入动量和耦合变化的关系。最后，我们将热力学极限及其渐近行为表示为 Fredholm 行列式的积分，并对此进行了分析。**

## 目录

**1 引言 2 2 模型、谱与重叠 3 3 杂质动量的矩阵元 5 4 动量弛豫 8 5 有限系统中的弛豫动力学 11 6 结论与展望 12 A 生成函数的柯西–比内约化 13 B 小$y$ 展开与矩阵元 15 C 无限耦合下的简并扇区 17 D $P$(的行列式表示) 17**

E 无限耦合核及其极限 20

参考文献 20

## 1 引言

在穿过一维（1D）量子液体运动的移动杂质中，多体弛豫可以在实时间内加以追踪。冷原子实验能够将一个可区分的原子以确定的速度注入一维气体，并追踪其动量分布 [1–6]。在理论方面，一维运动的运动学约束使人们熟悉的三维极化子准粒子图像失效 [7–9]，并产生了在更高维度中没有对应物的现象 [10, 11]。缀饰杂质的色散关系随其动 [12, 13]量呈周期性变化，周期由宿主的密度决定 [4, 13–16]；因此，受驱动的杂质无需晶格也会发生布洛赫振荡 [17, 18]– [19, 20]；而在小动量下，杂质的运动由宿主的红外激发所支配，超越了任何准粒子描述 [21。23]高速杂质还会表现出自身的动力学跃迁，例如量子切伦科夫跃迁 [21, 24]，。其中两个现象促成了本项工作。第一，量子颤动：以与费米动量相当或更大的动量注入的杂质，会通过长寿命振荡释放动量 [6]。第二，不完全弛豫：在可积系统中，杂质动量会饱和于非零的驻值，因此初始动量的一部分将永远保留下来，这一行为最近已被直接观测到。

McGuire [25, 26]求解了这一物理问题的最简可积模型：一个质量与宿主费米子相等的单个杂质，通过排斥性接触相互作用与它们耦合。它属于杨–高丁气体 [27–29], 的单磁振子扇区，大多数关于一维杂质动力学的解析结果都建立在此模型之上：包括谱性质 [26, 30], 、将杂质格林函数表示为 Fredholm 行列式 [31], ， 以及其有限温度动力学 [32, 33]。该问题的晶格版本允许对极化子谱函数进行精确计算 [34, 35]。发现量子颤动的研究通过对由贝特拟设形状因子数值计算得到的矩阵元求和，评估了杂质动量 [21, 22], ； 文献 [36]则给出了玻色子宿主中超声速区间的贝特拟设分析。

由于目前尚无 McGuire本征态之间杂质动量矩阵元的闭式表达式，也没有类似于格林函数已知表达式的行列式表示，我们因此构建了对时变平均动量的描述。我们的出发点是相互作用本征态与自由态之间重叠的行列式公式 [31]。随后，我们求得了有限系统中任意本征态之间杂质动量及其平方的矩阵元，每个矩阵元都可表示为一个行列式乘以若干初等因子。对角元重现了已知的极化子结果。

在无限耦合下，谱分解为若干扇区，每个扇区包含具有相同快度的本征态。我们证明，杂质动量及其平方在同一扇区中不同态之间的矩阵元为零，而且每个本征态所携带的动量等于总动量的每粒子份额。因此，注入后，杂质平均动量会在热力学极限下完全弛豫，而不完全弛豫平台 [21, 24] 在无限耦合下消失。

闭式矩阵元将平均动量及其方差的谱和转化为有限个行列式乘积之和。借助这些结果，我们追踪注入后的

有限系统动力学，解析强耦合下的颤振振荡及其向对角系综值的趋近，并绘出平稳动量随注入动量和耦合强度变化的关系。在热力学极限下，我们推导出平均动量的一种表示形式：对费米海上作用的显式核的 Fredholm 行列式进行二重快度积分。在无限耦合下，这些核由误差函数构成；我们解析地展示了初始动量如何从这一表示中涌现，并确定其长时间结构。

本文结构安排如下。第2 节回顾模型及其贝特拟设解和重叠公式，并确定注入方案。第3 节给出闭式矩阵元、特殊极限和无限耦合选择定则。第4节建立平均动量的谱表示，确立对角系综极限和无限耦合下的结论，并推导 Fredholm 行列式表示。第5节介绍有限系统中的弛豫动力学。第6节总结。技术内容汇集于附录中：生成函数的行列式约化（附录A），其小 $y$ 展开，由此得到矩阵元（附录B），简并子空间分析（附录C），平均动量行列式表示的推导（附录D），以及其无限耦合核（附录E）。

## 2 模型、谱与重叠

我们考虑环周长为$N$ （$\hbar h=1$）上的$N$ 个单位质量的自由无自旋费米子，以及一个质量相同、可区分的粒子（“杂-质”）。

$$H=-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial X^2}-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}+g\sum_{j=1}^{N}\delta(X-x_j),\qquad g>0, \tag{1}$$

其中$X$是杂质坐标，$x_j$是气体粒子的坐标。气体的特征参数为密度 $\rho=N/L$、费米动量$k_F=\pi\rho$、费米能 $\varepsilon_F=k_F^2/2$和费米速度$v_F=k_F$。无量纲耦合为

$$\gamma=\frac{g}{\rho},\qquad \alpha\equiv\frac{2}{g}=\frac{2}{\gamma\rho}. \tag{2}$$

该模型是可积的 [25, 27]。本征态 $|k\rangle = |k_1,\dots,k_{N+1}\rangle$ 由$N+1$个不同的电荷动量$k_j$ 以及一个快度参数 $\Lambda$ 决定，并满足贝特方程

$$e^{ik_jL}=\frac{\alpha k_j-\Lambda+i}{\alpha k_j-\Lambda-i}\qquad\Longleftrightarrow\qquad \cot\left(\frac{k_jL}{2}\right)=\alpha k_j-\Lambda,\qquad j=1,\dots,N+1, \tag{3}$$

再结合单磁振子条件，该条件量子化总动量$Q$ ，从而确定 $\Lambda$,

$$\prod_{j=1}^{N+1}e^{ik_jL}=1\qquad\Longrightarrow\qquad Q=\sum_{j=1}^{N+1}k_j=\frac{2\pi m}{L},\qquad m\in\mathbb{Z}. \tag{4}$$

态 $|k\rangle$ 的能量为

$$E_k=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N+1}k_j^2. \tag{5}$$

每个根$k_j$ 都位于一条由整数$n_j$标记的分支上，$2\pi n_j/L<k_j<2\pi(n_j+1)/L$，其中$k_j$ 随 $\Lambda$ 单调递增，

$$\frac{\partial k_j}{\partial\Lambda}=\frac{2}{L}\frac{1}{(\alpha k_j-\Lambda)^2+1+2\alpha/L}>0, \tag{6}$$

且$k_j \to 2\pi n_j/L$ 为 $\Lambda \to -\infty$。因此，本征态由一组$N+1$ 个互不相同的整数$\{n_j\}$ 以及总动量整数$m$标记。若$m-N-1<\sum_j n_j<m$，则存在有限的 $\Lambda$解。边界情况

$$\sum_j n_j = m \qquad \Longleftrightarrow \qquad \Lambda=-\infty, \qquad k_j=\frac{2\pi n_j}{L}, \tag{7}$$

是一个合法的本征态，即我们记作 $|k_\infty\rangle$ 的“特殊”态。在该态中，杂质在动量空间中完全解耦，见下文方程（11）。

在无限耦合下，$\alpha=0$，贝特方程与$k_j$ 解耦，所有根共享一个相同的相移，

$$\alpha=0: \qquad k_j=\frac{2\pi n_j+2\delta}{L}, \qquad \delta=\frac{\pi(m-\sum_j n_j)}{N+1}\in(0,\pi), \qquad \Lambda=-\cot\delta, \tag{8}$$

因此，$\Lambda$ 仅通过分支整数之和来决定：谱组织成简并的-$\Lambda$扇区。这种结构决定了无限耦合选择定则。

令$\hat{c}^\dagger_q$在动量$q=2\pi n/L$的平面波态中产生杂质，并令$|q_1\dots q_N\rangle$ 表示自由费米气体态$q_a=2\pi m_a/L$、$m_1<\cdots<m_N$。核心量是重叠公式 [31]

$$\langle q_1\dots q_N|\hat{c}_q|k\rangle=\delta_{q+\sum_a q_a,Q}\left(\frac{2}{L}\right)^{N/2}\sqrt{\frac{\prod_{j=1}^{N+1}\frac{\partial k_j}{\partial\Lambda}}{\sum_{j=1}^{N+1}\frac{\partial k_j}{\partial\Lambda}}}\det\begin{pmatrix}\frac{1}{k_1-q_1} & \cdots & \frac{1}{k_{N+1}-q_1}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{1}{k_1-q_N} & \cdots & \frac{1}{k_{N+1}-q_N}\\ 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}. \tag{9}$$

方程（9）中的加边行列式可以写成闭式形式（它是带有辅助行 $q_0\to\infty$ 的柯西行列式在 $q_0$ 极限下的结果），

$$\det(\cdots)=(-1)^{\frac{N(N-1)}{2}}\frac{\prod_{a<a'}(q_{a'}-q_a)\prod_{j<j'}(k_{j'}-k_j)}{\prod_{a,j}(k_j-q_a)}. \tag{10}$$

对于特殊态，方程（7）中的重叠公式退化为自由粒子分解：将 $\Lambda\to-\infty$ 代入方程（9）–（10）可得

$$\hat{c}_q|k_\infty\rangle=\begin{cases}\frac{(-1)^{N+1-s}}{\sqrt{N+1}}\big|\{2\pi n_j/L\}\setminus q\big\rangle, & q=\frac{2\pi n_s}{L}\in\{k_j\},\\ 0, & \text{otherwise},\end{cases} \tag{11}$$

也就是说，特殊态是杂质占据每一个$N+1$ 自由动量、气体占据其余动量的等权叠加态。

我们研究标准的注入（突然）协议 [21,22]：在 $t=0$ 时，在自由费米气体的基态之上以动量 $p_0=2\pi m_0/L$ 创建杂质，其中自由费米气体的$N$ 个动量（$N$为奇数）填满费米海，

$$|\mathrm{FS}\rangle=|q_1\dots q_N\rangle, \qquad |q_a|\le k_\mathrm{F}-\frac{\pi}{L}, \qquad E_\mathrm{FS}=\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{N}q_a^2, \tag{12}$$

其能量为 $E_\mathrm{FS}$。初始态为

$$|\psi(0)\rangle=\hat{c}^\dagger_{p_0}|\mathrm{FS}\rangle=\sum_a c_a|k_a\rangle, \qquad c_a=\langle k_a|\hat{c}^\dagger_{p_0}|\mathrm{FS}\rangle \tag{13}$$

其中 $|k_a\rangle$，由 $a$ 标记，遍历所有具有总动量 $Q = p_0$ 的本征态，实重叠 $c_a$ 由式（9）给出。态随时间演化为 $|\psi(t)\rangle = e^{-iHt}|\psi(0)\rangle$。我们关注的可观测量是平均杂质动量及其方差，

$$P(t) = \langle\psi(t)|\hat{P}_{\text{imp}}|\psi(t)\rangle = \sum_{a,b} c_a c_b \langle k_b|\hat{P}_{\text{imp}}|k_a\rangle e^{it(E_b-E_a)}, \qquad \hat{P}_{\text{imp}} = \sum_q q\hat{c}_q^\dagger \hat{c}_q, \tag{14}$$

其中 $\hat{P}_{\text{imp}}$ 是杂质动量算符，并且

$$\text{Var}\, P(t) = \langle\psi(t)|\hat{P}_{\text{imp}}^2|\psi(t)\rangle - P(t)^2, \tag{15}$$

其第一项具有相同的谱形式，只需将 $\hat{P}^2_{\text{imp}}$ 替换为 $\hat{P}_{\text{imp}}$。因此，问题归结为矩阵元 $\langle p|\hat{P}^n_{\text{imp}}|k\rangle$。

## 3 杂质动量的矩阵元

考虑任意两个具有相同总动量 $Q$ 的本征态 $|k\rangle$（根 $k_j$，快度 $\Lambda$）和 $|p\rangle$（根 $p_i$，快度 $\widetilde{\Lambda}$）之间的矩阵元 $n^{(pk)}_q$，它表示动量 $q$ 处杂质占据数的矩阵元，以及其生成函数 $\chi(y)$，其中位移 $y$ 与杂质动量共轭，

$$n_q^{(pk)} = \langle p|\hat{c}_q^\dagger \hat{c}_q|k\rangle, \qquad \chi(y) = \sum_q e^{-iqy} n_q^{(pk)}, \qquad \langle p|\hat{P}^n_{\text{imp}}|k\rangle = (i\partial_y)^n \chi(y)\big|_{y=0}. \tag{16}$$

对自由态插入单位分解，并利用公式（9），即可对气体构型求和并得到闭式结果（附录 A）：

$$\chi(y) = \det(A+B) - \det A, \tag{17}$$

其中，$A$ 和 $B$ 是 $(N+1)\times(N+1)$ 矩阵，

$$A_{ij} = -\frac{e(p_i)-e(k_j)}{p_i-k_j} e^{-iy(p_i+k_j)/2} \left|\frac{\partial p_i}{\partial\widetilde{\Lambda}}\right|^{1/2} \left|\frac{\partial k_j}{\partial\Lambda}\right|^{1/2}, \tag{18}$$

$$B_{ij} = \frac{e^{-iy(p_i+k_j)/2}}{\sqrt{\sum_i \partial p_i/\partial\widetilde{\Lambda}}\sqrt{\sum_j \partial k_j/\partial\Lambda}} \left|\frac{\partial p_i}{\partial\widetilde{\Lambda}}\right|^{1/2} \left|\frac{\partial k_j}{\partial\Lambda}\right|^{1/2}, \tag{19}$$

并且，对于 $0 < y < L$，

$$e(\kappa) = \frac{2}{L}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{e^{2\pi i n y/L}}{\kappa - 2\pi n/L} = e^{i\kappa y}\left[\cot\left(\frac{\kappa L}{2}\right) - i\right] \xrightarrow{\text{on-shell}} e^{i\kappa y}(\alpha\kappa - \Lambda_\kappa - i), \tag{20}$$

其中，“壳上”表示 $\kappa$ 是一个贝特根，$\Lambda_\kappa$ 是其所属态的快度，并且已使用贝特方程（3）。当两个态共享一个贝特根时，$p_i = k_j = \kappa$（这只可能发生在 $\alpha = 0$ 处的简并扇区中），$A$ 中相应的元素与公式（18）的朴素极限不同。相应的格点求和为

$$A_{ij}\big|_{p_i=k_j=\kappa} = \left[iy(\alpha\kappa - \Lambda - i) - \frac{L}{2}\left(1 + (\alpha\kappa-\Lambda)^2\right)\right]\frac{\partial k_j}{\partial\Lambda} = (\text{naive limit}) - 1, \tag{21}$$

其中，朴素极限是 $p_i \to k_j$ 式（18）在 $e(\kappa)$ 的壳上形式下的极限，并且我们使用了式（6）。这一 $-1$ 偏移是选择定则的起源。式（17）–（21）在有限体积中成立。

将式（17）按$y$展开至二阶（附录B），可得对角元（$p=k$）的矩 [37]

$$\langle k|\hat{P}_{\rm imp}|k\rangle=\frac{S_1}{S_0},\qquad \langle k|\hat{P}^2_{\rm imp}|k\rangle=\frac{S_2-\alpha(S_0S_2-S_1^2)}{S_0},\qquad S_n\equiv\sum_{j=1}^{N+1}k_j^n\frac{\partial k_j}{\partial\Lambda}, \tag{22}$$

而对于 $\widetilde{\Lambda}\neq\Lambda$ 非对角元，则有

$$\langle p|\hat{P}_{\rm imp}|k\rangle=\frac{D(k,p)}{\sqrt{\sum_i\frac{\partial p_i}{\partial\widetilde{\Lambda}}}\sqrt{\sum_i\frac{\partial k_i}{\partial\Lambda}}}\frac{E_p-E_k}{\widetilde{\Lambda}-\Lambda}, \tag{23}$$

$$\langle p|\hat{P}^2_{\rm imp}|k\rangle=\frac{D(k,p)}{\sqrt{\sum_i\frac{\partial p_i}{\partial\widetilde{\Lambda}}}\sqrt{\sum_i\frac{\partial k_i}{\partial\Lambda}}}\left[\frac{\sum_i p_i^3-\sum_i k_i^3}{3(\widetilde{\Lambda}-\Lambda)}+\alpha\left(\frac{E_p-E_k}{\widetilde{\Lambda}-\Lambda}\right)^2\right], \tag{24}$$

能量 $E_p$ 和 $E_k$，它们出现在式（5）中；以及行列式

$$D(k,p)=\det\left[\frac{\widetilde{\Lambda}-\Lambda}{p_i-k_j}\left|\frac{\partial p_i}{\partial\widetilde{\Lambda}}\right|^{1/2}\left|\frac{\partial k_j}{\partial\Lambda}\right|^{1/2}\right]=(\widetilde{\Lambda}-\Lambda)^{N+1}\frac{\prod_{i<j}(p_j-p_i)(k_i-k_j)}{\prod_{i,j}(p_i-k_j)}\prod_{j=1}^{N+1}\left|\frac{\partial p_j}{\partial\widetilde{\Lambda}}\frac{\partial k_j}{\partial\Lambda}\right|^{1/2}. \tag{25}$$

式（22）–（25）构成了本文的首个主要结果。其推导结合了式（$y$-展开的秩一结构（见式（17））与围道积分表示~矩阵 $C_{ij}=(\Lambda-\Lambda)/(p_i-k_j)$的逆矩阵；其求和后的元素可化为根的幂和，见附录B.21中的式B。

非对角元满足〈p|ˆP$_{\rm imp}$|k〉 $\propto$ E$_p$ −E$_k$：杂质动量算符仅连接能量不同的态（对于 $\widetilde{\Lambda}\neq\Lambda$），这种结构让人联想到全时间导数算符；这里对应的是乘以质量比的杂质位置算符。定义〈p|ˆP$^2$ imp|k〉的和 $\sum$q q$^2$n$^{(pk)}$ q 仅条件收敛：n$^{(pk)}$ q 有一个带交错符号的 O(q$^{-3}$) 尾部（对角尾部为 Tan 接触衰减 $\propto$ q$^{-4}$），式（24）以对称（等价地，阿贝尔）意义对其重新求和；生成函数式（16）的求导也采用这一意义。

涉及特殊态的矩阵元由公式（7）得到，$\Lambda\to-\infty$ 取极限即可（等价地，也可由公式（11）得到）。对角元为

$$\langle k_\infty|\hat{P}_{\rm imp}|k_\infty\rangle=\frac{Q}{N+1},\qquad \langle k_\infty|\hat{P}^2_{\rm imp}|k_\infty\rangle=\frac{2E_k}{N+1}, \tag{26}$$

以及对于一般伙伴态 $|p\rangle$，

$$\begin{aligned}\langle p|\hat{P}_{\rm imp}|k_\infty\rangle&=\frac{D_\infty(k,p)}{\sqrt{\sum_i\frac{\partial p_i}{\partial\widetilde{\Lambda}}}\sqrt{2(N+1)/L}}\sum_{j=1}^{N+1}\frac{p_j^2-k_j^2}{2},\\ \langle p|\hat{P}^2_{\rm imp}|k_\infty\rangle&=\frac{D_\infty(k,p)}{\sqrt{\sum_i\frac{\partial p_i}{\partial\widetilde{\Lambda}}}\sqrt{2(N+1)/L}}\sum_{j=1}^{N+1}\frac{p_j^3-k_j^3}{3},\end{aligned} \tag{27}$$

$$D_\infty(k,p)=\det\left[\frac{2/L}{(p_i-k_j)\sqrt{(\alpha p_i-\widetilde{\Lambda})^2+1+2\alpha/L}}\right], \tag{28}$$

其中，$k_j = 2\pi n_j/L$ 是该特殊态的自由根。对于任意 $n$，两个不同特殊态之间的矩阵元均为零，这一点从式（11）显而易见：它们的 $\hat{c}q$分解没有共同的自由态。

对于一个气体粒子和总动量$Q = 0$，本征态分为两族：特殊态 $|q\rangle \equiv |q、-q\rangle$，其中$q \in {}^{2\pi}{}_L\mathbb{N}$和 $\Lambda = -\infty$；以及一般态$|k\rangle = |k、-k\rangle$，其中 $\Lambda = 0$，$\cot(kL/2) = \alpha k$，$k > 0$。我们的公式给出了$\hat{P}$imp 唯一不为零的矩阵元：

$$\langle q|\hat{P}_{\text{imp}}|k\rangle = \frac{2}{L}\frac{2kq}{\sqrt{(\alpha k)^2+1+2\alpha/L}}\frac{1}{E_q - E_k}, \qquad E_q = q^2, E_k = k^2, \tag{29}$$

以及，对于$\hat{P}^2$
imp,

$$\langle k'|\hat{P}^2_{\text{imp}}|k\rangle = -\frac{2\alpha}{L}\frac{2kk'}{\sqrt{(\alpha k)^2+1+\frac{2\alpha}{L}}\sqrt{(\alpha k')^2+1+\frac{2\alpha}{L}}}, \qquad \langle k|\hat{P}^2_{\text{imp}}|k\rangle = k^2\frac{1+(\alpha k)^2-2\alpha/L}{1+(\alpha k)^2+2\alpha/L}. \tag{30}$$

作为检验，考虑算符恒等式

$$\hat{P}^2_{\text{imp}} = \sum_q \hat{P}_{\text{imp}}|q\rangle\langle q|\hat{P}_{\text{imp}}. \tag{31}$$

利用式（29）和部分分式求和公式对特殊态求和

$$\sum_{q>0}\frac{E_q}{(E_q - E_k)(E_q - E_{k'})} = \frac{L\left[k'\cot\left(k'L/2\right) - k\cot(kL/2)\right]}{4(k^2 - k'^2)}, \tag{32}$$

连同贝特方程一起，可以重现方程（30）中的两个公式。

在方程（8）的简并-$\Lambda$ 扇区中，公式（23）–（25）简并为 0/0。解决方法是方程（21）中的共享根项。同一扇区中的两个不同态必然相差$u \geq 2$ 个根（移动一个根就会改变 $\sum_j n_j$），将共享根排在前面后，可得小$y$ 结构

$$A(y) = -\Delta_r + iycJ + O(y^3), \qquad B(y) = \frac{b\otimes\tilde{b}}{N+1} \text{ (rank one, all } y), \tag{33}$$

其中 $\Delta_r$ 是作用于 $r = N+1-u$ 个共享位置上的投影算子，$J$ 是全 1 矩阵，且 d

$$c = -(\Lambda + i)\frac{\partial k}{\partial \Lambda}, \qquad b_i = \mathrm{e}^{-iyp_i/2}, \qquad \tilde{b}_j = \mathrm{e}^{-iyk_j/2}. \tag{34}$$

利用多重线性展开 $\det(A+B) - \det A$，在$y$阶的每一项都包含两列，它们与同一个向量成比例；在$y^2$ 阶（对于$u = 2$）时，唯二剩下的边界项两两抵消。对于$u \geq 3$，展开从$O(y^3)$ 开始（附录C）。由此得到无限耦合选择定则：在 $\alpha = 0$处，对于任意两个快度相等的不同本征态 $\Lambda$（相等的$\sum_j n_j$，包括 $\Lambda = -\infty$），

$$\langle p|\hat{P}_{\text{imp}}|k\rangle = 0 \qquad \text{and} \qquad \langle p|\hat{P}^2_{\text{imp}}|k\rangle = 0. \tag{35}$$

第二个无限耦合陈述涉及对角项：由于 $\alpha = 0$ 式（$\partial k_j/\partial\Lambda$）中的所有 22都相等，因此每个本征态（包括特殊本征态）都具有

$$\alpha = 0: \qquad \langle k|\hat{P}_{\text{imp}}|k\rangle = \frac{1}{N+1}\sum_{j=1}^{N+1}k_j = \frac{Q}{N+1}, \qquad \langle k|\hat{P}^2_{\text{imp}}|k\rangle = \frac{2E_k}{N+1}. \tag{36}$$

在无限排斥下，质量与宿主费米子相同的杂质，在每个本征态中都承担总动量和动能中按粒子数平均分配给它的那一份。但在任何有限耦合下，这两种说法都不成立。

## 4 动量弛豫

利用第3节给出的矩阵元，谱求和方程（14）可写成动量动力学的显式表示式，我们将在第5节对其进行计算。在此之前，我们先求出驻值。

在有限系统中，$P(t)$ 是准周期性的，其驻值按 Cesàro意义理解，

$$P_\infty \equiv \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T P(t)\,dt. \tag{37}$$

表面上看，$P_\infty$ 等于对角系综平均，即由方程（$a = b$）的对角项（14）给出，此外还要加上偶然简并对 $E_a = E_b$，$a \neq b$的贡献。对于杂质动量，这些贡献均为零：方程（$P_{\text{imp}}$ 23）、（27）中的每个非对角矩阵元都与 $E_p - E_k$成正比，不同特殊态之间的矩阵元为零，而在简并扇区内，$\Lambda$ 它们根据选择定则 $\alpha = 0$ （方程（35））为零。因此

$$P_\infty = \sum_a c_a^2 \langle k_a|\hat{P}_{\text{imp}}|k_a\rangle = \sum_a c_a^2 \frac{S_1^{(a)}}{S_0^{(a)}}, \tag{38}$$

包括简并对，其中$S^{(a)}{}_n$ 是方程$S^n$ （22）在 $|k_a\rangle$ 上的取值之和。对于 $\hat{}P^2{}_{\text{imp}}$，类似结论成立，但要计入方程（24）中的三次项；这些项在 $E_p = E_k$处不为零。

在无限耦合下，式（36）使式（38）成为一个无截断的结论。由于扇区 $Q = p_0$ 中的每个本征态都携带杂质动量 $p_0/(N+1)$，且 $\sum_a c^2{}_a = 1$,

$$\gamma = \infty: \qquad P_\infty = \frac{p_0}{N+1} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0. \tag{39}$$

在无限排斥下，对于任意初始动量 $p_0$，等质量杂质的平均动量都会完全弛豫；不完全弛豫平台 [21, 24] 收敛为 $\gamma \to \infty$。这与文献 [38], 一致：该文在热力学极限下求得注入后杂质的稳态速度，并发现其按 $\gamma \to \infty$ 趋于零。

在有限耦合下，$S_1/S_0$ 随状态而变化，且 $P_\infty > 0$。在热力学极限下，求和式（38）变为对快度的积分，

$$P_\infty = \int d\Lambda\, \mathcal{W}(\Lambda) P_{\text{pol}}(\Lambda), \tag{40}$$

其中，$P_{\text{pol}}(\Lambda) = S_1/S_0$ 是 $\Lambda$族的极化子动量，见式（22）；而 $\mathcal{W}(\Lambda)$ 是注入态的快度分辨重叠权重；对于该注入方案，它就是稳态快度分布。我们直接根据第 38节中的有限尺寸求和式计算式（5）。

$\gamma = \infty$ 的第二个结论涉及方差。根据式（36），$\hat{}P^2$ imp 的对角系综值与注入态的平均能量成正比，

$$\langle \hat{P}_{\text{imp}}^2 \rangle_\infty = \frac{2}{N+1}\sum_a c_a^2 E_a = \frac{2}{N+1}\langle\psi(0)|H|\psi(0)\rangle, \tag{41}$$

而该能量，

$$\langle\psi(0)|H|\psi(0)\rangle = \frac{p_0^2}{2} + E_{\text{FS}} + g\rho, \tag{42}$$

随$g$线性发散。因此，在严格的无限耦合下，注入杂质的动量方差永远不会饱和：在其中一个粒子被激发至大动量的本征态中，重叠权重$c^2{}_a$

仅按 $\kappa^{-2}$ 衰减 $\kappa$ （初态对应的 Tan 接触），而这一尾部会无限期地增加方差，并且 Var$P(t)$ 会无限增长；而在任意有限 $\gamma$下，它会饱和于（有限的）对角系综值。

谱求和式（14）在有限体积下成立。现在，在热力学极限下，我们将其改写为关于 Fredholm 行列式的快度积分；对于 $P(t)$而言，这相当于已知的杂质格林函数的行列式表示。推导见附录 D 和E。下面我们介绍其结构和结果。

双重谱求和按照两个快度组织，现在分别记作 $\Lambda_k$ 和 $\Lambda_p$，对应于态 $|k\rangle$ 和 $|p\rangle$ （第 $\Lambda$ 和 $\tilde{\Lambda}$ 节中的 3）。对本征态 $|k\rangle$ （$|p\rangle$ ）的求和被替换为关于 $\Lambda_k$ （$\Lambda_p$）的积分，以及对分支构型的自由求和，

$$\sum_k = \int d\Lambda_k \sum_{n_1<\cdots<n_{N+1}} \int \frac{dx}{2\pi}\left(\sum_{j=1}^{N+1}\frac{\partial k_j}{\partial \Lambda_k}\right) e^{ix\left(\sum_j k_j - p_0 - \sum_j q_j\right)}, \tag{43}$$

其中，辅助的 x 积分确保相对于 |FS〉的动量 {q$_j$} 守恒；对 |p〉 的求和带有相应的辅助变量 y。利用重叠公式式（9）、矩阵元式（23）以及附录 A 的子集求和，对两个分支构型的求和合并为单个 (N+1)×(N +1)加边行列式，其元素是关于 Bethe 分支的双重求和。通过计算原函数 Φ(t)（定义为 P(t) = −i dΦ/d t，见附录 D），可以消去能量分母。在热力学极限下，分支求和转化为具有简单闭式极限的围道积分，而加边行列式则变为定义在费米海 [−k$_F$，k$_F$]上的 Fredholm 行列式。最终结果为

$$\begin{aligned} P(t) = \mathrm{Re}\iint d\Lambda_k\, d\Lambda_p \iint \frac{dx\,dy}{(2\pi)^2} e^{i(y-x)p_0} \\ \times\Big[\tilde{E}_0 p_0\big((E_0-1)\det\big(1+\hat{K}\big)+\det\big(1+\hat{K}-\hat{K}_1\big)\big) \\ +\det\big(1+\hat{K}+\hat{K}_1+\hat{K}_2\big)-\det\big(1+\hat{K}+\hat{K}_1\big) \\ -\det\big(1+\hat{K}+\hat{K}_2\big)+\det\big(1+\hat{K}-E_0\hat{K}_2+\Gamma\hat{K}_3\big)\Big], \end{aligned} \tag{44}$$

其中，Re 表示实部，带帽符号表示作用于 $[-k_F,k_F]$ 上函数的积分算子，det 表示它们的 Fredholm 行列式，而它们的核为

$$\begin{aligned} K(q,q') &= \frac{\Lambda_k-\Lambda_p}{\pi}\frac{v(q)e^{-iq'x}-e^{iqy}w(q')+\tilde{E}(q)E(q')}{q-q'}, \\ K_1(q,q') &= \frac{\Lambda_k-\Lambda_p}{\pi}v(q)E(q'), \qquad K_2(q,q') = \frac{\Lambda_k-\Lambda_p}{\pi}\tilde{h}(q)w(q'), \\ K_3(q,q') &= \frac{\Lambda_k-\Lambda_p}{\pi}\tilde{h}(q)E(q'), \qquad \tilde{h}(q) = q\tilde{E}(q)+2\tilde{E}_0 e^{iqy}. \end{aligned} \tag{45}$$

~ ~标量函数 v、w、E、E、E$_0$, E$_0$ 和 Γ是附录 D[式 (D.16)–(D.20)]中列出的初等围道积分；它们取决于 (x、y、t； $\Lambda_k,\Lambda_p$)，除在自变量重合时出现的主值分布和 $\delta$ 型分布外，均为光滑函数。根据恒等式，核 K 在 q =q′ 处是正则的

$$v(q)e^{-iqx}-e^{iqy}w(q)+\tilde{E}(q)E(q)=0, \tag{46}$$

其在无限耦合下具有如下显式形式，见式（53）。式（44）的表示在 $\Lambda_k=\Lambda_p$ 处显然无奇异。原函数 $\Phi(t)$ 也有一种表示形式，其中涉及相同的核，但只包含两个行列式，见 [附录 D，式（D.14）]；当导出式（44）所需的分部积分需要论证时，这种表示形式可能更为合适。

在 $\alpha=0$ 处，核中涉及的每个围道积分都可通过菲涅耳误差函数（附录 E）以闭式求出：

$$v(q)=\frac{e^{ixq}}{(1+\Lambda_k^2)(1+\Lambda_p^2)}\left[(\Lambda_k\Lambda_p+1)\frac{\Lambda_p-i\,\mathrm{sgn}(x-y)}{\Lambda_k-\Lambda_p}+i\Lambda_p\,\mathrm{erf}\left(\frac{(x-qt)(1-i)}{2\sqrt{t}}\right)+iV(q)\right], \tag{47}$$

$$w(q)=\frac{e^{-iyq}}{(1+\Lambda_k^2)(1+\Lambda_p^2)}\left[(\Lambda_k\Lambda_p+1)\frac{\Lambda_k-i\,\mathrm{sgn}(x-y)}{\Lambda_k-\Lambda_p}+i\Lambda_k\,\mathrm{erf}\left(\frac{(y-qt)(1+i)}{2\sqrt{t}}\right)+iW(q)\right], \tag{48}$$

$$V(q)=\frac{2}{\pi}\int_{|x-y|/t}^{\infty}dk\,\frac{e^{-itk^2/2+ik\,\mathrm{sgn}(x-y)(x-qt)}}{k}-i\,\mathrm{sgn}(x-y)\,\mathrm{erf}\left(\frac{(x-qt)(1-i)}{2\sqrt{t}}\right), \tag{49}$$

$$W(q)=\frac{2}{\pi}\int_{|x-y|/t}^{\infty}dk\,\frac{e^{itk^2/2+ik\,\mathrm{sgn}(x-y)(y-qt)}}{k}-i\,\mathrm{sgn}(x-y)\,\mathrm{erf}\left(\frac{(y-qt)(1+i)}{2\sqrt{t}}\right), \tag{50}$$

$$\begin{aligned}E(q)&=\frac{ie^{-itq^2/2}}{\Lambda_k^2+1}\,\mathrm{erf}\left(\frac{(x-qt)(1-i)}{2\sqrt{t}}\right)-\frac{\Lambda_k e^{-itq^2/2}}{\Lambda_k^2+1},\\ \widetilde{E}(q)&=-\frac{ie^{itq^2/2}}{\Lambda_p^2+1}\,\mathrm{erf}\left(\frac{(y-qt)(1+i)}{2\sqrt{t}}\right)-\frac{\Lambda_p e^{itq^2/2}}{\Lambda_p^2+1},\end{aligned} \tag{51}$$

$$\begin{aligned}E_0&=\sqrt{\frac{2}{i\pi t}}\frac{e^{ix^2/(2t)}}{1+\Lambda_k^2},\qquad \widetilde{E}_0=\sqrt{\frac{2i}{\pi t}}\frac{e^{-iy^2/(2t)}}{1+\Lambda_p^2},\\ \Gamma&=\frac{2e^{i\frac{x^2-y^2}{2t}}}{(\Lambda_p^2+1)(\Lambda_k^2+1)}\left[\frac{(1+\Lambda_p\Lambda_k)\delta(y-x)}{\Lambda_p-\Lambda_k}+\frac{1}{\pi(y-x)}\right].\end{aligned} \tag{52}$$

核在$q=q'$处的正则性现在就是显式恒等式

$$i[V(q)-W(q)]+\mathrm{erf}\left(\frac{(x-qt)(1-i)}{2\sqrt{t}}\right)\mathrm{erf}\left(\frac{(y-qt)(1+i)}{2\sqrt{t}}\right)-1=0, \tag{53}$$

基于主值积分公式（E.1）。

在 t = 0 时，高斯因子变为 $\delta$-函数，核失去对 t 的依赖，见附录 E 中的公式（E.3）。公式（44）中的项 $\widetilde{E}_0 p_0 E_0 \det(1+\hat{K})$ 随后将 x 和 y 积分压缩到 x = y = 0，此处 $\hat{K}$ 为零。利用 $\int d\Lambda\,(1+\Lambda^2)^{-1}=\pi$ 可得，仅此一项就已经使结果达到饱和，

$$\mathrm{Re}\iint d\Lambda_k d\Lambda_p\iint\frac{dxdy}{(2\pi)^2}e^{i(y-x)p_0}\widetilde{E}_0 p_0 E_0\det(1+\hat{K})=p_0\frac{1}{\pi^2}\iint\frac{d\Lambda_k\,d\Lambda_p}{(1+\Lambda_k^2)(1+\Lambda_p^2)}=p_0, \tag{54}$$

因此，一致性条件$P(0)=p_0$，要求其余各项在进行 $(x、y、\Lambda_k、\Lambda_p)$积分后相互抵消。在有限尺寸谱表示中，由于本征基的完备性，这种抵消会自动发生。

在 $t\to\infty$ 取 q、x、y = O(1) 时，方程（47）–（51）中的误差函数趋于 −sgn(q)，高斯因子则随 $t^{-1/2}$衰减。函数 v、w、E、$\widetilde{E}$ 趋近于附录 E [方程（E.6）], 给出的、与 t 无关的极限，因此方程（44）中显式依赖 $p_0$的第一行会随 $t^{-1/2}$ 消失，驻值完全由第二、三行中的四行列式组合决定。其值必须再现对角系综结果；在无限耦合下，该结果在热力学极限中为 $P_\infty=0$，见方程（39）。

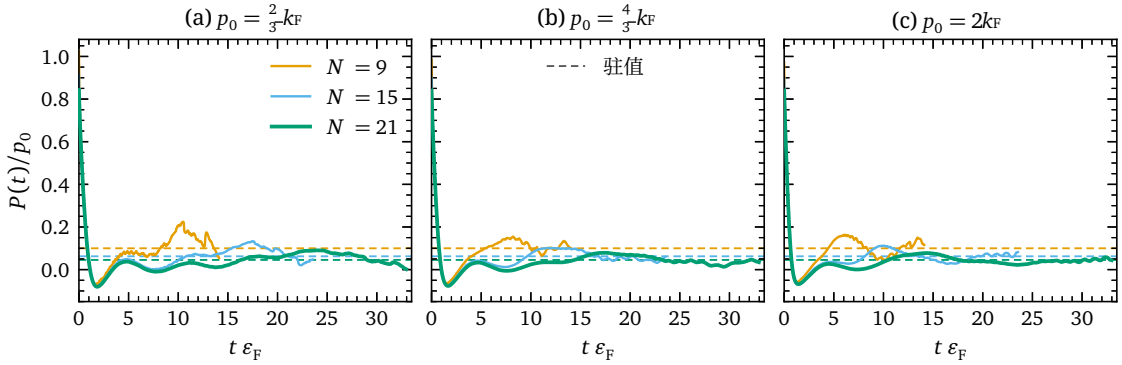


图 1：无限耦合下的动量弛豫，适用于 $p_0/k_F = \frac{2}{3}$、$\frac{4}{3}$、2 和 $N = 9$、15、21（彩色；较粗的线表示 $N = 21$）。时间轴在各系统的穿越时间 $t^*$ 处结束。虚线：式（39）中的驻值，在热力学极限下趋于零。不同 $N$ 的曲线在 $t \lesssim t^*$ 时均收敛到共同的热力学极限包络线。

## 5 无限系统中的弛豫动力学

我们从乘积形式（10）和（25）计算有限系统中的谱求和（14）和（38）：按照相对于费米海的粒子–空穴组成枚举本征态，并保留重叠权重 $c^2 a$ 最大的态。通过范数、初始动量 $P(0) = p_0$ 的求和规则，以及有限耦合下能量的求和规则（42），来监测截断。在 $\gamma = \infty$ 每个未纳入保留基底的态，其对角动量均为 $p_0/(N+1)$，见方程（36），因此驻值不受截断影响。时间以费米时间 $1/\varepsilon_F$ 为单位。若 $p_0 < k_F$，即初始杂质速度低于费米速度，我们称该注入为亚声速；若 $p_0 > k_F$，则称为超声速。有限尺寸动力学在穿越时间 $t^* \simeq L/v_F$ 之前代表热力学极限，此后会出现环形复现。在固定 $p_0/k_F$ 时比较多个系统尺寸，可以揭示这一时间窗口。

图 1 展示了 $P(t)/p_0$ 在 $\gamma = \infty$ 处的情况。无论是亚声速还是超声速注入，平均动量都会在费米时间尺度上衰减。随后动量弛豫出现过冲：$P(t)$ 变为负值，因此杂质会暂时平均朝着与注入方向相反的方向运动，这是费米海产生的反向散射回声。随后曲线趋于式（39）的平台（虚线）。对于亚声速注入，在可观测时间窗口内，平台附近仍有慢振荡，其位置随 $t^*$ 变化，振幅则随 $N$ 增大而减小，这是环形复现的特征。在平台附近，热力学极限所产生的振荡较弱：在 $\gamma = \infty$ 下，明显的颤动是有限耦合现象，见下文。

图 2 对比了固定 $p_0$ 时的不同耦合强度。有限耦合下，平稳动量占 $p_0$，的相当大一部分，且随耦合减弱而增大。初始衰减之后，出现缓慢的量子颤动振荡 [21–23] 在可观测时间窗口的分辨率范围内，图示的两种有限耦合下振荡周期相同，这与文献 [22] 中观察到的耦合稳健性相呼应。相应地，有限耦合下趋近对角系综平台方程（38）的过程较为缓慢：在该时间窗口内，振荡中心仍低于 $P_\infty$，退相干论证将其确定为有限系统的 $t \to \infty$ 极限。

图3 展示了 $P_\infty/p_0$ 在 $(p_0, \gamma)$ 平面上的映射，采用对角系综方程（38）计算，只需用到重叠和方程（22）中的对角元。在 $k_F$ 以下，$P_\infty/p_0$ 在两个极限之间单调插值：弱耦合时完全保持动量（点划线），以及在39）处的完全弛豫方程（$\gamma = \infty$ 以上，$k_F$ 对耦合的依赖呈非单调变化：每条有限 $\gamma$ 曲线都会在 $k_F$ 以上出现极小值，并且

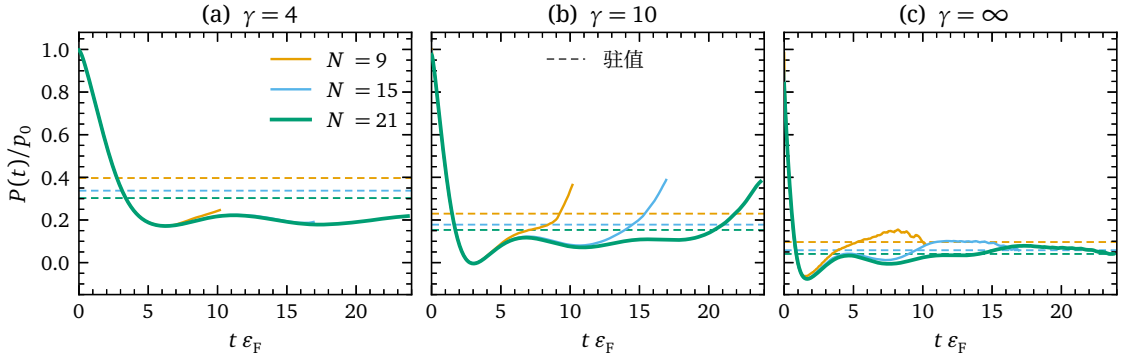


图 2：在 $p_0 = \frac{4}{3}k_F$ 处的动量弛豫 $\gamma = 4$，10，$\infty$ 以及 $N = 9$，15，21。虚线：根据相同谱数据计算得到的对角系综稳态值，见式（38）。在有限耦合下，弛豫并不完全，并伴有量子颤振。

随后再次上升（杂质跑得比高效的粒子—空穴发射窗口更快后，动量保持增强），而弱耦合曲线则急剧下降，穿过中等耦合数据，并在$p_0 = 2k_F$附近降至其下方。在$p_0 = k_F$ 处形成的拐点将亚声速极化子区间与超声速发射区间分隔开来。值得注意的是，有限尺寸下$P_\infty$ 的映射，是动量空间中对应于第4节所讨论的热力学极限稳态速度的量。

最后，图 4 展示了式（15）中的方差。在有限耦合下，方差从零开始上升（初态是动量本征态），并在与均值相同的时间尺度上，围绕对角系综值（虚线）振荡。对于 $\gamma = \infty$，对角系综方差随动量截断线性增长（右图），正如第 4节所预期的那样。在严格无限耦合下，这种发散是理想化瞬时注入的性质；而在较大的有限 $\gamma$ 下，方差会饱和于一个值 $\propto g$，见式（42）。

## 6 结论与展望

我们为 McGuire 模型中任意本征态之间的 $\hat{P}_{imp}$ 和 $\hat{P}^2$ imp 的矩阵元得到了闭合的行列式公式，见式 (22)–(25) 和 (26)–(28)。这些公式将注入杂质的动量动力学归结为每对本征态对应的少数几个行列式，并揭示了此前未被注意到的结构性结论：$\hat{P}_{imp}$ 的所有非对角元都与 $E_p - E_k$ 成正比。在无限耦合下，$\hat{P}_{imp}$ 和 $\hat{P}^2$ imp 都满足简并扇区选择定则（式 (35)）；同时，在无限耦合下，每个本征态都携带 $Q/(N+1)$ 的单粒子动量份额，因此注入杂质会完全弛豫（式 (39)），不完全弛豫平台在 $\gamma = \infty$ 处闭合。有限尺寸动力学展示了这一过程在实时中的发生方式：在 $\gamma = \infty$ 时，动量在约一个费米时间内骤降，过冲至负值，并稳定在 $1/(N+1)$ 平台上；而在有限耦合下，弛豫会在有限的 $P_\infty$ 处停止，并通过量子颤振逐渐趋近该值。在热力学极限下，我们为 P(t) 推导了 Fredholm 行列式表示（式 (44)），其在 $\gamma = \infty$ 处具有初等误差函数核，并分析了其 $t = 0$ 和 $t \to \infty$ 极限。

仍有若干问题尚待解决。(i) 对方程 (44进行长时间渐近分析，即可解析地得到 $P(t) - P_\infty$ 的颤振频率和衰减规律。这是一个适定的陡降/黎曼–希尔伯特问题，其结构与杂质格林函数的分析相似：显式 $t^{-1/2}$ 衰减项中的 $p_0$依赖性已经显而易见。

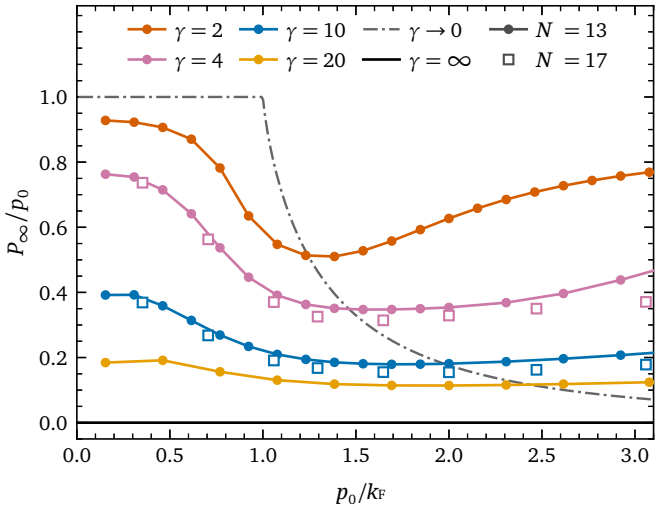


图3：注入后平稳的动量，方程（38），随不同耦合下的注入动量变化（$N = 13$ 曲线，$N = 17$ 空心方块；方块略微向下漂移，表明存在残余的有限尺寸效应）。点划线：弱耦合极限 [39]，等于$p_0$ 低于$k_F$；黑色实线：无限耦合值零，方程（39）。

(ii) 生成函数方程 (17给出了 $e^{-iy\hat{p}}p_{imp}$型插入在 $y$的所有阶数下的矩阵元，由此可得完整的时间依赖动量分布 $n_q(t)$。(iii) 无限耦合下的方差增长源于发散的注入能量方程 (42)，值得进行定量研究，包括大但有限 $\gamma$时的交叉时间尺度。(iv) 将研究推广到有限温度（参见文献 [32,33]），以及吸引分支、踢击初态和托克斯–吉拉多玻色子宿主的情形，在重叠层面上都很直接，应当可以实现。最后，关于无限耦合的结论——平均动量完全弛豫并伴随粒子间动量分配——为冷原子实验提供了一个无需调参的基准；如今这些实验已能追踪强相互作用区间中的杂质动量 [4,6]。

## 生成函数的柯西–比内约化

这里我们推导生成函数 17)–(21 的行列式表示 $\chi(y)$，见方程（16）。在方程（16）中插入自由基底上的单位分解，并对两态使用重叠~公式（9），其快度分别为 $\Lambda$，$\Lambda$；$O_p$ 和 $O_k$ 分别表示方程（9）中乘在行列式前的因子，对应于 $|p\rangle$ 和 $|k\rangle$），

$$\chi(y) = O_p O_k \sum_{m_1<\cdots<m_N} e^{-iy(Q-\sum_a q_a)} \det M^{(p)} \det M^{(k)}, \qquad q_a = \frac{2\pi m_a}{L}, \tag{A.1}$$

其中 $M^{(k)}$ 是方程（9）中的 $(N+1)\times(N+1)$ 矩阵，而求和遍历$2\pi_L\mathbb{Z}$ 的所有 $N$ 元子集（杂质动量由动量守恒确定，并产生因子 $e^{-iyQ}e^{iy\sum_a q_a}$）。

一行全为 1 的行是通过取极限生成的：附加一个辅助动量 $q_0$ 并使用 g

$$\lim_{q_0\to\infty} \frac{-q_0}{k_j - q_0} = 1, \tag{A.2}$$

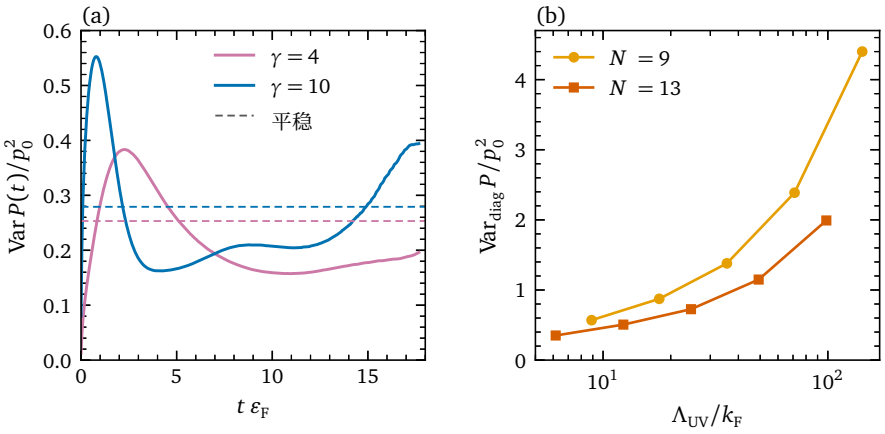


图4：左：有限耦合下杂质动量的方差（$N = 15, p_0 = \frac{4}{3}\,k_F$）；虚线表示对角系综稳态值。右：当态枚举的动量截断 $\Lambda_{UV}$ 增大时，$\gamma = \infty$ 驻值（对角系综）方差 $^{2}{}_{N}$ $_{+1}\sum_{a} c^{2}{}_{a}E{}_{a} - P_{\infty}^{2}$ 始终不收敛；对数坐标轴清楚地显示了其无界增长（渐近地随 $\Lambda_{UV}$线性增长）。

每个加边行列式都是扩展集合$\{q_0, q_1, \ldots, q_N\}$对应的普通行列式的极限。随后，利用柯西–比内定理对共享指标集$\{q_a\}$ 的两个行列式乘积在所有子集上求和：将$X^{(k)}{}_{n,j} = 1/(k_j - 2\pi n/L)$ 记为由晶格指标化的半无限矩阵，则有

$$\sum_{|S|=N,\ S\subset\mathbb{Z}} \prod_{n\in S} f_n \det X^{(p)}[S] \det X^{(k)}[S] = (\text{multilinear expansion of})\ \det\left[\sum_n f_n X^{(p)}_{n,i} X^{(k)}_{n,j}\right], \tag{A.3}$$

其中 $f_n = \mathrm{e}^{2\pi i n y/L}$。跟踪固定的边界列 $q_0$ （它必须在两个行列式中各出现且仅出现一次），并取 $q_0 \to \infty$ ，得到差结构

$$\chi(y) = \det(G + B) - \det G, \tag{A.4}$$

其中 $B$ 是由边界项导出的秩一矩阵，见式（19），并且

$$G_{ij} = -\frac{2}{L}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\mathrm{e}^{2\pi i n y/L}}{\left(p_i - \frac{2\pi n}{L}\right)\left(k_j - \frac{2\pi n}{L}\right)} \mathrm{e}^{-iy(p_i+k_j)/2} \left|\frac{\partial p_i}{\partial \tilde{\Lambda}}\right|^{1/2} \left|\frac{\partial k_j}{\partial \Lambda}\right|^{1/2}, \tag{A.5}$$

其中，对称相位拆分 $\mathrm{e}^{-iy(p_i+k_j)/2}$ 利用了两个态的总动量相等这一性质。$Q_p = Q_k$ 对于 $p_i \neq k_j$，部分分式将格点求和化为两个式（20）类型求和之差；在贝特根上，这些求和取壳上形式，并得到式（18）。对于共享根 $p_i = k_j = \kappa$ ，式（A.5）中的格点求和则是式（$\kappa$20）中求和的导数，

$$-\frac{2}{L}\sum_n \frac{\mathrm{e}^{2\pi i n y/L}}{(\kappa - 2\pi n/L)^2} = \frac{2}{L}\partial_\kappa\left[\frac{L}{2}\mathrm{e}^{i\kappa y}\left(\cot\frac{\kappa L}{2} - i\right)\right]. \tag{A.6}$$

B因为 $\partial_\kappa$ 作用于 $\cot(\kappa L/2)$，该项与式（$p_i \to k_j$ ）的朴素极限不同18）b y

$$-\left[\frac{L}{2}\left(1 + (\alpha\kappa - \Lambda)^2\right) + \alpha\right]\frac{\partial k_j}{\partial \Lambda} = -1, \tag{A.7}$$

根据公式（6）。这证明了公式（21）。有了这些项，公式（17）在有限体积中是一个恒等式。

## B 小$y$ 展开与矩阵元

分别将$A+B$ 和$A$ 的第$i$ 行与第$j$ 列乘以

$$\mathrm{e}^{-iyp_i/2}\left|\frac{\partial p_i}{\partial\widetilde{\Lambda}}\right|^{-1/2},\qquad \mathrm{e}^{iyk_j/2}\left|\frac{\partial k_j}{\partial\Lambda}\right|^{-1/2}. \tag{B.1}$$

对于这些相位（总动量相等），总因子为 1，而 $\partial$-因子由公式（B.2）中所写的前置因子补偿。于是 $\chi(y)$ 可写成

$$\chi(y)=\frac{\prod_i\left|\frac{\partial p_i}{\partial\widetilde{\Lambda}}\right|^{1/2}\prod_j\left|\frac{\partial k_j}{\partial\Lambda}\right|^{1/2}}{\sqrt{\sum_i\frac{\partial p_i}{\partial\widetilde{\Lambda}}}\sqrt{\sum_j\frac{\partial k_j}{\partial\Lambda}}}\left[\det(\mathcal{A}+\mathcal{B})-\det\mathcal{A}\right], \tag{B.2}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{ij}&=\frac{\widetilde{\Lambda}-\Lambda}{p_i-k_j}-\alpha+\frac{\mathrm{e}^{i(k_j-p_i)y}-1}{p_i-k_j}(\alpha k_j-\Lambda-i),\\ \mathcal{B}_{ij}&=\mathrm{e}^{-iyp_i},\end{aligned} \tag{B.3}$$

其中，$B$ 的归一化已并入公式（B.2）的前置因子中。因此，$\mathcal{B}=b\otimes\mathbf{1}^{\mathrm{T}}$（其中 $b_i=\mathrm{e}^{-i}{}_{yp^i}$，而 $\mathbf{1}$ 是所有分量均为 1 的向量）在每个 $y$ 处都是秩一的，并且具有一个恒定的右向量。

展开公式（B.3），

$$\mathcal{A}_{ij}=C_{ij}-v_i-w_j+\frac{(iy)^2}{2}\alpha p_ik_j+O(y^3), \tag{B.4}$$

其中$C$ 是第 3节中定义的矩阵，

$$v_i=\alpha-iy(\Lambda+i)+\frac{(iy)^2}{2}(\Lambda+i)p_i,\qquad w_j=i\alpha yk_j+\frac{(iy)^2}{2}k_j(\alpha k_j-\Lambda-i). \tag{B.5}$$

项 $v_i$ 在各行上为常数，因此与 $\mathcal{B}$ 张成相同的秩一方向：对于任意矩阵$X$ ，函数

$$u\mapsto\det\left(X+u\otimes\mathbf{1}^{\mathrm{T}}\right) \tag{B.6}$$

关于$u$是仿射的，因此行列式之差

$$\det\left(X-v\otimes\mathbf{1}^{\mathrm{T}}+b\otimes\mathbf{1}^{\mathrm{T}}\right)-\det\left(X-v\otimes\mathbf{1}^{\mathrm{T}}\right) \tag{B.7}$$

仅取决于 $b$ ，而 $v_i$ 可以省略。于是得到

$$\mathcal{A}=C+iyA_1+(iy)^2A_2,\qquad \mathcal{B}\propto b_0+iyb_1+(iy)^2b_2, \tag{B.8}$$

$$[A_1]_{ij}=-\alpha k_j,\quad [A_2]_{ij}=\frac{\alpha p_ik_j}{2}-\frac{k_j}{2}(\alpha k_j-\Lambda-i),\quad [b_0]_{ij}=1,\quad [b_1]_{ij}=-p_i,\quad [b_2]_{ij}=\frac{p_i^2}{2}. \tag{B.9}$$

$A_1$ 和 $\mathcal{B}$ 均为秩一，$A_2$ 为秩二。利用

$$\det(C+X)=\det C\det\left(1+C^{-1}X\right) \tag{B.10}$$

以及简写

$$\mathrm{Tr}\,C^{-1}u\otimes s^{\mathrm{T}}\equiv s^{\mathrm{T}}C^{-1}u, \tag{B.11}$$

我们写出

$$\det(\mathcal{A}+\mathcal{B})-\det\mathcal{A}=\det C\left[R_0+iyR_1+(iy)^2R_2+o(y^2)\right] \tag{B.12}$$

并得到

$$R_0 = \mathrm{Tr}\, C^{-1} b_0, \tag{B.13}$$

$$R_1 = \mathrm{Tr}\, C^{-1} b_0 \,\mathrm{Tr}\, C^{-1} A_1 - \mathrm{Tr}\, C^{-1} b_0 C^{-1} A_1 + \mathrm{Tr}\, C^{-1} b_1, \tag{B.14}$$

$$R_2 = \mathrm{Tr}\, C^{-1} b_2 + \mathrm{Tr}\, C^{-1} b_0 \,\mathrm{Tr}\, C^{-1} A_2 - \mathrm{Tr}\, C^{-1} b_0 C^{-1} A_2 + \mathrm{Tr}\, C^{-1} b_1 \,\mathrm{Tr}\, C^{-1} A_1 - \mathrm{Tr}\, C^{-1} b_1 C^{-1} A_1. \tag{B.15}$$

秩一结构$A_1$ 和$b_n$ 意味着

$$\mathrm{Tr}\, C^{-1} b_0 C^{-1} A_1 = \mathrm{Tr}\, C^{-1} b_0 \,\mathrm{Tr}\, C^{-1} A_1 \tag{B.16}$$

~和，在 $[A_2]_{ij} = \alpha_p i k_j/2$,

$$\mathrm{Tr}\, C^{-1} b_1 C^{-1} A_1 = 2\,\mathrm{Tr}\, C^{-1} b_0 \,\mathrm{Tr}\, C^{-1} \widetilde{A}_2, \qquad \mathrm{Tr}\, C^{-1} b_1 \,\mathrm{Tr}\, C^{-1} A_1 = 2\,\mathrm{Tr}\, C^{-1} b_0 C^{-1} \widetilde{A}_2, \tag{B.17}$$

$$\mathrm{Tr}\, C^{-1} b_0 C^{-1} \widetilde{A}_2 = \frac{\alpha}{2} \left( \sum_{ij} k_i [C^{-1}]_{ij} \right) \left( \sum_{ij} [C^{-1}]_{ij} p_j \right) = -\frac{1}{2} \mathrm{Tr}\, C^{-1} b_1 \,\mathrm{Tr}\, C^{-1} A_1, \tag{B.18}$$

由此

$$R_1 = \mathrm{Tr}\, C^{-1} b_1, \qquad R_2 = \mathrm{Tr}\, C^{-1} b_2 - \mathrm{Tr}\, C^{-1} b_0 \,\mathrm{Tr}\, C^{-1} \widetilde{A}_2 + \frac{1}{2} \mathrm{Tr}\, C^{-1} b_1 \,\mathrm{Tr}\, C^{-1} A_1. \tag{B.19}$$

由于$C$ 的各项仅通过 $1/(p_i - k_j)$依赖于根，因此其逆矩阵可写成围道表示

$$[C^{-1}]_{ij} = \frac{1}{\widetilde{\Lambda} - \Lambda} \oint_{k_i} dx \oint_{p_j} dy \, \frac{1}{x-y} \prod_\alpha \frac{x - p_\alpha}{x - k_\alpha} \prod_\alpha \frac{y - k_\alpha}{y - p_\alpha}, \qquad \oint \frac{dx}{x} = 1, \tag{B.20}$$

（每个围道仅包围所指示的点）。通过计算$\sum_j [C^{-1}]_{ij} C_{\ j s}$即可验证这一点：将$y$围道变形为包围所有$k$，当$i \neq s$ 时积分为零，而当$i = s$时积分等于 1。对幂次求和时，可将两个围道都变形至无穷远：

$$\sum_{ij} [C^{-1}]_{ij} p_j^n = \oint_{\mathcal{C}_p} \frac{dy}{\widetilde{\Lambda} - \Lambda} y^n \prod_\alpha \frac{y - k_\alpha}{y - p_\alpha} = \begin{cases} \dfrac{\sum_j k_j - \sum_j p_j}{\widetilde{\Lambda} - \Lambda} = 0, & n = 0, \\ \dfrac{1}{n+1} \dfrac{\sum_j p_j^{n+1} - \sum_j k_j^{n+1}}{\widetilde{\Lambda} - \Lambda}, & n = 1, 2, \end{cases} \tag{B.21}$$

其中围道 $\mathcal{C}_p$ 包围所有根 $p^j$，而 $n = 0$ 情形利用总动量相等这一点。左侧含 $k^m{}_i$ 的类似求和可由对称性得到。合并式（B.19）–式（B.21），并恢复式（B.2）中的前因子——其中 det$C$ 与 $\partial$-因子合并为 $D(k,p)$，即式（25）中的量——可得

$$\chi(y) = \frac{D(k,p)}{\sqrt{\sum_i \frac{\partial p_i}{\partial \widetilde{\Lambda}}} \sqrt{\sum_i \frac{\partial k_i}{\partial \Lambda}}} \left[ -iy \frac{E_p - E_k}{\widetilde{\Lambda} - \Lambda} + (iy)^2 \left( \frac{\sum_i p_i^3 - \sum_i k_i^3}{6(\widetilde{\Lambda} - \Lambda)} + \frac{\alpha}{2} \left( \frac{E_p - E_k}{\widetilde{\Lambda} - \Lambda} \right)^2 \right) + o(y^2) \right], \tag{B.22}$$

由此，利用式（23）–（24），可得式（16）。

对于 $p = k$ 有 $D(k,\ k) = 1$ 并且，作为 $\widetilde{\Lambda} \to \Lambda$ 方程（B.20）的极限，

$$[C^{-1}]_{ij} = \delta_{ij} \frac{\partial k_j}{\partial \Lambda}, \tag{B.23}$$

因此

$$\chi(y)=1-iy\frac{S_1}{S_0}+\frac{(iy)^2}{2}\frac{S_2-\alpha(S_0S_2-S_1^2)}{S_0}+O(y^3), \tag{B.24}$$

重现公式（22）。

在固定 $\Lambda$ 的情况下取 $\Lambda\to-\infty$，附着于根 $k^j$ 的快度因子表现为

$$\frac{\partial k_j}{\partial\Lambda}\to\frac{2}{L\Lambda^2},\qquad(\tilde{\Lambda}-\Lambda)\left|\frac{\partial k_j}{\partial\Lambda}\right|^{1/2}\to\sqrt{\frac{2}{L}},\qquad\left(\sum_j\frac{\partial k_j}{\partial\Lambda}\right)^{-1/2}\sim|\Lambda|\sqrt{\frac{L}{2(N+1)}}, \tag{B.25}$$

因此$D(k,\ p)\to D_\infty(k,\ p)$公式（28）中的归一化与 $(E^p-E_k)/(\tilde{\Lambda}-\Lambda)$结合，得到有限结果公式（27）。公式（26）的对角元直接由分解式（11）得到。

## C 无限耦合下的简并扇区

令 $\alpha=0$，并令 $|\mathrm{p}\rangle\ \neq|\mathrm{k}\rangle$ 具有相同的快度：公共相移 $\delta$，整数分支上的根 $\{\mathrm{m}_i\}\neq\{\mathrm{n}_j\}$，其中 $\sum_\mathrm{i}\mathrm{m}_i=\sum_\mathrm{j}\mathrm{n}_j$，共享 r 个 $=\mathrm{N}+1-\mathrm{u}$ 根（$\mathrm{u}\geq2$）。所有关于 $\partial\mathrm{k}/\partial\Lambda$ 和 $\partial\mathrm{p}/\partial\tilde{\Lambda}$ 的导数均取公共值 $\mathrm{d}=^2\mathrm{L}\sin^2\delta$。对行和列重新排序，使共享根占据前 r 个（对齐的）位置。使用 $\alpha=0$ 处的式 (18)–式 (21)，

$$A_{ij}=-(\Lambda+i)d\frac{2i\sin\left(y(p_i-k_j)/2\right)}{p_i-k_j}-[\Delta_r]_{ij},\qquad B_{ij}=\frac{\mathrm{e}^{-iyp_i/2}\mathrm{e}^{-iyk_j/2}}{N+1}, \tag{C.1}$$

与 $\Delta_r$ 共享位置上的投影算子（正弦形式由式 (18) 得出，因为两个态具有相同的 $\Lambda$。其对角极限 $iy$ 与式 (21) 的第一项一致）。注意，$B$ 是秩一的，而 $A+\Delta_r$ 的展开只包含 $y$的奇次幂，其中 $y^1$项与全 1 矩阵 $J$ 成正比，而 $y^3$ 项的秩为三。

按列的多重线性展开式 (17)。由于 B 是秩一矩阵，它恰好只贡献一次，而 A 的每个 u 个非共享列都从 y( 阶开始，且对应同一个列向量 $\propto\mathbf{1}$。在 $\mathrm{y}^0$ 阶，每一项都至少需要所有非共享列取其 O(y) 阶项，因此系数为零（$\chi(0)=0$：正交性）。在 $\mathrm{y}^1$，阶，一旦使用了 B 列，至少有 $\mathrm{u}-1\geq1$ 个非共享列必须取其 O(y) 阶项 $\propto\mathbf{1}$，而 B 列的 $\mathrm{O}(\mathrm{y}^0)$ 阶项也为 $\propto\mathbf{1}$。每一项都包含两列成比例，因此得到式 (35) 的第一个关系。在 $\mathrm{y}^2$ 阶且 $\mathrm{u}=2$ 时，唯一非零的配置是：一个非共享列取 i yc1（$\mathrm{c}=-(\Lambda+\mathrm{i})\mathrm{d}$），B 列取其 O(y) 阶向量 $\propto(\mathrm{p}_i)$。选择哪个非共享列取 1 的两种方式，在行列式中方向相反，因而相互抵消。对于 $\mathrm{u}\geq3$，每一项都是 $\mathrm{O}(\mathrm{y}^3)$ 阶或更小，因此得到第二个关系，并完成式 (35) 的证明。对于 $\mathrm{u}=2$，第二个关系的消失在第 3 节讨论的对称（阿贝尔）意义下成立。

高次幂的矩阵元 $\hat{}P^n$ imp, $n\geq3$在简并扇区中通常不会消失（$y^3$ 项的$A+\Delta_r$ 秩为三），这与它们同样具有紫外敏感这一事实相符。

## D $P(t)$的行列式表示

在式（43）中代入式（14）里的两个态求和（变量为 $\Lambda_k$、$x$ 和 $\Lambda_p$、$y$），对 9）中的重叠行列式使用式（$c_a$，并使用式（23）中的矩阵元。在第 $\Phi(t)$ 节的原函数 4

被求和项可因式分解：重叠中的两个行列式以及 $D(k、p)$ 中的一个行列式，都是由相同晶格动量索引的矩阵子式，因此附录 A中的子集求和适用，两个分支构型上的求和 $\{nj\}$ 合并为单个带边框的$(N+1)\times(N+1)$ 行列式 [31]，

$$\Phi(t)=\iint d\Lambda_k\, d\Lambda_p \iint \frac{dx\,dy}{(2\pi)^2} e^{i(y-x)p_0} \det\begin{pmatrix} \mathsf{A}_{ij} & \ell \mathsf{v}_i \\ \mathsf{w}_j & \Gamma \end{pmatrix}, \qquad \ell=\frac{2(\Lambda_k-\Lambda_p)}{L}, \tag{D.1}$$

其中$i、j$ 遍历$N$ 个已占据动量$q_i$ ，这些动量属于费米海；矩阵元素是对所有 Bethe 分支$k=k(\Lambda_k)$、$p=p(\Lambda_p)$的双重求和：

$$\begin{aligned}
\mathsf{A}_{ij}&=\ell\sum_{k,p}\frac{e^{it(p^2-k^2)/2+ix(k-q_j)-iy(p-q_i)}}{(p-q_i)(p-k)(k-q_j)}\frac{\partial k}{\partial\Lambda_k}\frac{\partial p}{\partial\Lambda_p}, \quad \mathsf{v}_i=\sum_{k,p}\frac{e^{it(p^2-k^2)/2+ixk-iy(p-q_i)}}{(p-q_i)(p-k)}\frac{\partial k}{\partial\Lambda_k}\frac{\partial p}{\partial\Lambda_p},\\
\mathsf{w}_j&=\sum_{k,p}\frac{e^{it(p^2-k^2)/2+ix(k-q_j)-iyp}}{(p-k)(k-q_j)}\frac{\partial k}{\partial\Lambda_k}\frac{\partial p}{\partial\Lambda_p}, \qquad \Gamma=\sum_{k,p}\frac{e^{it(p^2-k^2)/2+ixk-iyp}}{p-k}\frac{\partial k}{\partial\Lambda_k}\frac{\partial p}{\partial\Lambda_p}.
\end{aligned} \tag{D.2}$$

加边行列式满足恒等式

$$\det\begin{pmatrix} \mathsf{A} & \ell\mathsf{v} \\ \mathsf{w} & \Gamma \end{pmatrix}=(\Gamma-1)\det\mathsf{A}+\det(\mathsf{A}-\ell\mathsf{v}\otimes\mathsf{w}), \tag{D.3}$$

这可由矩阵行列式引理推出，

$$\det(\mathsf{A}-\ell\mathsf{v}\otimes\mathsf{w})=\det\mathsf{A}-\ell\mathsf{w}^{\mathrm{T}}\mathrm{adj}(\mathsf{A})\mathsf{v}. \tag{D.4}$$

式 (D.2) 的优点在于，时间导数可以因式分解： $-2i\partial_t$ 会带下 $(p-k)(p+k)$ from 相位，

$$-2i\partial_t e^{it(p^2-k^2)/2}=(p-k)(p+k)e^{it(p^2-k^2)/2}, \tag{D.5}$$

因子 $p-k$ 消去了分母，而 $p+k$ 将双重求和拆分开来，

$$-2i\partial_t\mathsf{A}_{ij}=\ell\left[\widetilde{E}_1(q_i)E_0(q_j)+\widetilde{E}_0(q_i)E_1(q_j)\right], \qquad -2i\partial_t\Gamma=E_0\widetilde{E}_1+\widetilde{E}_0E_1, \tag{D.6}$$

对于v、w也同样如此，单指标求和为

$$E_n(q)=\sum_k\frac{k^n e^{-itk^2/2+ix(k-q)}}{k-q}\frac{\partial k}{\partial\Lambda_k}, \quad E_n=\sum_k k^n e^{-itk^2/2+ixk}\frac{\partial k}{\partial\Lambda_k}, \tag{D.7}$$

~ ~以及$E_n(q)$、$E_n$对应的 $(t、x、\Lambda_k)\to(-t、-y、\Lambda_p)$。同理，A 对$x$和$y$的导数是由v 和w构成的秩一矩阵，

$$-i\partial_x\mathsf{A}_{ij}=\ell\mathsf{v}_i e^{-iq_jx}, \qquad i\partial_y\mathsf{A}_{ij}=\ell e^{iyq_i}\mathsf{w}_j. \tag{D.8}$$

由于每个导数都是秩一更新之和，行列式的导数可化为有限差分。对于任意矩阵A 以及向量$u_a、s_a$ ，定义

$$C_{\mathsf{A}}(u_1,u_2;s_1,s_2)\equiv\det(\mathsf{A}+\ell u_1\otimes s_1+\ell u_2\otimes s_2)-\det(\mathsf{A}+\ell u_1\otimes s_1)-\det(\mathsf{A}+\ell u_2\otimes s_2)+\det\mathsf{A}, \tag{D.9}$$

它对每个自变量都是线性的，并且在固定 $u_1\leftrightarrow u_2$ 时具有反对称性（而 $s$ 反之亦然）。令 $e_n(q_j)=E_n(q_j)$, $\tilde{}e_n(q_i)=E_n(q_i)$ 为费米海上的向量，则式（D.3）的时间导数可整理为

$$\begin{aligned}
&(-2i\partial_t)[(\Gamma-1)\det\mathsf{A}+\det(\mathsf{A}-\ell\mathsf{v}\otimes\mathsf{w})]\\
&\quad=-C_{\mathsf{A}}(\mathsf{v},\tilde{h};\mathsf{w},e_0)-C_{\mathsf{A}}(\mathsf{v},\tilde{e}_0;\mathsf{w},h)+i(\partial_y-\partial_x)\left[E_0\widetilde{E}_0\det\mathsf{A}\right]\\
&\qquad+i\partial_y\left[\det\left(\mathsf{A}-\ell\mathsf{v}\otimes e_0\widetilde{E}_0\right)-\det\mathsf{A}\right]-i\partial_x\left[\det(\mathsf{A}-\ell\tilde{e}_0\otimes\mathsf{w}E_0)-\det\mathsf{A}\right]\\
&\qquad+\det\left(\mathsf{A}+\ell\tilde{h}\otimes(\Gamma e_0-\mathsf{w}E_0)\right)+\det\left(\mathsf{A}+\ell(\Gamma\tilde{e}_0-\mathsf{v}\widetilde{E}_0)\otimes h\right)-2\det\mathsf{A},
\end{aligned} \tag{D.10}$$

其中向量

$$h(q)=e_1(q)+\mathrm{e}^{-ixq}E_0,\qquad \tilde{h}(q)=\tilde{e}_1(q)+\mathrm{e}^{iyq}\widetilde{E}_0 \tag{D.11}$$

收集通过分部积分对 $x$ 和 $y$ 积分产生的边界项，且 $\Gamma$ 由公式（D.6）给出。随后通过分部积分将 $x$ 和 $y$ 导数项替换为 $p_0$ 的因子，

$$\int dx\,\mathrm{e}^{-ixp_0}\partial_x[\cdots]=ip_0\int dx\,\mathrm{e}^{-ixp_0}[\cdots]. \tag{D.12}$$

最后，对合 $I$（复共轭与 $(x、y、\Lambda_k,\Lambda_p)\to(y、x、\Lambda_p,\Lambda_k)$ 结合）作用为

$$\mathsf{A}_{ij}\to-\mathsf{A}_{ji},\quad \mathsf{v}\to-\mathsf{w},\quad e_n\to\tilde{e}_n,\quad E_n\to\widetilde{E}_n,\quad \ell\to-\ell,\quad \Gamma\to-\Gamma,\quad h\to\tilde{h}, \tag{D.13}$$

使 $^{ip_0(x-y)}$ 保持不变，并将被积函数映射为其复共轭，使独立结构的数量减半，并使 $P(t)$明显为实数，从而得到公式（44）。中间步骤为

$$\begin{aligned}\Phi(t)=\iint d\Lambda_k d\Lambda_p\iint\frac{dxdy}{(2\pi)^2}\mathrm{e}^{i(y-x)p_0}\left[(\Gamma-1)\det\left(1+\hat{K}\right)+\det\left(1+\hat{K}-\delta\hat{K}_0\right)\right],\\ \delta K_0(q,q')=\frac{\Lambda_k-\Lambda_p}{\pi}v(q)w(q').\end{aligned} \tag{D.14}$$

对 Bethe 分支求和通过留数公式计算

$$\sum_k\frac{\partial k}{\partial\Lambda_k}f(k)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}}\frac{dk\,f(k)}{\alpha k-\Lambda_k-\cot(kL/2)}, \tag{D.15}$$

这是成立的，因为 $\partial\mathrm{k}/\partial\Lambda$ 是 $\partial_k[\alpha\mathrm{k}-\Lambda-\cot(\mathrm{k\,L}/2)]$ 在壳条件下的倒数。注意，围道 $\mathcal{C}$ 包围了所有根，但不包含 f 的任何奇点。将 $\gamma$ 变形至偏移了 $\pm\mathrm{i}0$ 的实轴，并利用当 $\mathrm{Im\ k}\to\pm\infty$（在 $\mathrm{L}\to\infty$ 时）时的 $\cot(\mathrm{kL}/2)\to\mp\mathrm{i}$，每个分支求和都变为一个显式的主值积分；对于在贝特根处有极点的函数，还会多出一个留数项。这样，式 (D.2) 中的各项按行和列分别成为仅依赖于自由动量 $\mathrm{q}\in[-\mathrm{k_F},\mathrm{k_F}]$ 的函数，而 det 则成为以 $\mathrm{L}\int_{-\mathrm{k_F}}^{\mathrm{k_F}}\mathrm{dq}/2\pi$ 为测度的 Fredholm 行列式，其中因子 $\ell$ 与测度合并为 $(\Lambda_k-\Lambda_p)/\pi$。式 (45) 中的标量函数为

$$v(q)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dz}{2\pi i}\left[\frac{\mathrm{e}^{itz^2/2-iy(z-q)}}{(\alpha z-\Lambda_p-i)(z-q-i0)}-\frac{\mathrm{e}^{itz^2/2-iy(z-q)}}{(\alpha z-\Lambda_p+i)(z-q+i0)}\right]\sigma(z), \tag{D.16}$$

$$\sigma(z)=-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dz'}{2\pi i}\left[\frac{\mathrm{e}^{-itz'^2/2+ixz'}}{(\alpha z'-\Lambda_k-i)(z'-z-i0)}-\frac{\mathrm{e}^{-itz'^2/2+ixz'}}{(\alpha z'-\Lambda_k+i)(z'-z+i0)}\right]+\frac{\mathrm{e}^{-itz^2/2+ixz}}{\Lambda_p-\Lambda_k}, \tag{D.17}$$

$$E(q)=\int\frac{dz}{2\pi i}\left[\frac{\mathrm{e}^{-itz^2/2+ix(z-q)}}{(\alpha z-\Lambda_k-i)(z-q-i0)}-\frac{\mathrm{e}^{-itz^2/2+ix(z-q)}}{(\alpha z-\Lambda_k+i)(z-q+i0)}\right], \tag{D.18}$$

函数 $\tilde{E}(q)$ 和 $\tilde{\sigma}$ 可由 $E(q)$ 和 $\sigma$ 得到，具体为

$$(t,x,\Lambda_k)\to(-t,-y,\Lambda_p)\qquad\text{and}\qquad(t,x,\Lambda_k)\leftrightarrow(-t,-y,\Lambda_p), \tag{D.19}$$

分别地，$w(q)$的构造方式与$v(q)$相同，只是将 $\sigma$ 替换为 $\tilde{\sigma}$，并且

$$\begin{aligned}E_0=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{\pi}\frac{\mathrm{e}^{-itk^2/2+ikx}}{(\alpha k-\Lambda_k)^2+1},\qquad \widetilde{E}_0=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp}{\pi}\frac{\mathrm{e}^{itp^2/2-ipy}}{(\alpha p-\Lambda_p)^2+1},\\ \Gamma=\int\frac{dz}{\pi}\frac{\mathrm{e}^{itz^2/2-iyz}\sigma(z)}{(\alpha z-\Lambda_p)^2+1}.\end{aligned} \tag{D.20}$$

通过代入 $\sigma$的显式极点分解，可以将$z$在$v$、$w$中的二重积分$\Gamma$化为单重积分。

## E 无限耦合核及其极限

当 $\alpha = 0$ 方程（D.16）–（D.20）中的所有分母都通过 $\alpha z$失去对$z$的依赖后，$z$积分变为高斯函数乘有理函数，并利用47）–（52）得到

$$\text{v.p.}\int \frac{dk}{\pi}\frac{e^{-itk^2/2+ikx}}{k-q} = ie^{-itq^2/2+iqx}\,\mathrm{erf}\left(\frac{(x-qt)(1-i)}{2\sqrt{t}}\right), \tag{E.1}$$

及其共轭。

当$t \to 0^+$ 以$x$ 和$y$ 为参数的误差函数趋于 $\mathrm{sgn}(x)$ 和 $\mathrm{sgn}(y)$时，

$$V \to -i\,\mathrm{sgn}(x-y)\,\mathrm{sgn}(x), \qquad W \to -i\,\mathrm{sgn}(x-y)\,\mathrm{sgn}(y) \tag{E.2}$$

（其余积分由驻相法可知为$O(\sqrt{t})$）。可得

$$\begin{aligned} v(q) &= -\frac{e^{ixq}}{\Lambda_p + i\,\mathrm{sgn}(x-y)}\frac{\Lambda_p + i\,\mathrm{sgn}(x)}{(\Lambda_k + i\,\mathrm{sgn}(x))(\Lambda_p - \Lambda_k)}, \\ w(q) &= -\frac{e^{-iyq}}{\Lambda_k + i\,\mathrm{sgn}(x-y)}\frac{\Lambda_k - i\,\mathrm{sgn}(y)}{(\Lambda_p - i\,\mathrm{sgn}(y))(\Lambda_p - \Lambda_k)}, \\ E(q) = -\frac{1}{\Lambda_k + i\,\mathrm{sgn}(x)}, &\qquad \widetilde{E}(q) = -\frac{1}{\Lambda_p - i\,\mathrm{sgn}(y)}, \qquad E_0 = \frac{2\delta(x)}{1+\Lambda_k^2}, \qquad \widetilde{E}_0 = \frac{2\delta(y)}{1+\Lambda_p^2}, \end{aligned} \tag{E.3}$$

并且该核组装为

$$\begin{aligned} K(q,q')\big|_{t=0} = &\frac{e^{ix(q-q')}-1}{\pi(q-q')}\frac{\Lambda_p + i\,\mathrm{sgn}(x)}{(\Lambda_k + i\,\mathrm{sgn}(x))(\Lambda_p + i\,\mathrm{sgn}(x-y))} \\ &- \frac{e^{iy(q-q')}-1}{\pi(q-q')}\frac{\Lambda_k - i\,\mathrm{sgn}(y)}{(\Lambda_p - i\,\mathrm{sgn}(y))(\Lambda_k + i\,\mathrm{sgn}(x-y))}, \end{aligned} \tag{E.4}$$

计数（Fisher–Hartwig）核的双参数变形。其中$P(0) = p_0$ 从 $\delta$-collapsed 项中出现的过程见公式（54）。

对于$q$、$x$、$y = O(1)$，误差函数趋于 $-\mathrm{sgn}(q)$；并在$V(q)$中对$k \to k/t$重新缩放 ，

$$V(q) \to \frac{2}{\pi}\int_{|x-y|}^{\infty}\frac{du}{u}e^{-iu\,\mathrm{sgn}(x-y)q} + i\,\mathrm{sgn}(q), \tag{E.5}$$

因此（对于$x > $y</style}；相反的排序可由对合得到）

$$v(q) \to \frac{e^{ixq}}{(1+\Lambda_k^2)(\Lambda_p + i)}\left[\frac{\Lambda_k\Lambda_p + 1}{\Lambda_k - \Lambda_p} - i\,\mathrm{sgn}(q) + \frac{2i}{\pi(\Lambda_p - i)}\int_{x-y}^{\infty}\frac{du}{u}e^{-iuq}\right] + O(t^{-1/2}), \tag{E.6}$$

对于$w(q)$，存在类似的极限，并且

$$\begin{aligned} E(q) \to -e^{-itq^2/2}\,\frac{\Lambda_k + i\,\mathrm{sgn}(q)}{\Lambda_k^2+1}, &\qquad \widetilde{E}(q) \to -e^{itq^2/2}\,\frac{\Lambda_p - i\,\mathrm{sgn}(q)}{\Lambda_p^2+1}, \\ E_0, \widetilde{E}_0 = O(t^{-1/2}) &\to 0. \end{aligned} \tag{E.7}$$

## 参考文献

[1]S. Palzer、C. Zipkes、C. Sias 和 M. Köhl，托克斯-吉拉多气体中的量子输运，《物理评论快报》**103**，150601（2009），doi：10.1103/PhysRevLett.103.150601，0903.4823。

[2] J. Catani、G. Lamporesi、D. Naik、M. Gring、M. Inguscio、F. Minardi、A. Kantian 和 T. Giamarchi，一维玻色气体中杂质的量子动力学，Physical Review A 85，023623（2012年），doi:10.1103/PhysRevA.85.023623，1106.0828。[3] A. N. Wenz、G. Zürn、S. Murmann、I. Brouzos、T. Lompe 和 S. Jochim，从少数到多数：逐个原子观察费米海的形成，《科学》342，457（2013年），doi:10.1126/science.1240516，1307.3443。[4] F. Meinert、M. Knap、E. Kirilov、K. Jag-Lauber、M. B. Zvonarev、E. Demler 和 H.- C. Nägerl，在没有晶格的情况下发生布洛赫振荡，《科学》356，945（2017），doi:10.1126/science.aah6616，1608.08200。[5] S. Dhar、B. Wang、M. Horvath、A. Vashisht、Y. Zeng、M. B. Zvonarev、N. Goldman、Y. Guo、M. Landini 和 H.-C. Nägerl，观察量子气体中玻色子的任意子化，《自然》642，53（2025），doi:10.1038/s41586-025-09016-9，2412.21131。[6] M. Horvath、S. Dhar、E. Wybo、D. Trypogeorgos、Y. Guo、M. Zvonarev、M. Knap、M. Landini 和 H.-C. Nägerl，观察强排斥量子流体中杂质的无耗散流，arXiv:2602.12320（2026年），2602.12320。[7] P. Massignan、M. Zaccanti 和 G. M. Bruun，超冷费米气体中的极化子、缀饰分子和巡游铁磁性，《物理学进展报告》77，034401（2014年），doi:10.1088/0034-4885/77/3/034401，1309.0219。[8] F. Grusdt 和 E. Demler，玻色极化子的新理论方法，arXiv:1510.04934，“恩里科·费米”国际物理学院（瓦雷纳）讲义（2015），1510. 04934。[9] F. Grusdt、N. Mostaan、E. Demler 和 L. A. Peña Ardila，玻色量子气体中的杂质与极化子：近期进展综述，《物理学进展报告》88，066401（2025），doi:10.1088/1361-6633/add94b，2410.09413。

[10] M. A. Cazalilla、R. Citro、T. Giamarchi、E. Orignac 和 M. Rigol，一维玻色子：从凝聚态物质系统到超冷气体，《现代物理评论》**83**，1405 (2011)，doi：10。1103/RevModPhys.83.1405，1101.5337。

[11] A. Imambekov、T. L. Schmidt 和 L. I. Glazman，一维量子液体：超越卢廷格液体范式，《现代物理评论》**84**，1253(2012年)，doi：10。1103/RevModPhys.84.1253，1110.1374。

[12]A. Lamacraft，一维量子液体中杂质的色散关系和谱函数，《物理评论B》**79**，241105 (2009)，doi：10。1103/PhysRevB.79.241105，0810.4163。

[13] M. Schecter、D. M. Gangardt 和 A. Kamenev，一维量子液体中可移动杂质的动力学与布洛赫振荡，《物理学年鉴》**327**，639（2012年），doi：10.1016/j.aop.2011.10.001，1105.6136。

[14] D. M. Gangardt 和 A. Kamenev，一维自旋气体中的布洛赫振荡，《物理评论快报》**102**，070402（2009），doi：10.1103/PhysRevLett.102.070402，0811.3316。

[15] S. Majumdar 和 A. Petkovi´c，一维玻色气体中移动杂质的布洛赫振荡，arXiv:2511.20326（2025年），2511.20326。

[16] S. Scopa、P. Zechmann、M. Knap、A. Bastianello 和 J. De Nardis，无晶格条件下布洛赫振荡的广义流体力学，arXiv:2605.18957（2026年），2605.18957。

[17]M. B. Zvonarev、V. V. Cheianov 和 T. Giamarchi，一维铁磁玻色气体中的自旋动力学，《物理评论快报》**99**，240404（2007年），doi：10.1103/PhysRevLett.99.240404，0708.3638。

[18]A. Kantian、U. Schollwöck 和 T. Giamarchi，一维移动杂质的竞争性运动机制，《物理评论快报》**113**，070601（2014年），doi：10.1103/PhysRevLett.113.070601，1311.1825。

[19] K. Seetharam、Y. Shchadilova、F. Grusdt、M. B. Zvonarev 和 E. Demler，量子液体中高速杂质的动力学切伦科夫转变，《物理评论快报》**127**，185302（2021年），doi：10.1103/PhysRevLett.127.185302，2101.00030。

[20] K. Seetharam、Y. Shchadilova、F. Grusdt、M. Zvonarev 和 E. Demler，有限动量玻色极化子的量子切伦科夫跃迁，《Physical Review A》110，063306（2024），doi:10.1103/PhysRevA.110.063306，2109.12260。[21]C. J. M. Mathy、M. B. Zvonarev 和 E. Demler，一维量子液体中超声速粒子的量子颤动，《自然·物理》8，881（2012），doi:10.1038/nphys2455，1203.4819。[22]M. Knap、C. J. M. Mathy、M. Ganahl、M. B. Zvonarev 和 E. Demler，量子颤动：特征与稳健性，《物理评论快报》112，015302（2014），doi:10.1103/PhysRevLett.112.015302，1303.3583。[23] P. E. Dolgirev、Y.-F. Qu、M. B. Zvonarev、T. Shi 和 E. Demler，一维费米极化子中尖锐量子集体模的出现，《物理评论X》11，041015（2021），doi:10.1103/PhysRevX.11.041015，2008.02416。[24] O. Lychkovskiy，量子流体中移动杂质的永动与驱动动力学，《Physical Review A》91，040101（2015），doi:10.1103/PhysRevA.91.040101，快速通讯，1403.7408。[25] J. B. McGuire，一维相互作用费米子。I. 排斥势，《数学物理学杂志》6，432（1965），doi:10.1063/1.1704291。[26] J. B. McGuire，一维相互作用费米子。II. 吸引势，《数学物理学杂志》7，123（1966），doi:10.1063/1.1704798。[27]C. N. Yang，具有排斥性δ函数相互作用的一维多体问题的一些精确结果，《物理评论快报》19，1312（1967），doi:10.1103/PhysRevLett.19.1312。[28] M. Gaudin，一维相互作用费米子系统，《物理快报A》24，55（1967），doi:10.1016/0375-9601(67)90193-4。[29] X.-W. Guan、M. T. Batchelor 和 C. Lee，一维费米气体：从贝特拟设到实验，《现代物理评论》85，1633（2013），doi:10.1103/RevModPhys.85.1633，1301.6446。[30] H. Castella 和 X. Zotos，与一维费米子系统相互作用的粒子的谱性质的精确计算，《物理评论B》47，16186（1993），doi:10.1103/PhysRevB.47.16186。

[31]O. Gamayun、A. G. Pronko 和 M. B. Zvonarev，一维费米气体的杂质格林函数，《Nuclear Physics B》892，83（2015），doi:10.1016/j.nuclphysb.2015.01.004，1410.1502。[32]O. Gamayun、M. Panfil 和 F. T. Sant'Ana，有限温度下一维气体中的移动杂质，《Physical Review A》106，023305（2022），doi:10.1103/PhysRevA.106.023305，2202.07657。[33]O. Gamayun、M. Panfil 和 F. T. Sant'Ana，相互作用移动杂质的 Kubo-Martin-Schwinger关系，《Physical Review Research》5，043265（2023），doi:10.1103/PhysRevResearch.5.043265，2308.06482。[34] H. Hu、J. Wang 和 X.-J. Liu，一维晶格中费米极化子的精确谱性质：反常费米奇异性与极化子准粒子，《物理评论快报》134，153403（2025），doi:10.1103/PhysRevLett.134.153403，2411.17895。[35] X.-J. Liu 和 H. Hu，光学晶格中与一维费米气体相互作用的粒子的谱性质的精确计算，《AAPPS Bulletin》35，9（2025），doi:10.1007/s43673-025-00149-7，2503.15026。[36] Z.-H. Zhang、Y. Jiang、H.-Q. Lin 和 X.-W. Guan，一维量子超声现象的微观起源，arXiv:2307.05955，V2 日期为 2024 年 6 月；截至 2026 年 7 月尚未找到期刊参考文献（2023），2307.05955。[37] O. Gamayun、O. Lychkovskiy 和 M. B. Zvonarev，零温下一维费米气体和托克斯-吉拉多气体的极化子态中杂质的动量分布，《SciPost Physics》8，053（2020），doi:10.21468/SciPostPhys.8.4.053，1909.07358。[38] O. Gamayun、O. Lychkovskiy、E. Burovski、M. Malcomson、V. V. Cheianov 和 M. B. Zvonarev，注入方案对杂质稳态的影响，《物理评论快报》120，220605（2018），doi:10.1103/PhysRevLett.120.220605，1708.07665。[39] E. Burovski、V. Cheianov、O. Gamayun 和 O. Lychkovskiy，一维量子气体中移动杂质的动量弛豫，《Physical Review A》89，041601（2014），doi:10.1103/PhysRevA.89.041601，快速通讯，1308.6147。