用于光弹力反演的神经网络推断初始猜测

Jr-Jiun Lin 和 Jih-Chiang (JC) Tsai

中央研究院物理研究所，台湾台北

摘要

密集堆积的光弹圆盘之间的接触力反演，已成为颗粒研究领域的标准工具。该过程通过迭代拟合正向模型生成的图像与实验图像，而迭代能否正确收敛，关键取决于力向量的初始猜测。在本研究中，我们训练了一个卷积神经网络，根据单个接触点附近的图像推断力向量。这种名为接触区域力推断（CRIF）的方法，为迭代提供初始猜测。使用合成圆盘图像进行测试时，与广泛采用的 PeGS 流程 [1, 2], 中的 G^2 方法相比，我们的方法显著提高了拟合结果的准确性；对于接触点多、力大且涉及高条纹级次的圆盘，效果尤为明显。此外，我们将该方法扩展到具有内置轴对称残余应力的圆盘；当光弹性圆盘浸没在流体中时，这种残余应力往往会出现。最后，在实验堆积体上，从CRIF猜测开始的拟合，在强接触处满足力互易性，而从G^2 开始的拟合则不满足。

1. 引言

致密颗粒材料通过异质的颗粒间接触网络传递载荷，而这些接触力的统计特征和组织方式决定了其力学响应[3–6]。在二维实验中，光弹颗粒使这些力变得可见：在交叉圆偏振片之间观察圆盘时，会看到条纹，其图样编码了圆盘内部的应力场，因而也反映了作用于其接触点的力[1, 5, 7]。光弹性测量已成为准二维颗粒实验中进行颗粒尺度或接触尺度力测量的标准方法，揭示了这类系统的诸多显著特性，例如剪切堵塞和织构各向异性[5, 8–11], 、屈服转变[12, 13], 以及许多其他特性[14–17]。

早期研究主要通过测量透射光强的梯度平方来分析，这一量通常称为 G^2, ，经过校准后可作为颗粒尺度压力的替代指标[18, 19]。Zhao 等人指出，对于单个圆盘，只要作用力低于饱和力[20]， G^2 就与接触力大小之和成正比。近期的发展使得人们能够定量、准确地恢复各个接触力矢量；这可通过求解一个逆问题实现：给定圆盘上的接触位置，寻找一组接触力矢量，使其理论条纹图样与测得的图像最为吻合，同时满足力和扭矩平衡[1, 5]。如今已有成熟的开源工具可用于从图像中提取力，例如广受欢迎的 PeGS 算法 [1, 7]。

这种拟合方法属于非线性最小二乘问题，其目标函数是非凸的，所得解是一个局部最小值，并且强烈依赖优化的初始位置[1]。因此，初始猜测的质量是该方法能否获得准确测量结果的关键。例如，在 PeGS2[2], 中，首先通过标定将每个颗粒的G^2 转换为作用于该颗粒的总力 f_{tot} 。随后，按照在接触点局部区域测得的 G^2 ，将 f_{tot} 按比例分配给各个接触点，并且最初假定所有接触力均为纯法向力[1, 2]。当不同接触点的条纹几乎相互独立时，这种方法效果最好，也就是力较小且接触点较少的情况；否则，方法便会失效。对于厚度为 6 毫米的 ClearFlex50 圆盘，当力超过 1.2–2.5 N 时，标准 PeGS 实现的可靠性会显著下降，具体取决于接触点的数量[14]。这大幅限制了能够进行定量力反演的实验条件范围。

另一方面，机器学习和计算机视觉的最新进展为从光弹图像中提取力提供了另一种途径。Lin[21] 提出了一种人工神经网络，可以根据G^2 及其他已知参数推断总力，从而无需进行力标定。Sergazinov 等人 [22] 训练了卷积神经网络（CNN），以根据单个颗粒的合成图像预测接触数、接触位置、力大小和接触角。这些创新彰显了神经网络在光弹性测量领域的巨大潜力。然而，这些方法与广泛采用的 PeGS 框架基本上相互独立；该框架中的基于物理的拟合已被文献证明可靠。

本文开发并测试了一种集成方法，结合了 CNN 推断与基于物理的 PeGS 拟合的优势。由于可以通过粒子跟踪和简单的几何关系准确确定接触数和接触位置，我们将其视为已知量，从而简化问题。我们使用单个接触区域（而非颗粒）的合成图像训练 ResNet-18 网络[23]，以推断力向量，并将其作为迭代过程的初始值。我们将这种方法称为接触区域力推断（CRIF）。通过合成图像，我们证明，与 G^2 方法相比，CRIF猜测能显著降低最终拟合的误差，并且在条纹级数高达六级时仍保持稳健。此外，我们将该方法扩展到带晕圈的圆盘，这种圆盘在浸入流体[24] 中或通过浇铸制造时会出现晕圈。我们提出了一种能够重现观测到的晕的残余应力模型，证明将晕纳入正向模型后即可恢复准确的力，并通过剪切堆积体的图像展示：从 CRIF猜测开始的拟合仍然稳健，而从 G2猜测开始的拟合则会失败。代码和训练好的网络已公开提供[25]。

2. 光弹力反演的现有方法

本节简要概述光弹性的原理，随后介绍 PeGS 力反演技术及其局限性。本节讨论的主题详见参考文献[1, 26]。

2.1 光弹性

我们考虑一块厚度均匀的光弹性材料，并在暗场圆偏光镜下观察。透射强度场由应力光学定律[27]给出：

$$I(x,y) = I_0 \sin^2\left(\frac{\pi \Delta\sigma(x,y) h}{\lambda / C}\right) \qquad Eq.1$$

，其中 $\Delta\sigma = \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2}$ 是面内两个主应力之差的局部值。I_0 是照明强度，λ 是光波长，$C(\lambda)$ 是材料中随波长变化的应力光学系数。光弹性系数 $\#_\sigma \equiv \lambda / C\mathrm{h}$ 确定了光弹响应的应力标度。讨论光弹性时经常涉及的另一个量是条纹级次，如 Ref.[1] 的图8(a)所示的径向加载圆盘。此处，我们将大小为 f 的接触力所对应的条纹级次定义为

be $\&_{fr}(f) = \frac{4f}{\pi RF\sigma h}$，与 Ref.[1] 一致。这相当于圆盘受到两个方向相反的力 f径向加载时，从边缘到中心数出的条纹数。因此，$\&_{fr}$ 是衡量力为 f 的接触点附近条纹密度的便捷指标，可用于比较不同尺寸的圆盘和不同材料。

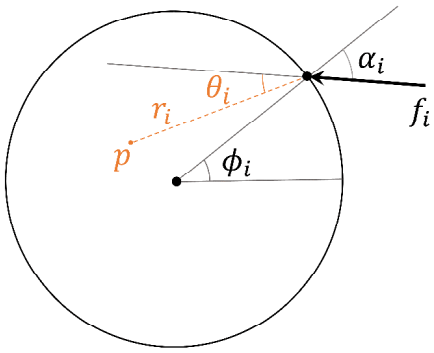


图1 圆盘圆周上某位置（由 ϕ_i指定）受到大小为 f_i 、攻角为 α_i 的力作用。圆盘内部任意一点 2 均可相对于力的方向用极坐标（r_i、θ_i）表示。所有角度均按逆时针方向测量；为清晰起见，图中以负值绘出 α_i 。

在颗粒实验中，每个圆盘都通过离散点接触加载。第 5 个接触点由其在圆周上的位置角 ϕ_i 、接触力的大小 f_i ，以及力与内法线之间的角度 α_i 描述（图1）。每个接触点都会产生一个应力场 $\boldsymbol{\sigma}_i^0$ ，该应力场在以接触点为中心、以力的方向为基准测量的极坐标（r_i、θ_i）中纯粹沿径向分布（附录 A）。8 个接触点产生的总接触应力 $\boldsymbol{\sigma}_c$ 为 [26]:

$$\boldsymbol{\sigma}_c(x,y) = \sum_{i=1}^{Z} \boldsymbol{T}(\gamma_i)\boldsymbol{\sigma}_i^0\boldsymbol{T}^T(\gamma_i) + \sum_{i=1}^{Z} \frac{f_i\cos(\alpha_i)}{2\pi R}\boldsymbol{I} \qquad Eq.\,\mathbf{2}$$

，其中：(;$_i$) 将 $\boldsymbol{\sigma}_i^0$ 旋转$_i = \theta_i - \alpha_i - \phi_i$角度。第二项在 $r =$ G处施加无应力边界条件；它是各向同性的，因此不会进入 $\Delta\sigma$。给定边界上的一组力向量$\{\phi_i, f_i, \alpha_i\}$，公式 1 和 2 因而可以解析地给出图像，这种映射在本文中称为正向模型。从实验图像中求得$\{\phi_i, f_i, \alpha_i\}$的逆过程要困难得多，而这正是 PeGS 代码库[2] 旨在解决的问题。

2.2 PeGS 流程

光弹性颗粒求解器（PeGS）是 Majmudar 和 Behringer [5], 所提出的力反演方法的开源实现，由 J. E. Kollmer 编写，并由 Daniels 等人[1]介绍。当前版本 PeGS 2 [2], 采用了修正后的无应力边界项处理方法。对于每幅图像，PeGS2 都会定位颗粒、识别接触点，然后按照下文所述，通过非线性最小二乘法拟合每个颗粒上的接触力。

在此，颗粒的位置和接触对列表均视为已知。颗粒中心可通过圆检测算法 [2] 或较新的基于CNN的工具 [28, 29], 确定，承力接触则可通过 G^2 阈值 [1] 或根据沿圆周的强度剖面 [10]识别。

对于每个圆盘，已知颗粒位置和接触对即可确定接触角 ϕ_i，因此未知量为 $\{f_i, \alpha_i\}$。拟合过程从一个初始猜测 $\{f_i, \alpha_i\}^0$开始，并通过正向模型生成相应的图像 $I(\{f_i, \alpha_i\}^0)$ 。随后，程序迭代调整 $\{f_i, \alpha_i\}$，以最小化正向模型预测与实验图像 [5]之间逐像素差值的平方和。

式 1 中 $I(\boldsymbol{\sigma})$ 的周期性意味着该逆问题具有高度非凸性，拟合只能收敛到附近的局部最小值。因此，初始猜测不仅决定拟合速度，也决定测得的力的准确性。目前的 PeGS2 实现采用基于 G^2 的初始猜测，早期版本也是如此，详见参考文献 [1]。下面将介绍这一方法。

2.3 J² 初始猜测

当前 PeGS2 实现 [2] 根据局部 G^2幅值提供初始猜测。整个颗粒区域上的梯度平方 G_p^2 可通过中心差分计算，方法如参考文献[1]中的公式 1 所示。然后通过线性关系将其转换为总力，$f_{tot} = \Gamma G_p^2$。 Γ 是一个经验因子，通常通过对单个圆盘进行加载实验来校准； f_{tot} 是所有接触点的力大小之和。该线性关系已被验证在各种加载条件和接触数下都具有稳健性 [20]。各接触点力大小的初始猜测 $\{f_i^0\}$ 是通过将 f_{tot} 按比例分配给各接触点得到的，分配比例取决于在第 5 个接触点旁的小圆形区域内测得的梯度平方，即:

$$f_i^0 = f_{tot}\frac{G_i^2}{\Sigma_j G_j^2} \qquad Eq.3$$

，G_j^2 是 Qth 接触点附近的局部 G^2 ，通常取与圆盘圆周在接触点处相切的圆形区域，其半径 r_c 通常小于圆盘半径的一半。所有接触力最初都仅沿法向： $\alpha_i^0 = 0$。随后，PeGS2 会在拟合前进行力平衡校正。

上述方法在较高的 $\&_{fr}$ 和 8 下会变得不可靠，主要有两个原因。首先，按 G_i^2 分配 f_{tot} 是一种启发式做法：一个接触点附近的条纹也会受到其他接触点的影响，而且在接触点附近，条纹会变得密集并且模糊，因此 G_i^2 不再能衡量该接触点处的力。其次，初始猜测不包含力方向的信息，而力平衡步骤只有在 $Z = 2$ 等简单情况下才能补足这一信息。随着 $\&_{fr}$ 和 8 增大，这两个问题都会加剧，也就是说，在密集堆积摩擦系统中尤为明显。参考文献 [14] 的附录对这些局限性进行了量化，第 4.1 节进一步对其进行了分析。

3. 我们的方法：CRIF

为了提高初始猜测的准确性，我们训练卷积神经网络，从单个接触区域的图像中推断力向量。与以往研究中的常见做法一样，训练数据是由正向模型生成的合成图像 [21, 22]。本节介绍核心方法：这些合成图像的采样与生成、模型架构和训练流程，以及我们采用的 PeGS 风格拟合算法。更多实现细节见附录 B 和 C。

3.1 合成图像生成

每张合成图像都显示一个半径为 6 mm、具有 $Z = 2\sim6$ 个接触点的圆盘。我们设置$f_\sigma \equiv \#_\sigma$h $= 225$ N/m，以模拟常见的光弹性材料 ClearFlex50，其厚度为 h $= 10$ mm。力集 $\{\phi_i, f_i, \alpha_i\}$ 是随机抽取的，其中 ϕ_i 之间的最小角间隔为 53°，总力介于 0.02 到 4 N 之间，随后进行修正以满足力和扭矩平衡。任何力超过 $\&_{fr} = 6$ 的力集都会被舍弃，以设定明确的上限（完整流程见附录 B）。

生成的力大小范围为 0.01–6.4 N，$\ln(f)$ 中的覆盖近乎均匀，力角最大可达 45° [图 2(a, b)]。

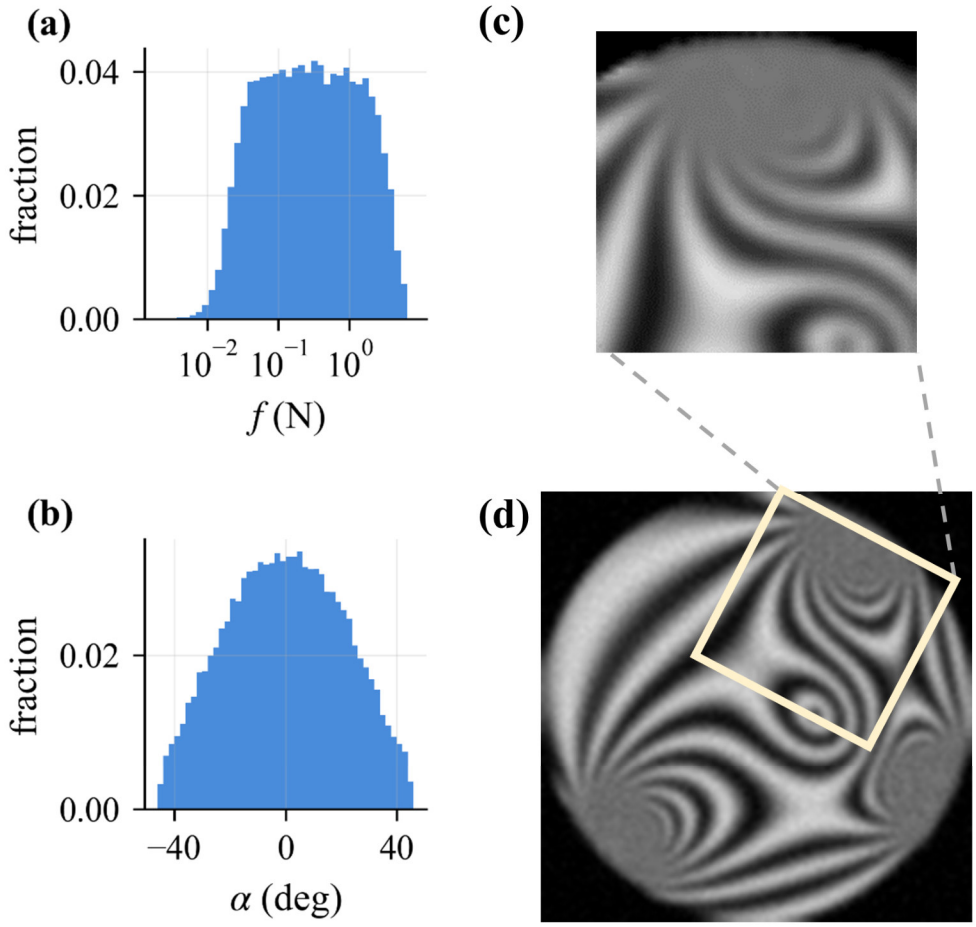


图 2 采用第 3.1 节和附录 B 所述方法生成的力集，其 (a) 力大小 f 和 (b) 角度 0 的分布。(c) 接触区域图像裁剪示例。裁剪一个边长为 0.92R × 0.92R 的正方形，使接触点位于裁剪正方形的顶部中央，且接触法线指向垂直方向。(d) 圆盘图像渲染后的直径为 100 像素，并添加了高斯模糊 $\sigma = 1$ 像素和高斯噪声 $\sigma = 0.015$。

每个圆盘均以直径 100 像素进行渲染，并经过一系列随机增益 g,、偏移量 b、高斯模糊、加性高斯噪声以及量化为 8 位的处理（附录 B）。这些处理模拟实验缺陷，有助于模型提升泛化能力。我们为每个 8 生成 3,000 组力集。这 15,000 组力集被随机按 70/15/15 的比例划分为训练集、验证集和测试集，并且每组都采用两种随机处理设置进行渲染，最终得到 21,000 张训练图像、4,500 张验证图像和 4,500 张圆盘测试图像。

3.2 训练数据集

上述图像集与参考文献[22] 中用于训练四个独立模型的图像集类似，这些模型分别预测 8、1、 f 和 0。这种设计使训练变得不必要地困难。首先，利用第 2.2 节提到的技术可以准确测量 8 和 1，并将其作为已知输入。其次，结果应具有旋转对称性；然而，相同的 $\{f_i, \alpha_i\}$ 旋转后会产生卷积层看来截然不同的图像。第三，网络输出的值数量固定，而每个圆盘的接触点数量各不相同——因此，参考文献[22] 针对每个 8 值分别训练了一个模型，总共训练了 15 个模型。

我们提出了一种更简单的方法，能够在很大程度上克服这些挑战：使用接触点图像而非圆盘图像进行训练。对于圆盘图像中的每个接触点，我们裁剪出一个 0.92G $\times$ 0.92G 的正方形区域，使接触点位于裁剪区域的顶部中央，且接触法线与垂直方向对齐，如图 2(c) 所示。对每个 5 重复这一过程，从一张圆盘图像生成 8 张接触点图像。这样既消除了圆盘的任意朝向，也消除了 8 的不确定性，最终得到 84,000 张训练、18,000 张验证和 18,000 张测试用接触区域图像；这些图像方向均已对齐，并包含局部条纹图样的信息。

3.3 模型训练

我们使用在 ImageNet 上预训练的 ResNet-18 架构[23] ，并将其分类器替换为一个具有两个输出的小型回归头（附录 C）。在单张消费级 GPU（NVIDIA GTX 1060）上训练一夜即可收敛。

3.4 力拟合

为了研究初始猜测的质量如何影响拟合结果，我们在 Python 中搭建了一个 PeGS 风格拟合过程，并使用 PyTorch 编写，以便在 GPU 上并行拟合多个圆盘。公式 2 的正向模型会生成与图像分辨率相同的合成强度图，随后用标准差为一个像素的 3×3 高斯核 a 对其进行平滑处理，从而得到正向图像 $I^*(\{f_i, \alpha_i\})$。我们注意到，随机增益和偏置（第 3.1 节）旨在帮助 CRIF 网络适应各种光照条件；在拟合过程中，会将它们精确移除，以生成干净的目标 c $= (\mathrm{a} * I - b)/g,$ ，随后即可将其与 I^* 进行比较，而无需显式考虑 b 和g的影响。优化器的目标是最小化损失

$$L = [I^*(\{f_i, \alpha_i\}) - T]^2 \qquad Eq.4$$

，使用 Adam 优化器以 0.04 的学习率更新 $\{f_i, \alpha_i\}$。

我们采用两种停止规则（表1）：宽松拟合在 d 连续 10 次迭代未能减少 10^{-3} 后停止；严格拟合则具有更长的耐心，可实现更精确的收敛。严格拟合的计算成本高得多，而实践中通常采用宽松拟合。为完整起见，我们展示这两种设置下的结果。

表1。力拟合设置。

	宽松拟合	严格拟合
d 降低的容差	10^{-3}	10^{-6}
耐心（迭代次数）	10	100
最大迭代次数	1000	2000

4. 梯度平方与 CRIF 结果比较

4.1 J² 猜测

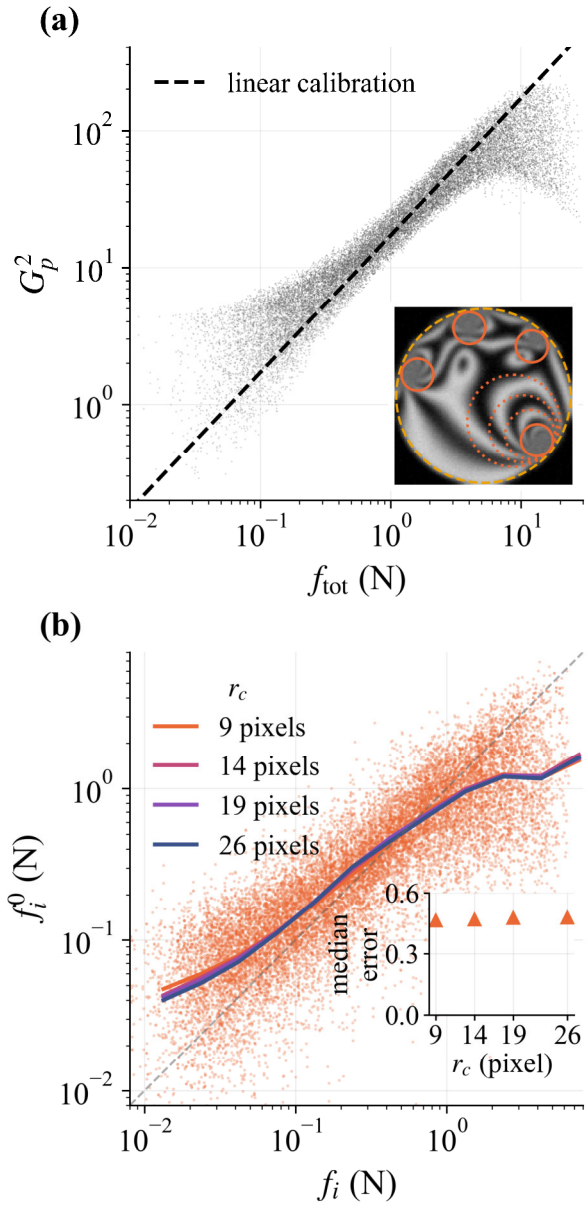


图 3 圆盘上的梯度平方猜测。(a) G_p^2 与 21,000 个训练圆盘的总接触力 f_{tot} 的关系，每个圆点代表一个圆盘，虚线为线性校准 $f_{tot} = \Gamma G_p^2$ 。插图：该 G^2 方法的示意图样例。大虚线圆标示用于评估 G_p^2 的圆盘区域。每个接触点处的橙色实心圆标示评估 G_i^2 时使用的$r_c = 9$ 像素接触区域；点线圆表示所用的不同 r_c 值。(b) 测试集中各接触点的猜测 f_i^0 与真实力 f_i 的关系。不同颜色的实线表示四种 r_c 值对应的分箱中位数（定义见正文）。散点表示使用 $r_c = 9$ 像素得到的单个猜测值。虚线对角线仅作视觉参考。插图：测试集中所有接触点的相对误差中位数 $|f_i^0 - f_i|/f_i$ 与 r_c的关系。

我们首先在合成图像上考察 G^2 猜测，因为它是拟合的标准起点，也是评估 CRIF 时所依据的基线。由于梯度平方随增益的平方变化，所有关于 G^2 猜测的测试都使用增益恒定的图像

为简便起见，设增益为 $g = 0.8$、偏移量为 $b = 0.025$。我们按照第 2.3 节所述，在 PeGS 流程中执行 G^2 方法：通过 G_p^2 标定确定圆盘上的 f_{tot}，并将力分配给各个接触点，使 f_i 与第 5 个接触点附近一个半径为 r_c 的小圆形区域内的局部 G^2 成正比，如图 3(a) 插图中的橙色实心圆所示。此外，还应用了 PeGS2 的力平衡步骤。

第一步是找到 G_p^2 与 f_{tot}之间的标定关系。我们将训练集中的全部 21,000 张图像对应的这两个值绘制成散点图，如图 3(a) 所示，并以虚线表示线性校准 $f_{tot} = \Gamma G_p^2$ 。针对这一分辨率拟合得到的校准常数 Γ 为 0.0586 N，本文中所有 G^2 初始猜测均使用该值。实际操作中，应在与实际实验相同的成像条件下，使用实体圆盘进行标定，因此受实验限制，通常只能将 $Z = 2$ 和 $\alpha = 0$ 图像作为数据点。这可能会在更大的力范围内得到更清晰的线性拟合。为保持方法的通用性，我们在此不施加这一限制，而是纳入训练集中的所有图像。

使用上述标定，我们继续根据式（3）对测试集中的每个接触力进行估计。此过程中的一个自由参数是接触区域半径 r_c。最佳的 r_c 应取何值并不明显，因此我们测试了四个 r_c 值，范围为 9 至 26 像素（如图3(a)中的虚线圆所示）。图3(b)展示了所有接触点的估计 f_i^0 与真实 f_i 的关系。在此图及后续图中，我们绘制分箱中位数：将横轴划分为宽度为 0.25 个数量级的对数分箱，并计算每个分箱内所有点的绘图量中位数（少于 20 个点的分箱不予显示）。四种 r_c 值对应的分箱中位数几乎重合，且相对误差$|f_i^0 - f_i|/f_i$ 的总体中位数同样不受 r_c 影响，始终高于 45%。在整个 f_i 范围内，估计值 f_i^0 的分布跨越一个数量级；S 形的分箱中位数显示，与 G_p^2 标定一样，小力时被高估，大力时被低估。

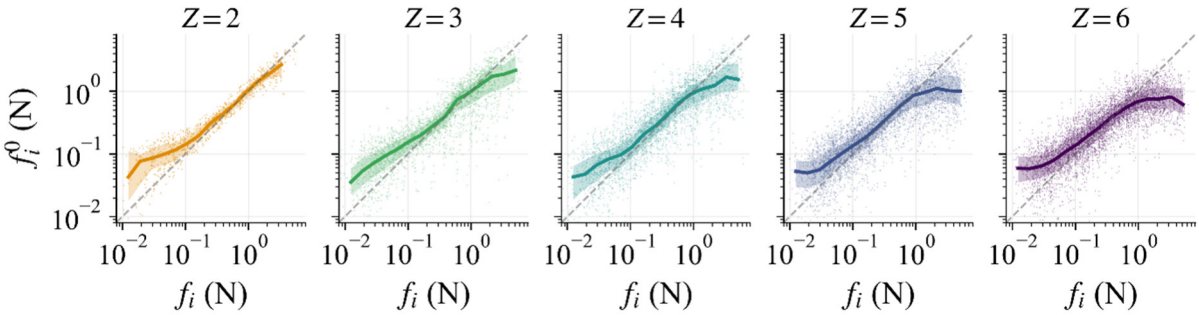


图 4 测试集中，按接触点数量 8 区分的 G^2 初始猜测与真实接触力 f_i 的对比（接触点数量从 $Z = 2$ 处的 1,800 个增至 $Z = 6$处的 5,400 个）。每个点代表一个接触点。实线表示分箱中位数。阴影带表示每个分箱中第25至第75百分位的分布范围。

图3(b)中 f_i^0 的显著误差可以通过按接触所属圆盘的接触数 8 对接触点分类，进一步加以考察。图4显示，随着 8 增大，误差明显上升。对于 $Z = 2$，当$f_i > 0$为 2 N 时，估计值与真实值十分接近，离散幅度为 19%。误差从 Z = 2 到 Z = 3 大致翻倍；此后，强接触的低估程度越来越大。随着 8 增大，f_i^0 开始趋于平缓时对应的力水平逐渐降低：从 $Z = 3$ 时的 $f_i \approx 2$& 降至 $Z = 6$ 时的 $f_i \approx 0.5$ N，定性上与文献[14]中的观察相似。因此，图3和图4定量证实，当 f_{tot} 超过几牛顿或 $Z \geq 3$ 时，G^2 估计会失效。

4.2 CRIF猜测与 J² 猜测的比较

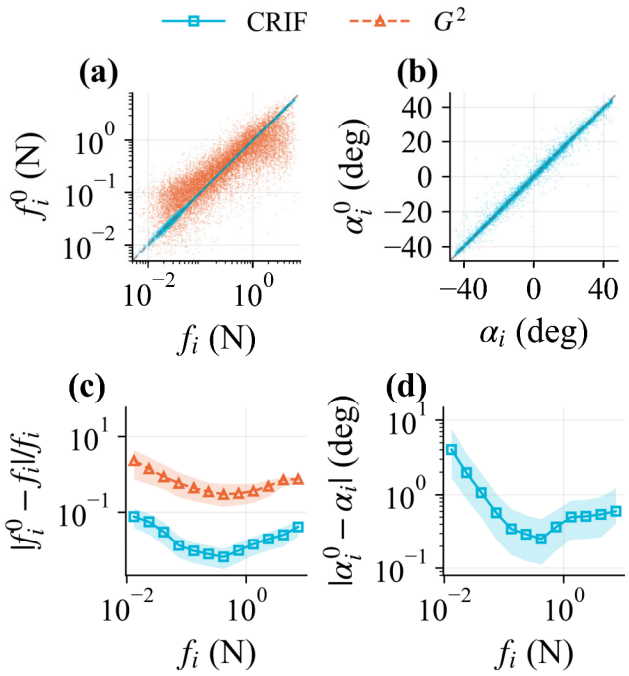


图5 测试集中 18,000 个接触点的 CRIF 和 G^2 方法给出的初始猜测。(a) 预测力大小 f_i^0 和 (b) 预测角度 α_i^0 与真实值的对比，每个点代表一个接触点。虚线为对角线。(c) 相对力误差和 (d) 角度误差与真实力的关系；线条表示分箱中位数，色带表示每个分箱中第25至第75百分位。G^2 猜测不会预测 0，因此未在 (b) 和 (d) 中列出。

现在来看相同测试接触点上的 CRIF 猜测。图5(a)显示，在测试集覆盖的三个数量级范围内，预测力与真实力相符，相对误差的总体中位数为 1.2%。与 G^2 猜测不同，网络还预测方向 0：角度误差中位数为 0.47°，涵盖的角度范围为 ±45° [图5(b)]。图5(c、d)展示了 f 和 0 的误差如何随真实力大小 f_i变化。CRIF 在 f_i处于 0.1 至 1 N 之间时表现最佳，此时分箱中位误差在力大小上为 0.8%，在角度上为 0.3°。

误差在范围两端都会增大，原因可能各不相同。最弱的接触点产生的条纹强度仅略高于相机噪声，而最强的接触点产生的条纹在接触点附近接近像素尺度。此外，CRIF 猜测不受 8 的影响。对于 $Z = 2\sim6$，总体中位误差在力大小上为 1.1% 至 1.3%，在角度上为 0.43° 至 0.50%（未显示）。

图 5(c) 中两种猜测之间的对比度在整个范围内都很大。即使在表现最好的 0.4–0.6 N 范围内，G^2 猜测的分箱中位误差也达到 29%，约为 CRIF 的 40 至 50 倍。在 5 N 时，误差升至 74%；低于 0.03 N 时则超过 100%。相比之下，CRIF 猜测在 0.05 至 5 N 的力范围内，误差始终远低于 5%。据报道，在高质量实验校准中，PeGS 流程的误差可低至几个百分点，具体数值主要取决于力大小[14, 26]。我们发现，在进行任何拟合之前，CRIF 在未见过的合成图像上也能达到相近的精度。下一小节将检验 CRIF 给出的良好初始猜测能否改善 PeGS 风格拟合过程的结果。

4.3 迭代拟合后的比较

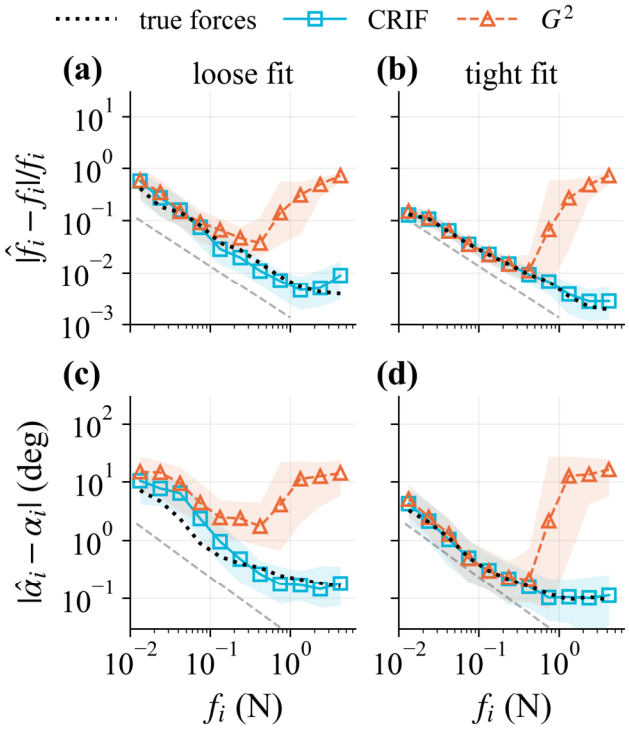


图6 从真实力、CRIF猜测和 G^2 猜测开始，对测试集中500张合成圆盘图像拟合得到的力 $f\mathrm{o}_i$ 和角度 α_i q。上排显示经过 (a) 宽松拟合和 (b) 严格拟合后的相对力误差 $|f\mathrm{o}_i - f_i|/f_i$ 的分箱中位数。下排显示经过 (c) 宽松拟合和 (d) 严格拟合后的角度误差 $|\alpha\mathrm{r}_i - \alpha_i|$ 。曲线表示分箱中位数，色带表示第25至第75百分位的分布范围；图中展示了 CRIF 和 G^2 初始值的结果。虚线 $\propto f_i^{-1}$ 仅供视觉参考。

我们使用第 3.4 节详述的方法对测试集中的圆盘进行拟合，并采用各种初始猜测来获得拟合后的力 $f\mathrm{o}_i$ 和角度 $0\mathrm{r}_i$ 。图 6 显示了测试集里随机抽取的 500 个圆盘中的 2,000 个接触点（每个 8 中有 100 个圆盘）在宽松拟合和严格拟合后的最终拟合误差中位数；这两种拟合的定义见表1。由于严格拟合的计算成本较高，并非所有圆盘都进行了测试。我们采用三种不同的初始猜测进行比较：G^2, CRIF 和真实力猜测。对于真实力猜测，拟合从真实力开始；由于对测试图像进行了修改，拟合结果不会与真实力完全一致。因此，真实力猜测产生的拟合误差代表了我们测试方案的精度下限。图 6(a) 和图 6(b) 显示，真实力猜测的相对误差 $|f\mathrm{o}_i - f_i|/f_i$ 在 f_i^{-1} 为 $f_i < 1$ N 时大致按比例变化，这表明在小力范围内，宽松拟合的绝对误差 $|f\mathrm{o}_i - f_i| \approx 10^{-2}$ N，严格拟合的绝对误差为 2×10^{-3} N。超过 $f_i > 1$N 后，力的相对误差趋于平缓，宽松拟合和严格拟合分别为 0.5% 和 0.2%。

同样，0 的误差大致随 f_i^{-1} 以相似的方式变化；当 $f_i > 1$ N 时，宽松拟合和严格拟合的误差分别趋于约 0.2 度和 0.1 度的恒定水平。

在所有情况下，CRIF猜测的拟合误差都与真实力猜测相当，表明在所考虑的整个范围内，CRIF猜测都接近最优。这并不令人意外，因为CRIF猜测即使在拟合之前也具有极高的准确度。有趣的是，当 $f_i < 1$ N 时，拟合后的误差反而增大。这可能是因为 CRIF 网络是在经过添加的噪声和模糊处理的图像上训练的，因此能在初始猜测阶段克服这些缺陷；而随后的 PeGS 风格拟合则往往会收敛到因这些处理而发生偏移的极小值。

另一方面，G^2 猜测的表现较差，尤其是在大力区间。对于宽松拟合，力和角度的相对误差都在约 0.4 N 时达到最小值，并在 f_i较大时上升。当 $f_i > 1$ N 时，中位误差达到力的 50% 和角度的 10 度。严格拟合策略在这一区间几乎没有改善，因为优化器会陷入错误的局部最小值。尽管如此，我们注意到，尽管图 5(c) 中的初始误差较大，当 $f_i < 0.4$ N 时，G^2 猜测的表现仍与另外两种猜测一样好，这展现了优化器在低条纹级次下的能力。

至此，我们已在合成测试图像上评估了 CRIF猜测及其所得拟合的准确性；这对于该方法而言是最理想的情形。在使用实验图像测试该方法之前，我们通过在应力场中引入残余应力（这是光弹性测量中不希望出现的特征）来扩展这一公式。我们展示了如何训练 CRIF，使其能够在存在残余应力项时预测力，并将其应用于真实圆盘。

5. 残余应力光环与实验测试

在实验中，单个圆盘边缘由残余应力造成的“晕”是不希望出现的特征，会干扰光弹力反演。本节将展示如何通过在正向模型中纳入模拟的残余应力，使 CRIF方法能够适应这类缺陷。我们将说明，在拟合中纳入这一项有助于准确恢复力，而使用带有晕的合成图像重新训练网络，则能加快收敛。

5.1 残余应力光环建模

G^2 标定和 PeGS 框架都依赖于材料仅受到接触应力这一条件，以实现准确测量。但这一要求在实际中往往难以满足。市面上无法买到光弹性圆盘，它们大多通过将聚氨酯浇注到模具中制造，或通过切割[1, 7], 制成；这些工艺有时会留下残余应力，在偏光镜下观察时通常表现为明亮的晕，从而干扰光弹测量。这些残余应力可能源于制造工艺[7]，也可能源于储存期间吸收环境水分[30]。因此，需要通过仔细的反复试验来优化固化方案和储存条件，从而将残余应力降至最低。在其他情况下，浸没于水性流体中的聚氨酯颗粒可能因吸收流体而发生膨胀。Hayes 等人[24] 表征了浸没在水中的水透明55（WC-55）聚氨酯圆盘的膨胀和光弹响应，结果表明，随着水渗透整个圆盘，晕会在数个月内形成并逐渐消退。另一方面，如图 7 所示，我们发现 ClearFlex50 圆盘在 70%甘油水溶液中浸泡一年多后仍会呈现持续存在的晕。因此，这种与材料有关的晕是湿态光弹实验中必须考虑的重要因素，并且在很大程度上限制了将准确的力反演应用于干态实验。

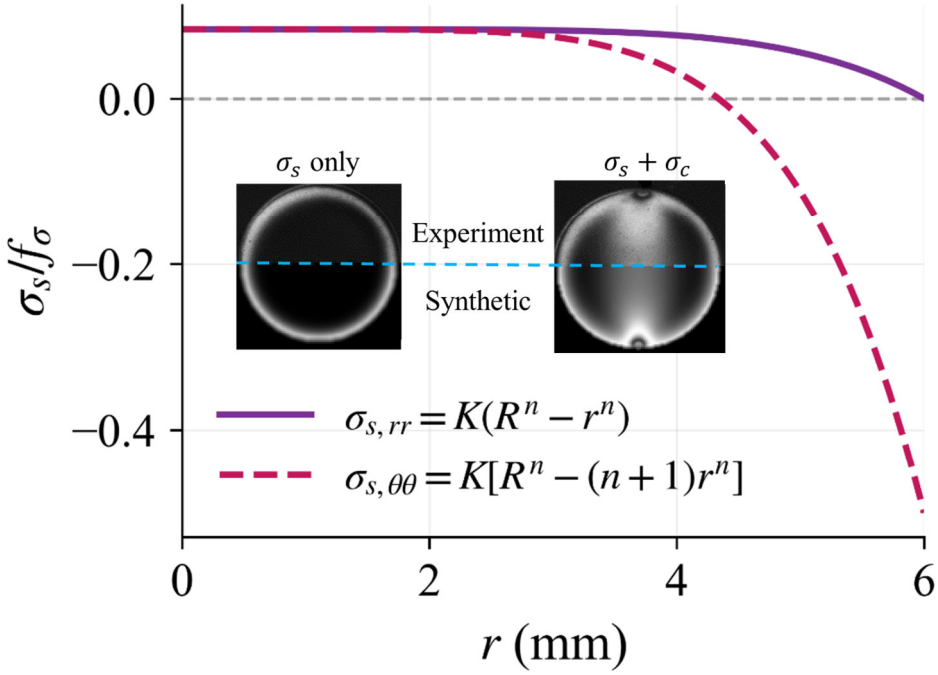


图 7 建模残余应力的两个主应力分量的径向分布 $\boldsymbol{\sigma_s}$。插图对比了实验采集图像（上半部分）与使用所提出的正向模型生成的合成图像（下半部分） $\boldsymbol{\sigma_H = \sigma_c + \sigma_s}$。左图显示无接触点的圆盘，右图显示在两个极点处施加 0.3 N 载荷的圆盘。

无论其成因如何，膨胀晕圈总体上都对光弹测量构成重大挑战，尤其是对于较小的力，其光弹响应主要位于圆盘边缘附近。当前版本的 PeGS 代码中有一个“边缘去除百分比”参数，用户可以忽略具有一定宽度的外缘，从而在拟合时有效去除晕。对于 Ref.[24], 中的情况，研究表明这一快捷选项能够对大于 0.3 N 的力给出准确结果，但预计无法解析小于该值的力。

如果将晕纳入正向模型，无论是生成训练图像还是进行拟合，都可以缓解这一局限。因此，我们提出构建一种替代正向模型，在式 2 的接触应力 $\boldsymbol{\sigma_c}$ 基础上叠加膨胀应力 $\boldsymbol{\sigma_s}$。具体而言，我们在生成图像数据和拟合过程中，均使用混合应力 $\boldsymbol{\sigma_H = \sigma_c + \sigma_s}$ 作为正向模型。 $\boldsymbol{\sigma_s}$ 的显式形式设计为轴对称、自身处于平衡状态、边缘无牵引力，且集中在边缘附近。在以圆盘中心为原点的极坐标(r, θ) 中，我们假设:

$$\begin{cases} \sigma_{s,rr} = K(R^n - r^n) \\ \sigma_{s,\theta\theta} = K[R^n - (n+1)r^n] \end{cases} \qquad Eq.5$$

满足 $\}_r\sigma_{s,rr} + \sigma s,rr - \sigma s,\theta\theta\ _r$ ~~$= 0$~~，即 $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma_s} = 0$ 具有 4 重对称性，且$\sigma_{s,rr}(r = \mathrm{G}) = 0$。y 是一个可根据观测到的晕进行调整的缩放常数。对于浸没圆盘，我们设置 $\mathrm{y} = f_\sigma/2n\ \mathrm{G}^n$，使图像强度在 $r = \mathrm{G}$ 处达到最大值。剩下的唯一自由参数是 n，它决定了晕的宽度。本文采用 $n = 6$，因为它与真实圆盘较为吻合，如图 7 所示。在实际应用中，一旦晕达到稳态，就可以根据实验条件校准 y 和 n 的精确值。

我们将 $\boldsymbol{\sigma_H}$ 的假设解析形式引入 halo 正向模型，以根据第 3.1 节中使用的相同力集生成合成图像。随后使用这些数据，按照与附录 C 相同的方案训练另一种 halo-CRIF 网络。halo 正向模型也被纳入第 3.4 节介绍的拟合过程。

5.2 halo-CRIF 的性能

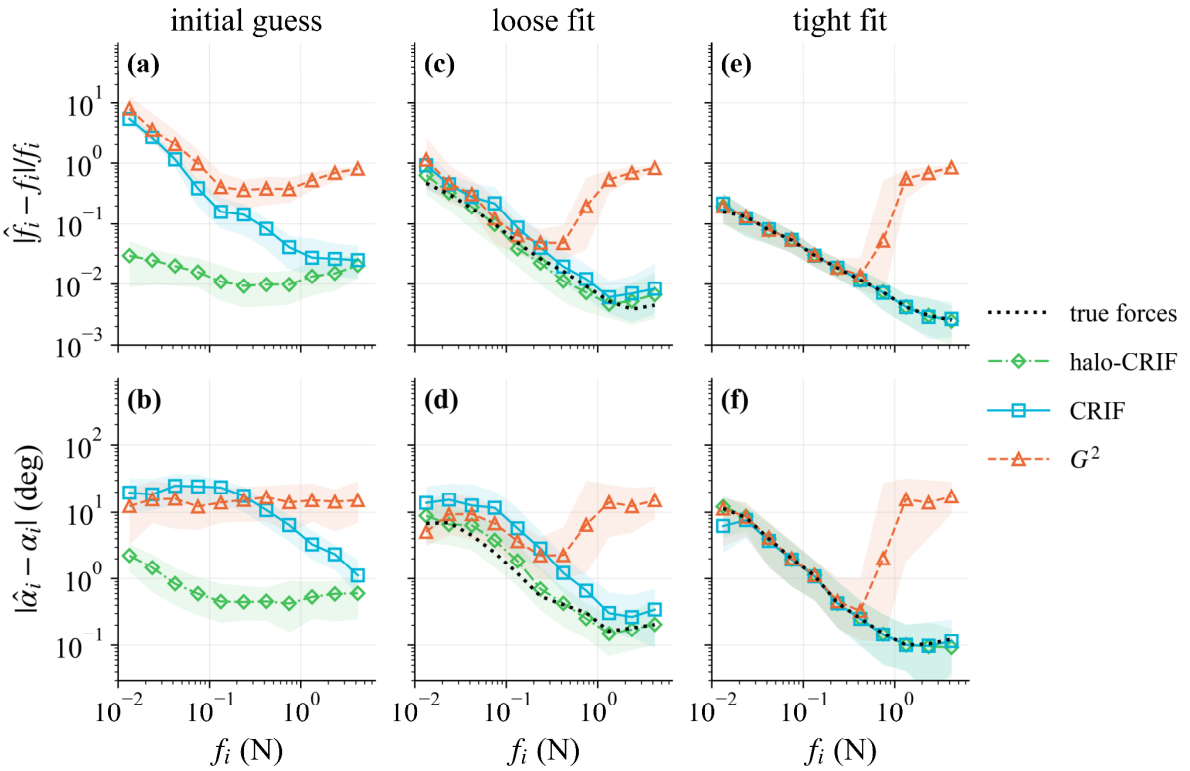


图8 有晕时，500 个合成圆盘的初始猜测误差和拟合力误差。上排显示力的相对误差 $|f\mathrm{o}_i - f_i|/f_i$ ，下排显示角度误差 $|\alpha\mathrm{r}_i - \alpha_i|$。(a, b) halo-CRIF（在具有残余应力的圆盘上训练）、CRIF（在不具有残余应力的圆盘上训练）和 G2 得出的初始猜测。(c, d) 使用这些初始猜测和包含残余应力的正向模型进行的宽松拟合；(e, f) 严格拟合。虚线表示以真实力为初始值进行的拟合，它设定了精度下限。曲线为分箱中位数，色带显示第25至第75百分位范围。

首先，我们比较 G^2, CRIF 和 halo-CRIF 在带晕合成图像上的初始猜测误差。图 8(a) 和图 8(b) 显示，halo-CRIF 初始猜测始终优于预期的 G^2 猜测。CRIF 猜测会受到晕的干扰，在$f_i < 0.2$ N 时失去准确性，误差水平与 G^2相近；大于 0.5 N 的力会在晕外产生明显不同的条纹图样，CRIF 对这些图样的识别能力逐渐增强，因此其误差降低并接近 halo-CRIF 的误差。

与之前一样，在所有情况下，从 G^2 猜测开始的拟合在较大的 f_i 范围内都会失败 [图8(c– f)]。除此之外，无论从 CRIF 还是 halo-CRIF 开始，所有拟合结果都接近真实力的下限。这是因为拟合中考虑了晕，因此任何位于正确邻域内的猜测都能实现良好的收敛。尽管如此，在宽松拟合中，halo-CRIF 仍有明显优势 [图8(c, d)], : 它已达到精度下限，而从 CRIF 开始则尚未达到。这一差异表明，在训练阶段使用带晕的数据训练卷积神经网络，可以加快拟合阶段的收敛；而拟合中采用 halo 正向模型，才是最终获得准确结果的关键。

为进行公平比较，上述所有拟合都使用了包含晕的正向模型。附录 D 展示了在拟合中省略 $\boldsymbol{\sigma_s}$ 的后果。

5.3 实验验证与力对的互易性

最后，我们展示一个实验应用：将由直径为 12 和 15 mm、厚度为 10 mm 的 ClearFlex50 圆盘组成的混合物置于定容通道中进行剪切。这些圆盘已浸泡在 70%甘油水溶液中一年多，并保持着恒定的晕，如图 7 所示。我们首先在图 9 中展示实验图像与合成图像的对比，合成图像呈现了从 G^2和 halo-CRIF 初始猜测开始的力反演结果。定性来看，从 halo-CRIF 开始的拟合对某些较复杂条纹图样的再现效果，远优于从 G^2 猜测开始的拟合，橙色圆圈标示了这些位置。

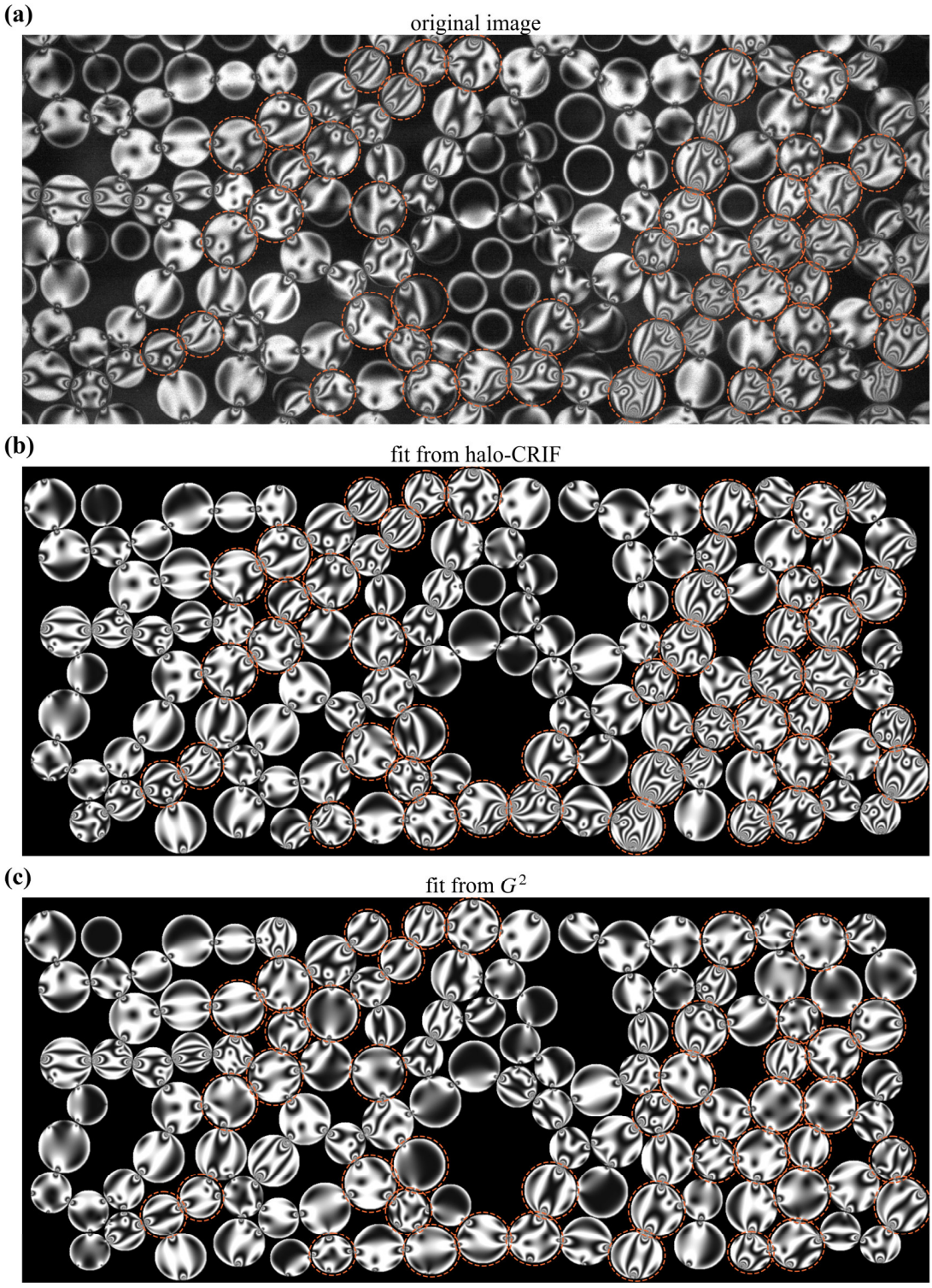


图 9 强载荷剪切堆积。(a) 拍摄的实验图像。(b) 从 halo-CRIF 初始猜测开始拟合，以及 (c) 从 G2猜测开始拟合后，根据拟合得到的接触力渲染出的图像。两种拟合均采用 halo 正向模型和紧密拟合设置。未进行拟合的圆盘（接触点少于两个，或被图像边缘截断）保持黑色。橙色虚线圆圈标出了 67 个圆盘中的 42 个：这些圆盘至少承受一个大于 1 N 的接触力，且从 G2猜测开始拟合得到的最终损失，比从 halo-CRIF 初始猜测开始拟合得到的最终损失高出 30% 以上。请注意，原始图像 (a) 未经过后处理，因此其对比度看起来低于两幅已缩放至完整位深度（0 至 255）的拟合图像 (b, c)。

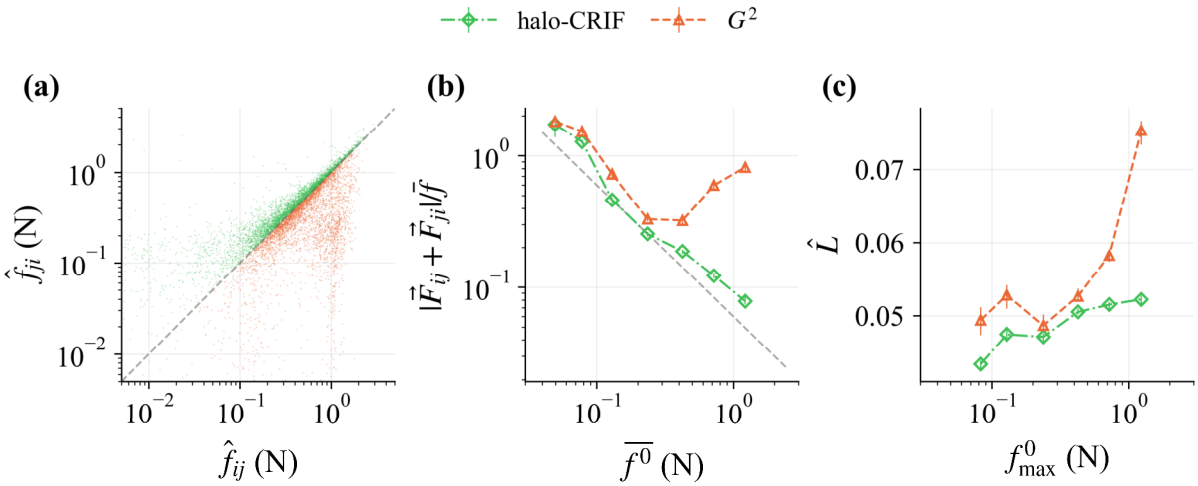


图10 从 halo-CRIF（绿色）和 G2（橙色）初始出发，对堆积体进行拟合所得结果的一致性。(a) 对全部 4,334 个接触对，分别从圆盘 5 得到的每个接触力的两种独立拟合估计值 f^0_{ij} 和从圆盘 Q 得到的估计值 f^0_{ji}；该图关于对角线对称，因此 halo-CRIF 对显示在对角线上方，G2 对显示在下方。(b) 相对力矢量失配 $|\#\overrightarrow{}_{ij}+\#\overrightarrow{}_{ji}|/\bar{f}$。水平轴上的 $\overline{f^0}$ 表示每对的 halo-CRIF 猜测均值。虚线表示 $\propto f^{-1}$。(c) 每个圆盘的最终损失。(b、c) 中的数据点为分箱中位数。

为了量化比较，我们对24帧进行了拟合，共涉及4,334个接触对。由于每个圆盘都是独立拟合的，每个接触力大小都会被拟合两次，分别为 f^0_{ij} 和 f^0_{ji}。我们通过检查所有接触点上的差值 $|f^0_{ij}-f^0_{ji}|$ 来检验互易性，即是否符合牛顿第三定律；这一差值也可用于误差估计。图10(a)绘出了这两个值的散点图，显示力较小时相对偏差逐渐增大，而对于大于1 N的力，从 G^2 猜测开始的拟合会失败。我们计算相对力矢量偏差 $|\#\overrightarrow{}_{ij}+\#\overrightarrow{}_{ji}|/\bar{f}$，其中 $\bar{f}=(f^0_{ij}+f^0_{ji})/2$为接触对平均力大小。由于不像前面的图那样有真实值，我们在图10(b)中绘出这一偏差与接触对平均 halo-CRIF 猜测 $\overline{f^0}=(f^0_{ij}+f^0_{ji})/2$ 的关系，因为结果表明它能提供相对准确的猜测。对于大于 $\overline{f^0}>0.3$ N的力，两种猜测之间的差别开始显现，这与图6和图8中的阈值相似。同样，halo-CRIF 初始猜测的相对矢量偏差斜率接近 −1，表明绝对误差大致保持恒定，约为 0.1 N，不受力大小影响。最后，我们记录了每个圆盘的最终拟合损失 $\hat{L}$，并将其与 halo-CRIF 对该圆盘给出的最大初始猜测 $f^0_{\max}$ 作图比较。当圆盘承受较大的力时，G^2 猜测会导致高得多的损失，这意味着这些拟合最终落入了错误的局部极小值。

6. 讨论

在所有情形下，CRIF猜测的主要优势是，当力大于$f_i \approx 1$ N时仍能保持准确，而且不受8的影响；从 G^2 开始的拟合在此处会失效。在我们的案例中，这一力对应于圆盘上形成完整条纹时的 $\&_{fr} \approx 1$, 。低于这一力时，即使初始猜测偏差约为30%（G2猜测通常如此），仍处于正确解的吸引域内。超过这一力后，高条纹级次图像会形成复杂的损失景观：G2猜测往往可能落入错误的吸引域，导致拟合收敛到错误结果。另一方面，CRIF是在每个接触点本身的条纹图样上训练的，其误差保持在约1%，因此即使力达到训练集中的最大值，拟合仍能收敛（$\&_{fr} \approx 6$）。由于颗粒堆积体中的应力通常分布不均，并集中在各向异性强力网络上[3, 5,31], ，相当一部分颗粒往往会在两个以上的接触点上承受远大于均值的力（例如见图 9）。因此，解析 $Z > 2$ 圆盘上的大力，可能显著提高颗粒实验中光弹性分析的稳健性。

在某些情况下，并不一定需要将每个接触点上的 f_i 和 α_i 都求至优化精度。例如，过去的许多实验只使用由 G^2推断的每个颗粒上的总力 f_{tot} [9, 17–19]。在这些情况下，我们建议可以选择省略拟合步骤，直接将 CRIF 的猜测作为良好的估计。这一点在图11中有所展示：我们使用 halo-CRIF 估算的力，计算剪切过程在 y方向上的边界力（即图 9 中的垂直方向），并与边界荷载传感器的直接测量结果进行比较。两者吻合得相当不错。对于我们的数据，halo-CRIF 初始猜测的运行时间约为宽松拟合的 30%，或严格拟合的 1%。因此，如果精度水平可以接受，跳过拟合可以大幅降低计算成本。

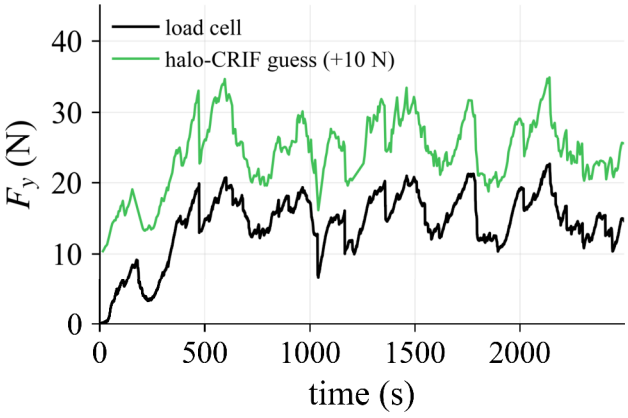


图11 剪切速率为 1.2×10^{-3} s^{-1} 时稳态剪切期间的边界力 $\#_y$ ，由荷载传感器测得（黑色），以及仅根据 halo-CRIF 初始猜测得到、未经拟合的边界力（绿色）。为便于观察，初始猜测上移了 10 N。

我们强调，与所有神经网络一样，CRIF 的能力在很大程度上取决于其训练数据。我们在第5节中通过引入一种常见的残余光环，展示了其潜在应用。原则上，同样的方法适用于任何能够生成合成训练图像的正向模型，无论是解析模型还是数值模型。例如，多边形和其他非圆形颗粒没有通用的闭式应力解，因此每次正向计算都需要进行耗时的有限元求解，这在迭代拟合中并不实际。使用有限元渲染图训练一次的网络，有望预测此类系统中的接触力。

对于希望训练自己模型的读者，我们指出，本文所使用的模型架构和训练超参数（附录 C）并未针对这一特定任务进行优化，而是任意选择以代表通用设置。更轻量的模型或许能够以更高的效率达到相同的精度。此外，在选择图像分辨率以及数据生成过程中的修改参数时应当谨慎，以使合成图像尽可能地模仿实验图像。理想情况下，还可以使用一组较小的、带有真实圆盘上已知载荷的校准图像对训练好的网络进行微调[21]，从而针对真实图像优化该网络。由于难以在圆盘上施加多个精确的点载荷，同时还要生成具有统计意义数量的构型，本研究未纳入这一过程。正向模型、数据集生成器、训练代码和训练好的网络均已公开提供[25]。

7. 结论

我们介绍了 CRIF，它利用卷积神经网络，根据光弹性圆盘每个接触点周围的一小片区域，推断该接触点处的力。该网络仅使用正向模型渲染的合成图像进行训练，却能够预测未见过的测试圆盘上的接触力：在进行任何拟合之前，其力大小的中位误差约为 1%，方向误差约为 0.5°；适用的力范围近三个数量级，且每个圆盘最多有六个接触点。作为 PeGS 拟合的初始猜测，它能使拟合得到的力在整个范围内达到由真实力设定的精度下限，包括载荷很大的圆盘；在这些圆盘中，G2猜测会将拟合引入错误的局部最小值。

由于网络从正向模型中学习，因此能够适应圆盘物理特性的变化。对于具有残余应力光环的圆盘，在拟合的正向模型中纳入该光环，才能准确恢复力；而使用带光环图像重新训练的网络能更快达到这一精度。对于浸没圆盘的剪切堆积体，以 halo-CRIF 为初始值进行的拟合符合每个接触点处两个圆盘之间的牛顿第三定律；而以 G2猜测为初始值的拟合在强接触情况下则无法做到这一点。

CRIF 不一定要取代基于物理的 PeGS拟合；它能为拟合提供更好的起点。通过渲染相应的训练集，该方法可扩展至其他材料、颗粒形状和缺陷，从而在迄今难以实现的条件下（例如力较大、接触点较多或颗粒浸没时）进行定量力反演。

代码可用性

本研究使用的代码已在 GitHub 上公开，地址为 https://github.com/jctsaigroup/CRIF_，用于_光弹性，并采用 MIT 许可证。代码包含光弹性正向模型、合成数据集生成器、训练与推理代码，以及两个训练好的网络（无晕和有晕版本）。本文使用的版本（v1.0.1）已存档于 Zenodo，地址为 https://doi.org/10.5281/zenodo.24358576 [25]。

附录 A：接触点的应力场

在以第 5 个接触点为中心、从力的方向起算的极坐标 (r_i, θ_i) 中（图1），点力 f_i 的 Flamant 解为纯径向[26]:

$$\sigma^{0}_{rr,i}(r_i, \theta_i) = -\frac{2f_i \cos(\theta_i)}{\pi r_i} \qquad Eq.A1$$

其他所有分量均为零。在式 2 中，:(;$_i$) 是与第 5 个接触点的方向角 ;$_i = \theta_i - \alpha_i - \phi_i$ 相关联的二维旋转矩阵，可将 $\boldsymbol{\sigma}^{0}_{i}$转换到圆盘的笛卡尔坐标系中。

附录 B：合成力集与渲染

首先在圆周上随机分布接触角 ϕ_i ，并要求角间隔至少为 $\theta_{min} = 53°$。这一界限比单分散堆积所要求的 60°更宽松，旨在适用于尺寸比为 1.25 的双分散系统。随后从 0.02 至 4 N 的对数均匀分布中抽取总力大小 f_{tot}。法向分量为 $f_i^n = \varepsilon_i f_{tot}$，其中 ln ε_i 服从均值为零、标准差为 0.5 的正态分布。切向分量为 $f_i^t = f_i^n$ tan α_i，其中 α_i从 e −40°、40°f 范围内的均匀分布中抽取。请注意，由此得到的合力不等于 f_{tot}；后者仅用于设定总体尺度。

通过固定接触点位置 $\{\phi_i\}$ 并调整 $\{f_i, \alpha_i\}$ 来施加平衡约束。我们可以将力向量表示为 $\mathbf{x}$，这是一个包含 28 个分量的向量。两个合力和合力矩同样可以写为 $\mathbf{Cx}$，其中 $\mathbf{C}$ 是一个仅取决于 $\{\phi_i\}$ 的 $3 \times 2Z$ 矩阵。我们求得满足 $\mathbf{C}(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) = 0$ 且使 $|\Delta\mathbf{x}|^2$ 最小的修正量 $\Delta\mathbf{x}$ 。引入拉格朗日乘子后，解为 $\Delta\mathbf{x} = \mathbf{C}^{\mathrm{T}}(\mathbf{C}\mathbf{C}^{T})^{-1}\mathbf{C}\mathbf{x}$，随后将其应用以施加平衡约束。最后，在进行平衡修正后，若出现以下情况，我们便舍弃相应的力集：(1) 任一法向分量低于 0.02f_{tot}；(2) 任一接触点处的 $f_i^t > f_i^n$ ；(3) 任一力超过 6.4 N。这些筛选条件将数据集约束在定义明确的范围内。最终得到的力介于 0.01–6.4 N，在 l n f 上几乎均匀分布，力角最高可达 45°（图 2(a, b)）。

渲染时采用最终分辨率四倍的分辨率，并在 4×4 个区块上进行平均，因此比一个像素更细的条纹会平均成灰色，就像在相机传感器上一样。随后，我们对图像依次施加随机增益和偏置、高斯模糊、加性高斯噪声，最后进行 8 位量化；其中各参数均针对每幅图像独立地从表 A1 所列范围内抽取。

实际上，实验图像的增益和偏移量是一组固定值，理想情况下可以测量并输入拟合过程中。高斯噪声和模糊仍然是相机不可避免的缺陷，并且在此过程中，噪声会被放大 $1/g$ 倍。我们不会根据每个圆盘自身的最大值对其进行归一化，因为载荷较弱的圆盘никогда无法达到全亮度。

表 A1. 图像修改参数。

	值
高斯模糊（标准差）	0.5–1.5 像素
增益 g	0.6–1.0
偏移量 b	0–0.05
高斯噪声（标准差）	0.005–0.03

附录 C：网络训练

预训练的 ResNet-18 分类器被替换为一个包含 256 个单元的全连接层（ReLU 激活，丢弃率为 0.2），后接两个输出。将灰度裁剪图像复制到三个输入通道，并使用 ImageNet 统计量进行归一化。唯一的数据增强是左右翻转，它会反转 0 的符号。两个目标为:

$$y_1 = \frac{\ln(\frac{f}{R}) - \mu_f}{s_f}, \qquad y_2 = \frac{\alpha}{\pi/4} \qquad Eq.A2$$

，其中 μ_f 和 s_f 分别是 $\ln(f/\mathrm{G})$ 的均值和标准差，用于归一化。我们将 f/G 作为目标，其单位为平面应力，因为它决定了式 2 中的条纹图样。因此，该模型经过训练后适用于 G 不同但 f_σ相同的圆盘。对数变换使跨越近三个数量级的力的相对误差具有相同权重。损失函数为 y_1 和 y_2的均方误差之和。训练使用 AdamW 优化器，分两个阶段进行。在预热阶段，冻结预训练层，仅训练新的头部；在微调阶段，训练所有层，并在验证损失不再改善时将学习率减半（表 A2）。我们保留验证损失最低的模型。

表 A2. CRIF 网络的训练参数

批量大小	64
全连接层大小	256
丢弃法	0.2
预热（仅头部）	10 个 epoch，学习率 10^{-3}
微调（所有层）	学习率 10^{-4}，权重衰减 10^{-4}
	连续 4 个 epoch 未达到 0.5% 的提升后减半
	低于 10^{-6} 时停止，或在连续 12 个这样的 epoch 后停止

图 A1 展示了猜测准确率如何随训练集大小而变化。当接触点超过 2×10^4 时，收益递减的现象显而易见。为实现理想收敛，建议至少使用 10^4 个训练接触。使用不同的随机种子在完整数据集上再次训练，得到相近的 1.1% 力误差中位数，这验证了不同随机初始化之间结果的一致性。

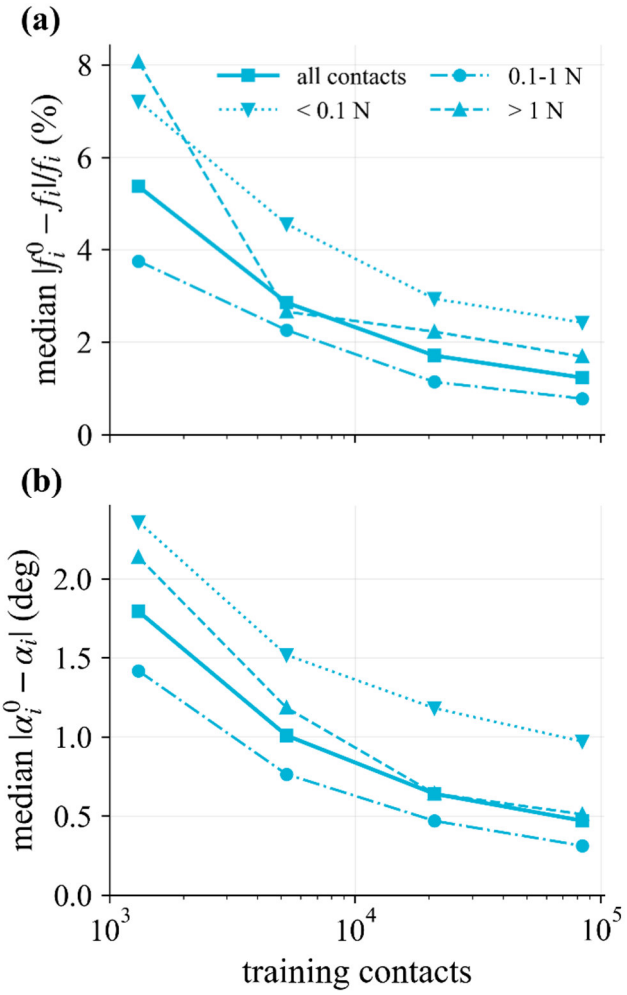


图 A1 CRIF 初始猜测在合成测试集上的相对力误差中位数 (a) 和角度误差中位数 (b) 与训练接触数量的关系，分别针对所
接触力低于 0.1 N、介于 0.1 和 1 N 之间、以及高于 1 N 的情况。每个网络均采用相同的训练方案，在训练集的随机子集

附录 D：不考虑残余应力的拟合

为展示在拟合中省略残余应力所产生的后果，我们使用原始前向模型（公式 2），从 G^2 和CRIF猜测开始，并采用紧密拟合设置（图 A2），对第5.2节中的500个带晕测试圆盘进行拟合。这里的CRIF是一个在未考虑残余应力的情况下训练的网络。从CRIF猜测开始的拟合仍然能够达到该不匹配模型的误差下限，但对于较小的力，该下限本身较差。当力小于0.3 N时，f_i 中的误差大于10%；在最小的力下，角度偏差最高可达80度，因为优化器错误地将力设为几乎完全沿切向，从而使条纹沿圆盘边缘延伸。这些结果凸显了在存在残余应力时，将适当的残余应力纳入前向模型的必要性。

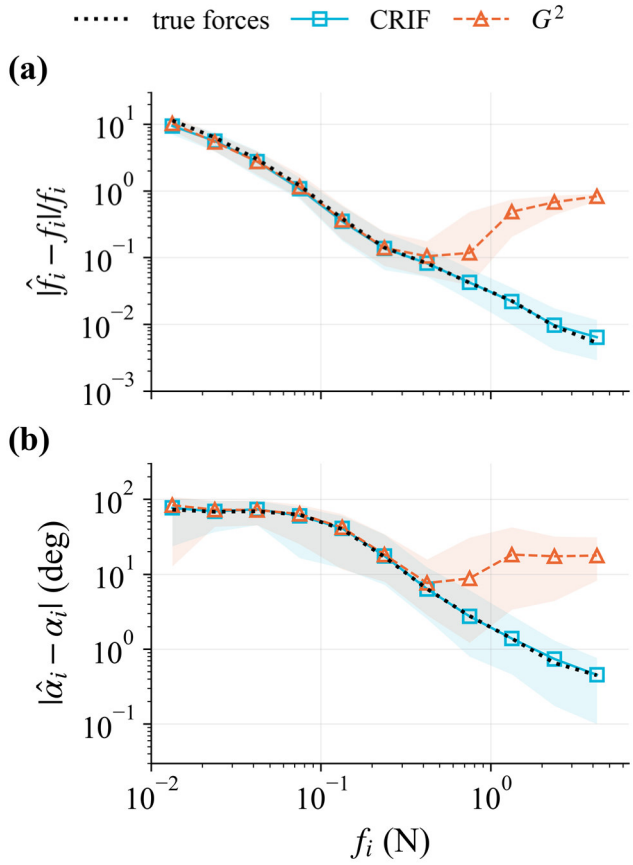


图 A2 正向模型忽略残余应力时，对 500 个带晕的合成圆盘进行严格拟合：(a) 相对力误差和 (b) 相对于真实力的角度误差。拟合分别从 CRIF猜测（在不考虑残余应力的情况下训练的网络）、G2猜测和真实力（虚线）开始；真实力设定了该正向模型的精度下限。线条表示分箱中位数，色带表示第25至第75百分位的分布范围。

参考文献

1. Daniels KE，Kollmer JE，Puckett JG（2017）颗粒材料中的光弹性力测量。Rev Sci Instrum 88:051808。https://doi.org/10.1063/1.4983049 2. Lee CL，McCabe L，McMillan B，等（2025）光弹性颗粒求解器 v2.0：用于分析颗粒材料中力测量结果的更新工具。EPJ Web Conf 340:10004。https://doi.org/10.1051/epjconf/202534010004 3. Radjai F，Jean M，Moreau J-J，Roux S（1996）致密二维颗粒系统中的力分布。Phys Rev Lett 77:274–277。https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.77.274 4. Mueth DM，Jaeger HM，Nagel SR（1998）颗粒介质中的力分布。Phys Rev E 57:3164–3169。https://doi.org/10.1103/PhysRevE.57.3164 5. Majmudar TS，Behringer RP（2005）颗粒材料中的接触力测量与应力诱导各向异性。Nature 435:1079–1082。https://doi.org/10.1038/nature03805 6. Behringer RP，Chakraborty B（2018）颗粒材料的堵塞物理学：综述。Rep Prog Phys 82:012601。https://doi.org/10.1088/1361-6633/aadc3c 7. Abed Zadeh A，Barés J，Brzinski TA，等（2019）揭示力链：颗粒物质中光弹性测量研究综述。Granul Matter 21:83。https://doi.org/10.1007/s10035-019-0942-2 8. Bi D，Zhang J，Chakraborty B，Behringer RP（2011）剪切堵塞。Nature 480:355–358。https://doi.org/10.1038/nature10667 9. Zhao Y，Barés J，Zheng H，等（2019）均匀应变颗粒材料中的剪切堵塞、脆弱态与稳态。Phys Rev Lett 123:158001。https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.123.158001 10. Lee CL，Bililign E，Azéma E，Daniels KE（2025）依赖载荷的微观尺度指标控制颗粒材料的宏观性质：应力-力-织构关系的实验测试。Phys Rev E 112:035401。https://doi.org/10.1103/rv25-lqdc 11. Lee CL，Bililign E，Azéma E，Daniels KE（2025）颗粒尺度各向异性控制剪切颗粒材料的宏观性质。Phys Rev Lett 135:108201。https://doi.org/10.1103/gp8t-v82n 12. Shang J，Wang Y，Pan D，等（2024）颗粒物质的屈服具有边际稳定性和临界性。Proc Natl Acad Sci 121:e2402843121。https://doi.org/10.1073/pnas.2402843121 13. Zhao Y，Zhao Y，Wang D，等（2022）超稳定剪切堵塞颗粒材料。Phys Rev X 12:031021。https://doi.org/10.1103/PhysRevX.12.031021 14. Thomas AL，Vriend NM（2019）致密颗粒自由表面流的光弹性研究。Phys Rev E 100:012902。https://doi.org/10.1103/PhysRevE.100.012902

15. Naseer A、Daniels KE、Murthy TG（2026）部分黏结颗粒材料中的压缩力和拉伸力 e
测量。物理评论快报 136:098201。https://doi.org/10.1103/9yny-wxfr
16. Wang Y、Shang J、Wang Y、Zhang J（2021）椭圆和圆盘中的接触力测量与局部各向异性。物理评论研究 3:043053。
https://doi.org/10.1103/PhysRevResearch.3.043053 17. Majmudar TS、Sperl M、Luding S、Behringer RP（2007）颗粒系统中的堵塞转变。物理评论快报 98:058001。https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.98.058001

18. Howell D、Behringer RP、Veje C（1999）二维颗粒库埃特实验中的应力涨落：连续转变。物理评论快报 82:5241–5244。https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.82.5241

19. Geng J, Howell D, Longhi E, 等 (2001)《沙地中的足迹：颗粒材料对局部扰动的响应》。物理评论快报 87:035506. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.87.035506

20. Zhao Y, Zheng H, Wang D, 等 (2019)《颗粒光弹性实验中基于强度梯度法的颗粒尺度力传感器》。新物理学杂志 21:023009. https://doi.org/10.1088/1367-2630/ab05e7

21. Lin C-C (2024)《人工神经网络在预测光弹圆盘颗粒尺度接触力中的应用》。先进粉体技术 35:104284. https://doi.org/10.1016/j.apt.2023.104284

22. Sergazinov R, Kramár M (2021)《光弹性材料中力重建的机器学习方法》。机器学习：科学与技术 2:045030. https://doi.org/10.1088/2632- 2153/ac29d5

23. He K、Zhang X、Ren S、Sun J（2016）用于图像识别的深度残差学习。载于：2016年IEEE计算机视觉与模式识别会议（CVPR）。第770–778页

24. Hayes B、Chaudhuri K、Hodgson R 等（2026）水合软颗粒的流变学与光弹响应。软物质 22：5695–5706。https://doi.org/10.1039/D6SM00562D

25. Lin J-J、Tsai J-C（2026）CRIF（接触区域力推断）：用于光弹力反演的神经网络初始猜测。https://doi.org/10.5281/zenodo.2435857 6

26. McMillan B、Dalziel SB、Vriend NM（2025）摩擦颗粒系统中光弹性技术的验证与校正。Meas Sci Technol 36：055212。https://doi.org/10.1088/1361-6501/add48b

27. Frocht MM (1941) 光弹性。J. Wiley 28. Dillavou S, Hanlan JM, Chieco AT 等 (2024) Bellybutton：易于使用且可定制的深度学习图像分割。Sci Rep 14:14281. https://doi.org/10.1038/s41598-024-63906-y

29. Schmidt U, Weigert M, Broaddus C, Myers G (2018) 基于星形凸多边形的细胞检测。载于：Frangi AF, Schnabel JA, Davatzikos C 等 (编) 医学图像计算与计算机辅助干预 – MICCAI 2018。施普林格国际出版，Cham，第 265–273 页

30. Post D (1979) 光弹性。《实验力学》19:176–192. https://doi.org/10.1007/BF02324263

31. Radjai F, Wolf DE, Jean M, Moreau J-J (1998) 颗粒堆积中应力传递的双峰特征。物理评论快报 80:61–64. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.80.61