无特征斜对称经典不变理论

CORRADO DE CONCINI CLAUDIO PROCESI

arXiv:2611.32315v1 [math.RT] 24 Nov 2026

摘要。我们研究线性群、辛群和正交群的经典不变量理论的外代数类比，特别关注整系数构造和正特征。本文所呈现的理论与我们在 [9] 中发展起来的经典理论大不相同。事实上，本文理论建立在良过滤以及外不变量代数中一种令人惊讶的除幂结构之上。我们还通过外代数柯西恒等式，简要介绍相应第一基本定理和第二基本定理的特征零情形；这些已知结果为整系数理论提供了动机。

关键词。 外不变量理论；正特征；除幂；整系数标准单项式；良滤过；Weyl 滤过；经典群。

目录

引言 2

第1部分。回顾 2

1. 经典不变量理论 2 1.1. 一般线性群 2 1.2. 正交群与辛群 3 1.3. Aronhold 方法 4 2. 外代数柯西恒等式与偏斜不变量理论 4 2.1. 基本二次不变量 5 3. 正交情形与辛情形 6

第二部分。正特征与良滤过 7

4. Schur 模与 Weyl 模 7 5. 直接良滤过论证 10 5.1. 支配序 10 5.2. 外代数 11 6. 良滤过与不变维数 12 7. 正特征下的不变量代数 12 7.1. 初步说明 12 8. $\mathbb{Z}$ 上的标准单项式与除幂对偶 14 8.1. 支配序与等变标准基滤过 14 8.2. 除幂上的递减滤过 15 9. 整数转置像与幺模性 16 9.1. 转置的所有坐标 17 9.2. 生成元与 Weyl滤过 20 10. 向量的不变量 20 10.1. 斜行列式的概念 20 10.2. 模 $\Delta_\lambda(W)$ 21 11. 向量与余向量的不变量 22 11.1. 不变量 22

第3部分：其他经典群 24

12. 经典群的良好滤过 24

13. 对称矩阵和交错矩阵的标准杨表 14. 经典收缩、整分裂与 25

Weyl 滤过 14.1. 逐系数收缩映射 27

27

14.2. 核、分裂与基变换 15. 特殊正交群 29
的情形 16. 一个一般问题 参考文献 30
31
31

引言

经典不变量理论的第一和第二基本定理确定了经典群的定义表示的多个副本的多项式不变量的生成元和关系。它们的整系数形式已得到充分理解。本文研究将对称代数替换为外代数时相应的问题，尤其着重于整结构和正特征。

我们从一般线性群开始。对于有限维向量空间 U， V， W，其中维数为 $V = n$，考虑

$$E(U,V,W) = \bigwedge\big(V \otimes U^* \oplus W \otimes V^*\big)$$

以及自然的 $GL(V)$-作用，它与 $GL(U) \times GL(W)$ 的作用可交换。

在矩阵坐标中，公式 (2) 的基本二次收缩为 $t_{ij} = \sum_{s=1}^{n} y_{is}x_{sj}$。

在特征零情形下，基本定理的熟知外代数类比可通过对经典方法作简短调整而得到；我们回顾这一论证以资比较，但不声称其中具有新意。

在正特征情形下，仅靠收缩未必能生成不变量。事实上，彼此交换的偶元素 $y_{is}x_{sj}$ 的平方为零，并且

$$t_{ij}^{r} = r!\, t_{ij}^{[r]}, \qquad t_{ij}^{[r]} = \sum_{1\le s_1<\cdots<s_r\le n} \prod_{\nu=1}^{r} y_{is_\nu}x_{s_\nu j}.$$

因此，适当的无特征表述需要使用除幂。基于 Wang [21] 的结果（后来由 Donkin 和 Mathieu 大幅推广；见 [14, 18, 17]）的良过滤论证首先表明，齐次 $GL(V)$-不变空间的维数与特征无关。

我们的主要构造在 $\mathbb{Z}$上进行。通过对从收缩矩阵上的除幂代数出发的映射取对偶，我们利用矩阵上的多项式函数的整标准双表基来描述其核与像。容许图形满足一个矩形界。这给出了像的整基以及每个次数上的一个分裂；特别地，像是饱和的。将这一结果与良过滤维数计算相结合，经基变换到任意域后，即可得到不变量代数、其除幂生成元及其关系。

我们也讨论特殊线性群的情形。对于向量的外代数，我们确定了非零的 SL(V)-不变分量，并证明这些分量由外次数为 $\dim V$ 的不变量生成。对于混合向量与余向量，SL(V)-不变代数由其 GL(V)-不变量与极大反对称行列式共同生成；我们还描述了由此得到的 Weyl 模过滤。

最后，我们简要介绍相应的正交与辛群结果。这些结果运用了 De Concini 和 Procesi 在先前工作中发展出的对称矩阵与交错矩阵的多项式杨表理论。我们还说明了如何通过添加极大反对称行列式，由 O(V)-不变量得到 SO(V)-不变量。对于这些情形，我们陈述结果并介绍方法，省略了与一般线性群情形中类似、可用相应论证得到的计算。对于正交群的情形，我们排除特征二。因此，本文的重点是整除幂构造及其与特征无关的推论。作者感谢 ChatGPT 在连贯性检查、文献检索和文字修订方面提供辅助。

第1 部分回顾

1. 经典不变量理论

1.1. 一般线性群。设 K 是一个域， $V \simeq K^n$ 是一个 n 维向量空间。我们先回顾标准的特征零情形，这为下文讨论的反对称版本提供了动机。

首先假设 char $K = 0$。对于非负整数 $a = \dim U$， $b = \dim W$，考虑

$$\mathcal{A} := V^a \oplus V^{*b} = V \otimes U^* \oplus W \otimes V^* = \hom(U,V) \oplus \hom(V,W)\,. \tag{1}$$

为 V 选取一组基后，我们将 V^a 中的 a 向量和 V^{*b} 中的 b 余向量分别表示为一个$n \times a$ 矩阵 X 的 x_i 列和一个 $b \times n$ 矩阵 Y 的 y_j 行:

$$X = \{x_i = (x_{1,i}, x_{2,i}, \dots, x_{n,i})\}; i = 1, \cdots, a; \quad Y = \{y_j = (y_{j,1}, y_{j,2}, \cdots, y_{j,n})\}; j = 1, \cdots, b\,. \tag{2}$$

群 组 $\mathbb{G} = \mathbf{GL}(V) \times \mathbf{GL}(U) \times \mathbf{GL}(W)$ 通过对两个矩阵 X，Y 的作用，自然地作用于 $\mathcal{A}$:

$$(A, B, C)(X) = AXB^{-1}, \quad (A, B, C)(Y) = CYA^{-1} \tag{3}$$

因此也作用于其坐标环。

映射

$$\rho : (X, Y) \mapsto T := Y \cdot X; \quad \rho : \hom(U, V) \times \hom(V, W) \to \hom(U, W) \tag{4}$$

该映射是 $\mathbb{G}$-等变的，其中 $\mathbf{GL}(V)$ 在 $\mathbf{hom}(U,\ W)$ 上的作用是平凡的。令 $T{:=}(t_{i,\ j})$ 表示由此得到的矩阵。

定理 1.1 （$\mathrm{GL}(n)$的第一基本定理）。 不变量 $t_{i,\ j}$ 生成不变式代数 $K[\mathcal{A}]^{\mathrm{GL}(V)}$。

令 $Z = (z_{i,\ j})$ 为一般 $b \times a$ 矩阵。第一基本定理给出一个满射

$$q : K[z_{i,j}] \longrightarrow K[\mathcal{A}]^{\mathrm{GL}(V)}, \qquad z_{i,j} \longmapsto t_{i,j} = \sum_{r=1}^{n} y_{i,r} x_{r,j}\,. \tag{5}$$

定理 1.2 （$\mathrm{GL}(n)$的第二基本定理）。 q 的核是由 $Z = (z_{i,\ j})$ 的（$n + 1$）$\times$ 阶子式的行列式生成的理想。

这个定理是经典结果，参见例如 [22] 特征为 0 的情形；现有作者在 [9] 中证明了它对所有特征均成立。

1.2. 正交群与辛群。 现在假设 V 带有一个非退化双线性型$\langle -,\ -\rangle$，在正交情形下为对称型，在辛情形下为反对称型。在后一种情形中， n为偶数。记 G 为保持给定双线性型不变的相应群。

令 $h =$维数为 U。在这些情形下，双线性型诱导出一个同构：在正交群或辛群 G 的作用下， V 与 V^* 之间存在同构。我们研究 $V^{\oplus h} \simeq \mathbf{hom}(U,\ V)$ 的不变量理论，而非 $V \otimes U^* \oplus W \otimes V^*$。

在这种情形下，我们有基本不变量

$$\rho : X \mapsto T := X^t J X = (\langle v_i, v_j \rangle); \quad \rho : \hom(U, V) \to \hom(U, U^*)\,.$$

在正交情形下，我们令 $J = 1_n$ 为单位矩阵，因此 $T =(t_{i,\ j})$ 是一个对称矩阵。在辛情形下，维数 $n = 2k$ 必须为偶数，且 $J = \begin{vmatrix} 0 & 1_k \\ -1_k & 0 \end{vmatrix}$ 是标准反对称矩阵，而 T 也为反对称矩阵。映射 ρ 也是 $\mathbf{GL}(U)$-等变的。

定理 1.3。 函数 $t_{i,\ j}$ 生成不变量环 $A_h = K[V^{\oplus h}]^G$，其中 $G = \mathrm{O}(V)$ 或 $\mathrm{Sp}(V)$分别成立。

定理 1.4 （$\mathrm{O}(n)$ 和 $\mathrm{Sp}(n)$的第二基本定理）。 令 $Z = (z_{i,\ j})$ 表示相应的通用对称矩阵或反对称矩阵。

（i）对于 $\mathrm{O}(n)$，关系理想由 Z的大小为 $n + 1$ 的子式的行列式生成。（ii）对于 $\mathrm{Sp}(n)$，关系理想由 Z的大小为 $n + 2$的主子式的 ***Pfaffian*** 生成。

这些结果属于经典群的经典不变量理论；特别参见 Weyl 的《经典群》 [22] （其中没有证明定理 1.4 的第（ii）部分）。

关于域上的第一和第二基本定理，以及其整系数形式的无关特征的处理，已在 [9] 中提出。特征 2 下的正交情形需要特别谨慎处理，而且事实上 [9] 并未涵盖这一情形（与其中的说法相反）。

1.3. **Aronhold 方法**。 在特征零下，经典不变量理论中广泛使用的一种方法是极化与还原，它将对不变量及其关系的研究转化为相应的多线性问题。

给定代数群 G 的一个线性表示 V，我们希望研究多项式代数 $S[V^*]$ 的不变量。其思路是通过极化，将齐次次数为 d 的 G–不变量转化为 d 个 V 的多线性不变量。描述了这类不变量之后，就可以通过还原过程得到齐次不变量。

若将 $S[V^*]$ 替换为群 G 在 V 上的某种作用下的 $\bigwedge V$，该方法同样适用。这里，次数为 d 的元素对应的极化映射可通过考虑以下映射得到

$$P : \bigwedge V \to \bigwedge V^{\oplus d}[\lambda_1, \cdots, \lambda_d];\ v \mapsto \sum_{i=1}^{d} \lambda_i v_i$$

其中 λ_i 是参数。

该还原映射为

$$R : \bigwedge V^{\oplus d} \to \bigwedge V, \quad (v_1, v_2, \cdots, v_d) \mapsto \sum_i v_i\,.$$

给定一个在 G 作用下不变的元素 $a \in \bigwedge^d V$，元素 $P(a)$ 是关于 λ_i 的多项式，其系数属于 $\bigwedge V^{\oplus d}$，且也都是 G-不变量。特别地，$\prod_{i=1}^{d} \lambda_i$ 的系数就是完全极化 $\bar{P}$，它是一个多线性不变量。于是有 $RP(a) = d!a$。

方法如下：先描述一个在极化和还原运算下封闭的不变量空间；如果该空间中的多重线性元素与所有多重线性不变量构成的空间重合，那么所提出的不变量就与完整的不变量空间重合。

外代数情形和对称情形具有相同的多重线性不变量空间 $(V^{\otimes d})^G$，唯一的问题是要解码从对称公式转换为外代数公式时所用的公式。

只需一个简单的技巧即可做到：将 d 向量格拉斯曼变量 v_i 替换为对称变量 $\epsilon_i v_i$，其中 ϵ_i 是辅助格拉斯曼变量。

我们以线性群为例，简要说明这一思路（详情参见定理 2.1）。

在这种情况下，首先注意到线性群包含由标量构成的群 $K^*\ \alpha$，它在 V 上通过乘法作用，在 V^* 上通过乘以 α^{-1} 作用，因此齐次不变量在 V和 V^*中的次数必须相同。随后必须分别对 V和 V^*进行极化。

具有 在 d 个 V和 d 个 V^* 中的多线性不变量，可以将其识别为 h $End_{GL(V)}V^{\otimes d}$（或其对偶），它由对称群 S_d 作用于 $V^{\otimes d}$所得的元素张成。

映射的核从对称群的代数到 $V^{\otimes d}$ 上的线性算子的映射，其核为 he 理想生成元 反对称化算子。

在对称情形中，与置换 σ 对应的不变量为 $t_{1,\ \sigma(1)}t_{2,\ \sigma(2)}\cdots t_{d,\ \sigma(d)}$，这可由公式（4）推出；而在格拉斯曼情形中，它会带上置换的符号 ϵ_σ。

由此得到第一和第二基本定理，其形式将在本文后文中讨论。对反对称化算子的两种不同解释，产生了第二基本定理的两种不同表述。

第 2 节中的表述更为精确，因为它还描述了群 $GL(U) \times GL(W)$ 在 $GL(V)$ 的不变量上的作用。

2. 外幂柯西恒等式与偏斜不变量理论

现在我们将多项式函数的对称代数替换为外代数。本节中，K 的特征为零。

对于分拆 $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots)$，记其转置为 λ'，令 $\ell(\lambda) = \lambda'_1$ 表示该分拆的高度。我们采用如下约定：s_λ 表示通常约定中以 λ 的转置为指标的舒尔函数（因此 $s_{(r)} = e_r$），而 $L_\lambda(E)$ 是特征为 s_λ 的不可约表示多项式 GL(E)-模。因此$_r$

$$L_{(r)}(E) = \bigwedge E, \qquad L_{(1^r)}(E) = S^r E.$$

按照这一约定，外代数柯西恒等式写作（例如，参见 [15,第 4]章）

$$\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{h}(1 + x_i y_j) = \sum_{\lambda:\ \ell(\lambda)\leq h,\ \lambda_1 = \ell(\lambda')\leq n} s_\lambda(x_1, \ldots, x_n) s_{\lambda'}(y_1, \ldots, y_h), \tag{6}$$

并给出 $GL(V) \times GL(U)$ 的不可约表示分解。

$$\bigwedge^{*}(V \otimes U^*) \simeq \bigoplus_{\lambda:\ \ell(\lambda')\le \dim V,\ \ell(\lambda)\le \dim U} L_\lambda(V) \otimes L_{\lambda'}(U^*). \tag{7}$$

这里 $\lambda_1 \le$ 维数$V = n$ 且 $\ell(\lambda) \le$ 维数$U = a$： λ 的图位于宽度为 n 、高度为a的矩形内。

回想一下， $L_\lambda(V) \otimes L_\mu(V^*) =$同态$(L_\mu(V)\ L_\lambda(V))$，因此 $(L_\lambda(V) \otimes L_\mu(V^*))^{\mathrm{GL}(V)}$ 在 $\mu \neq \lambda$ 时为 0；而$L_\lambda(V) \otimes L_\lambda(V^*) = End(L_\lambda(V))$，所以其不变量是由恒等元生成的一维空间。

现在我们采用公式 (1) 中的记号，并令：

$$\bigwedge \mathcal{A} = \bigwedge(V \otimes U^* \oplus W \otimes V^*) = \bigwedge(\hom(U,V) \oplus \hom(V,W)) =: E(U,V,W)\,. \tag{8}$$

将 (7) 应用于公式 (8) 中空间 $E(U,V,W)$ 的两个求和项，并取其关于 GL(V) 的不变量，得到：

$$\bigwedge(V \otimes U^* \oplus W \otimes V^*) = \bigwedge(V \otimes U^*) \otimes \bigwedge(W \otimes V^*) \simeq \bigoplus L_{\lambda'}(U^*) \otimes L_\lambda(V) \otimes L_\mu(V^*) \otimes L_{\mu'}(W)$$

$$\Longrightarrow \qquad E(U,V,W)^{\mathrm{GL}(V)} \simeq \bigoplus_{\substack{\lambda_1 \le \min(a,b) \\ \ell(\lambda)\le n}} L_\lambda(U^*) \otimes L_\lambda(W). \tag{9}$$

这里 $\lambda_1 \le$min$(a,\ b)$ 且 $\ell(\lambda) \le n$： λ的图位于宽度为 min$(a,\ b)$、高度为 n.

2.1. 基本二次不变量。 采用公式 (1) 的记号，我们看到，公式（4）中的双线性映射也可以解释为外代数中的一个映射，从而在外代数中定义了偶次数的不变元素$t_{i,\ j} = \sum_{r=1}^{n} y_{i,\ r} x_{r,\ j}$。

因此，$t_{i,\ j}$ 是中心的，特别是$t_{i,\ j}$ 彼此可交换。它们张成了 (9) 中二次项里出现的 $U^* \otimes W$ 的一个副本。

因此，存在一个自然的 GL(U) $\times$GL(W)-等变同态，如公式 (5):

$$q : K[z_{i,j}] \longrightarrow E(U,V,W)^{\mathrm{GL}(V)}, \qquad z_{i,j} \longmapsto t_{i,j} = \sum_{r=1}^{n} y_{i,r} x_{r,j}\,. \tag{10}$$

定理 2.1。 采用上述记号：

(i) 同态 q 是满射。等价地，元素 $t_{i,\ j}$ 生成 $E(U,V,W)^{\mathrm{GL}(V)}$.

(ii) q的核是由不可约 $\mathrm{GL}(U) \times \mathrm{GL}(W)$-子模生成的理想

$$S^{n+1}(U^*) \otimes S^{n+1}(W) = L_{(1^{n+1})}(U^*) \otimes L_{(1^{n+1})}(W).$$

证明。 i) 证明源于 Aronhold 方法。我们采用一个同样适用于正交补群和辛群的一般技巧。

我们希望计算 $\mathcal{A} = \bigwedge(V^{\oplus d} \bigoplus V^{*\oplus d})$ 中的多线性不变量。

添加格拉斯曼变量 ϵ_1、$\cdots$ ϵ_d； η_1、$\cdots$ η_d，然后在 A $\otimes \bigwedge[\epsilon_1, \cdots\ \epsilon_d;\ \eta_1$、$\cdots$ $\eta_d]$ 中考虑向量 $\bar{v}_i :=\epsilon_i v_i$、 $\bar{\phi}_i :=\eta_i \phi_i$，这些向量都是偶的，因此我们有一个同态 $\Sigma = S[V^{\oplus d} \bigoplus V^{*\oplus d}] \to$ A$\otimes \bigwedge[\epsilon_1, \cdots\ \epsilon_d;\ \eta_1$、$\cdots$ $\eta_d]$，将 $v_i \to \bar{v}_i$ 映射为 $\phi_i \to \bar{\phi}_i$。在此映射下，多线性空间 $V^{\otimes d} \otimes V^{*\otimes d} \subset \Sigma$ 同构映射到多线性空间 $V^{\otimes d} \otimes V^{*\otimes d} \prod_{i=1}^{d} \epsilon_i \eta_i \subset$ A $\otimes \bigwedge[\epsilon_1, \cdots\ \epsilon_d;$ η_1、$\cdots$ $\eta_d]$。

在此映射下，$t_{i,j} \in \Sigma$ 映射为$-t_{i,j} \eta_i \epsilon_j \in \mathcal{A} \otimes \bigwedge[\epsilon_1, \cdots\ \epsilon_d;\ \eta_1, \cdots\ \eta_d]$。

此映射是 GL(V)-等变的，因此它在不变量上是一个同构，并将元素$t_{i,j} \in \Sigma$ 的多线性乘积$u_\sigma = \prod_i t_{i,\sigma(i)}$, $\sigma \in S_d$ 映射为$\mathcal{A}$ 中的乘积，但还要乘以$\prod_{i=1}^{d}(-\eta_i \epsilon_{\sigma(i)}) = (-1)^{d(d+1)/2} \epsilon_\sigma \eta_1 \cdots \eta_d \epsilon_1 \cdots \epsilon_d$，其中 ϵ_σ 是置换的符号。

这表明$\mathcal{A}$ 中的多线性不变量由$u_\sigma = \prod_i t_{i,\sigma(i)},\ t_{i,j} \in \mathcal{A}$ 张成，然后 by Aronhold 方法由此可知，$t_{i,j} \in \mathcal{A}$ 生成所有不变量。

ii) 对于这些关系，也可以采用 Aronhold 方法，注意到不同次数下的多线性关系具有如下形式：$\sum_\sigma c_\sigma u_\sigma$ 其中在对称情形下，元素 $\sum_\sigma c_\sigma \sigma$ 属于群代数中由作用于 $n+1$ 个指标的反对称化算子生成的理想，$n =$维V；而在外代数情形下， $\sum_\sigma c_\sigma \sigma$ 属于群代数中由作用于 $n+1$ 个指标的对称化算子生成的理想。

另一方面，可以通过注意到以下事实来论证：

$$q(z_{1,1}^{n+1}) = t_{1,1}^{n+1} = \left(\sum_{i=1}^{n} y_{1,i} x_{i,1} \right)^{n+1} = 0.$$

元素 $z_{1\,1}^{n+1}$，是一个最高权向量，属于

$$S^{n+1}(U^*)\otimes S^{n+1}(W)=L_{(1^{n+1})}(U^*)\otimes L_{(1^{n+1})}(W).$$

根据 [10], 的定理 4.1（基于 Pieri 规则），由此模在 $K[z_{i,j}]$ 中生成的理想恰好包含由至少有 $n+1$ 行的分拆标记的不可约直和项，也就是 (9) 中排除的项；另见 [15, 第 5]章。

将 $K[U^*\otimes W]$ 的普通 Cauchy 分解与 (9) 进行比较，即可证明这一结论。 □

3. 正交情形与辛情形

同样的方法适用于其他经典群。我们将使用以下标准分支事实，
按照上文采用的 L_λ 约定；参见 Weyl [22, 第 VI–VII]章。

若 V 配备非退化对称双线性形式，则

$$L_\lambda(V)^{\mathrm{O}(V)}\neq 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \text{all columns of } \lambda \text{ have even length}, \tag{11}$$

在这种情况下，不变空间是一维的。若 V 配备非退化交替形式，则

$$L_\lambda(V)^{\mathrm{Sp}(V)}\neq 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \text{all rows of } \lambda \text{ have even length}, \tag{12}$$

此时不变空间同样是一维的。

定理 3.1. 设 K 的特征为零，且 V 带有非退化对称双线性形式 .
Then

$$\left(\bigwedge^*(V\otimes W)\right)^{\mathrm{O}(V)}\simeq \bigoplus_{\substack{\mu \text{ row even}\\ \ell(\mu)\le\dim V,\ \mu_1\le\dim W}} L_\mu(W)\simeq K[\bigwedge^2 W]/I,$$

其中 I 由简单的$\mathrm{GL}(W)$-模生成

$$L_{(2^{\dim V+1})}(W).$$

证明。 外代数柯西分解 (7) 和 (11) 给出

$$\left(\bigwedge^*(V\otimes W)\right)^{\mathrm{O}(V)}\simeq \bigoplus_{\substack{\mu \text{ row even}\\ \ell(\mu)\le\dim V,\ \mu_1\le\dim W}} L_\mu(W).$$

取一组基 V，其格拉姆矩阵为 J，再取 W 的一组基，并按照第 2 页的记法，将 $X=(x_{i,j})$ 记为外代数生成元的矩阵。于是

$$T={}^tXJX=(t_{r,s})$$

is 是反对称的，其元素 $t_{r,s}$, $r<s$ 张成 $\bigwedge^2 W$。因此它们定义了一个同态

$$q: K[\bigwedge^2 W]\longrightarrow\left(\bigwedge^*(V\otimes W)\right)^{\mathrm{O}(V)}.$$

采用同样的技巧，引入格拉斯曼变量 ϵ_i，并将 v_i 替换为 $\epsilon_i v_i$，即可完全仿照定理 2.1 证明满射性。

最后，$t_1^{\dim V+1}{}_{,2}=0$。它的原像是 $L_{(2^{\dim V+1})}(W)$ 的一个最高权向量，而 Pieri 规则（参见 [2] 定理 3.1）表明，它生成的理想恰好包含所有被排除的项。

这就证明了该结论。另请参见 [9] 中经典的无特征处理。 □

定理 3.2. 设 K 具有特征零，且 V 带有非退化交替形式。则

$$\left(\bigwedge^*(V\otimes W)\right)^{\mathrm{Sp}(V)}\simeq K[S^2W]/I,$$

其中 I 由以下元素生成

$$L_{(1^{\dim V+2})}(W)=S^{\dim V+2}(W).$$

证明。 证明过程与正交情形类似，只需使用（12）。若 J 是辛形式的矩阵，则

$$T = {}^tXJX$$

由于 X 的元素反对易，它是对称的；其元素张成 S^2W。应用 Aronhold 方法时请注意，二次不变量 $x_i^tJx_i$ 并非双线性的，但其极化非零。

第一个被排除的表示是 $L_{(1^{\dim V+2})}(W)$，而 Pieri 规则（参见 [1]）给出了关系理想。另见 [22, 9]。□

第2. 正特征与良滤过

当我们研究仿射簇 V上的不变量理论时，设该仿射簇定义在域 K 上，其坐标环为 $K[V]$，并且代数群 G 定义在 K 上；我们通常并不希望考虑群 $G(K)$在其有理点上的不变量，而是考虑 $G(K)$在 K 代数闭包上的不变量。若 $G(K)$在 $G(K)$中Zariski 稠密，则这些不变量相同。

对于经典群，只要 K 是一个无限域，这一点就成立；但在我们的例子中，群和簇（它们只是线性空间）定义在 $\mathbb{Z}$ 上，因而也定义在所有域上，所以也定义在素域 $\mathbb{Z}/$（p）上。

（群概形的）作用由映射 δ： $\mathbb{Z}[V] \to \mathbb{Z}[V] \otimes \mathbb{Z}[G]$ 定义；对于每个域 K，它诱导出一个作用 δ_K：$K[V] \to K[V] \otimes K[G]$，并且元素 $a \in \mathbb{Z}[V]$ 是不变量，当且仅当δ（a）$= a \otimes 1$。

在我们的情形中，这等价于：对于每个无限域 $H \supset K$，元素 a 在有理点 G（H）下是不变量。

在正交情形中，这些论证要求特征不为二。

事实上，域 $\mathbb{Z}$ 上的群 O(n) 的坐标环，是多项式环 $\mathbb{Z}[x_{i,j}]$，i，j =1、$\cdots$ n 模去二次方程 $X \cdot X^t = 1$所得的商。

转到 $(\sum_j x_{i,j} +$ 特征 2 时，这个环甚至不是约化的，因为对所有 $i = 1, \cdots n$ tha t $1)^2 = 0$。

除这一病态情形外，所有其他群在任意特征下都是约化群。

参见 [13], [7], 和 [8], §5 关于经典群的内容，其中讨论了 Sp_{2n}、SL_n 和 $SO(q)$（对于$SO(q)$，2 可逆）。

4. 施尔模与Weyl模

为方便读者，我们回顾一些关于$GL(V)$的Weyl模和施尔模的标准事实，并着重介绍其组合方面。关于此主题的标准参考文献是 [3]。

4.0.1. 除幂代数。给定一个交换的 $\mathbb{Q}$-代数 A 以及一个元素 $a \in A$，$r \in \mathbb{N}$ 可以定义除幂 $a^{[r]} := \frac{a^r}{r!}$。

有二项式展开式$(a+b)^{[r]} := \sum_{i=0}^{r} a^{[r-i]}b^{[i]}$。

以 n 个变量构成的除幂代数是一个霍普夫代数，并且可以通过多种方式定义。我们在 $\mathbb{Z}$ 上定义它，并记作 $\Gamma\mathbb{Z}^n = \oplus_{d=0}^{\infty}\Gamma^d\mathbb{Z}^n$。群概形 $GL(n, \mathbb{Z})$自然地以自同构的方式作用于它。

定义4.1。(1) $\Gamma\mathbb{Z}^n$ 是由 $\bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}e_i$中所有元素的除幂生成的多项式代数 $\mathbb{Q}[e_1, \cdots e_n]$ 的 $\mathbb{Z}$ 子代数。(2) $\Gamma\mathbb{Z}^n$ 自然地与 $\mathbb{Z}[e^1, \cdots e^n]$ 的分次对偶相识，其中 e^i 是 e_i的对偶基。(3) 空间 $\Gamma^d(\mathbb{Z}^n)$同构于$(\mathbb{Z}^n)^{\otimes d}$中的对称张量。在此同构下，乘法由张量积的对称化给出。

事实上，这些不同的定义源于这样一个事实： $\Gamma\mathbb{Z}^n$ 是一个霍普夫代数，其结构由 $\mathbb{Q}[e_1, \cdots e_n]$ 的霍普夫结构诱导而来（对于定义 1），而定义 2 则通过对偶性得到。

余乘法 Δ 由下式给出

$$\Delta(a^{[r]}) := \sum_{i=0}^{r} a^{[r-i]} \otimes a^{[i]}.$$

对于 3)，该同构由经典的完全极化给出；用霍普夫代数的语言来说，就是取迭代余乘法 Δ^d 的多重次数为 (1，. . . ，1) 的多重线性部分，记为 Δ_m^d。

乘积变为对称张量积，其中如果 $A\in\Gamma^a\mathbb{Z}^n,\quad B\in\Gamma^b\mathbb{Z}^n$ 对称化乘积

$$A\cdot B\in\Gamma^{a+b}\mathbb{Z}^n;\quad A\cdot B=\sum_{\sigma\in S_{a+b}/S_a\times S_b}\sigma(A\otimes B)$$

对陪集代表元求和。

4.0.2. 一种组合 方法。为了建立与特征无关的形式体系，重要的是 t
在...上工作过 $\mathbb{Z}$。

因此，对于任意分拆 $\lambda=(\lambda_1\geq\lambda_2\geq\cdots)$，我们将定义不可约表示 $L_\lambda(V)$ 的两种整形式 $\nabla_\lambda(\mathbb{Z}^n)$ $\Delta_\lambda(\mathbb{Z}^n)$；它们是配备了群概形$GL(n,\mathbb{Z})$ 作用的自由阿贝尔群。

于是，对于每个域 K，都有 $\nabla_\lambda(K^n)=\nabla_\lambda(\mathbb{Z}^n)\otimes_{\mathbb{Z}}K$；$\Delta_\lambda(K^n)=\Delta_\lambda(\mathbb{Z}^n)\otimes_{\mathbb{Z}}K$。

若 $\lambda=(d)$ 是只有一行的分拆，则有 $\nabla_d(\mathbb{Z}^n)=\Delta_d(\mathbb{Z}^n)=\bigwedge^d(\mathbb{Z}^n)$，而 $\nabla_{1^d}(\mathbb{Z}^n)=S^d(\mathbb{Z}^n)$ 是对称幂。最后，$\Delta_{1^d}(\mathbb{Z}^n)=\Gamma^d(\mathbb{Z}^n)$ 是 $(\mathbb{Z}^n)^{\otimes d}$ 中的对称张量。

一般情况下 λ，必须使用经典杨对称化子的一个整系数形式。首先取一个杨表 $\mathtt{T}$，也就是一个具有某种形状 $\lambda\vdash d$ 的杨图；它将集合 $\{1,2,\cdots\ d\}$ 分解为两个分拆，即杨表的行 和列 。然后定义对称群 S_d 的两个子群 $C_{\mathtt{T}},\ R_{\mathtt{T}}$，它们分别保持列和行不变，并定义群代数中的元素：

$$a_{\mathtt{T}}=\sum_{\sigma\in R_{\mathtt{T}}}\epsilon_\sigma\sigma,\ \text{antisymmetrizer};\ s_{\mathtt{T}}=\sum_{\sigma\in C_{\mathtt{T}}}\sigma,\ \text{symmetrizer}. \tag{13}$$

在经典理论中，人们从 $\mathtt{T}$ 一个杨对称化子 $c_{\mathtt{T}}$ 出发，进而得到 $c_{\mathtt{T}}V^{\otimes d}=L_\lambda(V)$，它是相应的 $GL(V)$不可约表示，以一种依赖于 $\mathtt{T}$的方式嵌入 $V^{\otimes d}$ 中。

事实上，有两个不同的本原幂等元都可以称为 $c_{\mathtt{T}}$。一个相差一个标量因子即为 $a_{\mathtt{T}}s_{\mathtt{T}}$，另一个则为 $s_{\mathtt{T}}a_{\mathtt{T}}$。

利用这两个分拆，可以定义（稍微滥用一下记号）两个映射

$$\pi_{\mathtt{T}}:\bigotimes_j\bigwedge^{\lambda_j}\mathbb{Z}^n\xrightarrow{a_{\mathtt{T}}}(\mathbb{Z}^n)^{\otimes d}\xrightarrow{s_{\mathtt{T}}}\bigotimes_j S^{\lambda'_j}\mathbb{Z}^n;\quad \delta_{\mathtt{T}}:\bigotimes_j\Gamma^{\lambda'_j}\mathbb{Z}^n\xrightarrow{s_{\mathtt{T}}}(\mathbb{Z}^n)^{\otimes d}\xrightarrow{a_{\mathtt{T}}}\bigotimes_j\bigwedge^{\lambda_j}\mathbb{Z}^n \tag{14}$$

(14)中的箭头是典范嵌入和商映射。在第一个 $\pi_{\mathtt{T}}$ 中，映射 $a_{\mathtt{T}}$ 将$\bigotimes_j\bigwedge^{\lambda_j}\mathbb{Z}^n$ 与$(\mathbb{Z}^n)^{\otimes d}$ 中每一行指标均反对称的张量对应起来，而 $s_{\mathtt{T}}$ 则投影到每一列指标上的对称商。

反过来，对于 $\delta_{\mathtt{T}}$，映射 $s_{\mathtt{T}}$ 将 $\bigotimes_j\Gamma^{\lambda'_j}\mathbb{Z}^n$ 与$(\mathbb{Z}^n)^{\otimes d}$ 中每一列指标均对称的张量对应起来，而 $a_{\mathtt{T}}$ 则投影到每一行指标上的外商。

与可识别为张量幂的子模或商模的外幂不同，$\Gamma^a\mathbb{Z}^n$ 和 $S^a\mathbb{Z}^n$ 在整数环上并不相同：前者是子模，后者是商模。

定义 4.2. 我们将 $\nabla_\lambda(\mathbb{Z}^n)$定义为 π_T 的像，并将 $\Delta_\lambda(\mathbb{Z}^n)$定义为 δ_T的像 .

请注意，这些模仅取决于形状 λ，而不取决于杨表 T的选取。

这是通过标准杨表对模 $\nabla_\lambda(\mathbb{Z}^n)$ $\Delta_\lambda(\mathbb{Z}^n)$进行组合描述的基础，下面我们将简要介绍这种描述。

注 4.3. 将 (14) 中的两个映射都对偶化，可得到模同构 $\Delta_\lambda(\mathbb{Z}^n)\simeq\nabla_\lambda((\mathbb{Z}^n)^*)^*$.

i) 模 $\nabla_\lambda(\mathbb{Z}^n)$ $\bigotimes_j\bigwedge^{\lambda_j}\mathbb{Z}^n$ 的一组基由以下元素构成

$$\bigotimes_j e_{i_1}\wedge e_{i_2}\wedge\cdots\wedge e_{i_{\lambda'_j}},\ 1\leq i_1<i_2<\cdots<i_{\lambda'_j}\leq n$$

其中一个显示为形状为 λ 的杨表 T，如下例所示。

$$T=\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 2&3&4&5&\\\hline 1&2&4&7;&\\\hline 4&6&\multicolumn{3}{c}{}\\\cline{1-2}\end{array}\qquad e_2\wedge e_3\wedge e_4\wedge e_5\otimes e_1\wedge e_2\wedge e_4\wedge e_7\otimes e_4\wedge e_6$$

在这些杨图中，有些被称为半标准杨图，有时也简称为标准杨图。这类杨图的行严格递增，而列仅弱递增。例如，前一个杨图 T 不是半标准杨图，而下一个是：

$$\bar{T} = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 2&3&4&5\\\hline 2&3&4&7\\\hline 4&6\\\cline{1-2}\end{array}; \qquad e_2\wedge e_3\wedge e_4\wedge e_5\otimes e_2\wedge e_3\wedge e_4\wedge e_7\otimes e_4\wedge e_6$$

ii) 模 $\Delta_\lambda(\mathbb{Z}^n)$ $\Gamma^a\mathbb{Z}^n$ 的一组基可通过如下方式描述：

$$\Delta_m^d(\sum_{j=1}^n \alpha_j e_j)^{[a]} = (\sum_{j=1}^n \alpha_j e_j)^{\otimes a} = \sum_{h_1,\cdots,h_n|\sum h_i=a} \prod_j \alpha_j^{h_j} [\underbrace{1,\cdots,1}_{h_1},\underbrace{2,\cdots,2}_{h_2},\cdots,\underbrace{n,\cdots,n}_{h_n}] \tag{15}$$

其中带下划线的符号表示相应的对称张量，它们构成对称张量的一组整基。

用霍普夫代数的语言来说，带下划线的符号是 $\Delta_m^d(e_1^{[h_1]}e_2^{[h_2]}\cdots e_n^{[h_n]})$，或是对称化乘积

$$[\underbrace{1,\cdots,1}_{h_1},\underbrace{2,\cdots,2}_{h_2},\cdots,\underbrace{n,\cdots,n}_{h_n}] = [\underbrace{1,\cdots,1}_{h_1}]\cdot[\underbrace{2,\cdots,2}_{h_2}]\cdot\cdots\cdot[\underbrace{n,\cdots,n}_{h_n}].$$

同样，我们可以将 $\bigotimes_j \Gamma^{\lambda'_j}\mathbb{Z}^n$ 的诱导基中的一个元素表示为形状为 λ' 的杨表，其各行由符号 $[i_1,i_2,\cdots\ i_{\lambda'_j}]$；$1\le i_1\le i_2\le\cdots\le i_{\lambda'_j}\le n$ 组成。在这种情况下，各行均为弱递增的。标准杨表理论的基本事实是

定理 4.4。*1)* $\nabla_\lambda(\mathbb{Z}^n)$ 中的半标准杨表的像构成 $\nabla_\lambda(\mathbb{Z}^n)$ 的一组整基。*2)* $\Delta_\lambda(\mathbb{Z}^n)$ 中满足其转置为半标准的杨表 T 的像，构成 $\Delta_\lambda(\mathbb{Z}^n)$ 的一组整基。

由以下关于映射 π_T 和 δ_T的命题，通过归纳法可得张成性。该命题描述了标准化关系，这些关系给出了一种明确的算法，可将非半标准杨表的像表示为半标准杨表的线性组合。按照杨表的行字 的字典序排列杨表，例如， T的行字为 2，3，4，5，1，2，4，7，4，6。

展开 是唯一的，因为在 $\mathbb{Q}$ 上，给定形状的标准杨表数量等于其 e 维数 ∇_λ 上的维数（分别为 Δ_λ）。在 $\mathbb{Q}$上的线性无关性蕴含整线性无关性。

命题 4.5。*1)* 设 $I=(i_1<\cdots<i_a)$， $J=(j_1<\cdots<j_b)$，其中 $a\ge b$。假设杨表$[I][J]=[i_1\dots i_a][j_1\cdots j_b]$ 不是标准的。

那么，在$\nabla_{a,\ b}(\mathbb{Z}^n)$ 中，

$$[I][J] = \sum_{[I',J']\neq[I,J]} c_{I',J'}[I'][J'] \qquad c_{I',J'}\in\mathbb{Z}, \tag{16}$$

其中，和式中出现的每个 I' 都满足 $I'<_{\text{lex}} I$。

2) 设 $I=(i_1\le\cdots\le i_a)$、$J=(j_1\le\cdots\le j_b)$，其中 $a\ge b$。假设杨表$[I][J]=[i_1\dots i_a][j_1\cdots j_b]$ 的转置不是标准的。

那么，在 $\Delta_{2^b1^{a-b}}(\mathbb{Z}^n)$ 中，

$$[I][J] = \sum_{[I',J']\neq[I,J]} c_{I',J'}[I'][J'] \qquad c_{I',J'}\in\mathbb{Z}, \tag{17}$$

其中，和式中出现的每个 I' 都满足 $I'<_{\text{lex}} I$。

证明。我们 给出第二个断言的证明，因为第一个断言的证明类似且更简单。

令h为最小的满足 $j_h\le i_h$ 的指标。设

$$t=\max\{s\in\{h,\dots,b\}: j_s=j_h\}.$$

令与多重集相对应的除幂单项式为 A， B， C， D

$$(i_1,\dots,i_{h-1}),\quad (i_h,\dots,i_a),\quad (j_1,\dots,j_t),\quad (j_{t+1},\dots,j_b),$$

分别，并令 E 为与对应于 B和 C 的多重集的并集相关联的单项式。取其分量

$$\mathcal{S}=\sum_\ell E_\ell^{(1)}\otimes E_\ell^{(2)} \tag{18}$$

为双次数 $(a-h+1,\ t)$ 的余乘 $\Delta(E)$。注意，（18）中恰有一项，记为 $E_0^{(1)}\otimes E_0^{(2)}$，满足 $B\otimes C$；而对于 $\ell\geq 1$，在 $E_\ell^{(1)}$ 中，B 至少有一个指标被严格更小的指标所替换。h 和 t 的选取确保 $A,\ B$ 的支撑不相交，$C,\ D$ 也如此，因此原杨表的系数为 1。

我们断言

$$\sum_\ell [AE_\ell^{(1)}][E_\ell^{(2)}D]=0$$

in $\Delta_{2^b1^{a-b}}(\mathbb{Z}^n)$。事实上，在每一项中，我们都必须将 E 中的元素分配到因子 $(\bigwedge^2\mathbb{Z}^n)^{\otimes b}\otimes(\mathbb{Z}^n)^{\otimes(a-b)}$ 中。由于这些因子的数量是 a，且 $|E|>a$，因此至少有一个形如 $(\bigwedge^2\mathbb{Z}^n)$ 的因子包含 E 中的两个元素。若交换这两个元素的顺序，该和就会改变符号。然而，$\sum_\ell[AE_\ell^{(1)}][E_\ell^{(2)}D]$ 关于属于 E 的变量是对称的，因此通过反对称化和无挠性，我们在 $\mathbb{Z}$ 上得到所需结论，从而得到我们的命题。□

例子。让我们用一个简单的情形来说明由恒等元所蕴含的递归。取

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&3&4\\\hline 2&2&5\\\hline\end{array}$$

若取 $E=$(2 2 3 4)，便得到关系

$$2\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&3&4\\\hline 2&2&5\\\hline\end{array}+\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&2&4\\\hline 2&3&5\\\hline\end{array}+\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&2&3\\\hline 2&4&5\\\hline\end{array}=0,$$

其中原杨表的系数为 2。

然而，若取 $E=$(2 2 2 3 4)，则得到关系

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&3&4\\\hline 2&2&5\\\hline\end{array}=-\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&2&4\\\hline 2&3&5\\\hline\end{array}-\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&2&3\\\hline 2&4&5\\\hline\end{array}-\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&2&2\\\hline 3&4&5\\\hline\end{array}.$$

分别对含有 $E=$(2224) 和 $E=$(2223) 的两个中间杨表应用同一关系，得到

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&2&4\\\hline 2&3&5\\\hline\end{array}+\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&2&3\\\hline 2&4&5\\\hline\end{array}=-2\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&2&2\\\hline 3&4&5\\\hline\end{array}.$$

因此

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&3&4\\\hline 2&2&5\\\hline\end{array}=\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&2&2\\\hline 3&4&5\\\hline\end{array}.$$

5. 直接良滤过论证

5.1. 支配序。对于固定整数 d 的分拆 $\lambda\vdash d$，若对所有 a 都有 $\sum_{i=1}^a\mu_i\geq\sum_{i=1}^a\lambda_i$，则记作 $\mu\succeq\lambda$。

这就是支配偏序。在反支配序中，$\mu\preceq\lambda$ 表示 $\mu\succeq\lambda$。若 $\mu\succeq\lambda$，则支配关系蕴含 $\ell(\mu)\leq\ell(\lambda)$。

请注意，在这个偏序中，由唯一部分 d 组成的分拆最大，而由 d 个 1 组成的分拆最小。

5.1.1. 良滤过。在正特征下，$GL(V)$ 的有理表示通常不能分解为不可约表示的直和，但存在一种<기良滤过 理论，可用于计算不变量。

回顾 GL(V)-模的良滤过通常术语：

定义 5.1。有限维有理 $G=$ GL(V)-模具有良滤过或 ∇ 滤过，是指它具有一个有限滤过，其连续商为诱导模 $\nabla_\lambda(V)$，并包括有理支配权对应的行列式扭曲。

良 Δ 滤过也可以用类似的方式定义。

众所周知，如果 V 具有良 ∇ 滤过，那么它具有一个以分拆的递减支配序为指标的典范滤过，使得其连续商是模 $\nabla_\lambda(V)$ 的直和。对于 Δ 滤过也有类似结论，但此时序反转。

我们将使用以下标准结论：具有良滤过的模的直和仍具有良滤过，而具有良滤过的模的张量积也具有良滤过。

对于 GL(V)，张量积定理可追溯至 Wang [21]；另见 Donkin [14], 、Mathieu [18],和 Jantzen [17,II.4] 中的几何证明，以及 [12]中的组合证明。

良滤过和张量积定理可推广到整环情形。

通过考虑应用于 $\bigotimes_j \bigwedge^{\lambda_j} \mathbb{Z}^n$ 的张量积定理，模 $\nabla_\lambda(\mathbb{Z}^n)$ 是典范滤过中 $\bigotimes_j \bigwedge^{\lambda_j} \mathbb{Z}^n$ 的最后一个商。

最高权向量是典范表 C_λ，即 $\bigotimes_j e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_{\lambda_j}$ 的像，其中所有 i 都位于 i^{th} 列； C_λ 的特征为 $\prod_i x_i^{\lambda'_i}$，其中 λ' 是转置分拆。

5.2. **外代数**。 我们从一个纯粹多重线性的基本观察出发。

引理 5.2。 对于有限维向量空间 A、B （或自由模），以及任意 $h \geq 0$，存在一个自然同构

$$\bigwedge^h (A \oplus B) \simeq \bigoplus_{j=0}^{h} \bigwedge^j A \otimes \bigwedge^{h-j} B.$$

命题 5.3。 对于任意 m、$h \geq 0$，以下$\mathrm{GL}(V)$-模

$$\bigwedge^h (V^{\oplus m}) \qquad and \qquad \bigwedge^h ((V^*)^{\oplus m})$$

具有良过滤。

证明。 我们对 m 进行归纳。 $m = 0$ 的情形显然成立，因为只有零次分量非零。对于 $m = 1$，每个非零外幂 $\bigwedge^j V$ 都是一个基本最高权模；事实上，它是一个最高权为极小权的诱导模，因此具有长度为一的良过滤。$\bigwedge^j V^* \simeq \bigwedge^{\dim V - j} V \otimes \det^{-1}$ 也同样如此，其对应的最高权为支配有理最高权。

假设 $m-1$ 的断言已知。将引理 5.2 应用于 $V^{\oplus m} = V \oplus V^{\oplus(m-1)}$，得到

$$\bigwedge^h (V^{\oplus m}) \simeq \bigoplus_{j=0}^{h} \bigwedge^j V \otimes \bigwedge^{h-j} (V^{\oplus(m-1)}).$$

由归纳假设，每个项中的第二个因子都具有良过滤， $\bigwedge^j V$ 也具有良过滤 .

因此，张量积定理表明，右侧出现的每个张量积都具有良过滤，而它们的直和也具有良过滤。这就证明了 $V^{\oplus m}$ 的断言。将 V 替换为 V^*，便可用完全相同的证明处理 $(V^*)^{\oplus m}$。□

推论 5.4。 设 U、W 为有限维向量空间。公式 (8) 中代数的每个齐次分量，

$$E(U, V, W) = \bigwedge^* (W \otimes V^* \oplus V \otimes U^*)$$

作为 $\mathrm{GL}(V)$-模，都具有良过滤。因此，将 $E(U, V, W)$ 视为有限维有理$\mathrm{GL}(V)$-模时，它具有良过滤。

证明。 取 W 和 U^* 的基。作为 $GL(V)$-模，

$$W \otimes V^* \simeq (V^*)^{\oplus \dim W}, \qquad V \otimes U^* \simeq V^{\oplus \dim U}.$$

因此，命题 5.3 给出了 $\bigwedge(W \otimes V^*)$ 和 $\bigwedge(V \otimes U^*)$ 的每个齐次分量上的良过滤。由于

$$E(U, V, W) \simeq \bigwedge(W \otimes V^*) \otimes \bigwedge(V \otimes U^*),$$

张量积定理按次数分别给出结论，进而给出所有次数的直和上的结论。□

备注 5.5。 在 [3]Akin、Buchsbaum 和 Weyman 建立了外代数 $\bigwedge(V \otimes W)$ 的标准双表无特征理论，该理论产生了 $GL(V) \times GL(W)$-子模的一个滤过，其关联分次模由模 $\nabla_\lambda(V) \otimes \Delta_{\lambda'}(W)$ 构成。这是对命题 5.3 的细化。此外， [16]还为超代数建立了更一般的标准单项式理论，这可能有助于进一步推广。

6。良滤过与不变量维数

我们记录不变量理论所需的标准推论。首先，模 $\nabla_0(V)$ 是平凡的一维模。次

Le引理 6.1. 设 M 是一个具有良过滤的有限维有理 $\mathrm{GL}(V)$-模。那么

$$\dim_K M^{\mathrm{GL}(V)} = [M : \nabla_0(V)],$$

M 的良过滤中平凡诱导模的重数。

证明。 对于每个支配权 λ,

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}(V)}(K, \nabla_\lambda(V)) = 0 \quad (\lambda \neq 0), \qquad \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}(V)}(K, \nabla_0(V)) = K.$$

此外，$\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}(V)}(\Delta(0)\ \nabla_\lambda(V)) = 0$，其中 $\Delta(0) = K$。因此，在良过滤上取 GL(V)-不变量是正合的，对其长度进行归纳即可得到该公式。参见 Jantzen [17, II.4.13–II.4.16] 或 [12]。□

良过滤中的重数由形式特征决定，因为

$$\mathrm{ch}\, M = \sum_\lambda [M : \nabla_\lambda(V)]\, \mathrm{ch}\, \nabla_\lambda(V)$$

而 Weyl 特征是线性无关的。

命题 6.2。 设 K 为一个域。对于每个外次数 d,

$$\dim_K E(U, V, W)^{\mathrm{GL}(V)}_d$$

仅取决于 维数 U、维数 V、维数 W和 d，而与 K无关。因此， $E(U, V, W)^{\mathrm{GL}(V)}$ 的分次维数，进而其总维数，与基域无关。

证明。由 推论 5.4，每个分次分量都有良过滤。若 x_1、.....、 x_n 表示环面权重 ts of V, then

$$\mathrm{ch}\, E(U, V, W) = \prod_{j=1}^{n} (1 + x_j^{-1})^{\dim W} \prod_{j=1}^{n} (1 + x_j)^{\dim U}.$$

如果需要，也可以通过增加一个变量来记录外次数；此公式是整系数的，并且与特征无关。因此， $\nabla_0(V)$ 在每个分次分量中的重数与K无关。引理 6.1 给出了该断言。□

备注 6.3。 只有在将代数群 GL(V) 的不变量与 K-有理点群的不变量等同时，才需要 K 是无限的，参见第 7 页。

良滤过陈述本身是关于代数群 GL(V) 的有理表示的陈述。

7. 正特征下的不变量代数

现在回到公式 (8) 中的 $E(U、 V、 W)$，并考察特征零下的第一基本定理在多大程度上仍然适用于正特征域。

我们采用 §2.1 中的记号，因此，如第 5 页所示，我们有公式 (10) 的映射 q ，其像 e

$$C_K = K[t_{i,j}] \subseteq E(U, V, W)^{\mathrm{GL}(V)}$$

由这些二次不变量生成的子代数。

在特征零时，上文证明的斜对称第一基本定理给出

$$C_K = E(U, V, W)^{\mathrm{GL}(V)}.$$

7.1. **初步迹象**。 假设

$$\dim U = \dim W = 2, \dim V = 4$$

Then C_K 由四个元素 $t_{i,\ j}$， i， $j = 1$，2 生成。我们赋予 C_K 如下分次

$$\deg t_{i,j} = 1,$$

因此， $E(U$， V， $W)$ 中的次数 d对应于外次数 $2d$。

简单的直接计算得出由 $t_{i,j}$ 生成的环的以下希尔伯特函数

次数 d	0	1	2	3	4	5	6	7	8
特征为 0	1	4	10	20	35	20	10	4	1
特征为 2	1	4	6	4	1	0	0	0	0
特征为 3	1	4	10	16	19	16	9	0	0
特征 5	1	4	10	20	35	20	10	4	1

因此，由特征零二次生成元生成的代数已经依赖于特征。在这个例子中，特征 5 恰好给出与特征零相同的希尔伯特函数，而特征 2 和 3 则不同。

这与命题 6.2 形成对比：全体不变空间的维数

$$E(U,V,W)^{\mathrm{GL}(V)}$$

与基域无关。因此，正特征下可能失效的并不是全体不变空间维数的稳定性，而是二次元素 $t_{i,j}$ 的约化继续生成该空间这一断言。

注记7.1。若 K 的特征为 $p>0$，则外代数 K 中的每个正偶次元素 t 都满足

$$t^p=0. \quad \text{In particular,} \quad t_{i,j}^p=0 \quad \text{for all } i,j\,.$$

证明。设 $t=\sum_{\alpha=1}^k c_\alpha m_\alpha \in A$ 是若干正偶次单项式之和。

于是 $t^p=\sum_{\alpha=1}^k c_\alpha^p m_\alpha^p=0$，因为 $m_\alpha^2=0$ 对每个正次数单项式都成立。 □

因此，二次不变量生成的代数在模 p 约化后可能会大幅缩小。因此，不能指望特征零 FFT 在正特征下仍以相同的生成元成立。

然而，上文证明的直接良滤过论证表明，完整不变量代数的行为要刚性得多。

下面这个简单的观察说明了如何弥补这一缺陷。

命题 7.2. 设 A 是交换环上的外代数，$t=\sum_{\alpha=1}^k c_\alpha m_\alpha \in A$ 是由正偶次单项式 m_α 构成的线性组合。

Then, for every $r\geq 1$, we have $t^r=r!\,u_r$ for some $u_r\in A$.

证明。 由于每个 m_α 的外次数均为正， $m_\alpha^2=0$. 。此外，由于 m_α 的次数为偶数，它们彼此交换：

$$m_\alpha m_\beta = m_\beta m_\alpha.$$

展开 t^r，每个包含重复 m_α 的项都为零，而每个由 r 个互不相同的单项式组成的乘积 ls
对每个置换出现一次，其 r 个因子分别进行置换。因此

$$t^r = r!\sum_{\alpha_1<\cdots<\alpha_r} c_{\alpha_1}\cdots c_{\alpha_r} m_{\alpha_1}\cdots m_{\alpha_r} = r!u_r;\ u_r := t^{[r]}. \tag{19}$$

该和就是所需的元素 u_r。 □

定义 7.3。 该元素 u_r 记作 $t^{[r]}$，并将其视为一个除幂。

我们也将 $Exp(t)$ 记作 $=\sum_{i=0}^\infty t^{[i]}$，并注意到，这个无穷和实际上在 t的单项式项数 k 处截断。

事实上，映射 $t\mapsto t^{[r]}$ 的行为如同通常除幂，因为

$$(t+s)^{[r]}=\sum_{i=0}^r t^{[i]}s^{[r-i]}, \quad Exp(t+s)=Exp(t)Exp(s)\,. \tag{20}$$

因此，外代数的偶部是通常除幂代数的有限维商，但其生成元并非全部处于次数 1。

注 7.4。 这一点至关重要：由二次元素生成的子代数可能强烈依赖于特征，而完整不变空间的维数却并不如此。

因此，命题 6.2 的特征无关表述针对的是整个不变空间及其分次维数，而不是特征零生成集是否仍然成立。证明仅使用初等的外幂分解和一般的良过滤理论。

8. 在 $\mathbb{Z}$ 上的标准单项式与除幂对偶

8.1. **支配序与等变标准基滤过**。

8.1.1. 标准单项式。 设 U 和 W 为有限秩自由阿贝尔群。

设 $a=$的秩为U， $b=$的秩为W，并且（在选定自由阿贝尔群的基之后）考虑不定元$u_{i,j}$构成的 $a\times b$ 矩阵 $\mathtt{U}=(u_{i,j})$的多项式坐标环，

$$A_{\mathbb{Z}}=\mathbb{Z}[u_{i,j}]:1\le i\le a,\ 1\le j\le b=\mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}(U\otimes W^*)=\mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}(\hom(W,U))\,. \tag{21}$$

我们考虑群 $G=GL(U)\times GL(W)$在 $A_{\mathbb{Z}}$上的作用，该作用由矩阵乘法$g(u_{i,j})h^{-1},\ g\in GL(U)\ \ h\in GL(W)$给出。[1]

回顾矩阵的经典整系数标准单项式定理；我们不加证明地使用它。参考文献包括 [6], [16], 和 [12]。F

或严格递增序列 $I=(i_1\le\cdots<i_k)\ \ i_k\le a$和 $J=(j_1<\cdots<j_k)\ \ j_k\le b$，其长度 e
相同 为 $k\le\min(a,b)$，记作

$$[I\mid J]=\det(u_{i_p,j_q})_{1\le p,q\le k}.$$

双表是一个乘积 $\mathtt{T}=\prod_{r=1}^{s}[I_r\mid J_r]$，其行长弱递减： $\lambda_1\ge\cdots\ge\lambda_s>0$。

T的形状 为 $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_s)$。[2]

双表 T 通常通过在两个杨图中填入指标 i,j来表示。

The pol T 的多项式次数等于两个杨图各自的方格数，也称为 ts
大小。

注 **8.1**. 一个基本事实是，给定形状 λ 的所有双表的 $\mathbb{Z}$ -张成空间是一个 G-子模 .

若行指标杨表和列指标杨表均为半标准，则双表 T 称为标准： 每一行中的元素严格递增，且沿列向下弱递增。

定理 **8.2.** *i)* 对每个次数 d，总大小为 d 的标准双表构成 $(A_{\mathbb{Z}})_d$ 的一个 $\mathbb{Z}$-基。

ii) 此外，形状为 λ 的双表 T 是形状为 $\mu\succeq\lambda$ 的标准双表的线性组合，其中形状按支配序排列。

这可由一种标准化算法 得到，该算法基于子式的行列式之间的某些二次关系（参见 [12, 命题 8.24 和定理 8.25]; 比较 [5,第 11], [6]章和 [16,第 3]章）以及等变标准滤过 [12, 定义 9.18、定理 9.19 和推论 9.20]。

特别地，所有标准化系数都是整数，并且经过到任意域的标量扩张后，这个基仍然是基。

我们对标准双表进行排序：首先按形状排序，然后在每种形状内按任意固定的全序排序。

将形状为 λ 的双表整理，只会涉及形状为 $\mu\succeq\lambda$ 的标准双表，且系数为整数。整数版本可由整数系数的普吕克标准化恒等式和整数标准双表基推出。

8.1.2. 标准滤过。该定理可通过良滤过得到一种表示论解释。

令 $\mathcal{P}_d$ 为次数为 d 的 $a\times b$ 矩阵 U 的标准双表形状所构成的有限偏序集，其序由支配序给出。若 $\mathcal{J}\subseteq\mathcal{P}_d$ 是支配序中的一个上理想，也就是说，若 $\lambda\in\mathcal{J}$ 且 $\mu\succ\lambda$，则 $\mu\in\mathcal{J}$; 令

$$F_{\mathcal{J},d}:=\bigoplus_{\substack{T\text{ standard},\ |T|=d\\ \mathrm{shape}(T)\in\mathcal{J}}}\mathbb{Z}T\ \subseteq A_d. \tag{22}$$

等变标准化定律使 $F_{\mathcal{J},d}$成为一个 $G=\mathrm{GL}(U)\times\mathrm{GL}(W)$-子模：子式上的作用可表示为大小相同的子式之和，而标准整理会产生 $\mathcal{J}$中的形状。所有这些模都是饱和的 $\mathbb{Z}$-子模（也就是说，它们是群的直和项），因为它们是某个整基子集的张成空间。无需对形状作全序。

[1]这是一个例子，其中 G 应视为群概形，因为整数点在 $\mathbb{Q}$ 上的点中并非 Zariski 稠密。[2]有时这种形状称为 行形状，此时有一个与共轭分拆对应的列形状。

对于单个形状 $\lambda \mid |\lambda| = d$ 集

$$F_\lambda := \bigoplus_{\substack{T \text{ standard},\ |T|=d \\ \text{shape}(T)\succeq\lambda}} \mathbb{Z}T; \qquad F_\lambda^+ := \bigoplus_{\substack{T \text{ standard},\ |T|=d \\ \text{shape}(T)\succ\lambda}} \mathbb{Z}T. \tag{23}$$

命题 8.3. 商 F_λ/F_λ^+ 是一个自由阿贝尔群，其基由形状为 λ的标准双表的等价类构成，并且是一个 G-模。

$$C_\lambda := F_\lambda/F_\lambda^+ \simeq \nabla_\lambda(U) \otimes \nabla_\lambda(W^*)\,. \tag{24}$$

特别地，当 $\lambda = d$ 为最大值时， $F_d^+ = \{0\}$ 且 C_d 是多项式代数 $A_\mathbb{Z}$中由 U的 $d \times d$ 阶子式的行列式张成的空间。

8.1.3. 除幂代数。现在取公式 *(21)* $A_\mathbb{Z}$ 的分次 $\mathbb{Z}$-对偶

$$D_\mathbb{Z} := A_\mathbb{Z}^\circ := \bigoplus_{d\geq 0} \mathrm{Hom}_\mathbb{Z}((A_\mathbb{Z})_d, \mathbb{Z}). \tag{25}$$

其乘法与通常的多项式余乘法 $\Delta(u_{i,j}) = u_{i,j} \otimes 1 + 1 \otimes u_{i,j}$互为对偶，因此这是变量 $z_{i,j}$上的除幂代数 。由对偶性，它带有 GL(U) $\times$GL(W)的逆变作用。

对于多重指标 $\alpha =(\alpha_{i,j})$，设

$$u^\alpha = \prod_{i,j} u_{i,j}^{\alpha_{i,j}}, \qquad z^{[\alpha]} = \prod_{i,j} z_{i,j}^{[\alpha_{i,j}]}.$$

除幂单项式构成 $\mathbb{Z}$ 的 $D_\mathbb{Z}$-基，其特征由完美配对给出

$$\langle z^{[\alpha]}, u^\beta \rangle = \delta_{\alpha,\beta}. \tag{26}$$

特别地， $z_i^{[a]}{}_{,\ j} z_i^{[b]}{}_{,\ j} = \binom{a+b}{a} z_{i\ j}^{[a+b]}$; 在 $\mathbb{Z}$ 中无需对任何阶乘取逆。

对于每个标准双表 T，定义 $T^\vee \in D_\mathbb{Z}$ 为它在对偶标准基中的对应元素:

$$\langle T^\vee, T' \rangle = \delta_{T,T'} \qquad \text{for all standard bitableaux } T'. \tag{27}$$

这个对偶基通常不同于除幂变量中形式行列式的乘积。对偶标准基通常也不是除幂单项式基。下文只会用到它的定义配对。[3]

注 8.4。 代数 $D_\mathbb{Q} = D_\mathbb{Z} \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Q}$ 是变量 $z_{i,\ j}$ 以及 $D_\mathbb{Z} \subset D_\mathbb{Q}$ 上的通常多项式代数，其中 $z_i^{[a]}{}_{,\ j} = {}^{z_i^a}{}_{,\ a}{}^{j}\,!$

.

8.2. 除幂上的递减滤过。 偏序滤过 (22) 诱导出一族按序反向排列的 G-子模

$$F^\mathcal{J} D_d := \{\varphi \in D_d : \langle \varphi, F_{\mathcal{J},d} \rangle = 0\} = \bigoplus_{\substack{T \text{ standard},\ |T|=d \\ \text{shape}(T)\notin\mathcal{J}}} \mathbb{Z}T^\vee, \tag{28}$$

其中 $D_d =$Hom$_\mathbb{Z}(A_d, \mathbb{Z})$。因此，$\mathcal{J} \subseteq \mathcal{K}$蕴含 $F^\mathcal{J} D_d \supseteq F\kappa D_d$。对于上理想 $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{K}$，完美整数配对给出

$$F^\mathcal{J} D_d / F^\mathcal{K} D_d \simeq (F_{\mathcal{K},d}/F_{\mathcal{J},d})^*. \tag{29}$$

特别地，对于 $\mathcal{J}_{\succ\lambda} \subseteq \mathcal{J}_{\succeq\lambda}$，由公式 (23) 和 (29)，此商为

$$\tilde{C}_\lambda \simeq \nabla_\lambda(U)^* \otimes \nabla_\lambda(W^*)^* \overset{(24)}{=} \Delta_\lambda(U^*) \otimes \Delta_\lambda(W) \tag{30}$$

滤过由上理想编索引，而不是由任意选取的全序编索引。

当需要一个普通的有限链时，可以取偏序的线性扩张，而不改变这些子模或其形状截面。没有断言 $T^\vee$ 本身是除幂中行列式的乘积。

[3]注意， $D_\mathbb{Z}$ 不是唯一分解整环。

8.2.1. 生成级数。在 $\mathbb{Q}$ 上，根据注 8.4，我们有 $D_{\mathbb{Q}} = D_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{Q} = \mathbb{Q}[z_{i,j}]$。

从这里开始，我们采用转置缩并约定 $t_{i,\ j} = \sum_r y_{j,\ r} x_{r,\ i}$，其中 i 为 U 的指标，而 j 为 W 的指标。公式 (10) 中的斜不变映射，利用定义 7.3，可写为

$$q^D : D_{\mathbb{Q}} \longrightarrow E_{\mathbb{Q}}(U,V,W)^{\mathrm{GL}(V)}, \qquad q^D : z_{i,j}^{[s]} \longmapsto t_{i,j}^{[s]} \overset{(19)}{=} \Big(\sum_{r=1}^{n} y_{j,r} x_{r,i}\Big)^{[s]}, \tag{31}$$

定义

$$\mathrm{Div}_{\mathbb{Z}} := q^D(D_{\mathbb{Z}}). \tag{32}$$

由公式 (19)，我们有

$$q^D(z_{i,j}^{[s]}) = \begin{cases} \sum_{r_1<\cdots<r_s} y_{j,r_1} x_{r_1,i} y_{j,r_2} x_{r_2,i} \cdots y_{j,r_s} x_{r_s,i} & s \le n \\ 0 & s > n \end{cases}.$$

$$\Longrightarrow \qquad \sum_{a=0}^{n} u_{i,j}^{a} q^D(z_{i,j}^{[a]}) = \prod_{r=1}^{n} (1 + u_{i,j} y_{j,r} x_{r,i}), \quad q^D(z_{i,j}^{[n+i]}) = 0,\ \forall i \ge 1. \tag{33}$$

特别是 q^D 将 $D_{\mathbb{Z}}$ 映射到 $E_{\mathbb{Z}}(U,V,W)$，因此 $\mathrm{Div}_{\mathbb{Z}} \subset E_{\mathbb{Z}}(U,V,W)^{\mathrm{GL}(V)}$。

定义 $GL(V)$–不变的外形式

$$\Omega(u) = \sum_{i,j} u_{i,j} \sum_{r=1}^{n} y_{j,r} x_{r,i} = \sum_{i,j} u_{i,j} q^D(z_{i,j}). \tag{34}$$

所有求和项都是偶数且平方为零，因此我们可以应用定义 7.3 和公式 (20)，并注意到无穷和截断于相应各项中的求和项数。记 $E_{\mathbb{Z}} := E_{\mathbb{Z}}(U,\ V,\ W)$。于是得到有限乘积

$$\mathcal{G}(u) := q^D Exp\Big(\sum_{i,j} u_{i,j} z_{i,j}\Big) = \sum_{\alpha} u^{\alpha} q^D(z^{[\alpha]}) = Exp(\Omega(u)) = \prod_{r=1}^{n} \prod_{i=1}^{a} \prod_{j=1}^{b} (1 + u_{i,j} y_{j,r} x_{r,i}) \in A_{\mathbb{Z}} \otimes E_{\mathbb{Z}}, \tag{35}$$

其中 α 遍历列表 $0 \le \alpha_{i,\ j} \le n$ 和 $u^{\alpha} = \prod_{i,\ j} u^{\alpha_i}{}_{,\ i}{}^{\ j}{}_{,\ j}$ 以及 $z^{[\alpha]} = \prod_{i,\ j} z_{i\ j}^{[\alpha_{i,j}]}{}_{,\ ,}$。

由此公式 (35) 得

命题 8.5。同态 $q^D\colon D_{\mathbb{Q}} \longrightarrow E_{\mathbb{Q}}(U,V,W)^{\mathrm{GL}(V)}$，对每个 d限制为整同态 $q_d^D{:}(D_{\mathbb{Z}})_d \to (E_{\mathbb{Z}})_{2d}$，该同态由生成恒等式 (35)指定。

By (32) $\mathrm{Div}_{\mathbb{Z}} := q^D(D_{\mathbb{Z}}) \subseteq E_{\mathbb{Z}}(U,V,W)^{\mathrm{GL}(V)} = E_{\mathbb{Z}}^{\mathrm{GL}(V)}$.

然后，该同态可由同一公式定义在任意正特征域上，我们的目标是在定理 9.5 中证明其满射性。

标准形状 λ 在满足以下条件时称为 V-可容许的

$$\ell(\lambda) \le n, \qquad \lambda_1 \le \min(\dim U, \dim W). \tag{36}$$

因此，其图包含在一个高为 n、底为 m 的 $n \times m$ 矩形中，其中 $m = \min(a,\ b)$.

这些恰好是特征零不变分解和下一节所需的形状。

9. 整数转置像与幺模性

在本节中，$A_d = (A_{\mathbb{Z}})_d$、$D_d = (D_{\mathbb{Z}})_d = A_d^*$ 和 $E_{2d} = (E_{\mathbb{Z}})_{2d}$。

定义 9.1。将 $\mathcal{T}_d$ 记作次数为 d 且宽度为 $\le \min(a,\ b)$ 的标准双表集合，并将 $\mathcal{T}_{n,\ d} \subset \mathcal{T}_d$ 记作至多有 n 个非空行的标准双表集合；等价地，它们的形状都位于 $n \times \min(a,\ b)$ 矩形内。

9.1. 转置的所有坐标。 现在我们分析由 (35) 定义的整映射 q^D 的转置 q^*， $q^*\colon\ E^*_{\mathbb{Z}} \to A_{\mathbb{Z}}$， $q^*_d\colon E^*_{2d} \to A_d$ 其特征由 $\langle q^*(\ell)\ \varphi\rangle = \langle \ell,\ q^D\varphi\rangle$ 给出。

现在计算它在外单项式系数基上的取值。

如果 $n =$ 维 V 我们的外代数以公式 (2) 给出的生成元为生成元

$$x_{r,i}\quad (1 \le i \le a,\ 1 \le r \le n), \qquad y_{j,r}\quad (1 \le r \le n,\ 1 \le j \le b).$$

因此， i 为 U 的一个基编索引， j 为 W 的一个基编索引，而 r 是与 V 的一个基相关联的中间指标。

独立交换不定元 $u_{i,\ j}$、 $1 \le i \le a$、 $1 \le j \le b$ 没有 r 指标。

按中间指标 r 递增的顺序，固定变量 $x_{r,\ i}$， $y_{j,\ r}$ 的全局顺序。对于给定 r 的每个块，我们先按 j 递增排列 $y_{j,\ r}$，再按 i 递增排列 $x_{r,\ i}$.

我们将外代数的单项式基写成这种有序形式，并将其记为$\mathcal{B}$。

考虑公式 (35) 的有限生成乘积$\mathcal{G}(u) = \prod_{r=1}^{n}\prod_{i=1}^{a}\prod_{j=1}^{b}(1 + u_{i,j}y_{j,r}x_{r,i})$。各因子的外次数均为偶数，因而彼此可交换；因此，它们的排序不会影响乘积。

在外代数基$\mathcal{B}$ 上展开，可得到唯一的多项式 $F_N(u) \in \mathbb{Z}[u_{i,j}]$，使得

$$\mathcal{G}(u) = \sum_{N\in\mathcal{B}} F_N(u)N, \qquad F_N(u) = \langle N^* \mid \mathcal{G}(u)\rangle. \tag{37}$$

$$F_N(u) = \langle N^* \mid \mathcal{G}(u)\rangle = \langle N^* \mid q^D(\sum_\alpha u^\alpha z^{[\alpha]})\rangle = \langle q^*(N^*) \mid \sum_\alpha u^\alpha z^{[\alpha]}\rangle = \sum_\alpha u^\alpha \langle q^*(N^*) \mid z^{[\alpha]}\rangle\,. \tag{38}$$

例子。 取 $a = b = 2$、 $n = 1$，并将 $x_{1,i} = x_i$ 和 $y_{j,1} = y_j$ 分别简记为。生成乘积为

$$(1 + u_{1,1}y_1x_1)(1 + u_{1,2}y_2x_1)(1 + u_{2,1}y_1x_2)(1 + u_{2,2}y_2x_2).$$

对于 $N = y_1y_2x_1x_2$，只有两种选取会有贡献：

$$(y_1x_1)(y_2x_2) = -N, \qquad (y_2x_1)(y_1x_2) = N.$$

因此

$$F_N(u) = -u_{1,1}u_{2,2} + u_{1,2}u_{2,1} = -\det\begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{1,2}\\ u_{2,1} & u_{2,2}\end{pmatrix},$$

以及 $q^*(N^*) = -(u_{1,\ 1}u_{2,\ 2} - u_{1,\ 2}u_{2,\ 1})$。

行列式的出现将在下一个引理中解释。此计算直接从反交换关系说明了行列式的符号。

引理 9.2. 对于一个双次数为 (d, d) 的外代数基单项式 N，以及每个 $1 \le r \le n$，*le* t

$$I_r = \{i \in \{1,\dots,a\} : x_{r,i}\ \textit{occurs in}\ N\}, \qquad J_r = \{j \in \{1,\dots,b\} : y_{j,r}\ \textit{occurs in}\ N\}.$$

若对某个 r 有 $|I_r| \ne |J_r|$，则 $q^*(N^*) = 0$。否则，记作 $a_r = |I_r| = |J_r|$，我们有

$$q^*(N^*) = \varepsilon_N \prod_{r:\,a_r>0} [I_r \mid J_r], \qquad \varepsilon_N \in \{1, -1\}. \tag{39}$$

非空因子的个数至多为 n。这里， $[I_r \mid J_r]$ 表示矩阵$(u_{i,\ j})$ 的子式的行列式，其行集为 I_r，列集为 J_r，且两者均按递增顺序排列；空子式等于1。

证明。 取一个双次数为 $(d,\ d)$ 的外代数基单项式 N。对于每个 r，记

$$I_r = \{i_1 < \cdots < i_{s_r}\}, \qquad J_r = \{j_1 < \cdots < j_{t_r}\},$$

并设

$$N_r = y_{j_1,r}\cdots y_{j_{t_r},r}x_{r,i_1}\cdots x_{r,i_{s_r}}, \tag{40}$$

其中空乘积等于 1。乘积 $N_1\cdot\ldots\cdot N_n$ 已按良序排列，并且恰好包含 N 中出现的外代数变量。因此，根据上文确定的块排序，无需额外引入置换符号：

$$N = N_1\cdots N_n. \tag{41}$$

回想一下，

$$\mathcal{G}(u) = \prod_{r=1}^{n}\mathcal{G}_r(u), \qquad \mathcal{G}_r(u) = \prod_{i=1}^{a}\prod_{j=1}^{b}(1 + u_{i,j}y_{j,r}x_{r,i}).$$

$\mathcal{G}_r(u)$的每个因子的每个非常数项都恰好包含一个 x 和一个具有中间指标r的 y 。

因此，若在公式（40）中 $s_r \neq t_r$ 对某个 r 成立，则 $\mathcal{G}(u)$ 的展开式（37）中没有任何项能恰好包含 N 中出现的外代数变量，因此 N 的系数为零。

现在假设对每个 r， $s_r = t_r = a_r$ 都成立。固定 r ，并写作

$$I_r = \{i_1 < \cdots < i_{a_r}\}, \qquad J_r = \{j_1 < \cdots < j_{a_r}\}.$$

A 展开式（37）中对 N_r 有贡献的项必须在 $\mathcal{G}_r(u)$ 中选取 a_r 个非常数因子 .

根据公式（40），这些因子必须恰好各使用一次 I_r 中的每个行指标和 J_r 中的每个列指标。因此，它们由置换 $\sigma \in S_{a_r}$ 索引，相应的乘积为

$$\prod_{p=1}^{a_r} \big(u_{i_p, j_{\sigma(p)}} y_{j_{\sigma(p)}, r} x_{r, i_p}\big).$$

所选因子的外次数为偶数，因此可以按递增的 i_p 排列，而不会引入符号。将所有 y 移到 x 左侧需要对奇生成元进行 $\binom{a_r}{2}$ 次对换；将 y 按递增顺序排列还需引入符号 $\operatorname{sgn}(\sigma)$。因此

$$\prod_{p=1}^{a_r} (y_{j_{\sigma(p)}, r} x_{r, i_p}) = (-1)^{\binom{a_r}{2}} \operatorname{sgn}(\sigma) N_r.$$

对 σ 求和可知， N_r 在 $\mathcal{G}_r(u)$ 中的系数为 $(-1)^{\binom{a_r}{2}} \det(u_{i,j})_{i \in I_r,\, j \in J_r}$；对 $a_r = 0$ 也成立，此时使用空行列式 1。

The 不同 r 块中的外代数生成元互不相交，因此 $N_1 \cdots N_n$ 在 $\mathcal{G}(u)$ 中的系数 i s

$$(-1)^{\sum_{r=1}^{n} \binom{a_r}{2}} \prod_{r : a_r > 0} \det(u_{i,j})_{i \in I_r,\, j \in J_r}$$

由于 $N = N_1 \cdots N_n$，令 $\varepsilon_N = (-1)^{\sum_{r=1}^{n} \binom{a_r}{2}} \in \{1, -1\}$，公式 (38) 给出

$$q^*(N^*) = \varepsilon_N \prod_{r : a_r > 0} [I_r \mid J_r]. \tag{42}$$

对于每个 $r \in \{1, \ldots, n\}$，至多有一个非空因子，因此因子数至多为 n。 □

例子。 对于 $a = b = n = 2$，使用按块排序的单项式

$$N = (y_{1,1} y_{2,1} x_{1,1} x_{1,2})(y_{1,2} x_{2,1}).$$

指标集为 $I_1 = J_1 = \{1,2\}$ 和 $I_2 = J_2 = \{1\}$。第一块贡献 $-(u_{1,1}u_{2,2} - u_{1,2}u_{2,1})$，第二块贡献 $u_{1,1}$。因此，按照所示的块排序，

$$F_N(u) = -u_{1,1}(u_{1,1}u_{2,2} - u_{1,2}u_{2,1}), \qquad q^*(N^*) = -u_{1,1}[\{1,2\} \mid \{1,2\}].$$

虽然 $u_{1,\,1}$ 可能同时出现在两个块中，但不会出现多余的因子 2。这体现了除幂归一化。

回忆一下，$\mathcal{T}_{n,\,d}$ 是偶多项式坐标$u_{i,\,j}$中总次数为 d 的标准双表集合，其中非空子式因子的数量（其形状的行数）至多为 $n = \dim V$。

引理 9.3。 对每个 $T = \prod_{r=1}^{s} [I_r \mid J_r] \in \mathcal{T}_{n,\,d}$，选取外单项式

$$M_T = \prod_{r=1}^{s} \big(y_{J_r, r} x_{r, I_r}\big), \quad x_{r, I_r} = x_{r, i_1} \cdots x_{r, i_a};\ y_{J_r, r} = y_{j_1, r} \cdots y_{j_a, r}$$

注意，它遵循第 *17* 页定义的指定顺序。因此我们有：

$$q^*(M_T^*) = \varepsilon_T T, \qquad \varepsilon_T = (-1)^{\sum_{r=1}^{s} \binom{\lambda_r}{2}}. \tag{43}$$

当 T 遍历标准双表时，单项式 M_T 两两不同。

证明。 将引理 9.2 应用于 I_r， J_r，使其等于 T 的 r^{th} 子式的行指标集和列指标集。对于固定的全局块排序，额外的全局排序符号为 1，且每个块都贡献 $(-1)^{\binom{\lambda_r}{2}}[I_r \mid J_r]$。相乘即得 (43)。此外，从 M_T 的支撑中，可以分别恢复每个 r 对应的有序集 I_r 和 J_r ；这些集合确定了每个子式，进而确定 T。因此，不同的标准双表会产生不同的外代数基单项式（相差至多一个排序符号）。□

由此可得一个简单推论：

定理 9.4. 设 $m = \min(a, b)$，并用 $T_{n,d}$ 表示次数为 d、形状位于 $n \times m$ 矩形内的标准双表。则

$$\operatorname{im} q_d^* = \bigoplus_{S \in \mathcal{T}_{n,d}} \mathbb{Z}S; \quad \ker q_d^D = \bigoplus_{S \in \mathcal{T}_d \setminus \mathcal{T}_{n,d}} \mathbb{Z}S^\vee, \tag{44}$$

$$\mathrm{Div}_{\mathbb{Z},d} := \operatorname{im} q_d^D = \bigoplus_{T \in \mathcal{T}_{n,d}} \mathbb{Z}\, q_d^D(T^\vee). \tag{45}$$

该像是 E_{2d} 的一个直和项。

证明。根据定义，次数为 $2d$ 的外单项式 N 的对偶 N^* 构成 E_{2d}^* 的一组基。由引理 9.2，它们在 $\mathbb{Z}[u_{i,j}]$ 中的像至多是 n 个子式的乘积（或为零），相差一个符号。

根据整数支配三角化整理（[12, 命题 8.24 和定理 8.25]），形状为 λ 的 s 个子式的乘积可整理为形状为$\mu \succeq \lambda$的标准乘积的整数线性组合。由于 $\ell(\mu) \le \ell(\lambda) = s$，其中没有任何一个含有超过 s 个非空因子。对 $s \le n$ 应用此结果，得到 $\mathrm{im} q^* \subseteq \bigoplus_{S \in \mathcal{T}_{n,\,d}} \mathbb{Z}S$。

反过来，由引理 9.3，每个 $T \in \mathcal{T}_{n,\,d}$ 都属于 $\mathrm{im}\, q^*$。

因此 $\bigoplus_{S \in \mathcal{T}_{n,\,d}} \mathbb{Z}S \subseteq \operatorname{im} q^*$。这两个包含关系都是整的，因而给出相等。因此，$q_d^*$ 的像恰好是可容许标准双表的张成空间。

q_d^D的核是其转置 q^* 的像的正交补，由此得到 (44)。

由于元素 $S^\vee$，$S \in \mathcal{T}_d$ 构成 D_d 的基，公式 (45) 即得。

还需证明 q_d^D的像是 E_{2d}的一个直和项。令

$$B_{n,d} := \bigoplus_{T \in \mathcal{T}_{n,d}} \mathbb{Z}T.$$

由公式 (44)

$$q_d^* : E_{2d}^* \longrightarrow B_{n,d}.$$

是满射。此外，根据引理 9.3，对于每个 $T \in \mathcal{T}_{n,\,d}$，都存在一个外代数基单项式 M_T，使得

$$q_d^*(M_T^*) = \varepsilon_T T, \qquad \varepsilon_T \in \{1, -1\}.$$

因此，赋值 $s(T) = \varepsilon_T M_T^*$可线性延拓为一个同态

$$s : B_{n,d} \longrightarrow E_{2d}^*$$

其中 $q_d^* \circ s = \mathrm{id}_{B_{n,\,d}}$。

取对偶可推出 $(q_d^*)^* : B_{n,\,d}^* \longrightarrow E_{2d}$ 是一个分裂单射。

现在 $q_d^D \colon A_d^* = D_d \longrightarrow E_{2d}$ 分解为

$$A_d^* \xrightarrow{\ \rho\ } B_{n,d}^* \xrightarrow{\ (q_d^*)^*\ } E_{2d},$$

其中 ρ 是包含映射 $B_{n,\,d} \subset A_d$的对偶。由于$B_{n,\,d}$ 由 A_d的标准双表基的一个子集张成，ρ 是满射。因此，

$$\operatorname{im} q_d^D = \operatorname{im}(q_d^*)^*,$$

一切便都得到了证明。

□

对于域 K，令 $G_K = \mathrm{GL}(U_K) \times \mathrm{GL}(W_K)$。通过基变换，我们得到如下结论。

定理 9.5. 映射 $q^D \colon D_{\mathbb{Z}} \to \mathrm{Div}_{\mathbb{Z}}$ 的核是理想 I_n，其 $\mathbb{Z}$-基由对偶基元素 $T^\vee$ 组成，这些元素的形状不包含在矩形 $n \times m$中，其中 $m = \min(a, b)$。

对于每个域 K，自然态射

$$\mathrm{Div}_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} K \xrightarrow{\ \sim\ } E_K(U, V, W)^{\mathrm{GL}(V_K)} \tag{46}$$

是分次 G_K-代数的同构，其中除幂次数 d 对应于外次数 $2d$。

证明。第一条结论即为定理 9.4 中的 (44)。

整分裂保证张量积 K后仍具有单射性。其像由不变量构成。根据整标准单项式基，其分次维数与 K 无关，并且等于完整的不变维数（由命题 6.2 得出）。因此，该映射在每个齐次次数上都是满射。□

注记 9.6。这些理想 I_n 构成由 G-稳定理想组成的递减滤过。

9.2. **生成元与 Weyl滤过**。

定理 9.7。 对于任意域 K和 $n=$维数 V，不变量代数 $E_K(U,V,W)^{\mathrm{GL}(V_K)}$是商$D_K/(I_n\otimes K)$。它具有以形状属于 $n\times\min(a,b)$ 矩形的对偶标准双表为指标的标准单项式基，并且作为 K-代数由以下元素生成：

$$\{t_{i,j}^{[s]}:1\le i\le a,\ 1\le j\le b,\ 1\le s\le n\}.$$

特别 地，如果 $\mathrm{char}\,K=0$，或如果 $\mathrm{char}\,K=p>n$，它由二次收缩 $t_{i,j}=t^{[1]}_{i\,j}$生成.

证明。 基变换给出了所断言的商和基。除幂代数 D_K 由其单变量除幂 $z_i^{[s]}{}_{,j}$ 生成，其中 $s\ge1$；它们的像为 $t_i^{[s]}{}_{,j}$。公式 (33) 给出 $t_i^{[s]}{}_{,j}=0$，其中$s>n$。这证明了生成元的断言。当对所有 $1\le s\le n$，$s!$ 均可逆时，$t_i^{[s]}{}_{,j}=t_{i,j}^s/s!$，因此仅由次数为一的除幂收缩生成。□

定理 9.8. 对每个 d，不变量格 $\mathrm{Div}_{\mathbb{Z},d}\cong D_d/I_{n,d}$都有一个由 $\mathrm{GL}(U_\mathbb{Z})\times\mathrm{GL}(W_\mathbb{Z})$-子模构成的滤过，其伴随分次模为 *Weyl*模的直和

$$\Delta_\lambda(U_\mathbb{Z}^*)\otimes\Delta_\lambda(W_\mathbb{Z}) \tag{47}$$

对于包含于 $n\times\min(a,b)$ 矩形中的每个分拆 $\lambda\vdash d$，其作用是 $A_\mathbb{Z}=\mathrm{Sym}(U_\mathbb{Z}\otimes W_\mathbb{Z}^*)$上自然作用的逆变作用。这个整 *Weyl* 滤过与任意基变换相容。

证明。 这由公式 (30) 得出。 □

10. SL(V)-向量的不变量

10.1. 斜行列式的概念。 为了分析特殊线性群 $SL(V)$ 的外不变量理论，我们需要为元素为反交换元的方阵 $r\times r$ 建立行列式的形式理论。

对于元素属于交换环的普通方阵 A，有按行或按列进行的两种通常展开式。

$$\det(A)=\sum_{\sigma\in S_r}\epsilon_\sigma a_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),2}\cdots a_{\sigma(r),r}=\sum_{\sigma\in S_r}\epsilon_\sigma a_{1,\sigma(1)}a_{2,\sigma(2)}\cdots a_{r,\sigma(r)}$$

其中 ϵ_σ 表示置换的符号。

将这两个公式应用于一个方形的 $r\times r$ 矩阵，其元素是反交换的，便可得到外代数中的两个不同元素，我们分别记作 $\det_c(X)$，$\det_r(X)$。

此外，在外代数情形中，注意 $\det_c(X)$ 在列交换下是对称的，而非反对称的（$\det_r(X)$ 在行交换下也对称），因此允许出现重复的列（或行）。当列重复时，应将重数考虑在内。

取两个序列 $I=(i_1<\cdots<i_r)$和 $J=(j_1\le\cdots\le j_r)$。对每个 h，令 $m_J(h)=\#\{s\mid j_s=h\}$ 并定义

$$M_c(X)=\prod_h m_J(h)!$$

在 $\mathbb{Q}$上的泛外代数中，对于元素为反交换的 $r\times r$ 矩阵 $X:=(x_{i_s,\ j_t})$，我们定义

$$\det{}_c(X)=(I\mid J)_c=\frac{\sum_{\sigma\in S_r}\varepsilon_\sigma\prod_{\ell=1}^r x_{i_{\sigma(\ell)},j_\ell}}{M_c(X)}=\frac{\sum_{\sigma\in S_r}\prod_{\ell=1}^r x_{i_\ell,j_{\sigma(\ell)}}}{M_c(X)} \tag{48}$$

下面建立的积分表达式在任意特征下都定义了这个元素。我们有

引理 10.1。$\det_c$ 是$x_{i_s,\ j_t}$中的单项式的一个整数系数线性组合。我们称之为（列）斜行列式。

证明。 假设序列 $(j_1,\dots,j_r)$ 包含 s 个不同的指标 $h_1\,h_2\dots,h_s$，$\sum_{p=1}^s m_J(h_p)=r$。于是由 (48) 可得

$$\det{}_c(X)=\sum_{p=1}^s x_{i_1,h_p}\det{}_c(X_p)$$

其中，X_p 是从 X 中删去第一行以及索引为 h_p 的任意一列后得到的矩阵。结论由归纳法立即得出。□

完全类似地，我们可以定义 $\det_r(Y) := \det_c({}^tY)$，在这种情况下允许行重复。若 A 是一个变量矩阵，这些变量与 $x_{i,\ j}$ 以及彼此都可交换：

$$\det_c(A\cdot X)=\det(A)\det_c(X),\quad \det_r(X\cdot A)=\det_r(X)\det(A)\,. \tag{49}$$

若 X，Y是如上所述的方阵，则 $X\cdot Y=T=(t_{i,\ j})$ 的各项彼此交换。注意，T 可能含有重复的行和列。在 $\mathbb{Q}$ 上，令

$$\operatorname{perm}(T)=\frac{\sum_{\sigma\in S_r} t_{\sigma(1),1}t_{\sigma(2),2}\cdots t_{\sigma(r),r}}{M_r(X)M_c(Y)},$$

很容易推出

$$\operatorname{perm}(T)=(-1)^{\binom{r}{2}}\det_r(X)\det_c(Y) \tag{50}$$

事实上，展开永久式，并利用 X 和 Y 的各项之间的反交换性，我们将 X 的所有项移到左侧，得到符号 $(-1)^{\binom{r}{2}}$。所得的交错和可分解为 $\det_r(X)\det_c(Y)$。此外，重复行和重复列的重数恰好被归一化因子抵消。公式（50）为每种特征下的归一化永久式提供了整系数解释。

10.2. **模** $\Delta_\lambda(W)$。设 K 是一个任意特征的无限域，设 $\dim V=n$ 和 $\dim W=m$，并令 $E=\bigwedge(V\otimes W)=\bigwedge(V^m)$。

如同公式 (1) 中，固定基 $v_1,\dots,v_n$，取自 V，以及 $w_1,\dots,w_m$，取自 W。于是我们可以将集合 V^m of m–tuples 视为 V 的向量所组成的列，构成一个 $n\times m$ 矩阵 X。

给定 n 个列索引，我们用 $[i_1,i_2,\cdots\ i_n]$ 表示方阵的行列式 $\det_c$，该方阵的列是 X 的列 i_j，其中允许重复。注意，$[i,i,\cdots i]=\prod_{j=1}^n x_{j,i}$.

由公式 (49) 可得：

命题 10.2. 行列式 $[i_1,i_2,\cdots\ i_n]$ 是 $SL(V)$ 不变量。

此外：

引理 10.3. 对于 $0\le r\le m$，设

$$z_r=\prod_{j=1}^{r}\prod_{i=1}^{n}x_{i,j}=\prod_{j=1}^{r}[j,j,\cdots,j]\in\bigwedge^{nr}(V\otimes W), \tag{51}$$

其中因子按所示顺序排列。则作为一个 $\mathrm{GL}(W)$-模，

$$\operatorname{Span}_K\{g\cdot z_r : g\in\mathrm{GL}(W)\}\simeq\Delta_{r^n}(W).$$

证明。考虑相对于 $V\otimes W=\bigoplus_{i=1}^n(Kv_i\otimes W)$ 的多重次数 $(r,\dots,r)$ 分量。外代数分解给出一个典范的 $\mathrm{GL}(W)$-等变同构

$$E_{(r,\dots,r)}\simeq\bigotimes_{i=1}^{n}\bigwedge^{r}(Kv_i\otimes W)\simeq(\bigwedge^{r}W)^{\otimes n}.$$

按 i 对外因子重新排序，将 z_r 与下式相识别，至多相差一个无关紧要的符号：

$$(w_1\wedge\cdots\wedge w_r)^{\otimes n}.$$

这是 $(\bigwedge^r W)^{\otimes n}$ 中权为 (n^r) 的典范最高权向量。根据 Weyl 模由该向量生成的子模这一（整数）定义实现，由 z_r 生成的 $\mathrm{GL}(W)$-模恰为 $\Delta_{r^n}(W)$。□

定理 10.4。对于任意无限域 K，

$$E^{\mathrm{SL}(V)}=K\big[(\bigwedge^{n}(V\otimes W))^{\mathrm{SL}(V)}\big].$$

特别地，当 $n\nmid d$ 时，次数为 d 的不变空间为零。

对于 $0\le r\le m$，

$$(\bigwedge^{nr}(V\otimes W))^{\mathrm{SL}(V)}\simeq\Delta_{r^n}(W),$$

由以下元素张成 r 个极大反对称行列式的乘积，这些乘积可以用一个矩形杨表表示，其 *of* 形状为 $r\times n$.

由转置后为半标准杨表表示的乘积构成$(\bigwedge^{rn}(V\otimes W))^{\mathrm{SL}(V)}$的一组 K-基。

证明。 按照命题 5.3 中的推理，我们得出，对于每个 $0 \le d \le nm$，SL(V)-模$\bigwedge^d(V\otimes W)$ 都具有良滤过。

因此，SL(V)-不变量的维数由形式特征决定，且与特征无关。利用斜柯西恒等式在特征零下计算，得到

$$\dim_K(\bigwedge^{nr}(V\otimes W))^{\mathrm{SL}(V)} = \dim_K \Delta_{r^n}(W),$$

而在所有其他次数下均为零（因为平凡的 SL(V)-成分对应于一个矩形 GL(V)-分拆）。

引理中的向量 z_r 是 SL(V)-不变量：每个块 $\prod_{i=1}^n x_{ij}$ 在 $g\in \mathrm{SL}(V)$ 下均按 $\det(g)=1$ 变换。因此

$$\Delta_{r^n}(W) \simeq K\,\mathrm{GL}(W)\cdot z_r \subseteq (\bigwedge^{nr}(V\otimes W))^{\mathrm{SL}(V)}.$$

维数相同，因此这一包含关系实际上是等式。

最后，令 $d_j=\prod_{i=1}^n x_{ij}\in E_n^{\mathrm{SL}(V_)}$，使得 $z_r = d_1\cdots d_r$。由 $E^{\mathrm{SL}(V_)_n}$ 生成的子代数在 GL(W) 作用下稳定，且包含 z_r，因此它包含整个循环模 $K\,\mathrm{GL}(W)\cdot z_r = E_{nr}^{\mathrm{SL}(V_)}$，对每个 r 都成立。这些就是所有不变量成分，从而证明了该断言。

最后一个断言由定理 4.4.(2) 得出。 □

11. SL(V)-向量和余向量不变量

11.1. 不变量。 如第 2 页所述，考虑

$$A := V^a\oplus V^{*b} = V\otimes U^*\oplus W\otimes V^* = \hom(U,V)\oplus\hom(V,W)\,. \tag{52}$$

选取 V 的一个基，我们将 a 向量在 V^a 中表示为矩阵 X 的列 $x_i=(x_{1,\,i},\ x_{2,\,i},\ \dots,\ x_{n,\,i})$，并将 b 余向量在 V^{*b} 中表示为矩阵 Y 的行 $y_i=(y_{i,\,1},\ y_{i,\,2},\ \cdots y_{i,\,n})$。

我们将其记为

$$M=(\bigwedge A)^{SL(V)} = (\bigwedge(V^a\oplus V^{*b}))^{SL(V)} = \bigwedge(x_{1,i},x_{2,i},\dots,x_{n,i};y_{i,1},y_{i,2},\dots,y_{i,n})^{SL(V)}\,.$$

一维环面 $T = GL(V)/SL(V)$ 通过行列式作用于 M 上，因此我们可以分解

$$M=\oplus_{k\in\mathbb{Z}}M^k;\quad M^k:=\{m\in M\mid g\cdot m=\det(g)^k m,\ \forall g\in GL(V)\}\,.$$

给定一个可容许分拆，即一个包含于矩形 $n\times\min(a,b)$中的分拆 λ；并且令 $\lambda(k)$包含于矩形 $n\times(\min(a,b)+k)$，由 λ 添加 k 个长度为n的列得到。

定理 11.1。

(1) M由 $GL(V)$不变量（$\bigwedge A)^{GL(V)}$）以及由 X 的极大子式构成的斜行列式 det_c和由 Y的极大子式构成的斜行列式 det_r 生成。*(2)* 空间 M^k有一个典范滤过，其商为 $GL(U)\times GL(W)$-模，由包含于矩形 $n\times min(a,b)$中的分拆 λ标记，并满足：对于 $k\ge 0$，有 $\lambda_1\le min(a-k,b)$；对于 $k<0$，有 $\lambda_1\le min(a,b+k)$。因此，伴随分次空间是模 $\Delta_{\lambda(k)}(U^*)\otimes\Delta_\lambda(W)$（若 $k\ge 0$），以及模 $\Delta_\lambda(U^*)\otimes\Delta_{\lambda(-k)}(W)$（若 $k<0$）的直和。*(3)* Y 的一个极大子式的斜行列式 det_r 与 X 的一个极大子式的斜行列式 det_c的乘积，是由公式（*50*）给出的 $GL(V)$不变量。

证明。(1)

根据定理 10.4， X 的极大子式的斜行列式 $\det_c$ 和 Y的极大子式的斜行列式 $\det_r$ 在 $SL(V)$ 下保持不变。

现在考虑 M^k， $k>0$；添加 k 个 V^* 的新副本，并将这些新的行向量（或余向量）称为 y_{-1}、$\cdots$ y_{-k}；$y_{-i}=(y_{-i,\,1},\ y_{-i,\,2}$、$\cdots y_{-i,\,n})$（选择负指标是为了在描述相关杨表时使它们排在所有其他向量之前）。

取 $\Omega_k=\prod_{i=-k}^{-1}\prod_{r=1}^n y_{i,\,r}$，它是行列式 $[i,i,\cdots\ i]$ 的乘积，并且是 M^{-k} 中的一个 $SL(V)$ 不变量；并考虑映射

$$\pi: M^k\to \bar{M}^0;\ m\mapsto m\cdot\Omega_k$$

其中， $\bar{M}$指的是 $V^a\oplus V^{*\,(b+k)}$。

¯映射 π 是到空间 $M(\Omega_k)$的线性同构，该空间由扩张外代数中 $V^a \oplus V^{*\,(b+k)}$ 的不变量组成，这些不变量可被Ω_k 整除，并且关于向量y_{-1}、$\cdots$ y_{-k}的坐标次数恰好为 nk。

我们使用公式 (33) 和公式 (35) 中引入的生成函数。在以下两种情况下应用公式 (35)： b和 $b+k$:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{G}(u) &= \prod_{r=1}^{n}\prod_{i=1}^{a}\prod_{j=1}^{b}(1+u_{i,j}y_{j,r}x_{r,i}),\\
\widetilde{\mathcal{G}}(u) &= \prod_{r=1}^{n}\prod_{i=1}^{a}\prod_{j\in\{-k,\dots,-1,1,\dots,b\}}(1+u_{i,j}y_{j,r}x_{r,i})\\
&= \mathcal{G}(u)\prod_{i,r}^{a,n}\prod_{j=-k}^{-1}(1+u_{i,j}y_{j,r}x_{r,i}).
\end{aligned}
\tag{53}
$$

我们有

$$
\widetilde{\mathcal{G}}(u) = \mathcal{G}(u)\,P(u), \qquad P(u) = \prod_{j=-k}^{-1}\prod_{r=1}^{n}\prod_{i=1}^{a}(1+u_{i,j}y_{j,r}x_{r,i}).
$$

由于$y_{j,\ r}$ 是外代数变量，所有包含两个相同的$y_{j,\ r}$ 的乘积都为零。因此，

$$
\prod_{i=1}^{a}(1+u_{i,j}y_{j,r}x_{r,i}) = 1+y_{j,r}\left(\sum_{i=1}^{a}u_{i,j}x_{r,i}\right).
$$

因此

$$
P(u) = \prod_{j=-k}^{-1}\prod_{r=1}^{n}\left(1+y_{j,r}\left(\sum_{i=1}^{a}u_{i,j}x_{r,i}\right)\right).
$$

Ω_k 的系数因此为

$$
(-1)^{\binom{nk}{2}}\prod_{j=-k}^{-1}\prod_{r=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{a}u_{i,j}x_{r,i}\right).
\tag{54}
$$

确实，符号来自将 $y_{j,\ r}$ 移到左侧。 e 左侧。

现在考虑一个固定的 j。对于一个单项式

$$
u_{i_1,j}^{h_1}\cdots u_{i_t,j}^{h_t}, \qquad h_1+\cdots+h_t = n,
$$

其在

$$
\prod_{r=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{a}u_{i,j}x_{r,i}\right)
$$

is

$$
\sum_{\substack{(s_1,\dots,s_n)\\ i_1^{h_1}、\dots、i_t^{h_t}\text{的不同排列}\{i_1^{h_1},\dots,i_t^{h_t}\}}} x_{1,s_1}\cdots x_{n,s_n}.
$$

这恰好是与所示多重集相关的极大斜行列式 det_c et.

因此，Ω_k 在 ˜$\mathcal{G}(u)$ 中的每个系数，除相同的符号 $(-1)^{\binom{nk}{2}}$ 外，都是 k 极大斜行列式与$\mathcal{G}(u)$ 的系数之乘积的线性组合。

¯由 (35) 的生成性质可知，这些系数张成 $M(\Omega_k)$。将它们通过由乘以 Ω_k 给出的同构传递过去，我们得出 M^k 中的元素都是不变量与 k X的极大子式的行列式之乘积的线性组合。

The 情形 $k<0$ 可通过交换向量和余向量以相同方式得到。这就证明了 (1).

(2) 我们采用与 (1) 中相同的构造。首先假设 $k>0$，并添加 k 个新余向量y_{-1}，$\dots$，y_{-k}。乘以 Ω_k将 M^k 与空间 $\bar{M}(\Omega_k)$ 同构；该空间由 $GL(V)$- 不变量组成，且这些不变量在每个新余向量中的次数为 n。

根据定理 9.8，扩大的空间 $\bar{M}^0$ 具有由 $GL(U)\times GL(W\oplus K^k)$-模构成的滤过，其伴随分次空间为

$$
\bigoplus_{\mu}\Delta_\mu(U^*)\otimes\Delta_\mu(W\oplus K^k),
$$

其中 μ 遍历包含在矩形 $n\times\min(a,b+k)$ 中的分拆。

¯此滤过在 $M(\Omega_k)$ 上诱导出一个滤过 .

考察 $\Delta_\mu(W \oplus K^k)$ 中新变量的多重次数 $(n, \ldots\ldots, n)$ 分量。

根据 Weyl模 的标准杨表描述，除非 μ 包含k 个长度为 n 的完整列，否则该分量为零。如果 $\mu = \lambda(k)$，去掉这些列后，该分量作为一个$GL(W)$-模同构于 $\Delta_\lambda(W)$。

由此可得，以下空间的伴随分次空间 $\bar{M}(\Omega_k) \simeq M^k$为

$$\bigoplus_\lambda \Delta_{\lambda(k)}(U^*) \otimes \Delta_\lambda(W),$$

其中 λ 遍历满足 $\ell(\lambda) \le n, \quad \lambda_1 \le \min(a-k,\ b)$。的分拆。

对于 $k < 0$，交换向量与余向量后，同样的论证仍然适用。这就证明了（2）。

（3）就是公式（50）。

□

第3. 其他经典群

12. 经典群的良滤过

现在我们说明，前面的良过滤论证如何应用于辛群和正交群的不变量理论。

设 K 是一个域（在正交情形下，其特征不为 2），并设 V 是一个有限维 K-向量空间。在辛情形下，我们假设 V 配备了一个非退化交替形式，并用 $Sp(V)$ 表示保持该形式的辛群。

在正交情形下，我们在 V 上赋予一个非退化对称双线性形式。我们用 SO(V)、O(V)分别表示保持该形式的特殊正交群和正交群。

回顾一下，若一对 $H \subset G$ 约化群满足：每个具有良滤过的有理 G-模限制到 H后仍具有良滤过，则称其为 *Donkin* 对。

回顾这里所考虑的经典嵌入（Brundan [4] 命题 3.3(i)、(iii)、命题 3.4(i) 以及引理 3.2）

定理 12.1。设 M 是一个具有良滤过的有理 $\mathrm{GL}(V)$-模。

(1) 若 V是辛的，则 M 限制到 $Sp(V)$ 后，作为$\mathrm{Sp}(V)$-模具有良滤过。*(2)* 若 V是正交的且特征 $K \neq 2$，则 M 限制到 $SO(V)$ 后，作为$\mathrm{SO}(V)$-模具有良滤过。

根据命题 5.3，对每个 $m, h \ge 0$，模 $\bigwedge^h(V^{\oplus m})$ 作为 GL(V)-模具有良过滤。因此，定理 12.1 立即给出:

推论 12.2。设维数 $W = m$。将 $\bigwedge^h(V^{\oplus m}) = \bigwedge^h(V \otimes W)$ 限制到$\mathrm{Sp}(V)$ 后，具有良过滤。

若特征 $K \neq 2$，则其限制到特殊正交群(V) 后也具有良过滤。

因此，我们可以重复对 GL(V) 使用的基变换论证。

在辛情形中，选取整格并赋予一个酉模交替形式，并令 $E_{\mathbb{Z}}$ 表示相应的整系数外代数。

在正交情形中，方便的做法是在 $R = \mathbb{Z}[1/2]$, 上处理，并赋予一个酉模对称形式，这样特殊正交群与正交群之间的区别在基变换下表现一致。

定理 12.3. 设 K 是一个域。

(1) 在辛情形下，

$$\dim_K \bigwedge^h (V \otimes W)^{\mathrm{Sp}(V_K)}$$

与 K 无关。

(2) 在正交补情形下，对于 特征 $K \neq 2$,

$$\dim_K \bigwedge^h (V \otimes W)^{\mathrm{SO}(V_K)}$$

与 K 无关。

(3) 在相同假设 特征 $K \neq 2$ 下，

$$\dim_K \bigwedge^h (V \otimes W)^{\mathrm{O}(V_K)}$$

与 K 无关。

证明。 对于连通群 $H = \mathrm{Sp}(V)$，$\mathrm{SO}(V)$，根据 Donkin 对定理，限制具有良过滤。对于这样的模 M，M^H的维数等于其良过滤重数 $[M\colon\ \nabla_H(0)]$。这由 M的形式特征确定：对偶 Weyl 模的特征构成特征的整基，而 $\bigwedge^h(V \otimes W)$ 的形式特征与域无关。因此，不变维数是常数。

为证明关于完全正交群的断言，在 $R = \mathbb{Z}[1/2]$ 上使用所选的幺模形式，并令 $M_R = \bigwedge^h(V_R \otimes W_R)$ 和 $L_R = M^{\mathrm{SO}(V_R)\,R} \qquad = M_R \cap M_{\mathrm{SO}(V_{\mathbb{Q}})\mathbb{Q}}$。

根据构造， L_R 是 R-模 M_R 的一个直和项；又由于 $\mathrm{SO}(V_K)$ 不变量的维数与域 K 无关，我们对特征不等于二的每个域 K 都有 $L_R \otimes_R K = M^{\mathrm{SO}(V_K)\,K}$。

商群 $\mathrm{O}(V_R)/\mathrm{SO}(V_R)$ 是群 $C_2 = \{1,\ s\}$，其作用于 L_R。

由于 2 可逆，幂等元 $(1-s)/2$ 分解为 $L_R = L_R^+ \oplus L_R^-$，其中 $L_R^+ = M_R^{\mathrm{O}(V_R)}$。由此可知， $M^{\mathrm{O}(V_R)\,R}$ 也是一个自由直和项，其秩等于特征零情形下的不变维数，因此其余结论均可如同 $SO(V)$ 情形那样推出。□

13. 对称矩阵与交错矩阵的标准杨表

我们的下一个目标是将不变量环描述为适当除幂代数的商。

我们首先回顾 De Concini–Procesi [9] 关于对称矩阵和交错矩阵的标准杨表与整理结果。他们无关特征的处理给出了对称矩阵子式乘积以及交错矩阵 Pfaffian 乘积的整系数标准化关系。

我们所用的性质是：整理在多项式次数上是齐次的，在形状的支配序下是三角的，并且不会增加非空因子的数量（采用因子大小杨表约定时即行数）。

我们陈述本文所需的约定及其推论；接下来的良好滤过和 Weyl 滤过论证与第7–8节中的论证相同。

采用第3节中的记号，令 $U = \mathbb{Z}^m = \oplus_j \mathbb{Z}u_j$ 和 $V = \mathbb{Z}^n = \oplus_j \mathbb{Z}v_j$ 配备对称形式 $\sum_{i=1}^n x_i^2$，用于正交情形；而 $V = \mathbb{Z}^{2n} = \oplus_{j=1}^n \mathbb{Z}e_j \oplus \oplus_{j=1}^n \mathbb{Z}f_j$，其中 e_1、……、e_n、f_1、……、f_n 是一个辛基。因此， n是正交维数，或辛维数的一半。

对于正交群，可以取任意对称幺模二次型；在不变量层面，这不会改变计算，因为任意两个秩相同的幺模整二次型，在适当数域 K 的整数元$\mathcal{O}_K[1/2]$ 上都同构（参见[19]§§ 92、102–104）。

我们研究由 G 辛群或正交群作用的整形式 $\left(\bigwedge^*(V \otimes U)\right)^G$ 的不变量理论。群 $\mathrm{GL}(U)$ 作用于这些不变量。随后，我们将其应用于 $\left(\bigwedge^*(V_K \otimes U_K)\right)^G$ 的不变量理论，其中 K 是一个特征为 $\neq 2$ 的域，且处于正交情形。

13.0.1. 辛对角生成元的归一化。在辛情形中，对角二次生成元具有一种必须在特征二下加以考虑的整数归一化。

写作 $x_{a,\,i} = e_a \otimes u_i$，$y_{a,\,i} = f_a \otimes u_i$，使得 $\bigwedge^*(V \otimes U) = \bigwedge^*(x_{a,\,i},\ y_{a,\,i})$。

如定理 3.2 中那样，考虑矩阵 X，其行是 $x_{1,\,i},\ \cdots x_{n,\,i},\ y_{1,\,i},\ \cdots y_{n,\,i}$，并令：

$$T = {}^tXJX, \quad \text{with} \quad t_{i,j} = \sum_{a=1}^n (x_{a,i}y_{a,j} + x_{a,j}y_{a,i})\,.$$

The 矩阵 T 是对称的，其元素是不变量

我们有 $t_{i,i} = 2\sum_{a=1}^n x_{a,i}y_{a,i} := 2q_{i,i}$。因此，我们将第 3 节中引入的生成元矩阵 T 替换为整数矩阵 Q:

$$q_{i,i} = \sum_{a=1}^n x_{a,i}y_{a,i}, \quad q_{i,j} = \sum_{a=1}^n (x_{a,i}y_{a,j} + x_{a,j}y_{a,i}),\ i \neq j. \tag{55}$$

13.0.2. 对称矩阵。 设 $m =$ 的秩为 U，并设 $X^+ = (u_{i,j})_{1\le i,j\le m}$, $u_{i,j} = u_{j,i}$ 是一个一般对称矩阵。

对于递增序列 $I = (i_1 < \cdots < i_p)$ 和 $J = (j_1 < \cdots < j_q)$，记 $I \preceq J$，若 $p \ge q$ 且 $i_t \le j_t$ 对于 $1 \le t \le q$。行指标为 I、列指标为 J 的 $a \times a$ 子式的行列式记为

$$\begin{bmatrix} I \\ J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J \\ I \end{bmatrix} \qquad \text{by symmetry,}$$

其中 $|I| = |J| = a$。这两个递增指标序列构成子式表的两行。

我们使用以下 对称子式的标准性条件 :

$$T = \begin{bmatrix} I_1 \\ J_1 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} I_s \\ J_s \end{bmatrix}, \qquad I_1 \preceq J_1 \preceq I_2 \preceq J_2 \preceq \cdots \preceq I_s \preceq J_s,$$

其中各因子按如下顺序排列： $a_1 \ge \cdots \ge a_s > 0$、 $a_t = |I_t| = |J_t|$。因此，对于每个大小为 a_t 的子式，杨表有两行，每行长度为 a_t 。其杨图形状为

$$\tau^+(\lambda) = (a_1, a_1, a_2, a_2, \ldots), \qquad \lambda = (a_1, \ldots, a_s), \quad |\lambda| = d.$$

该杨图的每一列高度都是偶数。

等价地，其最高权 2η 是某个支配多项式权 η 的两倍（见第 10 页）。次数一时，杨图形状为 (1,1)，最高权为 $2\omega_1$。

13.0.3. 交错矩阵。 设 $X^- = (u_{i,j})$ 是一个一般交错 $m \times m$ 矩阵，其中 $u_{j,i} = -u_{i,j}$ 且 $u_{i,i} = 0$。对于递增序列 $I = (i_1 < \cdots < i_{2a})$，令 $[I]_{\mathrm{Pf}}$ 为阶数为 $2a$ （多项式次数为 a）的主 Pfaffian。次数为 d 的标准 Pfaffian 乘积为

$$T = [I_1]_{\mathrm{Pf}} \cdots [I_s]_{\mathrm{Pf}}, \qquad I_1 \preceq I_2 \preceq \cdots \preceq I_s,$$

w其中 $|I_t| = 2a_t$ 和 $a_1 \ge \cdots \ge a_s > 0$。每个 Pfaffian 贡献一行，长度为 $2a_t$；因此

$$\tau^-(\lambda) = (2a_1, 2a_2, \ldots), \qquad \lambda = (a_1, \ldots, a_s), \quad |\lambda| = d.$$

此杨图的每一行长度都是偶数。

等价地，最高权恰好是 $\sum_{i=1}^{\lfloor m/2 \rfloor} c_i \omega_{2i}$ 的非负整数线性组合。次数一时，杨图形状为 (2)，最高权为 ω_2。

关于整 Pfaffian 整理律以及以下两因子定律，参见 De Concini–Procesi [9, 引理 6.1–6.2 和定理 6.5]。

在任一种情况下，杨表的第一行长度至多为 m；等价地，最高权分拆 $\rho = \tau'$ 至多有 m 个非零部分。

在任一种情况下，多项式次数为 d 的标准杨表构成了 $\mathbb{Z}[u_{i,j}]$ 的次数 d 部分的一组 $\mathbb{Z}$ 基。

对于大小为 $a \ge b$ 的两个子式因子的乘积，或阶数为 $2a \ge 2b$ 的两个 Pfaffian，整理所得的每个标准项至多有两个非空因子，其大小分别为 s_1， s_2 （Pfaffian 情形下为半阶），并且

$$s_1 + s_2 = a + b, \qquad s_1 \ge a.$$

第二个因子可以为空。这些就是我们采用的 De Concini–Procesi [9]整理律；特别参见用于 Pfaffian 的 [9, 定理 6.5] 。

因此，形状为 λ 的乘积整理后只会得到形状 $\mu \succeq \lambda$；特别是，整理不会增加因子的数量。

对于每个 d，次数为 d 且形状属于反支配序下某个下理想的标准杨表所张成的 $\mathbb{Z}$ 子模，是一个 GL(U)-子模。除现在 T 表示单个杨表而非双表外，我们可以沿用公式 (23) 中的记号。

商 F_λ / F_λ^+ 是一个自由阿贝尔群，其基由形状为 λ 的标准杨表的等价类构成，并且是一个 G-模。

$$C_\lambda := F_\lambda / F_\lambda^+ \simeq \nabla_{\tau^\epsilon(\lambda)}(U), \tag{56}$$

其中， λ 是因子大小形状， $\tau^\epsilon(\lambda)$是完整杨表形状。

14. 经典收缩、整分裂与 Weyl 滤过

14.1. **逐系数收缩映射**。按公式 (25) 定义

$$\text{the divided power algebras}\quad D^{\epsilon}_{\mathbb{Z}} := \bigoplus_{d\geq 0} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}((A^{\epsilon}_{\mathbb{Z}})_d, \mathbb{Z}). \tag{57}$$

其中 $A^{+} = \mathbb{Z}[u_{i,j}:\ i \leq j]$，其中 $u_{j,\,i} = u_{i,\,j}$，而 $A^{-} = \mathbb{Z}[u_{i,j}:\ i < j]$，其中 $u_{j,\,i} = -u_{i,\,j}$ 和 $u_{i,\,i} = 0$。

除幂代数的元素记作 $z_i^{[a]}{}_{,\,j}$，它们与 $u^{a}_{i,\,j}$ 对偶。

在正交情形中，令 V^{-} 为维数为 n 的二次模，其基于 $\mathbb{Z}$，标准正交基为$e_1, \ldots, e_n$。

令 $x_{ri}\,(1 \leq r \leq n, 1 \leq i \leq m)$ 为 $E^{-} = \bigwedge(V^{-} \otimes U)$ 的外代数生成元。

在辛情形下，令 V^{+} 为秩为 $2n$ 的辛模，并取一组辛基；令 $x_{a,\,i}$、$y_{a,\,i}(1 \leq a \leq n, 1 \leq i \leq m)$ 为 $E^{+} = \bigwedge(V^{+} \otimes U)$ 的生成元。

在正交情形下按递增的 r 选择外代数总序；在辛情形下按每个辛块中递增的 a 排序，并使每个块中的所有 x_{ai} 均排在所有 y_{ai} 之前。

辛情形下的生成元由公式 (55) 中的整数矩阵 Q 给出 :

$$q_{i,i} = \sum_{a=1}^{n} x_{a,i}y_{a,i}, \quad q_{i,j} = \sum_{a=1}^{n}(x_{a,i}y_{a,j} + x_{a,j}y_{a,i}),\ i \neq j. \tag{58}$$

符号对应于我们对基的选择；改变辛形式的符号会改变整体约定，但不会改变结论。

对于正交群，我们也将生成元记为 $q_{i,\,j}$，而不记为 $t_{i,\,j}\,(i < j)$，以保持记号统一。

公式 (20) 表明存在一个同态 $q^{\epsilon}:\ D^{\epsilon} \to E^{\epsilon}$ 满足

$$q^{\epsilon}(z^{[a]}_{i,j}) = q^{[a]}_{i,j}; \qquad q^{\epsilon}(z^{[\alpha]}) = q^{[\alpha]}, \qquad z^{[\alpha]} = \prod_I z_I^{[\alpha_I]} \in D^{\epsilon},\ q^{[\alpha]} = \prod_I q_I^{[\alpha_I]} \in E^{\epsilon}. \tag{59}$$

定义 G–不变量外值形式

$$\Omega^{-}(u) = \sum_{i<j} u_{i,j} \sum_{r=1}^{n} x_{ri}x_{rj} = \sum_{i<j} u_{i,j}q^{-}(z_{i,j}), \tag{60}$$

$$\Omega^{+}(u) = \sum_{i} u_{i,i} \sum_{a=1}^{n} x_{a,i}y_{a,i} + \sum_{i<j} u_{i,j} \sum_{a=1}^{n}(x_{a,i}y_{a,j} + x_{a,j}y_{a,i}) = \sum_{i\leq j} u_{i,j}q^{+}(z_{i,j}). \tag{61}$$

所有的 s 定义 7.3 和公式 (20)，其中我们注意到

无穷和在此处

截断于相应项的求和项数。

令 $\mathcal{I}_{-} = \{(i,j):\ 1 \leq i < j \leq m\}$，以及 $\mathcal{I}_{+} = \{(i,j):\ 1 \leq i \leq j \leq m\}$。因此，如公式 (35) 所示，我们有有限乘积

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^{\epsilon}(u) &:= q^{\epsilon} Exp\left(\sum_{(i,j)\in\mathcal{I}_{\epsilon}} u_{i,j}z_{i,j}\right) = Exp(\Omega^{\epsilon}(u)) \\ &= \prod_{\substack{\text{individual square-zero} \\ \text{summands } v \text{ of } \Omega^{\epsilon}(u)}} (1+v) = \sum_{\alpha} u^{\alpha}q^{\epsilon}(z^{[\alpha]}) \in A^{\epsilon} \otimes E^{\epsilon}. \end{aligned} \tag{62}$$

该公式具有整数系数；在所示的求和中，单项式 u^{α} 使用独立的上三角坐标（在正交情形下，对角元为 0）。定义与偶因子的排列顺序无关。

注 14.1. 此处的除幂由所示系数定义，而非通过除以阶乘定义。在有理数域 $\mathbb{Q}$ 上，通常的指数恒等式表明 q^{ϵ} 保持除幂乘法；由于源和靶在 $\mathbb{Z}$上都无挠，这些恒等式在整数系数下同样成立。

形式Ω^{ϵ} 在相应的经典群作用下是不变量，因此每个系数都是不变量（等价地，也可使用极化除幂余作用）。

这些映射关于 GL(U) 是等变的，并且具有齐次度 $q^{\epsilon}_{d}:\ D^{\epsilon}_{d} \to E^{\epsilon}_{2d}$。

对于外单项式 M，$(q^{\epsilon}_{d})^{*}(M^{*})$ 是 M 在 $\mathcal{G}^{\epsilon}(u)$ 中的系数，这可由两边与 $z^{[\alpha]}$ 配对得出。

类比引理 9.2，我们有

引理 14.2. 使用上文固定的块序中的外单项式基。用 $Z^{\pm}=(u_{i,j})$ 表示多项式坐标矩阵。用 M^* 表示基单项式 $M\in E^{\epsilon}_{2d}$的对偶。在正交补情形，记作

$$M=\prod_{r=1}^{n}x_{r,I_r},$$

如果 $I=\{i_1<\cdots<i_a\}$，$x_{r,\ I}=x_{r,\ i_1}\cdots x_{r,\ i_a}$，其中空积为 1。

某些 I_r 可能为空。于是

$$(q_d^-)^*(M^*)=\begin{cases}\prod_{r=1}^{n}\mathrm{Pf}(Z^-_{I_r}), & |I_r|\ \textit{is even for all } r,\\ 0, & \textit{otherwise.}\end{cases}\tag{63}$$

空矩阵的 ***Pfaffian*** 为 1。

在辛情形中，记作

$$M=\prod_{r=1}^{n}x_{r,I_r}y_{r,J_r},$$

其中，若 $I=\{i_1<\cdots<i_a\}$（分别地，$J=\{j_1<\cdots<j_b\}$），则 $x_{r,\ I}=x_{r,\ i_1}\cdots x_{r,\ i_a}$（分别地，$y_{r,\ J}=y_{r,\ j_1}\cdots y_{r,\ j_b}$，其中空积为 1。于是

$$(q_d^+)^*(M^*)=\begin{cases}(-1)^{\sum_{r=1}^{n}\binom{|I_r|}{2}}\prod_{r=1}^{n}\det Z^+_{I_r,J_r}, & |I_r|=|J_r|\ \textit{for all } r,\\ 0, & \textit{otherwise.}\end{cases}\tag{64}$$

空矩阵的行列式为1。

特别地，非零坐标是至多 n 个主子式的 ***Pfaffian*** 的乘积，或者至多 n 个对称子式的行列式的乘积，且没有额外的重数。

证明。 我们直接证明这两个恒等式，包括系数归一化。

根据 (62)–(59) 中的定义，对于每个外次数为 $2d$ i 的外代数基单项式 M ts 系数 在 $\mathcal{G}^{\epsilon}(u)$ 中等于

$$\langle M^*,\mathcal{G}^{\epsilon}(u)\rangle=\langle M^*,q^{\epsilon}Exp(\sum_{(i,j)\in\mathcal{I}_{\epsilon}}u_{i,j}z_{i,j})\rangle=\sum_{\alpha}u^{\alpha}\langle(q^{\epsilon})^*(M^*),z^{[\alpha]}\rangle.$$

由于 A^{ϵ}_d 的单项式基与 D^{ϵ}_d的除幂基互为对偶，这就证明了 th at

$$(q^{\epsilon}_d)^*(M^*)=\sum_{|\alpha|=d}u^{\alpha}\langle(q^{\epsilon}_d)^*(M^*),z^{[\alpha]}\rangle.\tag{65}$$

其中右侧的多项式被视为 A^{ϵ}_d中的多项式。

正交情形。 按正交基索引分解生成乘积:

$$\mathcal{G}^-(u)=\prod_{r=1}^{n}G^-_r(u),\qquad G^-_r(u)=\prod_{1\le i<j\le m}(1+u_{i,j}x_{r,i}x_{r,j}).$$

G^-_r 中的每个非恒定选取因子恰好使用 r第 r 个块的两个 x–生成元。因此，预先指定的块单项式 $x_{r,\ I}$ 若 $|I|$ 为奇数，其系数为零。

假设 $I=\{i_1<\cdots<i_{2a}\}$。要使 $x_{r,\ I}=x_{r,\ i_1}\cdots x_{r,\ i_{2a}}$ 的系数有非零贡献，必须恰好选取 a 个因子，使其无序指标对构成 I 的一个完美匹配。

反过来，每个完美匹配都唯一确定一组这样的因子，这些因子的指标两两不相交，因此会得到一个非零外积。

所有选取的因子外次数均为偶数，因此对它们重新排序不会影响符号。

单个匹配的符号恰好等于将其 $2a$ 个奇变量按 $x_{r,\ i_1}\cdots x_{r,\ i_{2a}}$ 排序所需置换的符号。

Pfaffian 的定义性匹配展开 is

$$\mathrm{Pf}(Z^-_I)=\sum_{\mathfrak{m}}\mathrm{sgn}(\mathfrak{m})\prod_{\{i,j\}\in\mathfrak{m},\ i<j}u_{i,j},$$

其中求和遍历完全匹配，匹配符号是根据 I 的递增顺序计算的。

由此我们推得， $[x_{r,I}]$ 在 $G_r^-(u)$中的系数等于 $\mathrm{Pf}(Z_I^-)$，其中每个匹配恰好出现一次，系数为 1 或 -1。

这些块变量彼此不相交，且 M 的块排序固定。将这些恒等式对r 相乘，即得 (63)。

辛情形。类似地，写作

$$\mathcal{G}^+(u)=\prod_{r=1}^{n} G_r^+(u), \qquad G_r^+(u)=\left(\prod_{i=1}^{m}(1+u_{i,i}x_{r,i}y_{r,i})\right)\left(\prod_{1\le i<j\le m}(1+u_{i,j}x_{r,i}y_{r,j})(1+u_{i,j}x_{r,j}y_{r,i})\right).$$

这就是定义 q^+的乘积的因式分解：涉及$u_{i,\ j}$ 的两项是彼此独立的偶平方为零外因子。另请注意，对角因子的系数为 1，这与前文引入的对角辛不变量的归一化一致。

每个 s 选定的非恒定因子使用一个 x 和一个 y。因此，$x_{r,I}y_{r,J}$的系数 in $G_r^+(u)$ is 0 除非 $|I|=|J|$.

设 $I=\{i_1<\cdots<i_a\}$ 以及 $J=\{j_1<\cdots<j_a\}$。任何恰好产生 $x_{r,I}y_{r,J}$的选取，都必须恰好使用每个 x_{r,i_p} 和每个 y_{r,j_q} 一次。

Such 选取与排列 $\sigma\in S_a$一一对应：对于每个 p，选取包含 g

$$u_{i_p,j_{\sigma(p)}}x_{r,i_p}y_{r,j_{\sigma(p)}}.$$

事实上，对于每个有序对 (i,j)，恰好有一个因子包含项 $u_{i,j}x_{r,i}y_{r,j}$：当 $i=j$时为对角因子，当 $i\neq j$时为两个非对角因子之一，其中 $u_{j,i}=u_{i,j}$。因此，每个排列都恰好给出一个选取，即使 $I\cap J$ 非空也是如此。

由于选定的因子具有偶数外次数，我们可以重新排列它们，使指标 i_p 按递增顺序出现，而不改变符号。

将所有 y 移到所有 x 之后，需要交换奇变量 $\binom{a}{2}$ 次；而将 y 按递增顺序排列，则产生符号 $\mathrm{sgn}(\sigma)$。

因此， $G_r^+(u)$ 中 $x_{r、I}y_{r、J}$ 的系数等于

$$(-1)^{\binom{a}{2}}\sum_{\sigma\in S_a}\mathrm{sgn}(\sigma)\prod_{p=1}^{a}u_{i_p,j_{\sigma(p)}}=(-1)^{\binom{a}{2}}\det Z^+_{I,J}.$$

该公式对 $a=0$ 也成立。

不同的 r 块涉及互不相交的外代数生成元，且块排序是固定的。因此，进行乘法即可证明 (64)，并且符号恰如所述。非空因子的数量限制直接由块的数量得出。

□

14.2. 核、分裂与基变换。引理 14.2 得证后，第 9 节的论证只需稍作适当修改即可应用。

为简化记号，在正交（分别地，辛）情形下，我们将不再写作 $(q_d^-)^*$ （分别地，$(q_d^+)^*$），而写作 $(q_d^\varepsilon)^*$，其中 $\varepsilon=\pm1$。

我们保留第 3 节中的可容许性条件，并采用第 13 节的杨表约定来表述。因此，相应的杨表形状在正交情形下具有偶数行，在辛情形下具有偶数列，同时满足该节所规定的维数限制。等价地，在第 13 节的因子大小记号 $\lambda=(a_1、\ldots\ldots、a_s)$ 中，可容许性要求 $s\le n$，其中 n 是引理 14.2 中出现的块数。我们将次数为 d 的可容许标准杨表集合记为 $\mathcal{T}^{\varepsilon}_{n,\ d}$。

引理 14.3。对于每个可容许标准杨表 T，存在一个外代数基单项式 M，使得

$$(q_d^\varepsilon)^*(M^*)=\pm T.$$

证明。将引理 14.2 的构造应用于 T 的各个连续因子。 □

那么在这两种情况下

定理 14.4。

$$\operatorname{im}(q_d^\epsilon)^* = \bigoplus_{S\in\mathcal{T}^\epsilon_{n,d}} \mathbb{Z}S; \quad \ker q_d^\epsilon = \bigoplus_{S\in\mathcal{T}^\epsilon_{d}\setminus\mathcal{T}^\epsilon_{n,d}} \mathbb{Z}S^\vee, \tag{66}$$

$$\mathrm{Div}^\epsilon_{\mathbb{Z},d} := \operatorname{im} q_d^\epsilon = \bigoplus_{T\in\mathcal{T}^\epsilon_{n,d}} \mathbb{Z}\, q_d^\epsilon(T^\vee). \tag{67}$$

该像是 E_{2d} 的一个直和项。

证明。 证明重复定理 9.4 的论证，以引理 14.2 和 14.3 代替引理 9.2 和 9.3，并使用相应的直化定理。□

推论 14.5。

(1) $\mathrm{Div}^\epsilon_{\mathbb{Z}} = \operatorname{im} q^\epsilon = (E^\epsilon)^{G_\epsilon}$.*(2)* q^ϵ 的核 I_n 作为 $\mathbb{Z}$–模由对偶于非容许标准杨表之基的元素自由生成。*(3)* 次数为 $2d$ 的不变量空间 $(E^\epsilon_{2d})^{G_\epsilon}$ 有一个由 $\mathrm{GL}(U)$-子模构成的滤过，其关联分次模为

$$\bigoplus_{\lambda\,\text{admissible},\ |\lambda|=d} \Delta_{\tau^\epsilon(\lambda)}(U^*)$$

这些滤子（包括其关联分次模）与基变换相容。

(4) 设 K 是一个域，并且在正交情形下要求 $\operatorname{char} K \neq 2$ 。那么，基变换后的映射诱导出分次 $\mathrm{GL}(U_K)$-代数的同构

$$(D^-\otimes K)/(\ker q^-\otimes K) \simeq \bigwedge (V_K^-\otimes U_K)^{\mathrm{O}(V_K^-)}, \qquad (D^+\otimes K)/(\ker q^+\otimes K) \simeq \bigwedge (V_K^+\otimes U_K)^{\mathrm{Sp}(V_K^+)},$$

其中每个公式都取自相应的情形。

证明。(1) 按构造，缩并像包含于不变子空间中。在特征零的情形下，第一部分回顾的外不变量经典 FFT 将 t 像与不变量等同，因此，由于 $\mathrm{Div}^\epsilon_{\mathbb{Z}}$ 是 E^ϵ 的一个直和项，结论成立。

(2) Th这就是定理 14.4 中的核描述。(3) 这由公式 (56) 取对偶得到，如 in 公式 (3 0).

(4) 根据定理 14.4，空间 $(D^\epsilon\otimes K)/(\ker\ q^\epsilon\otimes K)$ 的秩为 $\#\mathcal{T}^\epsilon_{n,\ d}$ 且基变换后仍为直和项。

定理 12.3 表明，在每一种允许的特征下，不变量的总维数都保持不变。这些空间之间维数相同的单射必为满射。由此可得这些代数陈述。

□

15. 特殊正交群的情形

考虑 $A := V^a = V\otimes U$ 及其标准二次型。选取 V 的一组基，我们将 V^a 中的a向量表示为一个 $n\times a$ 矩阵 X 的各列： $x_i = (x_{1,\ i},\ x_{2,\ i},\ \ldots\ldots,\ x_{n,\ i})$。

设 $M = (\bigwedge A)^{SO(V)}$；群 $\mathbb{Z}/(2) = \mathrm{O}(V)/\mathrm{SO}(V)$ 通过行列式作用于 M，因此我们可以将 $M = M^0\oplus M^1$ 分解为

$$M^0 = (\bigwedge A)^{O(V)} \quad \text{and} \quad M^1 := \{m\in M \mid g\cdot m = \det(g)m,\ \forall g\in O(V)\}.$$

给定一个可容许分拆，即一个偶数行均包含在矩形 $n\times(a-1)$ 中的分拆 λ（补上零行，使其高度为 n），令包含在矩形 $n\times a$ 中的 λ^1 由 λ 添加一列长度为 n 的列得到。分拆 λ^1 有奇数行。

定理 15.1。

(1) M由 $O(V)$ 不变量 $(\bigwedge A)^{O(V)}$ 以及 X 的极大子式的斜行列式 $\det_c$ 生成。*(2)* 空间 M^1 有一个以可容许形状 λ^1 的标准杨表为指标的基。*(3)* 空间 M^1 具有典范滤过，其商为由包含于矩形 $n\times(a-1)$ 中的可容许分拆 λ 标记的 $GL(U)$-模；因此，其伴随分次空间是模 $\Delta_{\lambda^1}(U)$ 的直和。

(4) X 的两个极大子式的两个斜行列式 $\det_c$ 的乘积，是由公式 (50) 给出的 $\mathrm{O}(V)$ 不变量，其中一个经过转置。

这与前一种情形类似。首先注意到，斜行列式 $\det_c$ 是 SO 不变量。

将 SO 不变量分解为 O 不变量与空间 M^1 的直和；后者在 $\det(g)$ $g \in \mathrm{O}(V)$ 作用下按相应方式变换。

添加一个向量 y_{-1}，并将 M^1 乘以 $Y = \prod_{i=1}^{n} y_{i,\,-1}$，从而得到 O 不变量。

按照定理 11.1 中的论证可知，如此得到的 O 不变量与标准杨表（偶数行）相关，且长度为 n 的第一列填入 -1。因此第二列的长度也为 n。

于是，这个不变量具有如下形式 $Y[i_1, \cdots\ i_n]P$，其中 $[i_1, \cdots\ i_n]$ 是一个斜行列式（由第二列描述），而 P 是一个 $O(V)$-不变量。这就证明了 (1)。其余结论的证明与定理 11.1 中的论证相同，留给读者完成。

16. 一个一般问题

在这一短节中，我们想概述在特征零时将格拉斯曼变量与对称变量混合后会发生什么。关于正特征的情形，我们所知甚少。

这在 $GL(V)$ 不变量的情形下，意味着研究以下对象的不变量理论

$$\bigwedge(V \otimes U_1) \otimes \bigwedge(V^* \otimes W_1) \otimes S(V \otimes U_2) \otimes S(V^* \otimes W_2). \tag{68}$$

也就是说，向量 v_1、$\cdots$ v_h；v_{h+1}、$\cdots$ v_m，其中前 v_i个， $i \le h$ 是费米子，其余是玻色子；余向量 ϕ_1、$\cdots$ ϕ_k；ϕ_{k+1}、$\cdots$ ϕ_p 也有类似的条件。

通过 Aronhold 方法，在特征零下我们仍有生成不变量 $t_{i,\,j} = \langle \phi_i \mid v_j \rangle$，只是现在 $t_{i,\,j}$ 既可以是偶的，也可以是奇的；第二基本定理也没有那么明确的表述，因为必须对公式 (68) 的所有四个因子使用柯西公式（例如见 [20]）。

这显然通过一般的 Clebsch–Gordan 或 Littlewood–Richardson 公式，尽管 Aronhold 方法仍能给出多重线性关系的描述。

事实上，Grosshans、Rota 和 Stein 针对这种情况提出了一套一般的、但尚未得到充分理解的混合标准杨表理论 [16]，它或许能提供一些启示，但超出了本文的范围。

参考文献

[1] S. Abeasis，《$GL(V)$–不变量理想，见 $S(S^2V)$》Rend. Mat. (6) 13 (1980), no. 2, 235–262. [2] S. Abeasis 和 A. Del Fra，杨图与 Pfaffian理想，Adv. in Math. 35 (1980), no. 2, 158–178. [3] K. Akin、D. A. Buchsbaum 和 J. Weyman，Schur函子与 Schur复形，Adv. in Math. 44 3, 207 1982 278 ( ), no. – .[4] J. Brundan，稠密轨道与双陪集，载于《代数群及其表示》（剑桥，1997），259–274，NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C: Math. Phys. Sci., 517，Kluwer Acad. Publ.，多德雷赫特，1998。[5] W. Bruns 和 U. Vetter，《行列式环》，数学讲义 1327，施普林格，1988。[6] M. Clausen，支配序、Capelli算子与双行列式标准化，European J. Combin. 5 (1984), no. 3, 207–222.[7] B. Conrad、O. Gabber 和 G. Prasad，《伪约化群》，第二版，新数学专著，26，剑桥大学出版社，剑桥，2015；附录 C（C.1 节：经典群）。[8] B. Conrad，《约化群概形》，载于《群概形专题》，第 I 卷，93–444，Panor. Synthèses, 42/43，法国数学会，巴黎，2014。[9] C. De Concini 和 C. Procesi，以无特征方法研究不变量理论，Advances in Math. 21 3, 330 1976 354 ( ), no. – .[10] C. De Concini、D. Eisenbud 和 C. Procesi，杨图与行列式簇，Invent. Math. 56 (1980), no. 2, 129–165.[11] C. De Concini、D. Eisenbud、C. Procesi，《Hodge代数》，Astérisque 91 (1982). [12] C. De Concini、C. Procesi，《矩阵不变理论》，美国数学会大学讲座丛书，第 69 卷，151 页（2017）。[13] M. Demazure，《根数据》，载于 M. Artin 等人编《群概形》第 6 分册：第 19 至 22 篇讲义，第 21 篇讲义，高等科学研究所，巴黎，1965。[14] S. Donkin，《代数群的有理表示：张量积与滤子》，数学讲义 1140，施普林格出版社，柏林，1985。[15] W. Fulton，《杨表：及其在表示论与几何学中的应用》，伦敦数学学会学生文本 35，剑桥大学出版社，剑桥，1997。[16] Grosshans, F. D.; Rota, G.-C.; Stein, J. A.，《不变量理论与超代数》，数学会区域会议丛书，第 69 卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1987。

[17] J. C. Jantzen, 《代数群的表示》，第 2 版，数学调查与专著**107**，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2003。[18] O. Mathieu, 《滤过 G-模》，高等师范学校科学年刊（第 4 辑）**23** (1990), no. 4, 625–644。[19] O. T. O'Meara, 《二次型导论》，1973 年版重印，数学经典，施普林格，柏林，2000。[20] A. N. Sergeev, 李超代数的经典不变量理论类比，I、II，密歇根数学杂志**49** (2001), no. 1, 113–146, 147–168。[21] J. P. Wang, 《关于 G/B 的层上同调与 *Weyl*模的张量积》，代数杂志**77** (1982), no. 1, 162–185。[22] H. Weyl, 《《经典群》：其不变量与表示》，附补编第 2 版，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1946。

罗马智慧大学"圭多·卡斯特尔诺沃"数学系