arXiv:2611.32328v1 [math.FA] 24 Nov 2026

关于切片的注记

Boaz Klartag 和 Joseph Lehec

摘要

我们为 Bourgain 切片定理给出一个简短证明，并对每个凸体 K 给出显式界 $L_K \leq \sqrt{5/\pi}$。该论证结合了通过 Chen 和 Klartag 的矩测度方法获得的强薄壳不等式，以及沿着 Eldan 的随机局部化得到的熵估计。证明既不使用 M-椭球理论，也不使用反向 Santaló 不等式。

1 引言

Bourgain 切片问题询问：是否存在一个普适常数 $c > 0$，使得每个体积为一的凸体 $K \subset \mathbb{R}^n$ 都有一个超平面截面，其 $(n-1)$ 维体积至少为 c。下文中，凸体指具有非空内部的紧凸集。一个等价表述是，各向同性常数

$$L_K = \frac{\det(\mathrm{Cov}(K))^{1/(2n)}}{|K|^{1/n}} \tag{1}$$

有一个普适常数上界，且该上界与 n 和 K 无关。这里，$\mathrm{Cov}(K)$ 表示 K 上均匀概率测度的协方差，而 $|K|$ 是 K 的体积。量L_K 是仿射不变量。当 K 上的均匀概率测度是各向同性的，也就是说，其重心为零且协方差矩阵等于单位矩阵时，我们有 $L_K = |K|^{-1/n}$。有关各向同性常数及其与超平面截面的关系的背景介绍，请参见 Milman 和 Pajor [28]。

切片定理加强了 Milman 关于 M-椭球的理论 [27]。该理论的一种表述指出，存在一个椭球 $\mathcal{E}$，满足 $|\mathcal{E}| = |K|$，使得 $N(K, \mathcal{E}) \leq C^n$，其中$N(K, \mathcal{E})$ 是覆盖 K 所需的 $\mathcal{E}$ 的平移副本的最小数量，而 C是一个普适常数。当欧几里得球具有这一性质时，我们称 K 处于 M-位置。初等体积论证表明，当 K 是各向同性的，且 D 是满足 $|D| = |K|$ 的中心欧几里得球时，

$$N(K, D) \leq \exp(C' n L_K),$$

其中 C' 是普适的；例如参见 [15, 引理 3.4]。因此，对 L_K 的统一上界会使D成为一个 M-椭球 K，所以各向同性位置是一种 M-位置。由此，不借助 M-椭球来证明切片猜想，也能得到它们的存在性。

切片问题起源于 Bourgain 在20世纪80年代的工作 [6]。他得到的阶为 $n^{1/4} \log n$ [7] 的界，后来被 Klartag [20] 利用指数倾斜改进为 $n^{1/4}$。随后

相关进展与另外两个关于对数凹测度的问题密切相关。Kannan–Lovász–Simonovits（KLS）猜想 [19], 的庞加莱表述断言，每个各向同性对数凹概率测度 μ 对于每个局部 Lipschitz 函数f，都满足

$$\mathrm{Var}_\mu(f) \le C \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)|^2 \, d\mu(x) \tag{2}$$

具有一个普适 C。Ball 和 Nguyen [2] 证明了这蕴含切片猜想。薄壳猜想要求：当 X 为各向同性且对数凹时， $\mathbb{E}(|X| - \sqrt{n})^2$ 具有普适上界。等价地，在相差普适常数的意义下，它要求 $\mathrm{Var}(|X|^2) \le Cn$；见 [17]。这可由（2）应用于欧几里得范数（或其平方）推出；Eldan 和 Klartag [14] 证明了薄壳猜想同样蕴含切片猜想。

Eldan 的随机局部化 [13] 为研究这些问题提供了强有力的工具。Chen [10]得到了 KLS 的次多项式界，因而也得到了切片猜想的次多项式界。随后，Klartag 和 Lehec [22]得到了多重对数界。基于 Guan [16],的协方差估计，Klartag 和 Lehec [23] 证明了切片定理。随后，Bizeul [3] 通过小球估计给出了一种证明。第一种证明直接使用 M-椭球；在第二种证明中，椭球是通过 Dafnis 和 Paouris [12] 从小球估计到切片猜想的约化引入的。

Klartag 和 Lehec [25]随后证明了薄壳猜想，这为通过 [14]研究切片问题提供了另一条途径。后一推论用到了反向 Santaló 不等式。最近，Chen 和 Klartag [11] 给出了一个人工智能辅助证明，证明了 $\mathrm{Var}(|X|^2) \le 8n$的尖锐上界。他们的方法使用最优传输和对数凹矩测度，而非随机局部化。正如 Bizeul [4], 所指出的，该方法对所有二次型（而不仅仅是欧几里得范数的平方）都能给出类似估计。我们将在第 2 节回到这一问题。Brazitikos [8]发展了一种基于二次倾斜的确定性方法；Brazitikos 和 Milman [9] 则利用中心高斯倾斜，从薄壳界推出小球估计。从这些估计到切片问题的几何过渡，可以借助 Dafnis–Paouris 约化，或采用 [8], 中的另一种补全方法，后者用到了反向 Santaló 不等式。因此，这些方法仍依赖于 M椭球理论或与之密切相关的反向 Santaló 理论。KLS 猜想最近在三篇同期发表的论文中得到解决，作者分别是 Balasubramanian 和 Kasiviswanathan [1], 、Bizeul、Klartag 和 Lehec [5],，以及 Song 和 Zhang [30]。

本注记旨在简要说明如何从 (3) 推出切片猜想；这一推导既不依赖这两种几何输入，也给出了一个显式常数。

定理 1（切片猜想）。对每个凸体 $K \subset \mathbb{R}^n$,

$$L_K \le \sqrt{\frac{5}{\pi}}.$$

论证可概括如下。强薄壳界控制每个各向同性对数凹测度的三阶矩张量。在随机局部化过程中，这给出了条件协方差的对数行列式期望的下界。随后，通过变量替换，可将这一对数行列式期望与各向同性常数联系起来。

第 2 节回顾证明中使用的累积量界和随机局部化恒等式。第 3 节证明定理 1。

最后，一篇 OpenAI 预印本 [29] 声称得到了锐不等式 $L_K \le L_{\Delta_n}$，其中 Δ_n 是一个n维单纯形。我们不在此评估该证明，也不使用其中的任何结果。然而请注意，由于

$$L_{\Delta_n} = \frac{n!^{1/n}}{(n+1)^{\frac{n+1}{2n}}\sqrt{n+2}} \to \frac{1}{\mathrm{e}}$$

当 n趋于无穷时，我们的常数 $\sqrt{5/\pi}$ 超过渐近最优值的 $\mathrm{e}\sqrt{5/\pi} \simeq 3.43$ 倍。

2 预备知识

三阶累积量界。 Chen 和 Klartag [11] 证明了，每个各向同性对数凹随机向量 X 在 $\mathbb{R}^n$ 中都满足

$$\mathrm{Var}(|X|^2) \le 8n.$$

当 X 的各坐标相互独立，且为方差为一的中心化指数随机变量时，等号成立。他们的证明基于最优传输，更具体地说，基于对数凹矩测度。Letwin [26]通过一个复杂的论证证明了以下各向异性形式。它也可由 Chen 和 Klartag 的论证经过简单修改得到；参见 Bizeul [4]。对于每个各向同性对数凹随机向量 X 在 $\mathbb{R}^n$ 中，以及每个对称矩阵A,

$$\mathrm{Var}(\langle AX, X\rangle) \le 8\,\mathrm{Tr}\big[A^2\big]. \tag{3}$$

根据 [4], ，我们得到关于各向同性对数凹测度在 $\mathbb{R}^n$上的三阶累积量的一个普适界。给定这样的测度 μ，令

$$\kappa_3(\mu) = \sup_{\theta\in\mathbb{S}^{n-1}} \left\{\|\mathbb{E}[\langle X,\theta\rangle X\otimes X]\|\right\},$$

其中 $X\sim\mu$，范数是矩阵 $\mathbb{E}[\langle X,\theta\rangle X\otimes X]$ 的欧几里得（希尔伯特–施密特）范数。

定理 2. 对于每个正整数 n 以及定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的每个各向同性对数凹概率测度 μ，我们有

$$\kappa_3(\mu) \le 2\sqrt{2}.$$

证明. 固定 $\theta\in\mathbb{S}^{n-1}$，并令 $X\sim\mu$。设 $H=\mathbb{E}[\langle X,\theta\rangle X\otimes X]$ 为一个对称矩阵。由各向同性可知，$\langle X,\ \theta\rangle$ 的期望为零，方差为一。由柯西–施瓦茨不等式和 (3) 得

$$\mathrm{Tr}\,H^2 = \mathbb{E}[\langle X,\theta\rangle\langle HX,X\rangle] \le (\mathrm{Var}(\langle HX,X\rangle))^{1/2} \le (8\cdot\mathrm{Tr}\,H^2)^{1/2},$$

因此（$\mathrm{Tr}\,H^2$）$^{1/2}\le 2\sqrt{2}$。对 θ 取上确界即可证明该结果。 □

参数

$$\kappa_3^*(n) := \sup\{\kappa_3(\mu) : \mu \text{ 在 } \mathbb{R}^n\} \text{ 上是各向同性且对数凹的}$$

由 Eldan [13] 在研究随机局部化和 KLS 时引入。记 $C_P(\mu)$ 为 $\mathrm{Var}_\mu(f) \le C_P(\mu) \int |\nabla f(x)|^2 \, d\mu(x)$ 中的最佳常数，则 Klartag [21]的估计给出

$$C_P(\mu) \le C\sqrt{\log n}\,\kappa_3^*(n)$$

对于各向同性对数凹的 μ。因此，定理 2 得到了 KLS常数的 $O((\log n)^{1/4})$ 界；参见 [26]。这一推论已被 [1, 5,30] 中近期的无维数依赖结果所取代。

事实上，将定理 2 推广到高阶累积量，是这些证明 KLS 猜想的工作所共有的做法。对于 $m \ge 2$，定义

$$K_m(\mu) = \nabla^m \log \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{\langle z,x\rangle} \, d\mu(x)\Big|_{z=0}$$

and

$$\kappa_m(\mu) = \sup_{\theta\in\mathbb{S}^{n-1}} \left(\sum_{i_1,\dots,i_{m-1}=1}^{n} K_m(\mu)(e_{i_1},\dots,e_{i_{m-1}},\theta)^2 \right)^{1/2},$$

其中 (e_i) 是一组标准正交基。对于各向同性的 μ，我们有 $\kappa_2(\mu) = 1$，而 κ_3的定义与上文一致。这三项工作 [1, 5, 30] 以不同形式证明了如下界

$$\kappa_m(\mu) \le (Cm)^m, \qquad m \ge 2,$$

其中 C 为一个普适常数，对每个各向同性对数凹测度 μ 均成立。这些高阶估计用于获得 $C_P(\mu)$ 的一个普适上界。

随机局部化。我们简要回顾随机局部化的构造，详细内容参见 [24, 第 6 节和第 7.1–7.2] 节。

设 $K \subset \mathbb{R}^n$ 为一个凸体。设 X 为在 K 上均匀分布的随机向量，且 $(W_t)_{t\ge 0}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中与 X 独立的标准布朗运动。令

$$\theta_t = tX + W_t,$$

并令 $\mathcal{F}_t = \sigma(\theta_s : 0 \le s \le t)$ 为观测滤过。令 μ_t 为在给定 $\mathcal{F}_t$ 条件下 X 的条件分布，并令 a_t 为 μ_t 的重心：

$$a_t = \int_{\mathbb{R}^n} x \, d\mu_t(x) = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_t].$$

直接计算可得，μ_t 的密度为

$$p_t(x) = \frac{d\mu_t}{d\mu_0}(x) = \exp\left(\langle \theta_t, x\rangle - \frac{t}{2}|x|^2 - \Lambda_t(\theta_t) \right),$$

相对于 μ_0 上的均匀概率测度，其中

$$\Lambda_t(\theta) = \log\left[\mathbb{E}\exp\left(\langle\theta, X\rangle - \frac{t}{2}|X|^2\right)\right]$$

是对数- 高斯倾斜的拉普拉斯变换。对积分号下求导可得

$$a_t = \nabla\Lambda_t(\theta_t), \qquad \nabla^2\Lambda_t(\theta_t) = \mathrm{Cov}(\mu_t) =: A_t.$$

滤波理论表明，由下式给出的过程 (B_t)

$$B_t = \theta_t - \int_0^t a_s\, ds, \qquad t > 0,$$

相对于 $(\mathcal{F}_t)$ 是标准布朗运动；例如参见 [25]。因此，(θ_t) 满足随机微分方程

$$d\theta_t = dB_t + a_t\, dt = dB_t + \nabla\Lambda_t(\theta_t)\, dt.$$

对于任意有界测试函数 φ，过程

$$M_t := \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, d\mu_t(x) = \mathbb{E}[\varphi(X) \mid \mathcal{F}_t]$$

是一个鞅，并具有伊藤表示

$$M_t - M_0 = \int_0^t \langle v_s, dB_s\rangle, \qquad v_t = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)(x - a_t)\, d\mu_t(x).$$

将该单位矩阵应用于线性函数和二次函数，并使用伊藤公式，可得协方差方程

$$dA_t = \sum_{i=1}^n H_{i,t}\, \langle dB_t, e_i\rangle - A_t^2\, dt,$$

其中 e_1，.....， e_n 是 $\mathbb{R}^n$ 的标准基，并且

$$H_{i,t} = \int_{\mathbb{R}^n} (x - a_t) \otimes (x - a_t)\langle x - a_t, e_i\rangle\, d\mu_t(x), \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{4}$$

对于任意光滑函数 f，伊藤微积分给出：$(0, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} d\,\mathrm{Tr}\, f(A_t) = &\sum_{i=1}^n \mathrm{Tr}\big[f'(A_t)H_{i,t}\big]\, \langle dB_t, e_i\rangle - \mathrm{Tr}\big[f'(A_t)A_t^2\big]\, dt \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{i,j,k=1}^n \frac{f'(\lambda_{i,t}) - f'(\lambda_{j,t})}{\lambda_{i,t} - \lambda_{j,t}}\, \xi_{ijk,t}^2\, dt, \end{aligned} \tag{5}$$

其中 $\lambda_{i,\,t}$ 是 A_t 的特征值，而 $\xi_{ijk,\,t}$ 是张量的坐标

$$\int_{\mathbb{R}^n} (x - a_t)^{\otimes 3}\, d\mu_t(x)$$

在相应的标准正交特征基下。当两个特征值相等时，差商定义为 $f''(\lambda_{i,\,t})$。

在适当的可积性条件下，随机积分确实是一个鞅。例如，当 $f(x) = x$ 时，由于 K 有界，这一点便成立，因为此时 μ_t 的所有中心矩都一致有界。取期望可得

$$\frac{d}{dt}\mathbb{E}\,\mathrm{Tr}\,A_t = -\mathbb{E}\,\mathrm{Tr}\,A_t^2,$$

因此 $\mathbb{E}\,\mathrm{Tr}\,A_t$ 递减。由于 $A_0 = \mathrm{Cov}(K)$，在各向同性情形下，我们得到

$$\mathbb{E}\,\mathrm{Tr}\,A_t \le n, \qquad t \ge 0. \tag{6}$$

下一节中，我们将（5）应用于 $f(x) = \log x$。我们还将说明在这种情况下鞅性质仍然成立，尽管 f' 在零点处是奇异的。

3 切片证明

量 L_K 是仿射不变量，因此我们可以假设 K 是各向同性的，也就是说，重心位于 0，且 K 上均匀概率测度的协方差矩阵为单位矩阵。

用 $S(Y) = -\int_{\mathbb{R}^n} p(x) \log p(x)\, dx$ 表示密度为 p的随机向量 Y的微分熵。对于 $t > 0$，随机向量 a_t 的支撑集为 K，因此其熵满足

$$S(a_t) \le S(X) = \log |K|.$$

回忆一下，$a_t = \nabla \Lambda_t(\theta_t)$ 和 $\nabla^2 \Lambda_t(\theta_t) = A_t$。$\Lambda_t$ 的海森矩阵正定，因此 $\nabla \Lambda_t$ 是一一映射，并且是从 $\mathbb{R}^n$ 到 K内部的微分同胚。变量替换得到

$$S(a_t) = S(\theta_t) + \mathbb{E} \log \det A_t.$$

回忆一下，条件化会降低熵，因此 $S(tX + W_t) \ge S(tX + W_t \mid X) = S(W_t)$，于是

$$S(\theta_t) = S(tX + W_t) \ge S(W_t) = \frac{n}{2}\log(2\pi \mathrm{e}) + \frac{n}{2}\log t.$$

综合以上结果，得到

$$\log |K| \ge \frac{n}{2}\log(2\pi \mathrm{e}) + \frac{n}{2}\log t + \mathbb{E} \log \det A_t. \tag{7}$$

接下来我们估计 $\log \det A_t$。注意

$$\log \det A_t = \mathrm{Tr} \log A_t = \sum_k \log \lambda_{k,t},$$

其中 $0 < \lambda_{1,\,t} \le \ldots \le \lambda_{n,\,t}$ 是 A_t 的特征值，并按照其重数重复计算。根据各向同性，$A_0 =$ 协方差(K) $=\mathrm{Id}$。对于 $f(x) = \log x$，公式 (5) 给出

$$\log\det A_t = M_t + \int_0^t \mathcal{D}_s\,ds,$$

其中 M_t 是一个连续局部鞅，且 $M_0 = 0$，并且

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_t &= -\operatorname{Tr} A_t - \frac{1}{2}\sum_{ijk}\frac{\xi_{ijk,t}^2}{\lambda_{i,t}\lambda_{j,t}}\\ &= -\operatorname{Tr} A_t - \frac{1}{2}\sum_{ijk}\lambda_{k,t}\chi_{ijk,t}^2.\end{aligned}$$

这里，$\chi_{ijk,\,t} = \xi_{ijk,\,t}/\sqrt{\lambda_{i,\,t}\lambda_{j,\,t}}\lambda_{k,\,t}$ 是 μ_t 的中心化的各向同性像的三阶矩张量的坐标，所用基使得 A_t 对角化。由于该像是对数凹的，定理 2 给出

$$\sum_{ij}\chi_{ijk,t}^2 \le 8$$

对任意 k 和 t，几乎必然成立。因此，

$$\mathcal{D}_t \ge -\operatorname{Tr} A_t - 4\sum_k \lambda_{k,t} = -5\operatorname{Tr} A_t,$$

因此

$$\log\det A_t \ge M_t - 5\int_0^t \operatorname{Tr} A_s\,ds. \tag{8}$$

此外，M 是一个均值为零的真正鞅。事实上，由 (5) 得，

$$dM_t = \langle v_t, dB_t\rangle, \qquad v_t = \sum_{i=1}^n \operatorname{Tr}(A_t^{-1}H_{i,t})e_i,$$

其中 (e_i) 是标准基，矩阵$H_{i,\,t}$ 定义于 (4) 中。在 A_t 的标准正交特征基下计算可得

$$|v_t|^2 = \sum_k \lambda_{k,t}\left(\sum_i \chi_{iik,t}\right)^2.$$

由柯西–施瓦茨不等式和界 $\sum_{ij}\chi_{ijk,t}^2 \le 8$，

$$\left(\sum_i \chi_{iik,t}\right)^2 \le n\sum_i \chi_{iik,t}^2 \le n\sum_{ij}\chi_{ijk,t}^2 \le 8n.$$

因此 $|v_t|^2 \le 8n\mathrm{Tr}\, A_t$，根据 (6)，

$$\mathbb{E}\int_0^t |v_s|^2\, ds \le 8n \int_0^t \mathbb{E}\,\mathrm{Tr}\, A_s\, ds \le 8n^2 t < +\infty.$$

因此，M 在每个有限时间区间上都是平方可积鞅。特别地，对每个 $t \ge 0$，$\mathbb{E}M_t = 0$。对 (8) 取期望并利用 (6)，得到

$$\mathbb{E}\log\det A_t \ge -5\int_0^t \mathbb{E}\,\mathrm{Tr}\, A_s\, ds \ge -5nt.$$

代入 (7) 得到

$$\log|K| \ge \frac{n}{2}\log(2\pi \mathrm{e}) + \frac{n}{2}\log t - 5nt,$$

对每个正的 t 都成立。取使其达到最大值的 $t = 1/10$，得到

$$L_K = \frac{1}{|K|^{1/n}} \le \sqrt{\frac{5}{\pi}}.$$

注 3。同样的论证可以得到一个更好的常数。首先，写作 $m(t) = \mathbb{E}\mathrm{Tr}\, A_t$，协方差方程给出

$$m'(t) = -\mathbb{E}\,\mathrm{Tr}\, A_t^2 \le -\frac{m(t)^2}{n}, \qquad m(t) \le \frac{n}{1+t}.$$

还可以利用 Guo、Shamai 和 Verdú 的 I–MMSE 恒等式 [18]，保留精确的熵贡献：

$$S(\theta_t) = \frac{n}{2}\log(2\pi \mathrm{e} t) + \frac{1}{2}\int_0^t m(s)\, ds.$$

结合这些改进可得

$$L_K \le \left(\frac{(1+t)^9}{2\pi \mathrm{e} t}\right)^{1/2},$$

并选择 $t = 1/8$ 得到 $L_K \le \left(9^9/(2\pi \mathrm{e}\, 8^8)\right)^{1/2} \simeq 1.163$。这些改进距离单纯形值仍相去甚远。

人工智能工具的使用。除最后一条涉及 I–MMSE 恒等式的评论外，所有数学内容均由作者完成；最后一条评论由人工智能代理发现。人工智能工具还被用于根据作者提供的大纲和详细指示起草部分论述，并润色措辞。

参考文献

[1] Krishnakumar Balasubramanian 和 Shiva Kasiviswanathan。《各向同性对数凹测度的庞加莱常数的无维界》，2026 年。预印本，arXiv:2610.07728。[2] Keith Ball 和 Van Hoang Nguyen。《各向同性对数凹随机向量的熵跃迁与谱隙》。《数学研究》，213(1):81–96，2012 年。[3]Pierre Bizeul。《通过小球估计证明切片猜想》，2025 年。预印本，arXiv:2501.06854；即将在《概率年刊》发表。[4] Pierre Bizeul。《凸体的最优 MM^*界》，2026 年。预印本，arXiv:2607.29458。[5] Pierre Bizeul、Boaz Klartag 和 Joseph Lehec。《给出 Kannan–Lovász–Simonovits 猜想的一个证明》，2026 年。预印本，arXiv:2610.05474。[6] Jean Bourgain。《关于与凸体相关的高维极大函数》。《美国数学杂志》，108(6):1467–1476，1986 年。[7] Jean Bourgain。《关于多项式在高维凸集上的分布》。载于《泛函分析的几何方面（*1989–90*）》，第 1469 卷《数学讲义》，第 127–137 页。Springer，1991 年。[8] Silouanos Brazitikos。《切片定理的一个确定性证明》，2026 年。预印本，arXiv:2608.14342。[9] Silouanos Brazitikos 和 Emanuel Milman。《薄壳通过高斯倾斜蕴含小球偏差》，2026 年。预印本，arXiv:2608.20816。[10] Yuansi Chen。《KLS 猜想中等周系数的一个近似常数下界》。《几何与泛函分析》，31(1):34–61，2021 年。[11] Yuansi Chen 和 Boaz Klartag。《解读尖锐薄壳不等式的证明》，2026 年。预印本，arXiv:2607.23307。[12] Nikos Dafnis 和 Grigoris Paouris。《小球概率估计、 ψ_2-行为与超平面猜想》。《泛函分析杂志》，258(6):1933–1964，2010 年。[13] Ronen Eldan。《通过随机局部化方案，薄壳以多对数因子蕴含谱隙》。《几何与泛函分析》，23(2):532–569，2013 年。[14] Ronen Eldan 和 Boaz Klartag。《近似高斯边缘分布与超平面猜想》。载于《集中现象、泛函不等式与等周》，第 545 卷《当代数学》，第 55–68 页。美国数学会，2011 年。[15] Apostolos Giannopoulos、Minas Pafis 和 Natalia Tziotziou。《高维凸体理论中的各向同性常数》。《希腊数学学会通报》，69:89–188，2025 年。在线 उपलब्ध。

[16] Qingyang Guan。《Bourgain 切片问题札记》，2024。预印本，arXiv:2412.09075。[17] Olivier Guédon 和 Emanuel Milman。《各向同性对数凹测度薄壳界与尖锐大偏差估计的插值》。《几何与泛函分析》，21(5):1043–1068，2011。[18] Dongning Guo、Shlomo Shamai 和 Sergio Verdú。《高斯信道中的互信息与最小均方误差》。《*IEEE*信息论汇刊》，51(4):1261–1282，2005。[19] Ravi Kannan、László Lovász 和 Miklós Simonovits。《凸体的等周问题与局部化引理》。《离散与计算几何》，13:541–559，1995。[20] Boaz Klartag。《关于具有有界各向同性常数的凸扰动》。《几何与泛函分析》，16(6):1274–1290，2006。[21] Boaz Klartag。《等周与凸集切片的对数界》。*ArsInve-niendi Analytica*，2023。论文第4号，17页。[22] Boaz Klartag 和 Joseph Lehec。《借助多对数因子实现 Bourgain 切片问题与 KLS 等周不等式》。《几何与泛函分析》，32(5):1134–1159，2022。[23] Boaz Klartag 和 Joseph Lehec。《利用 Guan界肯定性解决 Bourgain 切片问题》。《几何与泛函分析》，35:1147–1168，2025。[24] Boaz Klartag 和 Joseph Lehec。《高维凸集中的等周不等式》。《美国数学会通报》，62(4):575–642，2025。arXiv:2406.01324。[25] Boaz Klartag 和 Joseph Lehec。《通过平行耦合得到的薄壳界》，2025。预印本，arXiv:2507.15495。[26] Brayden Letwin。《KLS常数为 $O(\log^{1/4} n)$》，2026。预印本，arXiv:2607.24164。[27] Vitali D. Milman。《Brunn–Minkowski逆不等式及其在赋范空间局部理论中的应用》。《巴黎科学院院报》，*I*辑，302(1):25–28，1986。[28] Vitali D. Milman 和 Alain Pajor。《赋范 n维空间单位球的各向同性位置、惯性椭球与 zonotope》。载于《泛函分析的几何方面（*1987–88*）》，第1376卷《数学讲义》，第64–104页。Springer，1989。[29] OpenAI。《各向同性常数的尖锐熵界与单纯形不等式》，2026。预印本，10月5日。见 OpenAI数学代码库。[30] Zhao Song 和 Xinzhi Zhang。《KLS常数的 An $O(1)$ 界》，2026。预印本，第二版，arXiv:2610.01447v2。

特拉维夫大学数学科学学院，以色列特拉维夫；以及魏茨曼科学研究所数学系，以色列雷霍沃特。电子邮箱：klartagb@tau.ac.il

朱西厄—巴黎左岸数学研究所泛函分析团队，索邦大学，法国巴黎。电子邮箱：joseph.lehec@imj-prg.fr