arXiv:2611.32334v2 [math.MG] 25 Nov 2026

## 2. 预备知识与照明等价

对于整数 $m \geq 1$，记作 $[m] := \{1, \dots, m\}$。在 $\mathbb{R}^d (d \geq 1)$ 上赋予标准欧几里得内积 $x, y = \sum_{j=1}^{d} x_j y_j$ 和范数 $\|x\|_2 = \sqrt{x, x}$，并将 $\mathbb{R}^3$ 的标准基记为 $e_1, e_2, e_3$。对于 $x \in \mathbb{R}^d$ 和 $r > 0$，记 $B(x, r) := \left\{ y \in \mathbb{R}^d : \|y - x\|_2 < r \right\}$ 为开欧几里得球，记 $B(x, r) := \left\{ y \in \mathbb{R}^d : \|y - x\|_2 \leq r \right\}$ 为闭球。在 $\mathbb{R}^3$中，记$B^3 := \overline{B(0, 1)}$为闭单位球，并记 $S^2 := \{u \in \mathbb{R}^3 : \|u\|_2 = 1\}$ 为单位球面；在$\mathbb{R}^2$ 中，记 $S^1 := \{u \in \mathbb{R}^2 : \|u\|_2 = 1\}$。对于任意仿射或线性子空间 $W \subseteq \mathbb{R}^d$，记 $B_W(z, r) := \{y \in W : \|y - z\|_2 < r\}$、$\underline{B}_W(z, r) := \{y \in W : \|y - z\|_2 \leq r\}$、$\mathrm{int}_W(E)$ 和 $\partial_W(E) := E \setminus \mathrm{int}_W(E)$，分别表示相对于 $W$的开球、闭球、内部和边界。记 $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ 为可逆 $3 \times 3$ 实矩阵构成的群，并记 $\mathrm{O}(3) := \left\{ Q \in \mathbb{R}^{3 \times 3} : Q^\top Q = I_3 \right\}$ 为正交群。

令 $\mathrm{vol}_3$ 表示 $\mathbb{R}^3$上的三维勒贝格测度。由于 $(0, 1] \times S^2 \to B^3 \setminus \{0\}$，$(r, u) \mapsto ru$是一个同胚，其逆映射为 $x \mapsto (\|x\|_2, x/\|x\|_2)$，因此对于每个博雷尔集 $A \subseteq S^2$，径向扇区$\{ru : r \in (0, 1], u \in A\}$都是 $\mathbb{R}^3$ 的博雷尔子集。我们将 $S^2$ 上的归一化球面概率测度 $\tilde{\sigma}$ 定义为

$$\tilde{\sigma}(A) := \frac{\mathrm{vol}_3(\{ru : r \in (0, 1], u \in A\})}{\mathrm{vol}_3(B^3)}.$$

由于对每个 $Q$ ∈三维正交群中的元素，都有 $\mathrm{vol}_3(QE) = |\det Q|\mathrm{vol}_3(E) = \mathrm{vol}_3(E)$，因此对所有 $Q$ ∈三维正交群中的元素以及所有博雷尔集 $A \subseteq S^2$，都有 $\tilde{\sigma}(QA) = \tilde{\sigma}(A)$。转换到球坐标 $x = (r\sin\psi\cos\phi, r\sin\psi\sin\phi, r\cos\psi)$，在 $B^3(r \in (0,1], \psi \in [0,\pi], \phi \in [0,2\pi)$上，雅可比行列式 $r^2\sin\psi$，$\mathrm{vol}_3(B^3) = \frac{4\pi}{3}$），每个有界或非负的博雷尔函数 $g: S^2 \to \mathbb{R}$ 都满足

$$\int_{S^2} g(u)\, d\tilde{\sigma}(u) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} g(\sin\psi\cos\phi, \sin\psi\sin\phi, \cos\psi)\sin\psi\, d\psi\, d\phi. \tag{2.1}$$

特别地，对于任意 $u_0 \in S^2$ 和 $\delta \in [0,2]$，取 $Q \in$ 三维正交群，使得 $Qe_3 = u_0$，并注意到 $\|u-u_0\|_2 \le \delta$ 在 $S^2$ 上等价于 $\langle u, u_0\rangle \ge 1 - \frac{\delta^2}{2}$，即可得到球冠恒等式

$$\tilde{\sigma}\left(S^2 \cap \overline{B}(u_0,\delta)\right) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\arccos(1-\delta^2/2)} \sin\psi\, d\psi\, d\phi = \frac{\delta^2}{4}, \tag{2.2}$$

且每条大圆 $n^\perp \cap S^2$ $(n \in S^2)$都满足 $\tilde{\sigma}(n^\perp \cap S^2) = 0$。

**定义 2.1（凸体）**。子集 $K \subset \mathbb{R}^d$ 是一个凸体，当且仅当 $K$ 是紧凸集，且具有非空内部 $\mathrm{int}(K) \neq \emptyset$。

定义 2.2（覆盖数）。对于凸体 $K \subset \mathbb{R}^3$，其较小的正位似像是形如 $\lambda K + v$ 的集合，其中 $\lambda \in (0,1)$ 且 $v \in \mathbb{R}^3$。覆盖数 $c(K)$ 是满足以下条件的最小整数 $m \ge 1$：存在 $\lambda_1$、……、$\lambda_m \in (0,1)$ 以及 $v_1$、……、$v_m \in \mathbb{R}^3$，使得 $K \subseteq \bigcup_{i=1}^m (\lambda_i K + v_i)$。

**定义 2.3（平行六面体）**。子集 $K \subset \mathbb{R}^3$ 是平行六面体，如果 $K = A([-1,1]^3) + b$ 对于某个可逆矩阵 $A \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ 和向量 $b \in \mathbb{R}^3$。

**定义 2.4（边界照明）**。设 $K \subset \mathbb{R}^3$ 是一个凸体。非零向量 $u \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ 照亮边界点 $x \in \partial K$，如果存在 $t > 0$ 使得 $x + tu \in \mathrm{int}(K)$。非零向量的集合 $u_1, \ldots, u_m \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ 照亮 $\partial K$，如果每个 $x \in \partial K$ 都至少被一个 $u_i$照亮。

**定义 2.5（支撑函数）**。对于非空紧子集 $C \subset \mathbb{R}^d$，其支撑函数 $h_C$：$\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 定义为 $h_C(u) := \max_{x\in C}\langle x, u\rangle$。

定义 2.6（闵可夫斯基泛函）。对于满足 $0 \in \mathrm{int}(C)$ 的凸体 $C \subset \mathbb{R}^d$，其闵可夫斯基泛函 $\mu_C$：$\mathbb{R}^d \to [0,\infty)$ 定义为 $\mu_C(x) := \inf\{t > 0 : x \in tC\}$。当 $C = -C$ 是中心对称的时，我们也记作 $\|x\|_C := \mu_C(x)$，并称 $\|\cdot\|_C$ 为 $C$ 的闵可夫斯基范数。

**定义 2.7（半差体）**。对于凸体 $K \subset \mathbb{R}^3$，其半差体是集合 $S := \frac{1}{2}(K-K) = \left\{\frac{1}{2}(x-y) : x, y \in K\right\}$。

**定义 2.8（曲线变差）**。设 $C \subset \mathbb{R}^3$ 是一个中心对称凸体，且满足 $0 \in \mathrm{int}(C)$，并设 $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ $(a < b)$ 是一条连续曲线。$C$-变差（或 $C$-长度）指 $\gamma$在 $[a,b]$ 上的

$$L_C(\gamma|_{[a,b]}) := \sup_{a=t_0<t_1<\cdots<t_N=b} \sum_{r=1}^{N} \|\gamma(t_r) - \gamma(t_{r-1})\|_C \in [0,\infty].$$

**定义 2.9（影边界）**。对于凸体 $K \subset \mathbb{R}^3$ 和单位向量 $w \in S^2$，令 $\pi_w(x) := x - \langle x, w\rangle w$ 表示到平面 $w^\perp := \{z \in \mathbb{R}^3 : \langle z, w\rangle = 0\}$的正交投影。集合的 $K$ 沿方向 $w$ 的影边界为集合

$$\Sigma(K,w) := \partial K \cap \pi_w^{-1}(\partial_{w^\perp}(\pi_w(K))).$$

**定义 2.10（无线段方向）**。对于凸体 $K \subset \mathbb{R}^3$，单位向量 $w \in S^2$ 是凸体的无线段方向 $K$，如果 $\partial K$ 不包含任何与 $w$平行的非退化线段；也就是说，不存在互不相同的点 $a$、$b \in \partial K$ 满足 $[a,b] \subseteq \partial K$ 且 $b-a \in \mathbb{R}w$。记集合 $S(K) \subseteq S^2$为凸体 $K$的所有无线段方向组成的集合。

现在记录凸体的基本拓扑性质和闵可夫斯基泛函性质。

**引理 2.11（凸集的内部与闭包）**。令 $C \subseteq \mathbb{R}^d$ $(d \geq 1)$ 为凸集，且 $p \in \operatorname{int}(C)$。

(i) 对于每个 $x \in C$ 以及每个 $t \in (0,1]$，点 $(1-t)x + tp$ 属于 $\operatorname{int}(C)$。(ii) 若 $C$ 是闭集，则 $\operatorname{int}(C)$ 是凸集，$C = \overline{\operatorname{int}(C)}$，且 $\partial C = C \setminus \operatorname{int}(C)$。若 $C$ 是紧集，则$\partial C$ 是紧且非空的。

证明：对于 (i)，情形 $t=1$ 给出 $p \in \operatorname{int}(C)$。设 $t \in (0,1)$，并选择 $r>0$ 使得$B(p,r) \subseteq C$。由于 $x \in C$，存在 $y \in C$ 使得 $\|y-x\|_2 < \frac{tr}{2}(1-t)$。令 $z_0 := (1-t)x + tp$。对于每个 $z \in B(z_0, \frac{tr}{2})$，点 $q := z + (1-t)(y-x)$ 满足

$$\|q-p\|_2 \leq \frac{\|z-z_0\|_2}{t} + \frac{1-t}{t}\|x-y\|_2 < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r,$$

因此 $q \in B(p,r) \subseteq C$，而 $C$ 的凸性给出 $z = (1-t)y + tq \in C$。于是 $B(z_0, \frac{tr}{2}) \subseteq C$ 且 $z_0 \in \operatorname{int}(C)$。

对于 (ii)，将 (i) 应用于 $\operatorname{int}(C)$ 中的点，可知 $\operatorname{int}(C)$ 是凸集。对于每个 $x \in C$，$(1-\frac{1}{k})x + \frac{1}{k}p \in \operatorname{int}(C)$ 收敛到 $x$，当 $k \to \infty$ 时成立，因此 $C = \overline{\operatorname{int}(C)}$ 且 $\partial C = C \setminus \operatorname{int}(C)$。如果 $C$ 是紧集，$\partial C$ 在 $C$ 中是闭集，因而是紧集；并且对于任意单位向量 $u \in \mathbb{R}^d$，有限上确界 $s_* := \sup\{s \geq 0 : p + su \in C\} > 0$ 满足 $p + s_* u \in C \setminus \operatorname{int}(C) = \partial C$。■

**引理 2.12（分离与支撑超平面）**。设 $V$ 是一个有限维实内积空间，配备内积 $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$。

(i) 设 $Q \subseteq V$ 非空、闭且凸，并设 $y_0 \in V \setminus Q$。存在一点 $q_* \in Q$，使其在 $q \in Q$ 上使 $\|y_0 - q\|$ 取到最小值；非零向量 $w := y_0 - q_*$ 满足 $\langle w, q\rangle \leq \langle w, y_0\rangle - \|w\|^2$，对所有 $q \in Q$ 均成立。(ii) 设 $C \subset \mathbb{R}^d$ 为一个凸体，且设 $x_0 \in \partial C$。存在 $n \in \mathbb{R}^d$，其中 $\|n\|_2 = 1$，使得 $\langle n, x\rangle \leq \langle n, x_0\rangle = h_C(n)$，对所有 $x \in C$ 均成立。

证明：对于 (i)，固定 $q_1 \in Q$，并设 $R := \|y_0 - q_1\|$。集合 $Q_0 := Q \cap \{q \in V : \|y_0 - q\| \leq R\}$ 非空且紧，因此 $q \mapsto \|y_0 - q\|^2$ 在 $Q_0$ 上（从而也在整个 $Q$ 上）于某个 $q_* \in Q_0$ 处取得最小值。由于 $y_0 \notin Q$，我们有 $w := y_0 - q_* \neq 0$。对任意 $q \in Q$ 和 $t \in (0,1)$，由凸性可得 $(1-t)q_* + tq \in Q$，于是

$$\|w\|^2 \leq \|y_0 - q_* - t(q - q_*)\|^2 = \|w\|^2 - 2t\langle w, q - q_*\rangle + t^2\|q - q_*\|^2.$$

将两边除以 $t > 0$ 并令 $t \downarrow 0^+$，得到 $\langle w, q - q_*\rangle \leq 0$，因此 $\langle w, q\rangle \leq \langle w, q_*\rangle = \langle w, y_0\rangle - \|w\|^2$。

对于 (ii)，取 $y_k \in \mathbb{R}^d \setminus C$，其中 $y_k \to x_0$。由 (i) 可知，对每个 $k \geq 1$，存在一个单位向量$n_k \in \mathbb{R}^d$，使得 $\langle n_k, x\rangle \leq \langle n_k, y_k\rangle$ 对所有 $x \in C$均成立。在紧单位球面上取收敛子列 $n_{k_j} \to n$ 并取极限，得到 $\langle n, x\rangle \leq \langle n, x_0\rangle$ 对所有 $x \in C$ 均成立。■

**引理 2.13（闵可夫斯基泛函的性质）**。设 $C \subset \mathbb{R}^d$ 为凸体，且 $0 \in \operatorname{int}(C)$，并选择 $0 < r \leq R$ 使得 $B(0,r) \subseteq C \subseteq B(0,R)$。

$(1-\frac{s_1}{s_2})x+\frac{s_1}{s_2}(x+s_2u_i)\in\mathrm{int}(K)$，从而 $x\in K\cap U_i(s_1)$。因此，相对开集$W_n:=\bigcup_{i=1}^m(K\cap U_i(1/n))$ $(n\geq 1)$ 满足 $W_1\subseteq W_2\subseteq\cdots$。每个 $x\in\partial K$ 都满足：对于某个 $i\in[m]$ 和 $t_x>0$，有 $x+t_xu_i\in\mathrm{int}(K)$，从而对所有 $n\geq 1/t_x$都有 $x\in W_n$；而每个 $x\in\mathrm{int}(K)$ 都具有某个 $B(x,\rho)\subseteq\mathrm{int}(K)$，其中 $\rho>0$，并且对所有 $n>\|u_1\|_2/\rho$都属于 $W_n$。由 $K$的紧致性，对于某个 $N\geq 1$有 $K=W_N$，从而得到 $K\subseteq\bigcup_{i=1}^m(\mathrm{int}(K)+w_i)$，其中 $w_i:=-\frac{1}{N}u_i$。■

**引理 2.15（仿射不变性与平行六面体）**。*(i)* 对任意可逆仿射映射$\Phi(x)=Ax+b$ $(A\in\mathrm{GL}_3(\mathbb{R}),\ b\in\mathbb{R}^3)$ 以及任意凸体 $K\subset\mathbb{R}^3$，有 $c(\Phi(K))=c(K)$。*(ii)* 每个平行六面体 $K\subset\mathbb{R}^3$ 都满足 $c(K)=8$。

证明：对于 (i)，若 $K\subseteq\bigcup_{i=1}^m(\lambda_iK+v_i)$，则 $\Phi(K)\subseteq\bigcup_{i=1}^m(\lambda_i\Phi(K)+Av_i+(1-\lambda_i)b)$，因此 $c(\Phi(K))\leq c(K)$，应用 $\Phi^{-1}$ 即可得到等式。

对于 (ii)，由 (i) 可知，只需证明 $c([0,1]^3)=8$。对于每个 $x=(x_1,x_2,x_3)\in[0,1]^3$，定义$\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)\in\{0,1\}^3$，令$\sigma_j:=0$（若 $x_j\leq\frac{1}{2}$），并令$\sigma_j:=1$（若 $x_j>\frac{1}{2}$）。两种情况下都有$x_j\in[\frac{1}{3}\sigma_j,\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\sigma_j]$，因此$[0,1]^3\subseteq\bigcup_{\sigma\in\{0,1\}^3}(\frac{2}{3}[0,1]^3+\frac{1}{3}\sigma)$，且 $c([0,1]^3)\leq 8$。反过来，若 $[0,1]^3\subseteq\bigcup_{i=1}^m(\lambda_i[0,1]^3+v_i)$且 $\lambda_i\in(0,1)$，则每个盒子 $\prod_{j=1}^3[v_{i,j},v_{i,j}+\lambda_i]$ 的坐标宽度为 $\lambda_i<1$，并且至多包含$\{0,1\}^3$，的一个顶点，故必有 $m\geq 8$。■

## 3. 用单个位似变换覆盖短曲线

接下来我们将证明卡拉泰奥多里定理、关于紧凸集的海利定理、曲线变差的连续性，以及长度严格小于 2 的弧的曲线覆盖引理。

**引理 3.1（卡拉泰奥多里定理）**。设 $X\subseteq\mathbb{R}^d$ $(d\geq 1)$ 非空。每个 $z\in$ 凸包$(X)$都可表示为 $z=\sum_{j=0}^d\lambda_jx_j$，其中 $x_0$、……、$x_d\in X$、$\lambda_j\geq 0$ 和 $\sum_{j=0}^d\lambda_j=1$。特别地，若 $X$ 是紧的，则 凸包 $(X)$ 是紧的。

证明：设 $z=\sum_{j=1}^k\mu_jx_j$，其中 $x_j\in X$、$\mu_j>0$、$\sum_{j=1}^k\mu_j=1$ 和 $k\geq 1$ 取为最小。若 $k\geq d+2$，则这些 $k-1\geq d+1$ 向量 $x_2-x_1$、……、$x_k-x_1\in\mathbb{R}^d$ 线性相关，因此存在不全为零的标量 $\alpha_2$、……、$\alpha_k\in\mathbb{R}$，使得 $\sum_{j=2}^k\alpha_j(x_j-x_1)=0$。令 $\alpha_1:=-\sum_{j=2}^k\alpha_j$，则有 $\sum_{j=1}^k\alpha_j=0$ 和 $\sum_{j=1}^k\alpha_jx_j=0$，且至少有一个 $j$ 满足 $\alpha_j>0$。令 $\tau:=\min\{\mu_j/\alpha_j:\ \alpha_j>0\}>0$，并设 $\tilde{\mu}_j:=\mu_j-\tau\alpha_j\geq 0$。于是 $\sum_{j=1}^k\tilde{\mu}_j=1$、$\sum_{j=1}^k\tilde{\mu}_jx_j=z$，且至少一个 $\tilde{\mu}_{j_0}$ 为零，这与 $k$ 的最小性矛盾。因此 $k\leq d+1$；必要时以权重 0 重复 $x_1$，即可得到 $d+1$ 项。当 $X$ 紧时，$\mathrm{conv}(X)$ 是 $\left\{(\lambda_0,\ldots,\lambda_d)\in[0,1]^{d+1}:\ \sum_{j=0}^d\lambda_j=1\right\}\times X^{d+1}$ 的连续像，因此是紧的。■

**引理 3.2（拉东引理与海利定理）**。*(i)* 任意 $d+2$ 个 $p_1$点，……，$p_{d+2}\in\mathbb{R}^d$都可以分割 $[d+2]=I_+\sqcup I_-$ 为两个非空子集，使得 凸包$\{p_i:\ i\in I_+\}\cap$凸包$\{p_j:\ j\in I_-\}\neq\emptyset$。*(ii)* 设 $\{C_\beta\}_{\beta\in\mathcal{I}}$ $(\mathcal{I}\neq\emptyset)$ 是 $\mathbb{R}^d$ 的一族紧凸子集。如果每个至多包含 $d+1$ 个集合的子族都有非空交集，那么 $\bigcap_{\beta\in\mathcal{I}}C_\beta\neq\emptyset$。

证明：对于 (i)，由于 $p_2-p_1,\ldots,p_{d+2}-p_1\in\mathbb{R}^d$ 线性相关，因此存在 $\alpha\in\mathbb{R}^{d+2}\setminus\{0\}$，满足 $\sum_{r=1}^{d+2}\alpha_r=0$ 且 $\sum_{r=1}^{d+2}\alpha_rp_r=0$。令 $I_+:=\{i:\ \alpha_i>0\}$，且 $I_-:=\{j:\ \alpha_j\leq 0\}$。这两个集合都非空，$M:=\sum_{i\in I_+}\alpha_i=\sum_{j\in I_-}(-\alpha_j)>0$，且 $\sum_{i\in I_+}\frac{\alpha_i}{M}p_i=\sum_{j\in I_-}\frac{-\alpha_j}{M}p_j$ 属于凸包 $\{p_i:\ i\in I_+\}\cap$ 与凸包$\{p_j:\ j\in I_-\}$ 的交集。

## 4. 影边界与平行于边界线段的方向

现在我们证明，对于每个单位方向 $w \in S^2$，$\{+w, -w\}$ 都能照亮 $\partial K \setminus \Sigma(K, w)$，并证明几乎所有方向 $w \in S^2$ 都属于$\mathcal{S}(K)$，从而使 $\Sigma(K, w)$ 成为一条连续闭曲线。

**引理 4.1（照亮影边界之外的点）**。设 $K \subset \mathbb{R}^3$ 为一个凸体，并设 $w \in S^2$。

*(i)* 平面投影 $D := \pi_w(K) \subset w^\perp$ 是一个满足$\pi_w(\mathrm{int}(K)) = \mathrm{int}_{w^\perp}(D)$的二维凸体，并且每个边界点 $x \in \partial K \mid \Sigma(K, w)$ 都由 $+w$ 或$-w$照亮。

引理 *4.3*（平坦边界面的可数性）。设 $K \subset \mathbb{R}^3$ 是一个满足 $0 \in \mathrm{int}(K)$ 的凸体，并令 $F_2(K)$ 表示 $K$ 的所有二维暴露面的集合，即满足 $\dim(\mathrm{aff}(F)) = 2$ 的集合$F = K \cap H$，其中 $H = \{x \in \mathbb{R}^3 : \langle n_F, x\rangle = h_K(n_F)\}$ $(n_F \in S^2)$。那么 $F_2(K)$ 至多可数，并且 $E_{\mathrm{flat}} := \bigcup_{F \in F_2(K)} (n_F^{\perp} \cap S^2)$ 是一个博雷尔集，且 $\tilde{\sigma}(E_{\mathrm{flat}}) = 0$。

对于每个由 $[a,b]\subseteq\partial K(a_3+\frac{1}{m}\le q\le b_3-\frac{1}{m})$ 见证的 $u\in E_{3,\ m,\ q}$，令 $c=(c',\ q)\in(a,\ b)$ 为 $[a,b]$ 在高度 $q$ 处的点，因此 $c'\in\partial_{\mathbb{R}^2}(Q)$，并设 $v:=\frac{b'-a'}{b_3-a_3}\in\mathbb{R}^2$。那么 $c\pm\frac{1}{m}(v,\ 1)\in[a,b]\subseteq K$，

$$\langle v, W_0 v\rangle = \langle W_0, vv^\top\rangle_F = \langle W, vv^\top\rangle_F - \frac{1}{3}\operatorname{tr}(W) + \frac{\delta}{2} \le -\frac{\delta}{2} < 0.$$

若 $(I_3+\varepsilon W_0)(B^3) \subseteq \widetilde{S}$ 沿序列 $\varepsilon_k \downarrow 0^+$失效，则由 $\widetilde{S}$ 的凸性可得 $u_k \in S^2$，使得 $(I_3+\varepsilon_k W_0)u_k \notin \widetilde{S}$。取一个收敛子序列 $u_{k_j} \to u_* \in S^2$，必有$u_* \in C$（否则 $u_* \in$属于 $\operatorname{int}(\widetilde{S})$，从而当 $j$足够大时，$(I_3+\varepsilon_{k_j}W_0)^{u_{k_j}} \in$属于 $\operatorname{int}(\widetilde{S})$），因此 $\langle u_*,\ W_0 u_*\rangle \le -\frac{\delta}{2}$。

$$L_C\left(\gamma_w^P|_{[0,2\pi]}\right) = \sum_{e=\{i,j\}\in E(P)} \|q_e - p_e\|_C \; \mathbf{1}_{\{\langle n_i, w\rangle \langle n_j, w\rangle < 0\}}.$$

对于任意分割 $0 = \theta_0 < \theta_1 < \cdots < \theta_N = 2\pi$，由 $\|\cdot\|_S$ 的连续性可得

$$\sum_{r=1}^{N} \|\gamma_{w_*}(\theta_r) - \gamma_{w_*}(\theta_{r-1})\|_S = \lim_{k\to\infty} \sum_{r=1}^{N} \|\gamma_k(\theta_r) - \gamma_k(\theta_{r-1})\|_S \le \liminf_{k\to\infty} f_k(w_*) \le 12 - \eta.$$

对所有分割取上确界，得到 $L_S(\gamma_{w_*}|_{[0,2\pi]}) \le 12 - \eta < 12$。最后，由于 $0 \in \mathrm{int} w_*^{\perp}(D)$，我们有 $\pi_{w_*}(\gamma_{w_*}(\pi) - \gamma_{w_*}(0)) = -(\mu_D(e_1(w_*))^{-1} + \mu_D(-e_1(w_*))^{-1})e_1(w_*) \neq 0$，从而 $L_S(\gamma_{w_*}|_{[0,2\pi]}) \ge 2\,\|\gamma_{w_*}(\pi) - \gamma_{w_*}(0)\|_S > 0$。 ■

## 参考文献

[Bol60] Vladimir G. Boltyanski. 凸体边界照明问题。*Izvestiya Moldavskogo Filiala Akademii Nauk SSSR*，10(76):77–84，1960年。[ELR70] Günter Ewald、David G. Larman 和 C. Ambrose Rogers。欧几里得空间中凸体边界上线段的方向以及 $r$维球的方向。*Mathematika*，17(1):1–20，1970年。[Gem26] Gemini Team、Google。《Gemini 4 Carbon 模型卡》。Google DeepMind 模型卡，2026年。[GM60] Israel Gohberg 和 Alexander S. Markus。一个关于用位似像覆盖凸集的问题。*Izvestiya Moldavskogo Filiala Akademii Nauk SSSR*，10(76):87–90，1960年。[Had57] Hugo Hadwiger。*Elemente der Mathematik*，未解决问题第20题，12:121，1957年。[Hel23] Eduard Helly。关于具有公共点的凸体集合。*Jahres-bericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*，32:175–176，1923年。[Joh48] Fritz John。带有附加条件不等式的极值问题。载于献给 *R. Courant 60* 岁生日（*1948*年*1*月*8*日）的论文集，第187–204页。Interscience Publishers，纽约，1948年。[Las84] Marek Lassak。中心对称凸体的 Hadwiger 覆盖问题在 $E^3$中的解。*Journal of the London Mathematical Society (2)*，30(3):501–511，1984年。