arXiv:2611.32339v1 [math.GT] 24 Nov 2026

拓扑直线排列的亚历山大模与米尔诺纤维

SAKUMI SUGAWARA

Abstract. 我们研究拓扑直线排列的补空间的 Alexander 模，以及一种特定循环覆盖，我们称之为拓扑米尔诺纤维。对于任意具有 $n \geq 2$ 条直线的拓扑可实现组合类型，其中 n 不是素数幂，我们证明其拓扑米尔诺纤维的第一贝蒂数无界。此外，在给定组合类型内，任意有限阿贝尔群都可以作为某个拓扑米尔诺纤维整数同调的直和项出现。作为应用，我们证明，每个具有 $n \geq 2$条直线的拓扑可实现组合类型都存在一种实现，使其补空间没有二维 CW 模型。

1. Introduction

复射影平面中的有限直线集称为复射影直线排列。配置拓扑学中的一个核心问题，是确定哪些拓扑不变量由交叉偏序集 [OT92, Di17]决定。米尔诺纤维的第一贝蒂数是否由组合决定，一直是一个长期存在的问题 [PS17]。由于米尔诺纤维是补空间的循环覆盖，因此可以利用秩一局部系统和 Alexander 模研究其同调。非平凡单值化特征子空间不为零会对组合结构施加很强的限制 [Li02, Yo13]。最近，Xie-Yu-Zheng [XYZ26] 证明，对于任意本质直线排列，所有对应于阶大于 5 的特征值的单值化特征子空间都恒为零。

Milnor 纤维的整数同调群中的扭转是这一问题的另一个重要方面。Milnor 纤维的同调群中的扭转是否由组合数据决定，仍是一个开放问题。据作者所知， [Yo20] 中介绍的二十面六十面体排列是唯一已知的约化直线配置，其 Milnor 纤维的第一整数同调中含有扭转（另见关于多重排列的 [CDS03] 以及关于高次情形的 [DS14]）。下面的结果表明，在固定组合类型内，拓扑直线排列可以呈现出大得多的变化。

拓扑直线排列 $\mathcal{A}$ 是复射影平面中嵌入二维球面的一个配置，在拓扑上推广了复直线排列（第 2 节，另见 [RS19]）。拓扑米尔诺纤维 $F_{\mathcal{A}}$ 定义为某个有限循环

补空间的覆盖。若 $\mathcal{A}$ 是复直线配置，则 $F_{\mathcal{A}}$ 与通常的 Milnor 纤维一致。第一个结果涉及拓扑米尔诺纤维的第一贝蒂数。

定理 1.1. 设 $\mathcal{A}$ 是一个含有 $n \geq 2$ 条直线的拓扑直线排列，并令

$$D(n) = \{m \in \mathbb{Z}_{>1} \mid m|n, and\ m\ is\ not\ a\ prime\ power\}.$$

日期：2026年11月25日。2020 数学主题分类。52C35, 32S22, 57M10, 57K45。关键词与短语。拓扑直线配置、循环覆盖、亚历山大模、米尔诺纤维、2-纽结。

那么，对于任意一族$(k_m)^{m\in D(n)}$ 非负整数，都存在一个拓扑直线排列 $\mathcal{A}'$，使得 $L(\mathcal{A}) \cong L(\mathcal{A}')$ 且其拓扑米尔诺纤维满足

$$H_1(F_{\mathcal{A}'};\mathbb{C}) \cong H_1(F_{\mathcal{A}};\mathbb{C}) \oplus \bigoplus_{m\in D(n)} (\Lambda/\Phi_m(t))^{\oplus k_m},$$

作为 $\Lambda = \mathbb{C}[t^{\pm 1}]$-模，其中 Φ_m（t）是第 m 个分圆多项式。

推论 1.2. 设 e_m（$\mathcal{A}$）为对应于一个本原 m 次单位根的特征子空间的维数。那么，对每个 $m \in D$（n），

$$e_m(\mathcal{A}') = e_m(\mathcal{A}) + k_m.$$

第一贝蒂数满足

$$b_1(F_{\mathcal{A}'}) = b_1(F_{\mathcal{A}}) + \sum_{m\in D(n)} \varphi(m)k_m,$$

其中 φ 是欧拉示性函数。

特别地，若 n 不是素数幂，那么在固定组合类型 L（$\mathcal{A}$）的实现中，第一贝蒂数无界。证明基于与 2-纽结作连通和，这一方法也见于 [Su26，第 5] 节（另见 [Li82，第 845], [页； 2]Li83，第 2] 节）。

同一局部打结构造还可在拓扑米尔诺纤维的整数同调中产生指定的有限直和项。

定理 1.3。设 $\mathcal{A}$ 是一个含有 $n \geq 2$ 条直线的拓扑直线排列。
(1) 假设 n 不是素数幂。那么，对于任意有限阿贝尔群 G，存在一个拓扑直线排列 $\mathcal{A}'$，使得 $L(\mathcal{A}) \cong L(\mathcal{A}')$，且 $H_i(F_{\mathcal{A}};\mathbb{Z})$ 对于 $i = 1, 2$ 包含 G 作为直和项。*(2)* 假设 $n = p^s$ 是素数幂。那么，对于任意阶与 p 互素的有限阿贝尔群 G，存在一个拓扑直线排列 $\mathcal{A}'$，使得 $L(\mathcal{A}) \cong L(\mathcal{A}')$，且 $H_i(F_{\mathcal{A}'};\mathbb{Z})$ 对于 $i = 1, 2$ 包含 G 作为直和项。

定理 1.1 中对特征值阶的限制，以及定理 1.3 中对 G 的阶的限制，在局部打结构造中都无法放宽；参见注记 3.2 和 3.3。

此外，第二亚历山大模为补空间存在二维 CW 模型提供了一个障碍。

定理 1.4。设 $\mathcal{A}$ 是一个具有 $n \geq 2$ 条直线的拓扑直线排列。则存在一个拓扑直线排列 $\mathcal{A}'$，使得 L（$\mathcal{A}$）$\cong L$（$\mathcal{A}'$）以及 U（$\mathcal{A}'$）不具有二维 *CW*复形的同伦型。

由于对于任意拓扑直线排列，$H_i(U) = 0$ for $i \geq 3$，这表明 $U(\mathcal{A}')$ 不具有极小 CW复形的同伦型，从而为 [Su26, 定理 1.3] 提供了另一种证明。根据 [Su26, 定理 1.2], ，每个辛直线配置的补空间都是极小的。因此，如果局部打结构造中使用的 2-纽结在 $\mathbb{Q}$ 上具有非平凡的第一亚历山大模，那么所得配置就不可能是辛的（见注 3.4）。辛直线配置还具有其他与复直线排列相同的拓扑性质，包括其亚历山大多项式的整除关系[AG24]。这些相似之处促使我们进一步研究辛直线配置的 Alexander 模和拓扑米尔诺纤维。更广泛地说，采用不依赖于与 2-纽结作连通和的方法研究拓扑直线排列的拓扑性质，将会很有意思。

致谢。作者谨向 Anatoly Libgober 致谢，感谢他提出的启发性意见；并向 Masahiko Yoshinaga 致谢，感谢他对同调挠元的评论。本研究得到日本学术振兴会科研费（JSPS KAKENHI）项目资助，项目编号为 25K23326。

AI 使用声明。作者在本论文的研究和准备过程中使用了 ChatGPT 6 Astra（OpenAI），尤其用于讨论定理 1.3 的证明、协助检查数学论证、查找相关文献，以及改进英文表达和行文。作者已独立核实数学论证和参考文献，并对论文的全部内容承担全部责任。

2. Preliminaries

定义 2.1。一个拓扑直线排列 $\mathcal{A} = \{H_0, \dots, H_{n-1}\}$ 是复射影平面中一组局部平坦嵌入二维球面的集合，其中每个 H_i 都满足$[H_i] = [\mathbb{C}P^1] \in H_2(\mathbb{C}P^2; \mathbb{Z})$，且任意两条不同的直线均横截且正向地交于一点。令 $U = U(\mathcal{A})$ 表示其补空间。

定义 2.2。组合类型（或交叉偏序集）由所有直线交点组成的集合及其反向包含关系定义。我们将此偏序集记为$L(\mathcal{A})$。

从现在起，我们假设 $n \geq 2$。在 [Su26], Sugawara 证明第一同调群可表示为

$$H_1(U;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}\langle m_0, \dots, m_{n-1}\rangle / \langle m_0 + \cdots + m_{n-1}\rangle \cong \mathbb{Z}^{n-1},$$

其中 m_i 表示绕 H_i的一个正向子午线。此外，上同调环同构于该组合类型的射影 Orlik-Solomon 代数。

满同态 $\delta\colon \pi_1(U) \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$，$\delta(m_i) = 1$ 定义了一个 n重循环覆盖 $F = F_{\mathcal{A}} \to U$。我们称此覆盖空间为 $\mathcal{A}$的拓扑米尔诺纤维 。如果$\mathcal{A}$是一个复直线排列，那么它与该配置的通常 Milnor 纤维一致。

此外，通过指定直线 H_0 （作为“无穷远直线”），我们考虑同态$\nu = \nu_{H_0}\colon \pi_1(U) \to \mathbb{Z}$，$\nu(m_i) = 1$ $(i \neq 0)$，$\nu(m_0) = 1 - n$。该同态也是满射，并且是 δ的一个整系数提升。考虑相应的无限循环覆盖 $U^\nu \to U$。覆盖变换群 $\mathbb{Z} \cong \langle t\rangle$ 作用于 i阶同调群 $H_i(U^\nu; R)$；因此，它可视为 $\Lambda_R = R[t^{\pm 1}]$上的一个模，其中 R 可以是 $\mathbb{Z}$ 或一个域。这个 Λ_R模 $H_i(U^\nu; R)$ 称为该拓扑直线排列（关联于指定直线 H_0）的第 i 阶 ***Alexander*** 模 。

命题 2.3。令 $M_i =$Ker$(t^n - 1\colon H_i(U^\nu; R) \to H_i(U^\nu; R))$。我们有如下短正合列

$$0 \to H_i(U^\nu; R)/(t^n - 1)H_i(U^\nu; R) \to H_i(F; R) \to M_{i-1} \to 0,$$

对于 $i \geq 1$，当 $i = 1$时该序列分裂。特别地，我们有一个 Λ_R-模的同构：

$$H_1(F; R) \cong H_1(U^\nu; R)/(t^n - 1)H_1(U^\nu; R) \oplus R.$$

证明。 由于 δ 是 ν 模 n, $F = U^\nu/\langle t^n\rangle$ 的约化，我们有胞腔链复形的短正合列

$$0 \to C_*(U^\nu; R) \xrightarrow{t^n - 1} C_*(U^\nu; R) \to C_*(F; R) \to 0.$$

同调中的长正合列给出了一个 Λ_R-模的正合序列 s

$$0 \to H_i(U^\nu; R)/(t^n - 1)H_i(U^\nu; R) \to H_i(F; R) \to M_{i-1} \to 0,$$

对每个 $i \geq 1$ 都成立。当 $i = 1$ 时，由于 $H_0(U^\nu; R) \cong R$，且 t 在其上平凡作用，我们有

$$0 \to H_1(U^\nu; R)/(t^n - 1)H_1(U^\nu; R) \to H_1(F; R) \to R \to 0.$$

取一个环路 $\mu \in \pi_1(U)$，使得 $\nu(\mu) = 1$。那么， μ^n 的提升在 F中定义了一个闭环。令 $v \in H_1(F; R)$为其同调类。注意， v在覆盖变换下保持不变。根据连接同态的定义，将生成元映到 v的映射 $R \to H_1(F; R)$定义了一个截面。因此，上述正合序列分裂，命题得证。□

现在，我们还假设 R 是代数闭且特征为零，并聚焦于第一同调群。由于 $t^n = 1$，覆盖变换在$H_1(F; R)$上的作用是可对角化的，其特征值属于 n次单位根。对于每个特征值 $\lambda \neq 1$，相应的特征子空间满足

$$H_1(F; R)_\lambda \cong H_1(U^\nu; R) \otimes \Lambda_R/(t - \lambda)\Lambda_R.$$

由于该作用定义在 $\mathbb{Q}$上， λ-特征子空间的维数仅取决于 λ 的阶 m （另见 [CS95, 命题 1.1]）。我们将其维数记为 $e_m(\mathcal{A})$。此外，我们还有

$$\dim_R H_1(F; R)_1 = b_1(U) = n - 1.$$

T因此，拓扑米尔诺纤维的第一贝蒂数表示为

$$b_1(F) = n - 1 + \sum_{1<m|n} \varphi(m) e_m(\mathcal{A}).$$

3. Proof of the results

本节将证明主要结果。我们首先回顾关于 2-纽结的亚历山大多项式的一个实现定理。对于补空间为 $X_K = S^4 \setminus K$ 的 2-纽结 K，由于 $H_1(X_K; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$，存在唯一的同态 ρ: $\pi_1(X_K) \to \mathbb{Z}$，将正向子午线映射到生成元。相应的无限循环覆盖的第 i 个同调群 $H_i(X_K^\rho; R)$ 被称为 K 的第 i 个 Alexander 模，而作为 $\Lambda_\mathbb{Q}$-模的 $H_1(X_K^\rho; \mathbb{Q})$ 的阶 $\Delta_K(t)$ 被称为 K 的亚历山大多项式。对于 2-纽结的亚历山大多项式，以下实现定理是已知的。

命题 3.1 ([Ki61])。对于任意满足 $P(1) = 1$ 的整系数多项式 $P(t)$，存在一个 2-纽结 K，使得 $\Delta_K(t) = P(t)$。

特别地，如果 $P(t)$ 是无平方因子的，那么结构定理意味着，对于每个特征零域 R，都有 $H_1(X_K^\rho; R) \cong \Lambda_R/(P(t))$。

给定一个 2-纽结 K 和一个以 H_0 为无穷远直线的拓扑直线排列 $\mathcal{A} = \{H_0, \ldots, H_{n-1}\}$，我们可以通过在 H 的一个光滑点处，将直线 $H(\neq H_0)$ 与 2-纽结 K 作连通和，得到一个新的拓扑直线排列 $\mathcal{A}'$，其中$L(\mathcal{A}') \cong L(\mathcal{A})$。令 U' 为所得配置的补空间，并令 ν': $\pi_1(U') \to \mathbb{Z}$ 为诱导的同态。在连通和分解中，粘合区域与一个子午线圆同伦等价。特征 ν' 在该圆上的取值为 1，因此它在无限循环覆盖中的提升是连通且无环的。标准圆盘补空间部分也具有同样的性质。Mayer-Vietoris论证给出如下 Λ_R-模同构

$$H_i((U')^{\nu'}; R) \cong H_i(X_K^\rho; R) \oplus H_i(U^\nu; R)$$

对于 $i \geq 1$。因此，由命题 2.3 可得

$$H_1(F_{\mathcal{A}'}; R) \cong H_1(F_\mathcal{A}; R) \oplus H_1(X_K^\rho; R)/(t^n - 1)H_1(X_K^\rho; R). \tag{a}$$

类似地，通过对 n 重循环覆盖应用 Mayer-Vietoris论证，我们得到

$$H_2(F_{\mathcal{A}'};R)\cong H_2(F_{\mathcal{A}};R)\oplus H_2(X_{K,n};R) \tag{b}$$

其中 $X_{K,\ n}$ 是 X_K 的 n 重循环覆盖。

现在，我们可以证明主要结果了。

定理 *1.1* 的证明。 在此证明中，我们考虑 over $\mathbb{C}$ 上的 Alexander 模。对于 $m\in D(n)$，分圆多项式满足 $\Phi_m(1)=1$。因此，根据命题 3.1 后紧接着的观察，存在一个 2-纽结 K_m，其 Alexander 模同构于 $\Lambda_{\mathbb{C}}/(\Phi_m(t))$。于是，连通和 $K=\sharp_{m\in D(n)}(\sharp_{k_m}K_m)$ 的 Alexander 模为 $\bigoplus_{m\in D\ (n)}(\Lambda/\Phi_m(t))^{\oplus k_m}$。令 $\mathcal{A}'$ 为通过将一条不同于 H_0 的直线与 K 作连通和而得到的拓扑直线排列。由于对于每个 $m\in D(n)$，$\Phi_m(t)$ 都整除 t^n-1，乘以 t^n-1 在 $H_1(X_K^\rho;\mathbb{C})$ 上为零。因此，由 (a)，

$$\begin{aligned} H_1(F_{\mathcal{A}'};\mathbb{C}) &\cong H_1(F_{\mathcal{A}};\mathbb{C})\oplus H_1(X_K^\rho;\mathbb{C})/(t^n-1)H_1(X_K^\rho;\mathbb{C}) \\ &\cong H_1(F_{\mathcal{A}};\mathbb{C})\oplus\bigoplus_{m\in D(n)}(\Lambda/\Phi_m(t))^{\oplus k_m} \end{aligned}$$

作为 $\Lambda_{\mathbb{C}}$-模。这就证明了该定理。 □

注 3.2。 对于素数幂 $m=p^r$，恒等式 $\Phi_m(1)=p$ 阻止 $\Phi_m(t)$ 整除在 1 处取值为 ±1 的整数纽结亚历山大多项式。因此，局部打结不会增加素数幂阶的特征子空间。更一般地，Papadima-Suciu 不等式[PS10, 定理 C] 表明，相应单值化特征空间的维数受到模-p Aomoto-Betti 数的界定，而该数由组合结构决定。

接下来，我们考察拓扑米尔诺纤维的同调群中的挠。局部打结将给定的有限阿贝尔群实现为直和项。

定理 1.3 的证明。根据上面的局部打结公式，只需考察一个 2-纽结补空间的无分支 n-重循环覆盖的同调群。设q 为 n 的一个素因子，且 $k\geq2$ 为与 q互素的整数。令 $K_{k,q}$ 为由环面纽结 $T(k,q)$ 经 q-扭转旋转得到的 2-纽结。根据 [Ze65],，补空间 $X_{K_{k,q}}$ 纤维化于 S^1，纤维为 $\Sigma_q(T(k,q))\setminus\{x\}$，其中 $\Sigma_q(T(k,q))$ 是沿着 S^3 的 $T(k,q)$ 的 q-重分支循环覆盖，而 x 是分支轨迹上的一点。已知该纤维丛的单值化映射就是分支覆盖的覆盖变换。因此，$K_{k,q}$ 的 Alexander 模满足

$$H_i(X^\rho_{K_{k,q}};\mathbb{Z})\cong H_i(\Sigma_q(T(k,q));\mathbb{Z})$$

对于 $i=1$，2，乘以 t 的操作由分支覆盖的覆盖变换诱导。特别地，t^q 在 $H_i(X^\rho_{K_{k,\ q}};\mathbb{Z})$ 上平凡作用。由于 q 是 n 的一个因子，根据与命题 2.3 证明类似的论证，n重循环覆盖$X_{K_{k,\ q,\ n}}$ 的同调群满足

$$H_1(X_{K_{k,q},n};\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}\oplus H_1(X^\rho_{K_{k,q}};\mathbb{Z})/(t^n-1)H_1(X^\rho_{K_{k,q}};\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}\oplus H_1(X^\rho_{K_{k,q}};\mathbb{Z}).$$

通过直接计算（另见 [NW21，推论 D]，其中 $(r,\ s,\ n)=(k,\ q,\ q)$），我们得到 $H_1(X^\rho_{K_{k,\ q}};\mathbb{Z})\cong(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^{q-1}$。此外，由于根据庞加莱对偶性，$H_2(X^\rho_{K_{k,\ q}};\mathbb{Z})=0$，我们有

$$H_2(X_{K_{k,q},n};\mathbb{Z})\cong\mathrm{Ker}(t^n-1:H_1(X^\rho_{K_{k,q}};\mathbb{Z})\to H_1(X^\rho_{K_{k,q}};\mathbb{Z}))\cong H_1(X^\rho_{K_{k,q}};\mathbb{Z})$$

根据命题 2.3 的第一个正合序列。因此，根据 (a) 和 (b)，加入$K_{k,\ q}$进行局部打结，会在次数 1 和 2 各增加一个直和项（$\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$）$^{q-1}$。

令 G 为任意有限阿贝尔群。我们将 G 表示为 $G \cong \bigoplus_{i=1}^{r}(\mathbb{Z}/\ell_i^{a_i}\mathbb{Z})$，其中 ℓ_i 是素数，且 $a_i \geq 1$。假设 n 不是素数幂。那么， n 至少有两个不同的素因子，因此对每个 i，我们都可以选取一个满足 $q_i \neq \ell_i$ 的素数 $q_i | n$。令 $k_i = \ell_i^{a_i}$，并取 $K = K_{k_1,\ q_1} \sharp \cdots \sharp K_{k_r,\ q_r}$。于是，与 K 作连通和会增加 $\bigoplus_{i=1}^{r}(\mathbb{Z}/k_i\mathbb{Z})^{q_i-1}$，其中 G 是一个直和项。这证明了 (1)。

如果 $n = p^s$ 是素数幂，且 $|G|$ 与 p 互素，那么每个 $\ell_i \neq p$。对所有 i 取 $q_i = p$，即可得到相同的构造，并证明 (2)。□

注 3.3. 假设 $n = p^s$ 是素数幂。那么，对于任意 2-纽结，这个纽结连通和都不会增加任何 p-主挠。为说明这一点，令 K 为任意 2-纽结，并令 $B_i = H_i(X_K^\rho; \mathbb{F}_p)$。我们有如下链复形短正合列

$$0 \to C_*(X_K^\rho; \mathbb{F}_p) \xrightarrow{t-1} C_*(X_K^\rho; \mathbb{F}_p) \to C_*(X_K; \mathbb{F}_p) \to 0.$$

长正合列表明，$(t-1)$ 在每个 B_i $(i \geq 1)$ 上均可逆；对于 $t^n - 1 = (t-1)^n$，结论同样成立。因此， $H_j(X_{K,\ n}; \mathbb{F}_p) = 0$ $(j \geq 2)$。由泛系数定理，$\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_{j-1}(X_{K,\ n};\ \mathbb{Z})\ \mathbb{F}_p)$ 对于 $j-1 \geq 1$ 消失。因此，$H_1(X_{K,\ n};\ \mathbb{Z})$ 和 $H_2(X_{K,\ n}; \mathbb{Z})$ 均不含非平凡的 p-挠元。

最后，我们将应用第二亚历山大模证明定理 1.4。

定理 *1.4* 的证明。设 K 是一个旋转三叶结。那么，其亚历山大多项式为$\Delta_K(t) = t^2 - t + 1$，其第一亚历山大模为 $\Lambda_{\mathbb{Q}}/(t^2 - t + 1)$。根据 [Le77，定理 3.4]，，第二亚历山大模同构于 $\Lambda_{\mathbb{Q}}/(\Delta_K(t^{-1}))$。特别地，这是一个挠 $\Lambda_{\mathbb{Q}}$-模。因此，通过与 K 进行局部打结得到的配置 $\mathcal{A}'$ 的第二亚历山大模包含一个非平凡的 $\Lambda_{\mathbb{Q}}$-挠子模。

现在假设 U' 具有二维 CW复形的同伦型；那么 $(U')^{\nu'}$也具有此同伦型。因此，

$$H_2((U')^{\nu'}; \mathbb{Q}) = \mathrm{Ker}(\partial_2 : C_2((U')^{\nu'}; \mathbb{Q}) \to C_1((U')^{\nu'}; \mathbb{Q}))$$

是一个自由 $\Lambda_{\mathbb{Q}}$-模。这就产生了矛盾。因此， U' 与二维 CW复形不同伦等价。□

注 3.4. 定理 1.4 也可由定理 1.3 直接推出，因为二维 CW复形的每个覆盖空间都有无挠的第二整数同调。根据[Le77，定理 3.4 (ii)]，，如果一个 2-纽结 K 满足 $H_1(X_K^\rho; \mathbb{Q}) \neq 0$，那么 $H_2(X_K^\rho; \mathbb{Q})$ 是一个非零挠 $\Lambda_{\mathbb{Q}}$-模。因此，与这样的纽结作连通和，可得到一个配置，其补空间不具有二维 CW复形的同伦型。

References

[AG24] H. Awada, M. Golla，《辛曲线的 Oka 多项式与亚历山大多项式及整除关系》，arXiv:2412.15792。[CDS03] D. C. Cohen, G. Denham, A. Suciu，《米尔诺纤维同调中的挠元》，《代数与几何拓扑》**3**（2003），511–535。[CS95] D. C. Cohen, A. Suciu，《关于配置的米尔诺纤维化》，《伦敦数学会杂志》**51**（1995），第 1 期，105–119。[DS14] G. Denham, A. Suciu，《多网、平行连接与配置的米尔诺纤维化》，《伦敦数学会会刊》**108**（2014），第 6 期，1435–1470。[Di17] A. Dimca，《超平面配置：导论》，Universitext，Springer，Cham，2017，xii+200 页。

[Ki61] S. Kinoshita, 《4-球面中 2-球面的亚历山大多项式》, 《数学年刊》74（1961）, 518–531。[Le77] J. Levine, 《纽结模 I》, 《美国数学会汇刊》229（1977）, 1–50。[Li82] A. Libgober, 《平面代数曲线与循环多重平面的亚历山大多项式》, 《杜克数学杂志》49（1982）, 833–851。[Li83] A. Libgober, 《平面代数曲线的亚历山大模》, 《低维拓扑》（美国加利福尼亚州旧金山，1981）, 231–247。《当代数学》20，美国数学会，美国罗得岛州普罗维登斯，1983。[Li02] A. Libgober, 《配置的米尔诺纤维的单值化特征值》, 《奇点趋势》, 141–150, 《数学趋势》, Birkh¨auser，巴塞尔，2002。[NW21] V. Noferini, G. Williams, 《伴随环中的矩阵、史密斯标准形与 3-维 Brieskorn 流形的同调》, 《代数杂志》587（2021）, 1–19。[OT92] P. Orlik, H. Terao, 《超平面配置》, 《数学基础知识丛书》300，Springer，柏林，1992。[PS10] S. Papadima, A. Suciu, 《等变链复形的谱序列与局部系数同调》, 《美国数学会汇刊》362（2010）, 第 5 期，2685–2721。[PS17] S. Papadima, A. Suciu, 《超平面配置的米尔诺纤维化：从模共振到代数单值化》, 《伦敦数学会会刊》114（2017）, 961–1004。[RS19] D. Ruberman, L. Starkston, 《直线配置的拓扑实现》, 《国际数学研究通知》（2019）, 第 8 期，2295–2331。[Su26] S. Sugawara, 《拓扑直线排列及其拓扑不变量》, arXiv:2607.23570。[XYZ26]B. Xie, C. Yu, Z. Zheng, 《直线配置的米尔诺纤维单值化特征值》, arXiv:2609.06416。[Yo13] M. Yoshinaga, 《实直线配置的米尔诺纤维》, 《奇点杂志》7（2013）, 220–237。[Yo20] M. Yoshinaga, 《配置补空间的双重覆盖与米尔诺纤维同调中的 2-挠元》, 《欧洲数学杂志》6（2020）, 第 3 期，1097–1109。[Ze65] E. C. Zeeman, 《扭转旋转纽结》, 《美国数学会汇刊》115（1965）, 471–495。

Department of Mathematics, Faculty of Science, Hokkaido University, North 10, West8, Kita-ku, Sapporo 060-0810, JAPAN.电子邮箱地址：sugawaras@math.sci.hokudai.ac.jp