arXiv:2611.32348v1 [physics.soc-ph] 24 Nov 2026

解释多属性社会网络中的交叉性隔离

Clara Eminente[1], Elisa Omodei[1], *和 Michele Starnini[2], *

[1]网络与数据科学系，中欧大学，奥地利维也纳 1100[2]工程系，庞培法布拉大学，西班牙巴塞罗那 08018*通讯作者：michele.starnini@upf.edu；omedeie@ceu.edu

摘要

学生友谊中的隔离会影响他们获取信息和机会的途径，而学校可以通过设置班级构成来减少这种隔离。然而，隔离通常一次只按一个属性进行测量，尽管移民背景和性别等属性往往彼此相关，因此，对其中一个属性的偏好可能会在另一个属性上造成隔离。单属性解读会将这种诱导隔离归因于错误的偏好，也无法识别其中学校能够消除的部分。在一个针对两个相关属性设定偏好的网络模型中，我们以闭式解推导出科尔曼指数这一标准隔离度量，将由各项偏好导致的隔离与其在另一个属性上诱导的隔离区分开来。在四个欧洲国家的学校班级友谊网络中，忽略性别会夸大对移民背景的估计偏好；两个属性越相关，这种夸大越明显。闭式解还表明，班级构成能够实现什么效果。当学生对某一属性没有偏好时，在该属性上诱导的隔离可以被消除；而由对另一属性的同质性偏好造成的隔离则无法改变。当两项偏好都发挥作用时，将学校划分为规模相等且属性独立的群体，只有在两项偏好方向相反时才会降低隔离。依据全校平均值评估划分，可能会掩盖隔离程度变得更高的班级。在数据中，根据闭式解得出的划分消除了诱导隔离；正如预测的那样，当两项偏好均为同质性偏好时，划分并不会降低隔离。

关键词： 隔离；同质性；交叉性；学校友谊网络；课堂构成

1 引言

社会网络中的隔离，即主要在自身群体内部建立关系的倾向，会影响教育和经济结果。学校内部的隔离会降低少数族裔学生的教育成就和长期收入 [1–3]，而基于数亿条 Facebook友谊关系衡量的经济连通性，是向上流动最强的预测因素之一 [4]。隔离的网络会将信息、推荐和社会影响集中在优势群体内部 [5, 6]，影响学生的福祉 [7]，并塑造群际态度，因为跨种族友谊较少的儿童更有可能将负面意图归因于少数族裔同龄人 [8]。

要理解隔离是如何形成的，就必须同时考察不止一个属性。个体具有多种特征，而总体中两个特征之间的相关性，即它们的聚合程度，会影响友谊隔离 [9, 10]。在 524 个学校班级的 42 种属性组合中，性别聚合是导致友谊隔离的最强因素 [11]。当族裔与性别这两个属性相互吻合时，族裔会从性别那里“借来群体性”

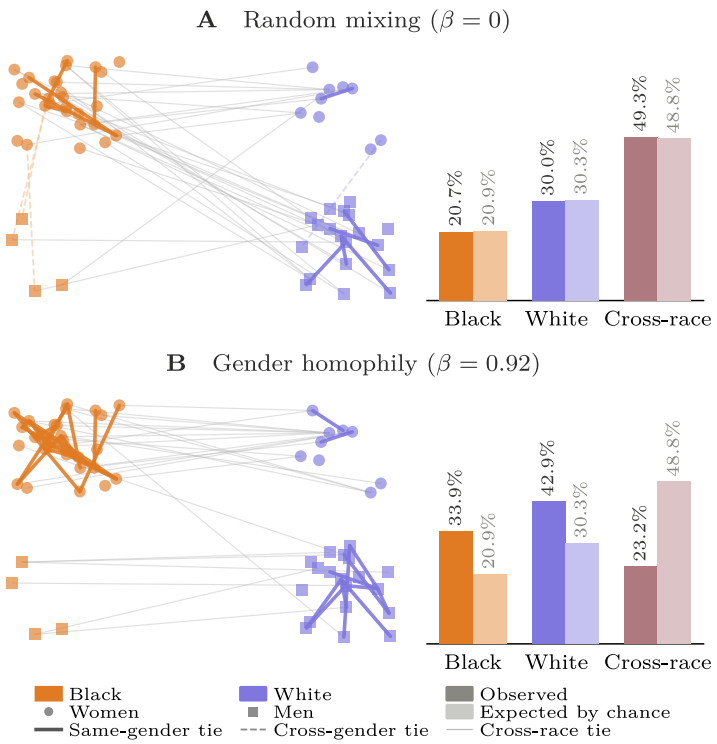

图1：对性别的偏好会造成种族隔离。一所模拟学校中有 $N = 60$名学生，分属两个性别构成不同的种族群体：黑人学生中有92%是女性，白人学生中有16%是女性（$f_{A_0} = 0.45$, $f_{B_0} = 0.5$, $k = 0.92$）。没有人具有种族偏好（$\alpha = 0$）。柱状图：黑人群体内部、白人群体内部及跨种族关系的份额；深色表示观测值，浅色表示按总体份额计算的随机预期值。（A）没有性别偏好（$\beta = 0$）时，观测份额与预期份额相符。（B）存在性别同质性（$\beta = 0.92$）时，跨种族关系占所有关系的比例降至23%，而随机情况下的预期值为49%。

[12], 这种效应需要第二个属性具有较强的同质性 [13]。在族群社会经济地位存在差异的教室中，族际友谊较少见 [14], ；而种族偏好与社会经济偏好共同作用，导致了美国高中约 37% 的社会经济隔离 [15], ，尽管不同维度上的同质性也可能相互替代，而非相互补充 [16]。尽管已有大量实证证据证明聚合会产生影响，但对于聚合如何导致隔离，仍缺乏分析性解释。

本文使用一种标准的网络隔离度量——科尔曼指数，展示巩固如何产生隔离。 [17]该指数比较群体内部关系的比例与随机情况下的预期比例：关系随机形成时指数为零，存在同质性时为正，存在异质性时为负；并且每次只针对一个属性计算。我们在多属性模型（MAM）中计算该指数。在此模型中，两名学生成为朋友的概率是两个项的乘积，每个属性（我们这个例子中的种族和性别）对应一个项，而每项由对该属性的偏好决定 [18]。我们的主要结果是以闭式解给出该模型中每个属性的科尔曼指数。通过这一闭式解，我们表明，以种族衡量的隔离有两个来源：对种族的偏好，以及对性别的偏好通过种族与性别之间的相关性所产生的影响，我们称之为诱导隔离。图1 对此作了说明：学生没有种族偏好，但性别同质性会减少跨种族友谊，因为两个种族群体的性别构成不同。因此，单属性解读会将隔离归因于错误的原因，把由性别偏好诱导产生的隔离报告为种族偏好所致。

闭式解还表明，学校可以通过将学生分配到各个班级来实现什么目标；这是一个减少隔离的杠杆，Moody [19] 认为，与改变偏好相比，这种方式更为现实，

而早期关于属性巩固的研究仅通过模拟进行探讨 [11]。当学生没有种族偏好、但偏好与自己性别相同的朋友时，在种族与性别不相关的班级中，不存在种族隔离；而在每个班级中，性别隔离都等于性别偏好，因此无法通过任何分配来降低性别隔离。当两种偏好都发挥作用时，在属性均衡且相互独立的学校中，只有当两种偏好指向相反方向时，划分才会降低隔离。偏离独立性时，划分可能降低全校平均隔离程度，却使每个班级在某一属性上的隔离程度都上升；这种抵消陷阱正如我们所示，可以通过逐班判据加以避免。

我们在四个欧洲国家移民子女纵向调查（CILS4EU） [20], 所涵盖的英格兰、德国、荷兰和瑞典的139个学校班级的友谊网络中检验这些预测。CILS4EU 数据广泛用于研究青少年友谊网络，包括族群同质性及其对课堂构成的依赖 [21], 、族群边界建构 [22] 和性别隔离 [23]。每名学生有两个二元属性：原籍国和性别；原籍国反映移民背景，即学生本人或其父母是否出生于国外。我们以原籍国代替种族，原因有二。种族是同质性文献中研究最多的属性之一 [24], ，但在欧洲，族群边界主要依据移民背景和国籍划分。此外，种族类别很少被记录，部分原因在于欧洲数据保护法将种族或族裔起源视为一类特殊的个人数据 [25, 26], ，因此欧洲关于族群同质性的研究依赖基于原籍的类别 [27–29]。我们得出三项发现。第一，在每个班级中，同时纳入原籍国和性别的模型，比仅纳入原籍国的模型更能描述学生彼此结交为朋友的情况；而后者会把由性别偏好造成的隔离归因于原籍国，且原籍国与性别合并程度越高，这种误归因就越明显。第二，在对某一属性几乎没有偏好的班级中，使两个属性在班级内相互独立的等规模划分，达到了预测的隔离下限。第三，在两个属性分布近乎均衡且几乎相互独立的班级中，两种偏好都是同质偏好；正如预测所示，划分并不会降低隔离。

2 结果

2.1 多属性模型

要解读单个属性的科尔曼指数，我们需要一种关系形成模型，在该模型中，连接概率取决于两个个体的两个属性。本小节定义了这样一种模型：总体由两个相关属性描述，连接概率则结合了对每个属性的一种偏好。

我们考虑一个包含 N 个体的总体，其中每个个体都具有两个二元属性：属性 A，包含群体 A_0 和 A_1；属性 B，包含群体 B_0 和 B_1。在我们的示例中， A 是种族， B 是性别。我们用 f_{A_0} 表示群体 A_0中个体所占的比例，用 f_{B_0} 表示群体 B_0中个体所占的比例，并对群体进行标记，使得 A_0 和 B_0 是较小的群体（f_{A_0}， $f_{B_0} \leq 1/2$）。两个属性可能相关。我们用合并 k描述它们的相关性，即 A_0 的成员中属于 B_0的成员所占的比例；这两种约定均来自 Martin-Gutierrez 等人 [30]。当 $k = f_{B_0}$时， A_0成员中 B_0 所占的比例等于其在整个总体中的比例，此时两个属性相互独立； k 偏离 f_{B_0}越远（无论朝哪个方向），两个属性的合并程度就越强；具体而言，当 $k > f_{B_0}$ 时二者相关，当 $k < f_{B_0}$时二者反相关。 f_{A_0}、 f_{B_0} 和 k 共同决定了四种类型中每一种所占个体的比例（A_a， B_b）（材料与方法）。

个体两两之间独立地建立关系。个体 i 和 j 之间建立关系的概率，与两个项的乘积成正比，每个属性对应一个项：

$$p(i,j) \propto H^{A}_{A(i),A(j)}\, H^{B}_{B(i),B(j)}, \quad H^{X} = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+x & 1-x \\ 1-x & 1+x \end{pmatrix}, \tag{1}$$

其中， $A\,(i)$ 和 $B\,(i)$ 分别是 i在属性 A 和 B上的群体， $x=\alpha$ 和 $x=\beta$ 分别是属性 A 和属性 B的偏好参数。因此，如果两名个体属于同一 A群体，属性 A 对应的项为 $(1+\alpha)/2$；否则为 $(1-\alpha)/2$，属性 B的情况也类似。偏好 α 和 β 的取值介于 -1 和 1 之间。 α 为正表示在 A上存在同质性：同一 A群体内建立关系的可能性高于两个群体之间。 α 为负表示异质性：群体之间建立关系的可能性更高。当$\alpha=0$时，属性 A 对关系的形成不起作用。属性 B对于 β 也是如此。我们将式 1 中的模型称为多属性模型（MAM）。这是 Martin-Gutierrez 等人 [18], 提出的模型的一个版本。他们比较了多种关于多维身份如何塑造社会网络的模型，发现这一乘法模型最能复现经验网络。我们的版本为每个属性设置了一个偏好参数，而不是使用完整的偏好矩阵；正是这一限制使该模型具有解析可处理性（材料与方法）。

乘积形式意味着，两个个体之间的相遇会针对每个属性分别进行一次判断，并且这两次判断彼此独立。在这一简化形式中， α 和 β 分别概括了对于每个属性而言，所有使其群体内部形成关系的可能性高于或低于随机水平的因素所产生的净效应，其中包括偏好。

2.2 一个属性的科尔曼指数混合了两种偏好

属性上的隔离通常用一个单一数值来概括，该数值根据由该属性定义的群体内部及群体之间的关系计算得出。我们要探讨的是：当个体同时对第二个相关属性存在偏好时，这个数值，即科尔曼指数，是否能够揭示个体对该属性的偏好。我们在 MAM 中以闭式解计算该指数，并表明它取决于这两种偏好。

我们采用该指数的原始定义 [17, 31] ，并将其表述为属性 A；于是，一个群体就是一组拥有相同 A-群体的个体，而不论其所属的 B-群体为何。令 w_A 表示落在某一群体内部的关系比例， w_A^* 表示在每个个体保留其关系数量、但随机选择关系对象的情况下所预期的比例。我们将 w_A^* 称为 Coleman 基线（公式见材料与方法）。属性 A 的科尔曼指数为

$$\chi_A=\begin{cases}\dfrac{w_A-w_A^*}{1-w_A^*}, & w_A\geq w_A^*,\\[2ex] \dfrac{w_A-w_A^*}{w_A^*}, & w_A<w_A^*.\end{cases} \tag{2}$$

第一行适用于组内联系至少与基线预测的一样频繁的情况（同质性状态），第二行适用于组内联系较少的情况（异质性状态）。当组内联系的比例等于基线时，指数为零；完全隔离时为一（$w_A=1$）；没有任何关系发生在组内时，指数为负一（$w_A=0$）。指数可以通过统计网络中的关系来测量，也可以在网络模型中用期望值替代计数来计算；只有在后一种情况下，指数对两种偏好的依赖才会明确体现出来。

在 MAM 中，指数根据群体内部及群体之间的联系期望密度计算得出（见材料与方法），其闭式解取决于属性 B 在每个 A-群体中的分布情况。我们用群体 A_a的 B-失衡 δ_a 来描述这种分布：总体中属于 A_a 且属于 B_0的比例，减去属于A_a 且属于 B_1的比例。当 A_a 在 B_0 中的人数与在 B_1中的人数相等时，该值为零；当 B_0 在 A_a中过度代表时，该值为正；当 B_1 过度代表时，该值为负；材料与方法给出了用f_{A_0}、 f_{B_0} 和 k表示该值的公式。在图1A–B所示的学校中，92%的黑人学生和16%的白人学生是女性，两个失衡值分别为 $\delta_0=0.38$ 和 $\delta_1=-0.38$。在同质性状态下，该指数为

$$\chi_A=\frac{\alpha\, f_{A_0}(1-f_{A_0})+\beta\, Q_A}{f_{A_0}(1-f_{A_0})+\beta\,\widetilde{Q}_A}, \tag{3}$$

其中

$$\begin{aligned} Q_A &= \tfrac{1+\alpha}{2}\left[(1-f_{A_0})\,\delta_0^2 + f_{A_0}\,\delta_1^2\right] - \tfrac{1-\alpha}{2}\,\delta_0\,\delta_1, \\ \widetilde{Q}_A &= \tfrac{1+\alpha}{2}\left[(1-f_{A_0})\,\delta_0^2 + f_{A_0}\,\delta_1^2\right] + \tfrac{1-\alpha}{2}\,\delta_0\,\delta_1 \end{aligned} \tag{4}$$

是两个 B失衡的二次型（补充信息附录，第S2.3节）。

根据 MAM 模拟网络得到的指数，在整个巩固范围内都与公式 3 一致（补充信息附录，图S2；材料与方法）。

公式 3 的分子与组内联系相对于基线的预期超额成正比，并且由两项相加而成。第一项与 α 成正比，是对 A 的偏好的直接效应。第二项与 β 成正比，是对 B的偏好的间接效应：该偏好正是通过此项进入 A指数，并且它通过 B失衡取决于总体构成。若不存在对 B 的偏好（$\beta = 0$），则只剩下直接项，分母简化为 f_{A_0}（$1 - f_{A_0}$ α B），指数等于 。对 的偏好也通过 Q_A 进入分母，因此仅凭间接项无法得出该偏好的效应。例如，当两个属性相互独立时，间接项通常不为零，但会被分母中的 βQ_A 项抵消，指数等于 α （补充信息附录，S2.4 节）。对 B 的偏好效应由指数与 α 之差给出，见公式5。在异质性状态下，指数的分子相同，但分母不同且为正，因此可表示为公式 3 乘以一个正因子（材料与方法）。通过交换两个属性的作用，可由公式 3 和 4 得到 B 的指数（材料与方法）。

2.3 相关属性可以诱发隔离

A 的指数只有在特殊情况下才能解读为对 A的偏好。本小节刻画了这些情况，并表明在其他所有情况下，两者之差等于对 B的偏好所诱发的隔离。

从指数与对 A的偏好之差可以最清楚地看出两种偏好如何结合。在同质性状态下，式3 和 4给出（补充信息附录，第S2.4节）

$$\chi_A - \alpha \;=\; \frac{\beta\,(1-\alpha^2)\,f_{A_0}\,(k - f_{B_0})\,\Delta}{f_{A_0}(1-f_{A_0}) + \beta\,\widetilde{Q}_A}. \tag{5}$$

此处，$\Delta = \delta_0 - \delta_1$，两个 B-不平衡之间的差异，量化了两个群体在其 A-群体的 B-组成方面的差异程度；分母与式 3中的相同，且为正。由于 $1 - \alpha^2$ 且分母永不为零，指数与 α 不同，当且仅当三个因子中的一个 β、$k - f_{B_0}$ 和 Δ 为零。在对 A ($\alpha > 0$) 具有同质性的情况下，因此只有三种情形会使指数等于该偏好。

第一种情况是对 B ($\beta = 0$)没有偏好：此时，无论总体构成如何，指数都等于 α。尽管群体之间的关系数量往往并不相同，这一结论仍然成立；这种现象称为度不平等。在同质性作用下，较大群体的成员会找到更多同类型的伙伴，并建立更多关系，因此少数群体的联系往往少于多数群体 [32, 33]；当属性相关时，对一个属性的偏好也会造成另一个属性的群体之间出现度不平等 [30],，这两种机制在 MAM 中都会发挥作用（补充信息附录，第S1.5节）。Coleman 基线对此作了校正：发送全部关系中较大比例关系的群体，预期会拥有更多组内联系（材料与方法）；只有超出这一预期的关系才计为隔离。若使用随机混合值 $f_{A_0}^2 + (1 - f_{A_0})^2$, 计算指数，即假定所有个体拥有相同数量的关系时预期的组内联系比例，那么这些额外关系会被误读为隔离；只要两个群体的规模不同，该指数就会高于 α （例如，对于0.67而非0.60，当 $f_{A_0} = 0.2$ 和 $\alpha = 0.6$时；补充信息附录，第S2.2节）。第二种情况是两个属性相互独立（$k = f_{B_0}$）。第三种情况是 $\Delta = 0$，也就是说，两个

A群体具有相同的 B不平衡，因此每个群体恰好占总体 B不平衡的一半，即 $\delta_0 + \delta_1 = 2f_{B_0} - 1$。

除这三种情况外，该指数还包含一项由对 B 的偏好产生、且不同于 α的贡献。我们称这项贡献为诱导隔离，其在同质性状态下的大小由公式 5给出。它需要两个条件：个体必须偏好 B，并且两个属性必须相关，使得两个 A群体的 B组成有所不同。图1A–B 展示了这一机制。当一个种族群体主要由女性组成，而另一个主要由男性组成时，性别同质性会使关系集中在种族群体内部，尽管没有人具有种族偏好：在图 1B 的模拟学校中，跨种族关系降至所有关系的 23%，而随机情况下的预期值为 49%。按照单属性解读，科尔曼指数会将 A 上的全部隔离归因于对 A的偏好，因此把诱导隔离误认为偏好造成的隔离。

诱导隔离并非关系数量差异的副产品：这类差异只通过科尔曼基线进入指数，而基线会将其纳入考量；如果没有对 A的偏好，则只有当两个 B群体的规模不同时，这类差异才会造成隔离。若没有对 A的偏好，且两个 B群体规模相同，那么每个个体的预期关系数都相同；然而，只要属性相关，对 A 的指数在对 B 具有同质偏好时便为正值，如图 1B 所示（补充信息附录，第 S2.5节）。一般而言，如果不存在对 A ($\alpha = 0$) 的偏好，直接项便为零，而 A上的全部隔离都是诱导产生的。

2.4 单属性模型错误归因了实证学校网络中的隔离

闭式解预测，单属性模型会将由另一个被省略的属性诱导的隔离错误归因于其唯一包含的属性。我们通过估计每个班级在包含和不包含第二个属性时的偏好，并将两次估计之间的差异与闭式解预测的诱导隔离进行比较，在学校友谊网络上检验这一预测。

我们使用四个欧洲国家移民子女纵向调查（CILS4EU）的友谊网络 [20], ——这项调查于2010年启动，旨在研究英格兰、德国、荷兰和瑞典的移民子女融入情况。每个网络代表一个学校班级，每条边都是一次友谊提名，由提名同班同学的学生指向被提名的同班同学。筛选后，样本包含139个班级（材料与方法）。每名学生都有两个二元属性：原籍国（移民背景）和性别。在每个班级中，我们按照模型的设定，将 A 标记为少数群体较小的属性，因此 A 在一些班级中是原籍国，在另一些班级中则是性别。这些数据也适合用于研究班级构成，因为在欧洲学校体系中，学生由管理人员分配到班级。

我们通过最大似然法，分别估计在每个班级上拟合的模型的偏好参数：包括 MAM，以及其以原籍国作为具有活跃偏好的属性的单属性约简（SAM）（材料与方法）。在 5% 的显著性水平上，似然比检验在 139 个班级中的每一个班级都支持 MAM 而非 SAM：在每个班级中，包含两种属性的模型都比仅包含起源的模型更能描述谁与谁交友。包含两种属性的模型在 74 个班级中也优于仅包含性别的模型，约占样本的一半（补充信息附录，第 S5.3 节）。MAM 是 Martin-Gutierrez 等人提出的模型的一个受约束版本 [18], ，其无约束版本（我们称之为无约束 MAM，即 uMAM）共有 8 个偏好参数（每种属性 4 个），其中 7 个是自由参数（材料与方法）。在 69 个班级中，约占样本的一半，uMAM 的数据拟合效果并未显著优于 MAM。由于其余分析依赖于估计出的偏好，我们在这 69 个班级中开展分析；在这些班级中，MAM 的约束并未显著降低拟合效果。

如果一个 si 单一属性的解读会错误地将隔离归因于诱导因素，因此 SAM 应估计 a

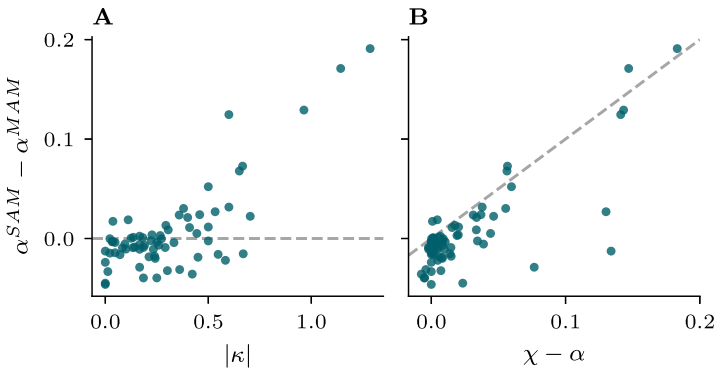

图2：单属性模型错误归因了隔离。（A）在MAM与无约束模型拟合效果相同的69个班级中，使用单属性模型（SAM）和多属性模型（MAM）估计的原籍国偏好之差，$\alpha^{\mathrm{SAM}} - \alpha^{\mathrm{MAM}}$与绝对归一化整合度 $|\kappa| = |k - f_{B_0}|/f_{B_0}$的关系。虚线：零值。差异随整合度增加而增大。（B）上述差异与诱导隔离 $\chi - \alpha$ 的关系，该隔离根据闭式解（同质性状态下的方程5 ）计算得出，使用MAM估计的每个班级的组成和偏好；虚线：对角线。此处 α 表示原籍国偏好，尽管在某些班级中，原籍是属性 A，而在其他班级中则是属性 B；$|\kappa| = |F_{A_0,\ B_0} - f_{A_0} f_{B_0}|/$（$f_{A_0} f_{B_0}$）对于两个属性是对称的，因此不取决于这种标记方式。

对原籍国的偏好强于 MAM，而且原籍国与性别的合并程度越高，这种差异就越明显。图2A 证实了这一点。在图中，合并程度用归一化合并度的绝对值来描述 $\kappa = (k - f_{B_0})/f_{B_0}$，即 k 相对于f_{B_0}偏离独立性的距离，并经过归一化，使得当 -1 中没有任何成员 A_0 属于 B_0时，其值为 B_0，无论份额如何（材料与方法）。在两个属性近乎独立的班级中，两个模型对起源的偏好估计相近；在合并程度较高的班级中，SAM 估计出的偏好更强。由于无法控制对性别的偏好，SAM 将性别偏好所诱发的隔离归因于起源。

通胀幅度具有直接的解释。在单一属性模型中，指数等于偏好（式5的第一种情况），而 SAM 拟合的是原籍群体内部及群体之间的关系，因此其偏好近似于在网络上测得的原籍指数；当两个原籍群体规模相同时，二者相等。MAM 将同一指数划分为对原籍的直接偏好，以及由对性别的偏好所诱导的部分。图2A 中绘制的两种估计偏好之差，因此是各班级中由性别诱导的原籍隔离的估计值。图2B 将其与式5根据各班级的组成及使用 MAM 估计的偏好所预测的诱导隔离进行比较。在大多数班级中，该差值都接近这一预测；有三个班级的预测诱导隔离约为 0.08 至 0.13，但其差值明显低于预测值。

根据两个拟合模型模拟的网络呈现出相同的图景：SAM 再现了其拟合所针对的属性在本例中为原籍国所产生的隔离，但几乎不会产生性别隔离；而 MAM 则同时再现了两者（补充信息附录，图S7）。拟合性别的 SAM 见补充信息附录第S5.3节。

2.5 将一所学校划分为两个班级

遵循 Moody [19], 的观点，他认为，与直接改变偏好相比，通过塑造接触机会来应对隔离更为切合实际，我们考虑一位学校管理者，并称其为规划者。规划者负责选择班级的组成，我们则探讨通过将一所学校拆分为两个班级，能够实现多大程度的隔离减少。我们将隔离本身视为规划者的目标函数，与去隔离政策中的做法一致；我们不对隔离影响教育结果的过程进行建模。本小节定义这些划分，以及

规划者据以评判这些划分的两个目标函数。

两个班级合在一起包含了学校的所有学生，因此学校构成保持不变（材料与方法），且每个班级内部的联系都遵循 MAM，其偏好与整个学校相同： α 和 β 。规划者根据按班级规模加权的班级指数平均值来评判划分，$\langle\chi_A\rangle$ 和$\langle\chi_B\rangle$；加权平均值表示从整个学校随机抽取一名学生后，该学生所在班级的预期隔离程度。我们考虑两个目标函数，

$$J = |\langle\chi_A\rangle| + |\langle\chi_B\rangle|, \qquad J_{\text{strict}} = \langle|\chi_A|\rangle + \langle|\chi_B|\rangle \;\geq\; J, \tag{6}$$

其中 $\langle x\rangle = \sum_c (N^c/N)\; x^c$是对班级 c按其学生人数 N^c加权后的平均值。两者都取绝对值，因此组内联系的过多或不足都会同样被视为偏离基线。总体目标函数 J 对各平均值取绝对值，因此指数符号相反的班级会在其中相互抵消。严格目标函数 J_{strict} 则逐个班级取绝对值：它根据每个班级自身的隔离程度进行评判，且其值绝不会小于 J。

方程 5 展示了规划者能够影响 A 隔离的哪一部分。其第一个因子，即对 B的偏好，超出了规划者的控制范围；另外两个因子——巩固程度 $k - f_{B_0}$ 以及 Δ 之间 B不平衡的差异，则由班级构成决定。

2.6 一种中性偏好下，只有诱导隔离可以消除

在本小节中，我们考虑对 A （$\alpha = 0$）没有偏好的情况，因此 A 上的所有隔离都是诱导隔离，而闭式解说明了班级组成能够和不能够改变什么。

如果交换两个属性的角色来考察方程 5 ，那么 B隔离的程度由对 B的偏好决定：

$$\chi_B = \beta \qquad (\alpha = 0,\ \beta > 0) \tag{7}$$

在每个班级中，无论其组成如何，只要对 B 的偏好是同质偏好即可。对于 $\alpha = 0$，属性 A 对每个配对的贡献都相同，因此从 B的角度来看，该模型是一个单属性模型，其指数等于该偏好。对于 B （$\beta < 0$）上的异质性，只有当两个 B 的指数等于 β 且两个 B群体规模相同（补充信息附录，第 S3.2节）。因此，在同质偏好下，无论如何安排学生进入班级，都无法改变 B上的隔离：这是政策上的不可能性（补充信息附录，第 S3.3节）。图 3A 展示了一所模拟学校以多种不同方式进行划分的情况：对于 $\alpha = 0$， B的平均指数保持在 $\beta = 0.8$附近，而 A 的平均指数则约在 0 到 0.6 之间变化。当两种偏好都起作用时，两个平均指数都会变化（图 3B）。

对 A的隔离则可以通过班级构成消除。在 $\alpha = 0$，同质性状态下，公式5~简化为 $\chi_A = \beta\, f_{A_0}(k - f_{B_0})\,\Delta/[f_{A_0}(1 - f_{A_0}) + \beta Q_A]$，而异质性状态具有相同的分子（补充信息附录，S3.1 节）。因此，在两个属性相互独立（$k = f_{B_0}$）或 $\Delta = 0$的班级中， A 的指数为零。要从每个班级中消除对 A 的隔离，规划者只需对所有班级施加第一个条件。第二个条件不可能在每个班级中都成立： Δ会增加和减少总体的比例（材料与方法），而学校中每一比例的大小都是其各班级中相同比例的按规模加权平均值（公式18），因此学校的 Δ是其各班级 Δ 的按规模加权平均值；当该值不为零时，至少有一个班级具有 $\Delta \neq 0$。相反，独立性可以在每个班级中成立：各班级的组成可以有所不同，使得学校中两个属性之间的相关性完全来自班级之间的差异，而在每个班级内部，两个属性彼此独立。我们不考虑 B分层划分，即将 B_0 的所有学生安排在一个班级，将 B_1 的所有学生安排在另一个班级：这种做法只有通过完全分离两个 B群体，才能使 A的指数为零，从而使 B 的指数无定义。

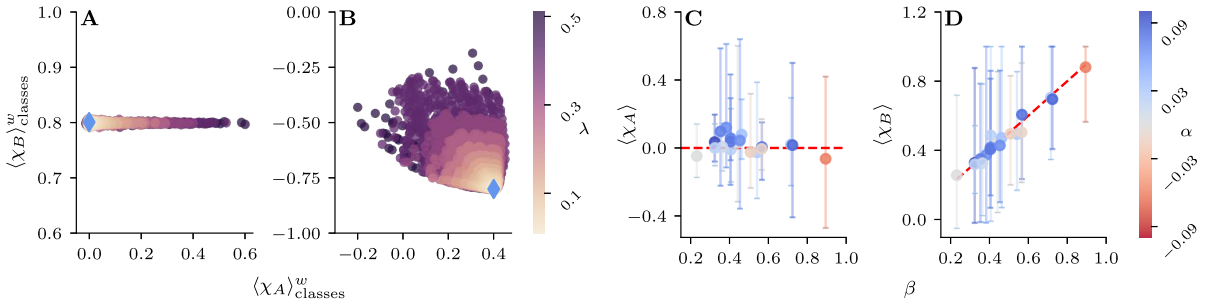

图3：当对 A没有偏好时，班级构成只会改变A上的隔离。（A 和 B）在一所模拟学校（$f_{A_0} = 0.2$、 $f_{B_0} = 0.5$、$k = 0.5$、 $N = 800$）中测量的班级指数χ_A和χ_B的按规模加权平均值（在坐标轴上写作χ^w_{classes}），该学校以多种方式划分为两个班级；每个点代表一种划分，颜色表示第 1 类的相对规模 λ，菱形表示未划分学校。（A）对 A 没有偏好（$\alpha = 0$、 $\beta = 0.8$）：χ_B始终接近 β，而χ_A约在 0 到 0.6 之间变化。（B）两种偏好均处于激活状态（$\alpha = 0.4$、 $\beta = -0.8$）：两个平均值都会变化。（C 和 D）19 个 CILS4EU 班级的 ESDS 划分，其中 $|\alpha| \leq 0.1$ 位于 ESDS 存在的区域内：（C）χ_A和（D）χ_B相对于估计的 β，颜色表示估计的 α；虚线表示预测值 0 和 β。这些划分的总体目标函数 J 见补充信息附录，图 S9。

我们将一种划分称为去相关划分：它使两个属性在每个班级内部相互独立，同时确保每个属性的两个群体都出现在每个班级中。在保持学校构成守恒的情况下（公式 18），对于两个规模相等的班级，要求满足

$$(f^{c_1}_{A_0} - f_{A_0})(f^{c_1}_{B_0} - f_{B_0}) = f_{A_0}\,(k - f_{B_0}), \tag{8}$$

其中，$f^{c_1}_{A_0}$和$f^{c_1}_{B_0}$是两个班级之一中 A_0和 B_0所占的份额（补充信息附录，第 S3.4 节）。右侧是学校中两个属性的协方差：同时属于 A_0 和 B_0的学生比例，减去其在$f_{A_0} f_{B_0}$ 独立性下的值。左侧是由两个班级之间的差异产生的协方差。由于在去相关划分中，各班级内部的属性彼此独立，因此学校的相关性必然完全由班级之间的差异承担。一个包含一半学生的班级，其各群体的份额最多是学校中相应份额的两倍，因此左侧的绝对值不能超过$f_{A_0} f_{B_0}$；当且仅当$k \leq 2f_{B_0}$时，方程 8 有解，也就是说，除非属于 B_0 的 A_0 学生比例超过学校中 B_0 学生比例的两倍。将一所学校划分为两个规模相等的班级，并使每个班级内的两个属性去相关，这一问题的解构成一个单参数族（材料与方法）；我们称之为等规模去相关划分（ESDS）。图 4 展示了这些解在份额f_{B_0} 和巩固程度 k构成的平面上的存在区域。当$k > 2f_{B_0}$时，不存在任何将学校划分为两个规模相等且各自内部属性独立的方案；我们的数据中，20 个班级里有一个班级属于这种情况，其 $\alpha \approx 0$ （图 4）。

因此，我们证实，每个班级中 B 上的隔离等于 β，而 A 上的隔离可以降为零，因此 J 的最小值为 β：一个不可消除的下限（补充信息附录，第S3.5节）。当 $0 < k < 2f_{B_0}$时，ESDS 能达到这一数值，同时确保每个班级中两个属性的两个群体都存在。由于此时每个班级都有 $\chi_A = 0$ 和 $\chi_B = \beta$，ESDS 也会给出 $J_{\text{strict}} = J = \beta$，并且对两个目标函数而言都是最优的。学校所能做到的最好结果，就是消除 A上的所有诱导隔离； B 上的隔离则维持在由对 B的偏好所决定的水平。

不慎的划分可能适得其反。在图3A所示的学校中，两个属性相互独立，因此未划分学校在 A上不存在隔离。然而，许多划分会产生平均指数为正的 A班级，最高约为0.6：划分可能会造成原本不存在的种族隔离。

我们在69个班级中的20个班级上检验这些预测；在这69个班级中，MAM与uMAM的拟合效果同样好，其对 A 的估计偏好接近于零（$|\alpha| \leq 0.1$）。如图4所示，所有

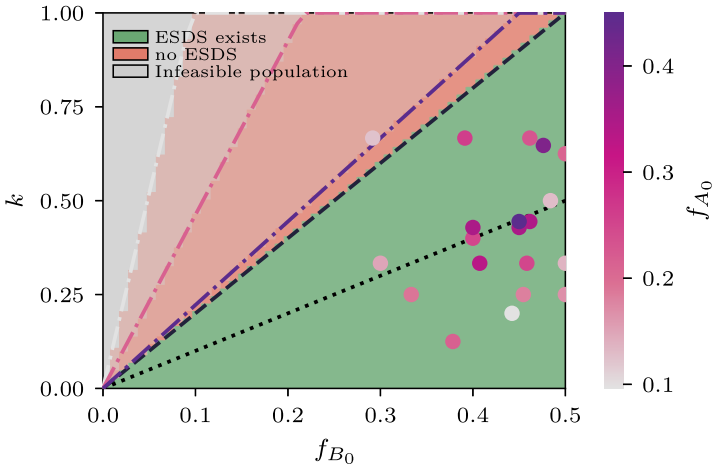

图 4：在 20 个班级中的 19 个班级里，存在去相关划分，其 $\alpha \approx 0$。学校中 B_0 所占比例、f_{B_0}以及巩固 k 的平面图。等规模去相关划分（ESDS）在直线 $k = 2f_{B_0}$ 以下存在（虚线；绿色区域），在其以上不存在；此处总体是可行的（红色区域）；灰色表示不可行的总体。点划线：群体可行性上限$k = \min(1, f_{B_0}/f_{A_0})$，适用于 $f_{A_0} = 0.1$，0。21 和 0。45，颜色与色条一致。点线：独立性，$k = f_{B_0}$。在每个网格点内，依据补充信息附录第 S3.4节中的单参数族，以数值方式搜索等规模去相关划分。点：具有 $|\alpha| \leq 0.1$的 20 个 CILS4EU 班级，按 f_{A_0}着色；除一个班级外，所有班级都位于存在等规模去相关划分的区域内。

除一个班级外，都处于ESDS存在的区域。由于每个网络对应一个班级，我们按照ESDS规定的组成，将这19个班级分别划分为两个子班级，同时保留每个子班级内部观测到的关系（材料与方法）。在各班级中，A的平均指数以零为中心，而 B 的平均指数 β（图3C–D）呈现J 接近下限 β，位于误差条范围内（补充信息附录，图S9）。这些划分保留了未划分类中观测到的友谊关系，因此是在学生子集上检验模型；它们并不能测量实际重新分配的影响，因为重新分配后，学生可能会形成不同的友谊关系 [34]。我们将ESDS与另外两种划分方案进行比较。一种使两个属性相关的划分，其表现不如ESDS（补充信息附录，第S5.4节），但在这些数据中，随机划分的表现几乎同样好。这一结果可以由CILS4EU班级中发现的属性巩固程度解释。在模拟学校中，我们发现，随着巩固程度提高，ESDS相对于随机划分的优势也会增加（补充信息附录，第S3.6节）；而我们数据中的属性恰好只有中等程度的巩固，因此ESDS的表现与随机划分相近。

2.7 当两个活跃偏好相互冲突时，划分才有帮助

当两个偏好都处于活跃状态时，规划者面临着权衡：降低一个属性上的隔离的划分，可能会提高另一个属性上的隔离（图 3B）。对于一般学校，目前尚无闭式解。因此，我们研究一所两个属性均达到平衡的学校，$f_{A_0} = f_{B_0} = 1/2$。这种学校易于处理，并且在两个属性上都最为多样化：其巩固程度可以从完全负相关变为完全相关，并以独立性为中心呈对称分布，因此两个偏好之间的相互作用最为明显。本小节给出平衡学校的指数，并在两个属性相互独立时求解规划者的问题。

在平衡学校中，两个 B-不平衡为 $\delta_0 = -\delta_1 = (2k-1)/2$，因此闭式解（方程3 和4）仅通过合并度平方 $s = (2k-1)^2$,取决于组成；该值在独立性时为 0，在两个属性完全相关或反

相关时为 1。两个属性的指数为（补充信息附录，第S4.1节）

$$\chi_A(s) = \frac{\alpha + \beta s}{1 + \alpha\beta s}, \qquad \chi_B(s) = \frac{\beta + \alpha s}{1 + \alpha\beta s}. \tag{9}$$

在同质偏好和异质性状态下，公式均成立，因为在平衡学校中，这两种制度具有相同的分母（材料与方法）。在公式 9 中，巩固控制着两个属性的指数，以及由此产生的隔离程度之间的耦合强度。在独立性（$s = 0$）下，每个指数都等于自身的偏好。随着巩固程度增加，每个指数中所占的另一偏好比重也会增加；在完全合并（$s = 1$）下，二者取相同的值 $(\alpha + \beta)/(1 + \alpha\beta)$。公式 5中的诱导隔离变为 $\chi_A - \alpha = \beta(1-\alpha^2)\, s/(1+\alpha\beta s)$：在独立性下为零，符号与 β相同，并且其绝对值随巩固程度增加而增大。若对 A没有偏好，$\chi_A = \beta s$ 则全部为诱导隔离；在独立性附近其影响可忽略，而在强巩固下则与 β 相当。

随着巩固程度增加，每个指数移动的方向由另一个偏好决定：根据公式 9，χ_A 相对于 s 的斜率符号为 β，而 χ_B 的斜率符号为 α （补充信息附录，第 S4.1节）。我们将两个偏好具有相同符号（$\alpha\beta > 0$）的情况称为一致阶段，将其具有相反符号（$\alpha\beta < 0$）的情况称为冲突阶段。在冲突阶段，将属性标记为使得 $|\alpha| \le |\beta|$，则 A 的指数会在合并度平方 $s^* = |\alpha|/|\beta|$处变为零，我们称该点为抵消点。

考虑一个处于独立状态（$k = 1/2$）的学校，将其划分为两个规模相等且都保持学校人口份额的班级。随后，每个班级也都达到平衡，剩下的唯一自由度是其合并度：根据学校组成的守恒，两个班级的合并度为 $1/2 \pm \varepsilon$，其中偏移量 ε 介于 0 和 1/2 之间（材料与方法）。这使得它们的属性间相关性方向相反，但平方凝聚度相同，均为 $s = 4\varepsilon^2$。由于 s 在两个班级之间相同，且两个班级的人口均衡，因此根据公式 9，两个班级具有相同的指标值。取平均值与取绝对值可以交换顺序，因此 $J_{\text{strict}} = J = |\chi_A(s)| + |\chi_B(s)|$，规划者选择一个单一数值 s。当 $s = 0$ 时，两个班级都继承学校的组成；由于该指数取决于班级的组成而非其规模，平方凝聚度为 $s = 0$与不进行划分是等价的。在一致阶段，$|\chi_A|$ 和 $|\chi_B|$ 都随 s （公式 9）增长，因此 J 也随之增长，最佳选项是不进行划分。在冲突阶段，当 s 增长至 s^*之前，J 会下降；在 s^* 处，两个班级中关于 A 的隔离均消失，超过该值后则会上升（补充信息附录，S4.2 节）。其最小值，

$$J_{\min} = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{|\beta|\,(1 - \alpha^2)}, \tag{10}$$

低于下限 $|\beta|$ 在没有偏好高于 A。图 5A–B 展示了模拟网络中的两个阶段。

$\alpha\beta$ 的符号很重要，因为划分只有通过班级的巩固才能改变隔离。考虑这样一群学生：他们轻微地回避与自己种族相同的朋友（$\alpha < 0$），但偏好与自己性别相同的朋友（$\beta > 0$）；对于原籍国和性别而言，这种符号模式出现在我们的数据中的某些班级里。在种族和性别相关的班级中，性别同质性会诱导种族隔离，从而抵消按种族划分的直接异质性效应；在巩固阶段 s^*，两者相互抵消，种族隔离随之消失。对于 $\alpha = -0.2$和 $\beta = 0.6$，J 从未划分学校中的 $|\alpha| + |\beta| = 0.80$ 下降至 0。56。当两种偏好的符号相同时，诱导效应与直接效应反而会相加，因此任何划分都会增加隔离。从几何角度看，在独立性处进行划分，会使两个班级移动到由两个指数描绘的线段上的同一点；只有当该线段穿过一条坐标轴时，它才会降低 J，而这只会发生在冲突阶段。

在一致阶段不进行划分，或等价地说，使两个班级都采用学校构成，这一建议在非独立情况下同样成立，最多只能获得0.12% 的 J，即使是在高度合并的学校中也是如此（补充信息附录，第 S4.2节）。估计符号

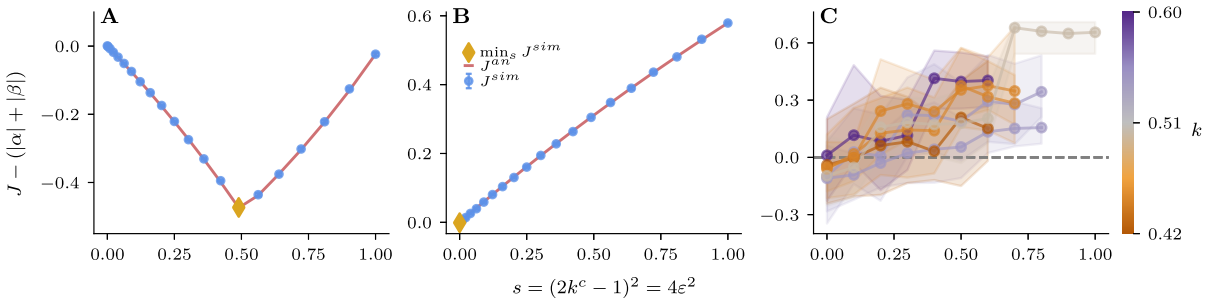

图5：在独立性条件下，将一所平衡学校划分后，只有当两种偏好相互冲突时，隔离程度才会降低。 总体目标函数 J 减去不进行划分时的目标函数值 $|\alpha| + |\beta|$，与两个班级合并度的平方 $s = 4\varepsilon^2$ 之间的关系；对象是在独立性条件下进行等规模划分且保持份额不变的平衡学校（$f_{A_0} = f_{B_0} = 1/2, k = 1/2$）。（A 和 B）根据闭式解计算（图例中的线条，$J^{an}$），并在模拟网络上测量（符号，$J^{sim}$；每个班级是一个包含500个个体的网络，每个点对应30个网络）。（A）冲突阶段（$\alpha = 0.4, \beta = -0.8$）：不进行划分时为 $J = |\alpha| + |\beta| = 1.2$；通过划分可将其降低至最小值 $5/7 \approx 0.71$，该值出现在 $s^* = 1/2$ 处（菱形；图例中的 $\min_s J^{sim}$），此时两个班级中 A 上的隔离程度均为零。将两种偏好的符号都反转不会改变 J，因此 $\alpha = -0.4$ 和 $\beta = 0.8$对应的曲线相同，即 A 上的异质性和 B上的同质性。（B）一致阶段（$\alpha = \beta = 0.4$）：J 随 s 增大，最佳选项是不进行划分。（C）数据验证：对接近平衡学校且接近独立性的7个 CILS4EU 班级，绘制 $J - (|\alpha| + |\beta|)$ 与偏移量平方 $4\varepsilon^2$ 的关系；这些班级均处于一致阶段；颜色表示：k。如预测所示，J 随偏移量增大。

因此，在设计任何划分之前，两种偏好就能告知规划者划分是否有帮助。

我们检验了这 69 个班级中，最接近平衡学校和独立性的 7 个班级在独立性条件下的预测（$0.4 \le f_{A_0}$、$f_{B_0} \le 0.5$ 和 $|k - 1/2| \le 0.1$；材料与方法）。它们都处于一致阶段，满足 $\alpha > 0$ 和 $\beta > 0$，而我们刚刚得到的结果预测，最佳策略是不进行划分，因为任何偏移量都会增加 J。我们将每个班级划分为两个子班级，合并程度为 $k \pm \varepsilon$，并保留每个子班级内观测到的关系，与 ESDS 的做法相同。在误差带范围内，J 随偏移量的平方增大 $4\varepsilon^2$，正如预测的那样（图5C）。当 k 偏离 $1/2$ 时，偏离这一预测的程度会增大，此时两个子班级不再互为镜像。该样本中的班级均不处于冲突阶段，因此，尚未使用这些数据检验冲突阶段下划分是否有帮助这一预测。

2.8 学校平均值可能掩盖更加隔离的班级

在独立性状态下，等规模划分中的两个班级互为镜像，学校平均值能够描述二者。偏离独立性（$k \neq 1/2$）后，两个班级会有所不同，学校平均值可能误导规划者。本小节展示了这种情况如何发生在一所总体均衡、且偏好参数处于冲突阶段的学校中，以及如何通过逐个班级评估划分来避免这种情况。

对于偏移量 ε，在保持学校人口份额不变的等规模划分中，两个班级的合并度为 $k \pm \varepsilon$ 以及平方凝聚度

$$s_{\pm} = (2k - 1 \pm 2\varepsilon)^2, \tag{11}$$

除非 $k = 1/2$，否则二者不同。它们的指数的学校平均值分别为 $\langle \chi_A \rangle = [\chi_A(s_+) + \chi_A(s_-)]/2$和 $\langle \chi_B \rangle = [\chi_B(s_+) + \chi_B(s_-)]/2$。

在冲突阶段，一种划分可能将两个班级置于 s^*的相反两侧，从而使一个班级在 A 上的隔离为正，而另一个班级为负。这样一来，它们的平均值可能归零，并且 J 达到其下限 $|\chi_B(s^*)|$，尽管没有任何班级在 A上的隔离为零，这个零值仅仅是班级之间相互抵消的结果。只有当学校的合并度平方低于抵消点$(2k - 1)^2 < s^*$时，这样的划分才会存在；对于 $\alpha = 0.4$ 和 $\beta = -0.8$，这种类型

的划分对每一所此类学校都存在，但对于一般的偏好对，情况并非如此（补充信息附录，第S4.4节）。对于远离独立性的学校（对于 $\alpha = 0.4$ 和 $\beta = -0.8$，当 $|2k-1| > 0.30$时），每个班级在 A 上的隔离绝对值都大于未划分学校中的相应值（补充信息附录，第S4.4节）。学生感受到的是自己所在班级的隔离，而不是学校平均值，因此所显示的减少只是表面现象。我们将其称为抵消陷阱。图6 展示了 $\alpha = 0.4$ 和 $\beta = -0.8$的这一现象：对于一系列合并度， J 的最小值低于按班级分别能够达到的水平。

补救方法是逐个班级评估一次划分，其中 J_{strict}不会因抵消而降低。对于公式 11中的划分，$J_{\text{strict}} = [T(s_+)+T(s_-)]/2$，其中 $T(s) = |\chi_A(s)|+|\chi_B(s)|$是一个班级的总隔离度。在冲突阶段，$T$ 会随着 s的增长而下降，直到 s^*，超过该点后则会上升（材料与方法）。以这种方式评估，只有当学校的合并度平方低于抵消点时，划分才有帮助，

$$(2k-1)^2 < s^*, \tag{12}$$

也就是说，在未划分学校中，对 A的直接偏好仍然压倒由对 B (补充信息附录，第 S4.3节）中的偏好所诱发的隔离。我们将这段以独立性为中心的合并度范围称为跨越窗口；随着两种偏好的强度变得越发接近，该窗口也会扩大。在窗口之外，学校已经处于 T上升的一侧，此时将两个班级分开不会降低它们的平均值，最佳选项是不进行划分。在窗口内，最佳划分通常会将一个班级置于抵消点，此时 A 上的隔离消失；而根据学校组成的守恒，另一个班级则处于由此施加的合并度上（材料与方法）；例外情况见补充信息附录第 S4.3节。

逐班评估是有代价的：偏离独立性时， J_{strict} 的最小值高于 J 的下限（图6），但它带来的降低是真实的，并非班级之间相互抵消造成的。即便如此，在距离独立性足够远的学校中（对于 $\alpha = 0.4$ 和 $\beta = -0.8$，当$|2k-1| > 0.24$时），最优划分会使第二个班级在两个属性上都比未划分学校更加隔离（补充信息附录，第S4.5节）。

因此，这个陷阱仅限于偏好相反且其巩固位于跨越窗口内的学校。在冲突阶段以及窗口之外， J和 J_{strict} 具有相同的最小值，即不进行划分时取得（补充信息附录，第S4.3节）。在一致阶段，两个指数都不会改变符号（方程9），因此每个指数在所有班级中符号都相同，取平均值与取绝对值可以交换顺序， $J = J_{\text{strict}}$ 对每个划分均成立，而此前针对J 得到的结果同样适用于 J_{strict}。

3 讨论

基于单一属性测量的隔离通常被解读为该属性上的偏好和接触机会共同作用的结果。我们的结果表明，这种解读何时会失效，以及这对班级组成有何影响。我们将对这些结果进行总结，并联系先前的研究加以讨论，同时探讨其局限性和可能的拓展方向。

我们以闭式解计算了网络模型中每个属性的科尔曼指数；在该模型中，关系取决于对两个相关属性的偏好。以一个属性衡量的隔离度，既包含对该属性的偏好所造成的影响，也包含对另一个属性的偏好所诱导的隔离，因此，单属性解读可能会将其归因于错误的原因。在学校友谊网络中，在每个班级内，同时考虑对原籍国和性别的偏好的模型，比仅考虑原籍国的模型更能描述这些关系；当原籍国与性别被合并时，后者会夸大对原籍国的偏好。当对一个属性的偏好为中性时，负责分班的规划者可以完全消除诱导隔离，但无法改变另一个属性上的隔离；在同质性条件下，该隔离在每个班级中都等于对该属性的偏好。在两个属性上都均衡、且两个属性相互独立的学校中，

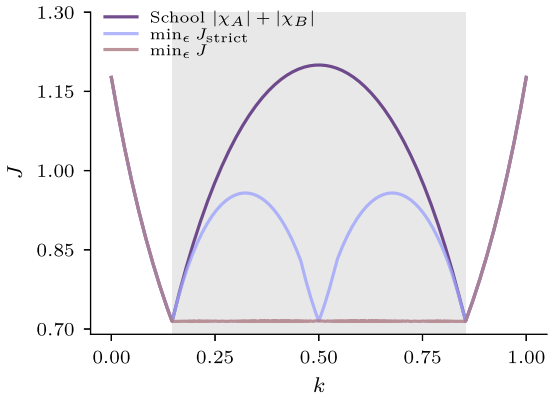

图6：学校平均值可能掩盖隔离程度更高的班级。冲突阶段（$\alpha = 0.4$, $\beta = -0.8$, $s^* = 1/2$）中的平衡学校（$f_{A_0} = f_{B_0} = 1/2$），采用保持其份额不变的等规模划分；所有曲线均由 χ_A 和 χ_B的闭式解析形式推导得出。将两种偏好的符号同时改变，不会改变 J 和 J_{strict}，因此 $\alpha = -0.4$ 和 $\beta = 0.8$也适用相同的曲线。总体目标函数 J （玫瑰色）和严格目标函数 J_{strict} （淡紫色）关于偏移量的最小值，以及未划分学校（紫色），随学校巩固程度 k的变化。在跨越窗口（灰色带）内，班级之间的抵消使 J 达到一个恒定下限，而 J_{strict} 仅在$k = 1/2$处达到该下限；窗口之外，三条曲线重合。对于这些参数，窗口内每个 k 都存在抵消划分；对于给定偏好，当且仅当 $s^* \leq (1 + \alpha^2)/2$ 时，这一结论成立（补充信息附录，S4.4节）。

划分只有在两种偏好具有相反符号时，才能减少隔离。偏离独立性时，以学校平均值评判一次划分，可能掩盖这样的班级：它们在某个属性上的隔离程度分别高于未划分学校。对于我们的数据中适用这些预测的班级，关于划分的预测均成立。

对于一所学校而言，结果可以归纳为三点。首先，根据现有班级的友谊网络估算出的两种偏好的方向，可以预先判断划分是否有帮助：当两种偏好一致时，划分无济于事；当两种偏好相互冲突，且学校的巩固程度处于跨越窗口之内时，划分则有帮助。其次，评判划分时应看各班级内部的隔离程度，而不是学校平均值；当两种偏好一致或学校的巩固程度处于跨越窗口之外时，这两项标准的判断结果一致。因此，抵消陷阱仅存在于偏好相悖且巩固程度处于窗口之内的学校。第三，我们关于最优划分的结果以学校在两种属性上均衡、划分为两个规模相同且维持其份额的班级为前提；但不平等 $J \leq J_{\text{strict}}$ 以及由此产生的逐班评判划分的理由，适用于任何学校和任何划分。

Currarini、Jackson 和 Pin [33, 35]提出了一个友谊网络中的同质性经济模型，利用 Add Health数据 [36] 在一个均衡框架内估计偏好，其中接触率和度分布由联合决定。相较之下，我们采用的约化形式模型将接触率视为给定，并将类型依赖的接受概率从单一属性扩展到两个相关属性。具有两个属性时，诱导隔离为通常用于解读单一属性隔离度量的两种力量增添了第三个来源：对相似他人的偏好，以及由群体规模决定的接触机会 [9, 33, 35]。这为以下发现提供了分析性解释：在族裔和性别相一致的教室中，友谊隔离更为严重 [11, 12]。在 MAM 中，诱导隔离既要求对第二个属性存在偏好，也要求两个群体在该属性上的组成存在差异，这与 Kroneberg 和 Lorenz[13] 的预测相符，即只有当对第二个属性的同质性很强时，巩固才会发挥作用。然而，在他们对 Blau理论的形式化中，关系源于对任一属性的同质性或偶然性，而不是像 MAM 中那样源于对两个属性的联合评估。与他们不同，我们计算归一化隔离指数，并推导出能够降低

隔离的班级配置策略。

我们的研究也处于 Martin-Gutierrez、Cartier van Dissel 和 Karimi 最近发表的两篇论文之间。他们比较了若干交叉性模型，并指出乘法模型最能重现实证网络 [18], ，我们也采用了这一模型。他们还研究了交叉性对社会资本的影响 [30], ，而我们关注的是作为驱动不平等现象的隔离。

在政策方面，我们的研究建立在 Moody 的见解之上：学校管理者对学校组织的影响力，大于对学生行为的影响力 [19], ，并明确指出了这种去隔离方法的局限。假设偏好不取决于接触机会，那么班级构成可以消除一种偏好在另一属性上造成的隔离，但无法改变由针对该属性本身的同质性偏好所决定的隔离。当两种偏好都起作用时，在属性相互独立的平衡学校中，只有当两种偏好的符号相反时，班级构成才能减少隔离。Böller 和 Kruse [11]通过模拟评估班级分配启发式方法；我们的闭式解从分析上说明了：将具有两个属性的学校进行划分，何时会减少隔离、何时会加剧隔离，以及何时只是看似减少了隔离。

我们指出了五个主要局限。第一，规划者的目标就是隔离本身：我们没有建模隔离如何影响教育或其他结果，这一问题已由大量实证研究探讨 [1, 37–39]。第二，该模型是静态的，且其中的关系彼此独立。模型会根据给定的班级构成预测友谊关系，但实际重新分配后，学生形成关系的方式可能与预测不同 [34], ；模型也排除了三角闭合，以及现有友谊对新友谊产生的其他影响。我们的检验是对现有班级进行划分并保留其中的友谊关系，因此检验的是模型，而非重新分配的影响。第三，属性是二元的，每项偏好对同一属性的两个群体都相同，且两项偏好以乘法方式结合。对于每项属性包含更多群体或存在群体特定偏好的情形，网络密度和科尔曼指数仍有闭式解，只是表达式不那么易读；但我们所求解的两个情形中的简化形式并不会自动推广到这些情形。第四，估计偏好的可信度取决于定义这些偏好的模型。问题不在于识别：由于给定两名个体的类型后，关系彼此独立，因此偏好可由不同类型之间的关系数量推得。挑战在于模型选择；我们与单属性模型和无约束模型的比较，以及乘法模型比非因子化模型更能重现学校友谊网络的证据 [18], ，都支持乘法形式。第五，数据只检验了部分预测：接近独立状态的均衡班级都处于一致阶段，因此，划分会降低隔离程度的冲突阶段，以及抵消陷阱，仍未经过数据检验。

有两个自然的扩展方向。可以按照 Currarini、Jackson 和 Pin [33],的思路，将乘法模型嵌入一个具有两个属性的搜索与匹配均衡中，在该模型中，偏好取决于总体的组成。规划者的问题还可以纳入激励约束：如果学生能够选择自己的班级，最优划分就必须是激励相容的，而该问题也就变成一个具有隔离外部性的机制设计问题。

4 材料与方法

4.1 模型

本小节说明结果中所述的人口构成和 MAM偏好矩阵；其性质见补充信息附录第S1节。各类型个体的比例 $F_{A_a,\ B_b}$ 由份额 f_{A_0}, f_{B_0} 和巩固程度 k确定：

$$\begin{aligned} F_{A_0,B_0} &= k\, f_{A_0}, & F_{A_0,B_1} &= (1-k)\, f_{A_0}, \\ F_{A_1,B_0} &= f_{B_0} - k\, f_{A_0}, & F_{A_1,B_1} &= 1 - f_{B_0} - (1-k) f_{A_0}. \end{aligned} \tag{13}$$

四种比例都必须非负。按照 Martin-Gutierrez 等人[30],所采用的少数派约定， f_{A_0}, $f_{B_0} \le 1/2$，这将 k限制在 0 到 min(1， f_{B_0}/f_{A_0}) 的区间内；在该区间的两个端点，两个属性分别达到最大负相关和最大相关。群体 A_a 的 B失衡度为 $\delta_a = F_{A_a,\ B_0} - F_{A_a,\ B_1}$，因此

$$\delta_0 = (2k-1)\, f_{A_0}, \qquad \delta_1 = (2f_{B_0}-1) - (2k-1)\, f_{A_0}. \tag{14}$$

这两个不平衡量之和等于总体的 B-不平衡量 $\delta_0 + \delta_1 = 2f_{B_0} - 1$，它们的差为 $\Delta = \delta_0 - \delta_1 = 2f_{A_0}(2k-1) - (2f_{B_0}-1)$。归一化合并度$\kappa = (k - f_{B_0})/f_{B_0}$ 在独立时为零，而在 $k = 0$ 时等于 -1，无论份额如何；当且仅当 $\kappa \le 1$ 时，存在等规模去相关划分（见结果部分）。

在原始模型中 [18]，（其作者称之为 MAPS-AND），两个 2×2 式1中的偏好矩阵都包含自由条目。若考虑两个属性，则总共有八个条目，其中七个是自由的，因为将一个矩阵乘以一个常数、另一个矩阵除以该常数，不会改变任何连接概率；我们将这个无约束版本称为 uMAM。MAM 将每个矩阵设为对称且归一化的矩阵，其对角线上为 h，非对角线上为 $1-h$，并用中心化偏好 $\alpha = 2h_A - 1$ 和 $\beta = 2h_B - 1$来表示矩阵，因此每个属性只有一个偏好参数。单属性模型（SAM）只保留式1中的两个项之一。连接概率只确定到一个常数，该常数决定关系的总体密度；它不会影响科尔曼指数，因为该指数比较的是关系的比例。在数据中，密度与偏好参数一同估计。

4.2 模型中的 Coleman 指数

本小节定义了用于计算结果中的闭式解（方程 3–5）的量；推导见补充信息附录第 S2 节。属性 A 的 Coleman 基线为

$$w_A^* = \frac{1}{\sum_i \eta_i} \sum_{g \in \{A_0, A_1\}} \sum_{i \in G_g} \eta_i \, \frac{n_g - 1}{N - 1}, \tag{15}$$

其中， G_g 是群体 g的成员集合， n_g 是其规模， η_i 是个体 i的出度，即其发出的关系数：当随机选择交往对象时， G_g中的每个成员发出的关系，以概率（$n_g - 1$）/（$N - 1$）到达该群体的其他 $n_g - 1$ 名成员之一。由于 MAM 的连接概率是对称的，无论将网络视为有向网络还是无向网络，该指数都相同。

在该模型中，指数根据联系的期望密度计算。忽略连接概率这一常数因子后，群体 A_a 内部的联系密度以及其成员发出的所有关系的密度为

$$\begin{aligned} W_a &= \tfrac{1+\alpha}{4}\big(f_{A_a}^2 + \beta\, \delta_a^2\big), \\ \Sigma_a &= W_a + \tfrac{1-\alpha}{4}\big(f_{A_a} f_{A_{\bar{a}}} + \beta\, \delta_a \delta_{\bar{a}}\big), \end{aligned} \tag{16}$$

其中， $\bar{a}$ 表示另一个 A群体， $f_{A_1} = 1 - f_{A_0}$ 见补充信息附录第 S1.4 节。 A群体内部的联系密度为 $W = W_0 + W_1$，网络密度为 $Z = \Sigma_0 + \Sigma_1$。当 N较大时，Coleman 基线等于 $w_A^* = f_{A_0}\,\phi_0 + (1 - f_{A_0})\ \phi_1$，其中度份额 $\phi_a = \Sigma_a / Z$是群体 A_a成员发出的所有关系所占的比例：每条关系以概率 ϕ_a 从 A_a 的一名成员发出，并且在基线条件下，以概率 f_{A_a}到达同一群体的一名成员（见补充信息附录第 S2.1 节）。当所有个体的预期关系数相同，$\phi_a = f_{A_a}$，基线便简化为随机混合值 $f_{A_0}^2 + (1 - f_{A_0})^{\,2}$。在密度尺度上，基线为 $W^* = Z\, w_A^* = f_{A_0}\,\Sigma_0 + (1 - f_{A_0})\ \Sigma_1$。

指数在 $\chi_A = (W - W^*)/(Z - W^*)$ 同质性状态下为 $\chi_A = (W - W^*)/W^*$异质性状态下为。将密度代入公式 3 和 4，分子为 $2(W - W^*)$，分母为 $2(Z - W^*)$。在异质性状态下，

$$\chi_A = \chi_A^{\mathrm{hom}}\, \frac{Z - W^*}{W^*}, \tag{17}$$

其中，χ_A^{hom}是公式 3 右侧的表达式（补充信息附录，第 S2.3 节）。当两个 A群体大小相同（$f_{A_0} = 1/2$）时，无论度占比如何，$w_A^* = (\phi_0 + \phi_1)/2 = 1/2$，因为$\phi_0 + \phi_1 = 1$；因此 $W^* = Z/2 = Z - W^*$：两种状态的分母相同，公式 9 在两种状态下均成立。交换两个属性的作用后，可由公式 3 和 4 得出 B 的指数：α 与 β互换，f_{A_0} 与 f_{B_0}互换，并将 A群体的 B失衡替换为 B 群体的 A失衡，$\delta_0' = 2k f_{A_0} - f_{B_0}$ 以及 $\delta_1' = 2(1-k) f_{A_0} - (1 - f_{B_0})$（补充信息附录，第 S2.6 节）。

4.3 双类别划分

在本小节中，我们定义结果部分所使用的划分，并给出最优划分的公式（推导见补充信息附录第 S3 和S4节）。划分将一所学校的 N 名学生分为两个班级 c_1和 c_2，其中有 N^{c_1}和 N^{c_2}名学生及总体矩阵 F^{c_1}和 F^{c_2}。由于每名学生都进入其中一个班级，

$$N F = N^{c_1} F^{c_1} + N^{c_2} F^{c_2}, \tag{18}$$

班级指数的平均值为 $\langle \chi_X \rangle = \sum_c (N^c/N)\ \chi_X^c$，对于 $X = A,\ B$。

ESDS 对于两个大小相等的班级，公式 8 具有一族由一个参数构成的解，即去相关划分；当 $0 < k < 2 f_{B_0}$（补充信息附录第 S3.4节）时，两个属性的两个群体在每个班级中均有分布。

平衡学校中的划分 在平衡学校中，结果部分的划分包含两个大小相等的班级，且二者都保持份额 $f_{A_0} = f_{B_0} = 1/2$。公式 18 随后留下一个自由参数，即偏移量 ε：班级具有合并度 $k \pm \varepsilon$，其中 $0 \le \varepsilon \le \min(k, 1-k)$，以及公式 11中的平方凝聚度。在冲突阶段，取 $\alpha > 0 > \beta$，且 $|\alpha| \le |\beta|$；对于 $\alpha < 0 < \beta$的情形，只需同时改变两个偏好的符号，因为这不会改变指数的绝对值。公式 9给出了一个班级的总隔离度，

$$T(s) = \begin{cases} \dfrac{(\alpha - \beta)(1 - s)}{1 + \alpha\beta s}, & s \le s^*, \\ \dfrac{-(\alpha + \beta)(1 + s)}{1 + \alpha\beta s}, & s \ge s^*, \end{cases} \tag{19}$$

其逐渐减小，直到 s^* 并在超过该值后增大（补充信息附录，第 S4.3 节）。在跨越窗口内使 J_{strict} 达到最小值的偏移量推导见补充信息附录，第 S4.3 节。

4.4 模拟

本小节介绍如何根据 MAM 模拟网络，以检验闭式表达式。一个包含 N个体的网络包含每种类型 $\mathrm{round}(F_{A_a,B_b} N)$ 的 (A_a, B_b)个体，任何舍入误差均分配给数量最大的类型。每一对不同个体之间以独立于其他所有个体对的概率 $H^A_{A(i)、A(j)} H^B_{B(i)、B(j)}$建立一条有向联系，如公式 1所示。仅保留弱连通网络：其他网络将重新抽取。对每个模拟网络测量指数和密度，并针对每个参数值，对 $N = 2{,}000$ 个体的网络取 30 个网络的平均值（补充信息附录，图 S1 和 S2）。对于图 5A–B，将每个划分的两个班级分别模拟为包含 500 个体的网络，每个偏移量重复 30 次，并根据在这些网络上测得的指数计算 J。

4.5 数据

本小节介绍如何根据调查构建结果中的网络。我们使用 CILS4EU 的第二次调查波次 [20], ，该调查于 2011 年和 2012 年收集数据。学生在关于友谊和共同活动的多个调查项目中提名同班同学；每次提名都会在受访者与被提名的同班同学之间建立一条有向联系，而在多个调查项目中提名同一对学生则视为一条关系。我们为每个班级构建一个网络；在少数提名跨越班级的学校中，则为每所学校构建一个网络

边界。如果学生本人或其任一父母出生于调查国家以外，则该学生属于外国出身；否则属于调查国家出身 [11, 29]。我们移除属性缺失的学生，并保留至少有 20 名学生、四种类型各至少有一名学生（A_a、 B_b）且仅包含一个连通分量的网络。最终共有 139 个班级。补充信息附录第S5.1节列出了用于构建网络的调查项目及其属性，并按国家总结了网络的特征（表 S1）。

4.6 模型估计

本小节介绍如何根据数据估计偏好，以及如何比较模型。对于每个班级，在给定各类型学生人数的情况下，我们采用一种接近 Martin-Gutierrez 等人 (A_a、 B_b)所采用方法的方法，通过最大化四种类型之间有向联系数量的二项对数似然来估计偏好 [18]；密度参数与偏好同时进行估计，使 MAM 和 SAM 能够匹配该班级的总体密度，正如 uMAM 的自由条目所实现的那样。我们拟合三个嵌套模型，即 MAM、SAM 和 uMAM，并在 5% 显著性水平下，使用似然比检验比较每一对嵌套模型。依赖估计偏好的分析使用了 69个类别，在这些班级中，uMAM 的拟合效果并未显著优于 MAM。似然、密度参数和检验结果见补充信息附录第S5.2节。

4.7 班级拆分实验

本小节介绍如何在数据上检验分裂结果。每个经验网络都是一个班级，因此我们将班级划分为两个子班级，而不是将学校划分为班级：根据目标构成，将每种类型的学生随机分配到子班级中，每次划分重复20次，并且仅保留每个子班级内部的关系。ESDS检验使用了19个存在 $|\alpha| \leq 0.1$ ESDS的班级；均衡学校检验使用了7个具有$0.4 \leq f_{A_0}$、$f_{B_0} \leq 0.5$ 和 $|k - 1/2| \leq 0.1$ 的班级，将其划分为子班级，并进行$k \pm \varepsilon$ 保留班级份额的合并。具体过程见补充信息附录第S5.4节。

声明

经费资助。M.S.感谢以下资助项目的支持：RYC2022-037932-I和CNS2023- 144156，资助方为MCIN/AEI/10.13039/501100011033以及欧洲联盟NextGenerationEU/PRTR。

作者贡献。 E.O.和M.S.设计了研究；C.E.开展了研究；C.E.分析了数据；C.E.、E.O.和M.S.撰写了论文。

利益冲突。 作者声明不存在利益冲突。

数据、材料和软件可用性。 CILS4EU数据属于第三方数据，注册并签署数据使用协议后，可从 GESIS 社会科学数据档案馆获取用于科学研究 [20]。作者无权直接重新分发这些数据。用于计算闭式表达式、模拟网络、估计模型和开展班级拆分实验的代码将在论文接收后通过Zenodo公开。

生成式人工智能的使用。我们使用大语言模型 Claude（Opus 5.5）编辑了部分文本，并核查了补充信息附录中结果推导的正确性。我们检查了模型的所有输出，并对论文内容承担全部责任。

参考文献

[1] Roslyn Arlin Mickelson。《颠覆 Swann：夏洛特-梅克伦堡学校中的第一代与第二代隔离》。美国教育研究杂志，38(2)：215– 252，2001年。[2] David Card 和 Jesse Rothstein。《种族隔离与黑人与白人考试成绩差距》。公共经济学杂志，91(11-12)：2158–2184，2007年。[3] Raj Chetty、Nathaniel Hendren 和 Lawrence F Katz。《接触更好的社区对儿童的影响：迁往机会实验的新证据》。美国经济评论，106(4)：855–902，2016年。[4] Raj Chetty、Matthew O Jackson、Theresa Kuchler、Johannes Stroebel、Nathaniel Hendren、Robert B Fluegge、Sara Gong、Federico Gonzalez、Armelle Grondin、Matthew Jacob 等。《社会资本 I：测量及其与经济流动性的关联》。《自然》，608(7921)：108–121，2022年。[5] Matthew O Jackson。《不平等的经济与社会根源：社会网络和同质性的作用》。arXiv 预印本 arXiv:2506.13016，2025年。[6] Paul DiMaggio 和 Filiz Garip。《网络效应与社会不平等》。社会学年度评论，38(1)：93–118，2012年。[7] Zsófia Boda、Georg Lorenz、Malte Jansen、Petra Stanat 和 Aileen Edele。《族群多样性促进难民学生的社会融合》。《自然·人类行为》，7(6)：881–891，2023年。[8] Melanie Killen、Katherine Luken Raz 和 Sandra Graham。《通过促进跨群体友谊减少偏见》。普通心理学评论，26(3)：361–376，2022年。[9] Peter M. Blau。《不平等与异质性：一种社会结构的初级理论》。自由出版社，纽约，1977年。[10] Peter Blau 和 Joseph Schwartz。《交叉社会圈：检验群际关系的宏观结构理论》。劳特利奇，1984年。[11] Susanne Böller 和 Hanno Kruse。《学校中的友谊隔离与班级构成：属性巩固作用的系统分析》。PLoS One，20(12)：e0339581，2025年。[12] Clemens Kroneberg、Hanno Kruse 和 Andreas Wimmer。《当族裔与性别交织：欧洲学校的课堂构成、友谊隔离与集体认同》。欧洲社会学评论，37(6)：918–934，2021年。[13] Clemens Kroneberg 和 Georg Lorenz。《隔离的结构性来源：课堂构成如何塑造族际友谊》。SocArXiv 预印本，2024年。 https://doi.org/10.31235/osf.io/v4ne9。[14] Linda Zhao。《从超级多样性到巩固：结构交叉性对族际友谊的影响》。美国社会学杂志，128(4)：1114–1157，2023年。[15] F Benjamin Rosche。《宏观层面结果的微观层面决定因素：以实证方法探究微观-宏观联系》。康奈尔大学，2024年。[16] Per Block 和 Thomas Grund。《友谊网络中的多维同质性》。Network Science，2(2)：189–212，2014年。

[17] James S Coleman。《关系分析：运用调查方法研究社会组织》。Human Organization，17(4):28–36，1958年。[18] Samuel Martin-Gutierrez、Mauritz N Cartier van Dissel 和 Fariba Karimi。《一项简单的偏好聚合规则解释多维身份如何塑造社会网络》。《通讯物理》，2026年。doi: 10.1038/s42005-026-02537-3。[19] James Moody。《美国的种族、学校融合与友谊隔离》。《美国社会学杂志》，107(3):679–716，2001年。[20] Frank Kalter、Anthony F. Heath、Miles Hewstone、Jan O. Jonsson、Matthijs Kalmijn、Irena Kogan 和 Frank van Tubergen。《四个欧洲国家移民子女纵向调查（CILS4EU）——精简版》。供下载和异地使用的精简数据文件。GESIS数据档案馆，科隆。ZA5656数据文件，版本2.3.0。可从https://gesis.org获取，2016年。[21] Sanne Smith、Frank Van Tubergen、Ineke Maas 和 Daniel A McFarland。《族群组成与友谊隔离：对本土青少年和移民青少年的差异化影响》。《美国社会学杂志》，121(4):1223–1272，2016年。[22] Hanno Kruse 和 Clemens Kroneberg。《不只是分流机器：分层学校体系中的族群边界建构》。《美国社会学杂志》，125(2):431–484，2019年。[23] Eszter Vit 和 Isabel J Raabe。《刚性边界与选择性显著性：班级性别构成如何塑造青少年友谊》。《社会网络》，86:401–411，2026年。[24] Miller McPherson、Lynn Smith-Lovin 和 James M Cook。《物以类聚：社会网络中的同质性》。《社会学年度评论》，27(1):415–444，2001年。[25] Patrick Simon。《欧洲的族群统计数据收集：综述》。《族群与种族研究》，35(8):1366–1391，2012年。doi: 10.1080/01419870.2011.607507。[26] 欧洲议会和欧盟理事会。《欧洲议会和理事会2016年4月27日关于自然人个人数据处理及此类数据自由流动的保护，并废止指令95/46/EC的条例（欧盟）2016/679（《通用数据保护条例》）》。《欧盟官方公报》，L 119，2016年5月4日，第1–88页，2016年。[27] Sanne Smith、Ineke Maas 和 Frank van Tubergen。《学校中的族群内群体友谊：在英格兰、德国、荷兰和瑞典检验副产品假说》。《社会网络》，39:33–45，2014年。doi: 10.1016/j.socnet.2014.04.003。[28] Lars Leszczensky 和 Sebastian Pink。《什么促成族群同质性？一种关系分析：族群认同如何调节对同族群朋友的偏好》。《美国社会学评论》，84(3):394–419，2019年。doi: 10.1177/0003122419846849。[29] Jörg Dollmann、Konstanze Jacob 和 Frank Kalter。《考察欧洲青年的多样性：使用CILS4EU数据对世代和族群来源进行分类》。工作论文156，曼海姆欧洲社会研究中心（MZES），2014年。[30] Samuel Martin-Gutierrez、Mauritz N Cartier van Dissel 和 Fariba Karimi。《社会关系中的交叉性不平等》。《科学进展》，11(45):eadu9025，2025年。[31] Michał Bojanowski 和 Rense Corten。《测量社会网络中的隔离》。《社会网络》，39:14–32，2014年。

[32] Fariba Karimi、Mathieu Génois、Claudia Wagner、Philipp Singer 和 Markus Strohmaier。《同质性影响社会网络中少数群体的排名》。《科学报告》，8(1): 11077，2018年。doi: 10.1038/s41598-018-29405-7。[33] Sergio Currarini、Matthew O Jackson 和 Paolo Pin。《友谊的经济模型：同质性、少数群体与隔离》。《计量经济学》，77(4):1003–1045，2009年。[34] Scott E. Carrell、Bruce I. Sacerdote 和 James E. West。《从自然变异到最优政策？内生同伴群体形成的重要性》。《计量经济学》，81(3):855–882，2013年。[35] Sergio Currarini、Matthew O Jackson 和 Paolo Pin。《识别基于种族的选择和偶然因素在高中友谊网络形成中的作用》。《美国国家科学院院刊》，107(11):4857–4861，2010年。[36] Kathleen Mullan Harris。《Add Health研究：设计与成果》。卡罗来纳人口中心，北卡罗来纳大学教堂山分校，2013年。[37] David J Armor。《强制实现公正：学校废除种族隔离与法律》。牛津大学出版社，1995年。[38] Jomills Henry II Braddock 和 James M McPartland。《学校废除种族隔离的社会与学业后果》。《公平与选择》，第4卷，1988年。[39] Amy Stuart Wells 和 Robert L Crain。《延续理论与学校废除种族隔离的长期影响》。《教育研究评论》，64(4):531–555，1994年。

补充信息附录

解释多属性社会网络中的交叉性隔离ClaraEminente、Elisa Omodei、Michele Starnini

S1 模型

本节给出正文以文字说明的多属性模型（MAM）的定义和性质：人口矩阵及其参数化、偏好矩阵、属性 B 在属性 A的两个群体中的不平衡、连边密度以及度不平衡。S2 节S2 利用这些内容计算科尔曼指数。

S1.1 总体

每个 N 个体具有两个二元属性： $A \in \{A_0,\ A_1\}$ 和 $B \in \{B_0,\ B_1\}$。例如， A 可以是种族，分为多数群体和少数群体（P. Starr，《杜波依斯评论》20:1–20，2023年），而 B 可以是性别。总体构成由人口矩阵 F描述，其中条目$F_{a,\ b}$表示类型（A_a， B_b）个体所占的比例：

$$F = \begin{pmatrix} F_{A_0,B_0} & F_{A_0,B_1} \\ F_{A_1,B_0} & F_{A_1,B_1} \end{pmatrix}, \qquad \sum_{a,b} F_{a,b} = 1. \tag{S1}$$

两个边际分布

$$f_{A_0} = F_{A_0,B_0} + F_{A_0,B_1}, \qquad f_{B_0} = F_{A_0,B_0} + F_{A_1,B_0} \tag{S2}$$

是群体 A_0和 B_0的份额，其中 $f_{A_1} = 1 - f_{A_0}$和 $f_{B_1} = 1 - f_{B_0}$。 F的四个条目由三个参数决定：两个边际分布和巩固程度 k，即 A_0 中属于 B_0的成员比例，参数化方式见 Martin-Gutierrez 等人 [30]（正文式（13））。四个条目都必须非负：

$$F_{a,b} \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad k\, f_{A_0} \leq f_{B_0} \ \text{ and } \ (1-k)\, f_{A_0} \leq 1 - f_{B_0}. \tag{S3}$$

按照 Martin-Gutierrez 等人提出的少数派约定 $f_{A_0},\ f_{B_0} \leq 1/2$ 我们采用该约定，此时第二个条件始终成立， k 的可行范围为

$$0 \leq k \leq \min(1,\, f_{B_0}/f_{A_0}). \tag{S4}$$

当 $k = f_{B_0}$时，两个属性在统计上相互独立：$F_{a,\ b} = f_{A_a} f_{B_b}$。在可行范围的两个端点 $k = 0$ 和 $k = \min(1,\ f_{B_0}/f_{A_0})$ 处，它们分别达到边际分布所允许的最强负相关和最强相关。因此，巩固程度由 k 与 f_{B_0} 之间的距离（无论哪个方向）来衡量。

S1.2 偏好

在 Martin-Gutierrez 等人的模型中， [18], 个体之间的联系 i 与 j 是一次独立的伯努利试验，其成功概率与$H^A_{A(i),\ A(j)}\, H^B_{B(i),\ B(j)}$ 成正比（正文中的式（1））， 其中 H^A 和 H^B 是 2×2 具有自由条目的偏好矩阵；我们将这一无约束版本称为 uMAM。MAM 使用对称的行归一化矩阵，

$$H^A = \begin{pmatrix} h_A & 1-h_A \\ 1-h_A & h_A \end{pmatrix}, \qquad H^B = \begin{pmatrix} h_B & 1-h_B \\ 1-h_B & h_B \end{pmatrix}, \qquad h_A, h_B \in (0,1), \tag{S5}$$

并将其表示为中心化偏好

$$\alpha = 2h_A - 1, \qquad \beta = 2h_B - 1, \qquad \alpha, \beta \in (-1, 1), \tag{S6}$$

它们衡量的是相对于中性值 $h_A = h_B = 1/2$ 的同质性。因此，$H^A_{a,\ a} = (1+\alpha)/2$以及 $H^A_{a,\ \bar{a}} = (1-\alpha)/2$，其中 $\bar{a}$ 表示另一组，B 亦然。

正文将乘积形式解释为相遇并接受过程中的接受阶段，在这一阶段，匹配会根据每个属性各评判一次。如果改为双方各自根据每个属性评判匹配，且双方都必须接受，那么平局的概率将与 $(H^A_{A(i),\ A(j)})^2 (H^B_{B(i),\ B(j)})^2$ 成正比。这个核具有相同的乘法结构：除去一个总体尺度因子，它是一个 MAM，其中每个属性对应的偏好为 $h' = h^2/[h^2 + (1-h)^2]$，而非 h。因此，乘法形式描述了这样一类匹配过程：两个属性被独立评估。它也构成一个自然的基线，可据此检验对这两个属性特定组合的偏好。

S1.3 A群体内部属性 B 的不均衡

对于每个 A群体，B不均衡为

$$\delta_0 = F_{A_0,B_0} - F_{A_0,B_1} = (2k-1)\, f_{A_0}, \tag{S7}$$

$$\delta_1 = F_{A_1,B_0} - F_{A_1,B_1} = (2f_{B_0} - 1) - (2k-1)\, f_{A_0}. \tag{S8}$$

它衡量属性 B 在群体内部的分布有多不均衡：当群体 A_a在 B_0 和 B_1中的成员数量相同时，$\delta_a = 0$ 为零。这两个不均衡之和等于总体的 B不均衡，

$$\delta_0 + \delta_1 = 2f_{B_0} - 1. \tag{S9}$$

交叉不平衡

$$\Delta = \delta_0 - \delta_1 = 2f_{A_0}\,(2k-1) - (2f_{B_0} - 1) \tag{S10}$$

衡量两个 A群体的 B组成之间的差异。当 $\Delta = 0$时，每个A群体恰好占总体 B不平衡的一半（$\delta_0 = \delta_1 = (2f_{B_0} - 1)/2$）。这并不意味着两个群体具有相同的内部组成，因为它们的规模不同；这意味着它们对一个 B群体过多这一现象的绝对贡献相等。当 $\Delta \neq 0$时，一个 A群体不成比例地推动总体的 B不平衡。在独立性条件下，$\Delta = (2f_{B_0} - 1)(2f_{A_0} - 1)$，仅当$f_{A_0} = 1/2$或$f_{B_0} = 1/2$时该值才为零。

S1.4 关系的密度

根据公式（S7）–（S8），人口矩阵为 $F_{a,\ b} = (f_{A_a} \pm \delta_a)/2$，其中加号表示$b = 0$，减号表示 $b = 1$。群体 A_a的群体内密度，即随机选取的个体有序对属于 A_a 且彼此存在关系的（未归一化）概率，为

$$W_a = \sum_{b,b'} F_{a,b}\, F_{a,b'}\, H^A_{a,a}\, H^B_{b,b'} = \frac{1+\alpha}{2}\Big[\frac{f^2_{A_a}}{2} + \frac{\beta}{2}\,\delta_a^2\Big], \tag{S11}$$

以及 A群体内部的联系密度为

$$W = W_0 + W_1 = \frac{1+\alpha}{2}\Big[\frac{f^2_{A_0} + f^2_{A_1}}{2} + \frac{\beta}{2}\,(\delta_0^2 + \delta_1^2)\Big]. \tag{S12}$$

A_a成员发出的、指向任一群体的所有关系的密度，将指向另一群体的关系相加：

$$\Sigma_a = W_a + \frac{1-\alpha}{2}\Big[\frac{f_{A_a}\, f_{A_{\bar{a}}}}{2} + \frac{\beta}{2}\,\delta_a\,\delta_{\bar{a}}\Big]. \tag{S13}$$

因此，网络密度为

$$Z = \Sigma_0 + \Sigma_1 = \frac{1+\alpha}{2}\Big[\frac{f^2_{A_0} + f^2_{A_1}}{2} + \frac{\beta}{2}\,(\delta_0^2 + \delta_1^2)\Big] + \frac{1-\alpha}{2}\Big[f_{A_0} f_{A_1} + \beta\,\delta_0\,\delta_1\Big], \tag{S14}$$

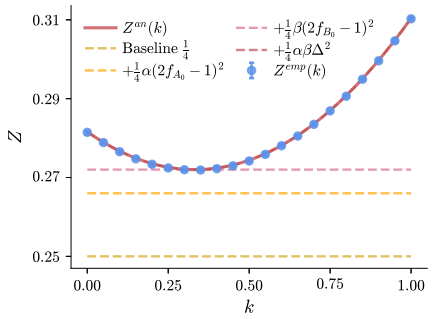

图 S1：网络密度仅通过交叉溢出效应取决于巩固程度。网络密度 Z 随巩固程度的变化 k。蓝色符号，Z^{emp} 图例中：在模拟网络上测得的密度、均值和 95% 置信区间（通常比符号更小）。红线，Z^{an}：方程S15。彩色曲线：基准密度的累积贡献 $1/4$（图例中的“基线”）、对 A的同质性、对 B的同质性，以及交叉溢出效应 $\alpha\beta\Delta^2/4$。参数：$f_{A_0}=0.30$，$f_{B_0}=0.40$，$\alpha=0.40$，$\beta=0.60$；$N=2,000$，每个点对应 30 个网络（材料与方法，“模拟”）。

并且，根据公式（S9）–（S10），其呈现对称形式

$$Z=\frac{1}{4}\left[1+\alpha\,(2f_{A_0}-1)^2+\beta\,(2f_{B_0}-1)^2+\alpha\beta\,\Delta^2\right]. \tag{S15}$$

密度由四部分组成。基准密度 $1/4$ 是不存在偏好时的密度值。第二项和第三项分别是对 A 和 B的同质性贡献；每一项都等于居中化的偏好乘以相应属性的规模失衡平方，$(2f_{A_0}-1)^2$ 或 $(2f_{B_0}-1)^2$，，用于衡量该属性的两个群体规模偏离相等的程度。这三项均不取决于 k。第四项 $\alpha\beta\Delta^2/4$是交叉溢出效应。它是 Z中唯一取决于 k的部分；当两种偏好符号相同时，它会提高密度；当两者符号相反时，则会降低密度，前提是 $\Delta\neq 0$。当两种偏好均为同质偏好时，它反映了超级群体的形成：个体倾向于与整体类型相同的其他个体建立关系 $(A_a,\ B_b)$。当 $\Delta=0$时，溢出效应消失，密度就是两种独立同质性效应之和。图S1 证实了模拟网络中的方程S15。

S1.5 度份额与度失衡

群体 A_a 的度份额

$$\phi_a=\Sigma_a/Z, \tag{S16}$$

是由 A_a的成员建立的所有关系中所占的比例；$\phi_0+\phi_1=1$。Coleman 基线取决于度份额（第S2.1节）。我们通过度不平衡来衡量度份额与人口份额之间的差异

$$\gamma=\phi_0-f_{A_0}, \tag{S17}$$

使得 $\phi_1-f_{A_1}=-\gamma$。如果 d_0、d_1 和 d 分别表示 A_0 的成员、A_1 的成员以及整个网络中成员的平均关系数，那么 $\phi_0=f_{A_0}\,d_0/d$ 和

$$\gamma=f_{A_0}\,(1-f_{A_0})\,\frac{\bar{d}_0-\bar{d}_1}{\bar{d}}, \tag{S18}$$

因此，$\gamma>0$ 当且仅当 A_0 的成员平均拥有的关系多于 A_1的成员时成立。由此，度不平衡是一种基于均值的简单度不平等衡量指标。Martin-Gutierrez 等人 [30]使用了一种基于关系数量完整分布的衡量指标，而该指标无法从 γ中获得。

根据公式（S16）–（S17），$\gamma Z = f_{A_1}\Sigma_0 - f_{A_0}\Sigma_1$，以及 γ 取决于所有参数。依次关闭一个偏好，可以分离出度不平衡的两个来源。第一个来源是对 A 的同质性与规模不同的群体相结合。在 $\beta = 0$,

$$\gamma\big|_{\beta=0} = \frac{\alpha\, f_{A_0}\,(1-f_{A_0})\,(2f_{A_0}-1)}{2Z}, \qquad Z\big|_{\beta=0} = \frac{1}{4}\Big[1+\alpha\,(2f_{A_0}-1)^2\Big], \tag{S19}$$

当 $\alpha = 0$ 或 $f_{A_0} = 1/2$时，该值会消失。在具有同质性（$\alpha > 0$）的情况下，较小群体 A_0 中属于自身类型的伙伴较少，因此 $\phi_0 < f_{A_0}$ 和 $\gamma < 0$：较大群体的连接性更好。第二个来源是对 B 的同质性与相关属性相结合。在 $\alpha = 0$时,

$$\gamma\big|_{\alpha=0} = \frac{f_{A_0}\,\beta\,(2f_{B_0}-1)\,(k-f_{B_0})}{2Z}, \qquad Z\big|_{\alpha=0} = \frac{1}{4}\Big[1+\beta\,(2f_{B_0}-1)^2\Big], \tag{S20}$$

当 $\beta = 0$、 $f_{B_0} = 1/2$或 $k = f_{B_0}$时，该值会消失。这里，两个 A群体的差异仅在于其B组成。对于 B 的同质性（$\beta > 0$），较大 B群体的成员拥有更多关系，因此在其中占比过高的 A群体也是如此：因子 $2f_{B_0} - 1$ 标识较大的 B群体，因子 $k - f_{B_0}$ 标识在 B_0中占比过高的 A群体，而当 k 越过 f_{B_0}时， γ的符号会发生变化。

S2 模型中的科尔曼指数

本节推导正文中关于科尔曼指数的结果（结果部分的“单一属性的科尔曼指数混合了两种偏好”和“相关属性会诱导隔离”，以及材料与方法部分的“模型中的科尔曼指数”）：模型中的科尔曼基线值、指数的闭式解、 $\chi_A - \alpha$ 的恒等式（正文中的式（5））， 以及诱导隔离并非关系数量差异的副产品这一事实。本节还给出属性 B 的公式，并对闭式解进行数值验证。

S2.1 模型中的 Coleman 基线

在 MAM 中，当 N较大时，正文中的式（15）所示的科尔曼基线等于

$$w_A^* = f_{A_0}\,\phi_0 + (1-f_{A_0})\,\phi_1, \tag{S21}$$

其中， ϕ_g 是群体 A_g的度份额，见式S16。每条关系以概率 ϕ_g 使 A_g 中的一名成员离开；在基线条件下，关系以概率 f_{A_g}连接到同一群体的成员。

为推导公式 S21，将基线写为 $w_A^* = \omega_A^*/M$，其中 $M = \sum_i \eta_i$ 是联系总数，$\omega_A^* = \sum_g \sum_{i\in G_g} \eta_i(n_g-1)/(N-1)$ 是预期的组内联系数。对于较大的 N，$(n_g-1)/(N-1) \to f_{A_g}$，因此 $\omega_A^* \to \sum_g M_g\, f_{A_g}$，其中 $M_g = \sum_{i\in G_g}\eta_i$ 是群体 A_g 的总出度。在 MAM 中，M_g 与 Σ_g 成正比，且两个群体的比例常数相同，因此 $M = M_0 + M_1$ 与 Z 成正比。由此 $w_A^* = \sum_g f_{A_g}\,\Sigma_g/Z = \sum_g f_{A_g}\,\phi_g$。当预期联系数与个体的类型无关时， Σ_g 与 f_{A_g} 成正比，因此 $\phi_g = f_{A_g}$，基线便简化为下方公式 S23 的随机混合值。

在第 S1.4 节的密度尺度上，基线为

$$W^* = Z\,w_A^* = f_{A_0}\,\Sigma_0 + f_{A_1}\,\Sigma_1, \tag{S22}$$

并且，由于 $\Sigma_0 + \Sigma_1 = Z$，基线下跨组关系的期望密度为 $Z - W^* = f_{A_1}\Sigma_0 + f_{A_0}\,\Sigma_1 > 0$。

S2.2 随机混合值与度不平衡

该随机混合值

$$w_A^{*,0} = f_{A_0}^2 + (1 - f_{A_0})^2 \tag{S23}$$

当伙伴是随机选择且所有个体拥有相同数量的关系时，预期的组内联系比例；它是 Currarini 等人所提出的“基线同质性”的总体对应量。 [33]。科尔曼指数不使用它。将 $\phi_0 = f_{A_0} + \gamma$代入方程S17，可得方程S21中的恒等式

$$w_A^* = w_A^{*,0} + \gamma\,(2f_{A_0} - 1), \qquad \text{equivalently} \qquad 1 - w_A^* = 2f_{A_0}(1 - f_{A_0}) - \gamma\,(2f_{A_0} - 1). \tag{S24}$$

因此，Coleman 基线与随机混合值之间相差一项，该项源于度不平衡；当 $f_{A_0} = 1/2$时，该项为零。方程S24 是一种分解：指数以 w_A^*定义，而该恒等式只说明 w_A^* 与随机混合值之间的差异。

单一属性。若对 B （$\beta = 0$）没有偏好，对 A （$\alpha > 0$）存在同质性，则指数等于 α （第S2.4 节）。若改用 $w^{*,0}_A$ 代替w_A^*进行计算，则结果为

$$\chi_A^0 = \alpha\,\frac{1 + (2f_{A_0} - 1)^2}{1 + \alpha\,(2f_{A_0} - 1)^2}, \tag{S25}$$

当 $f_{A_0} \neq 1/2$ 时，它超过 α。对于 $f_{A_0} = 0.2$ 和 $\alpha = 0.6$， $\chi_A^0 = 0.6 \times 1.36/1.216 \approx 0.67$。为推导式 S25，注意在 $\beta = 0$ 处，式（S12）和（S19）给出 $W/Z = (1+\alpha)(1+u)/[2(1+\alpha u)]$，其中 $u = (2f_{A_0} - 1)^2$，且 $w^{*,0}_A = (1 + u)/2$；然后 $\chi_A^0 = (W/Z - w^{*,0}_A)/(1 - w^{*,0}_A)$。

度不平衡对指数的影响。设 $g = \gamma\,(2f_{A_0} - 1)\,/[2f_{A_0}\,(1 - f_{A_0})\,]$ 表示由于度不平衡导致的跨组关系预期比例的相对减少。当 χ_A 和 χ_A^0 都处于同质性状态时，式S24给出

$$1 - \chi_A = \frac{1 - \chi_A^0}{1 - g}, \tag{S26}$$

因为 $1 - \chi_A = (1 - w_A)/(1 - w_A^*)$ 和 $1 - \chi_A^0 = (1 - w_A)/(1 - w^{*,0}_A)$。如果较大的群体同时也是联系更紧密的群体（$g > 0$），那么按随机情况预期的跨组关系会更少，因此相同的观测混合程度对应的隔离程度低于 χ_A^0 所表示的程度；如果较小的群体联系更紧密（$g < 0$），则情况相反。该恒等关系仅由指数的定义推出，并且适用于任何网络。

S2.3 闭式解

在该模型中，组内关系的预期比例为 W/Z，正文公式（2）中的指数为 $\chi_A = (W - W^*)\,/\,(Z - W^*)$ 在同质性状态（$W \geq W^*$）下，以及$\chi_A = (W - W^*)\,/W^*$在异质性状态（$W < W^*$）下。根据公式（$W - W^*$S12）和（S22）计算 $W - W^*$，并进行化简后，分子是直接项与间接项之和：

$$W - W^* = \underbrace{\frac{\alpha}{2}\,f_{A_0}\,(1 - f_{A_0})}_{\text{direct term}} + \underbrace{\frac{\beta}{2}\,Q_A}_{\text{indirect term}}, \tag{S27}$$

其中 $Q_A = \frac{1+\alpha}{2}\,[(1 - f_{A_0})\delta_0^2 + f_{A_0}\,\delta_1^2] - \frac{1-\alpha}{2}\,\delta_0\,\delta_1$。同质性状态的分母具有相同的结构：

$$Z - W^* = \frac{1}{2}\,f_{A_0}\,(1 - f_{A_0}) + \frac{\beta}{2}\,\widetilde{Q}_A, \tag{S28}$$

其中 $\widetilde{Q}_A = \frac{1+\alpha}{2}\left[(1-f_{A_0})\,\delta_0^2 + f_{A_0}\,\delta_1^2\right] + \frac{1-\alpha}{2}\,\delta_0\,\delta_1$，因此 $\widetilde{Q}_A - Q_A = (1-\alpha)\,\delta_0\,\delta_1$。因此，在同质性状态下，该指数为

$$\chi_A = \frac{\frac{\alpha}{2}\,f_{A_0}(1-f_{A_0}) + \frac{\beta}{2}\,Q_A}{\frac{1}{2}\,f_{A_0}(1-f_{A_0}) + \frac{\beta}{2}\,\widetilde{Q}_A} \qquad (W \geq W^*). \tag{S29}$$

将分子和分母同时乘以 2，得到正文中的方程（3）和（4）。分子中的两项分别由一个偏好控制：令 $\beta = 0$ 会消去间接项，令 $\alpha = 0$ 则只会消去直接项。直接项是单属性效应；间接项则是偏好 B 如何影响 A的指数之处。当 $\beta = 0$ 时，分母为 $\frac{1}{2}f_{A_0}(1-f_{A_0})$，指数等于 α。

在异质性状态下，分母为 W^*，根据方程（S13）和（S22）可写为

$$W^* = \frac{1+\alpha}{2}\Big[\frac{f_{A_0}^3 + f_{A_1}^3}{2} + \frac{\beta}{2}\left(f_{A_0}\,\delta_0^2 + f_{A_1}\,\delta_1^2\right)\Big] + \frac{1-\alpha}{2}\Big[\frac{f_{A_0}f_{A_1}}{2} + \frac{\beta}{2}\,\delta_0\,\delta_1\Big], \tag{S30}$$

因此

$$\chi_A = \frac{\frac{\alpha}{2}\,f_{A_0}(1-f_{A_0}) + \frac{\beta}{2}\,Q_A}{W^*} \qquad (W < W^*). \tag{S31}$$

两种制度通过标量缩放相关联，

$$\chi_A^{\text{hetero}} = \chi_A^{\text{homo}}\,\frac{Z - W^*}{W^*}, \tag{S32}$$

其中 χ_A^{homo}表示表达式（S29）；因此，同质偏好公式决定了这两种制度。

S2.4 当指数等于偏好时

在同质性状态下，指数与偏好之差为 α

$$\chi_A - \alpha = \frac{\beta\,(1-\alpha^2)\,f_{A_0}\,(k - f_{B_0})\,\Delta}{2\,(Z - W^*)}, \tag{S33}$$

这就是正文中的式（5），因为 $2(Z-W^*) = f_{A_0}(1-f_{A_0}) + \beta\,Q_A$ 根据式 S28。由于 $Z - W^* > 0$ 且 $|\alpha| < 1$，指数不同于 α，除非 $\beta = 0$，$k = f_{B_0}$（独立属性）或 $\Delta = 0$。

为推导式 S33，从分子（S28）中减去 α 乘以分母（S27）：

$$(W - W^*) - \alpha\,(Z - W^*) = \frac{\beta}{2}\,(Q_A - \alpha\,\widetilde{Q}_A) = \frac{\beta}{4}\,(1-\alpha^2)\,\left[(1-f_{A_0})\,\delta_0^2 + f_{A_0}\,\delta_1^2 - \delta_0\,\delta_1\right].$$

括号中的因子可分解为 $(\delta_0 - \delta_1)\left[(1-f_{A_0})\,\delta_0 - f_{A_0}\,\delta_1\right]$，而方程（S7）–（S8）给出 $(1-f_{A_0})\,\delta_0 - f_{A_0}\,\delta_1 = 2f_{A_0}(k - f_{B_0})$，因此括号等于 $2f_{A_0}(k - f_{B_0})\,\Delta$。除以 $Z - W^*$ 后得到方程 S33。在第二种情况下，$k = f_{B_0}$，有 $\delta_0 = f_{A_0}(2f_{B_0} - 1)$ 和 $\delta_1 = (1-f_{A_0})(2f_{B_0} - 1)$，因此 $Q_A = \alpha\,(2f_{B_0} - 1)^2 f_{A_0}(1 - f_{A_0})$ 且 $\widetilde{Q}_A = Q_A/\alpha$。在第三种情况下，$\Delta = 0$，有 $\delta_0 = \delta_1$、$Q_A = \alpha\,\delta_0^2$ 和 $\widetilde{Q}_A = \delta_0^2$。在这两种情况下，分子和分母的间接项之比为 α，指数等于 α；分子的间接项并未消失，而是被分母的间接项抵消。在 $\alpha = 0$ 处，方程 S33 给出分子 $W - W^* = \frac{\beta}{2}\,f_{A_0}\,(k - f_{B_0})\,\Delta$，该式用于 S3 节。

S2.5 关系数量相等时的诱导隔离

对于 A 没有偏好，且有两个规模相同的 B-群体（$\alpha = 0$、 $f_{B_0} = 1/2$）时，每个人的关系期望数都相同，但 A 的指数分子的

$$W - W^* = \frac{\beta}{2} f_{A_0}^2 (2k-1)^2, \tag{S34}$$

当属性相关时（$k \neq 1/2$），在 B ($\beta > 0$) 中，同质性为正。因此，诱导隔离并非关系数量差异的副产品。

在 $\alpha = 0$，矩阵 H^A 的所有元素都等于 $1/2$，因此，群体 B_b 中个体的预期关系数量与 $\frac{1}{2}\sum_{b'} f_{B_{b'}} H_b^B$ 成正比，b'，无论其属于哪个 A-群体。在 $f_{B_0} = 1/2$，对于两个 B-群体，该总和都等于 $1/2$，因此每个个体的预期关系数量都相同，即 $\phi_g = f_{A_g}$ $\gamma = 0$，且 Coleman 基线等于随机混合值（S23）。在 $f_{B_0} = 1/2$，公式 S10 给出 $\Delta = 2f_{A_0}(2k-1)$，而 S2.4 节 $\alpha = 0$ 处的分子变为公式 S34。度不平衡（S20）要求两个规模不同的 B-群体；诱导隔离则不要求，这是因为两个 A-群体的 B组成不同。正文中的图1A–B即属于这种情况（$f_{A_0} = 0.45$、 $f_{B_0} = 0.5$、 $k = 0.92$、 $\beta = 0.92$）。

S2.6 属性 B

交换两个属性的作用，设 $\delta_0' = F_{A_0,\,B_0} - F_{A_1,\,B_0} = 2kf_{A_0} - f_{B_0}$ 和 $\delta_1' = F_{A_0,\,B_1} - F_{A_1,\,B_1} = 2(1-k)f_{A_0} - (1-f_{B_0})$ 分别表示两个 B-群体内的 A-不均衡，其中$\delta_0' + \delta_1' = 2f_{A_0} - 1$。 B 指数的分子和同质性分母为

$$W_B - W_B^* = \frac{\beta}{2} f_{B_0}(1-f_{B_0}) + \frac{\alpha}{2} Q_B, \tag{S35}$$

$$Z - W_B^* = \frac{1}{2} f_{B_0}(1-f_{B_0}) + \frac{\alpha}{2} \widetilde{Q}_B, \tag{S36}$$

with

$$Q_B = \tfrac{1+\beta}{2}\left[(1-f_{B_0})\,{\delta_0'}^2 + f_{B_0}\,{\delta_1'}^2\right] - \tfrac{1-\beta}{2}\,\delta_0'\,\delta_1', \tag{S37}$$

$$\widetilde{Q}_B = \tfrac{1+\beta}{2}\left[(1-f_{B_0})\,{\delta_0'}^2 + f_{B_0}\,{\delta_1'}^2\right] + \tfrac{1-\beta}{2}\,\delta_0'\,\delta_1'. \tag{S38}$$

T间接项与 A指数中的 β 以及 B指数中的 α 成正比。

S2.7 数值验证

图 S2 验证了闭式解（S29），针对 α 的三个取值（0.3、0.6 和 0.9），在 $\beta = 0.4$、$f_{A_0} = 0.3$ 和 $f_{B_0} = 0.4$ 条件下进行验证。模拟网络上测得的指数（每个点为 30 个网络，每个网络包含 $N = 2,000$ 个体；材料与方法中的“模拟”）在整个可行的巩固范围内均落在计算曲线上， $0 \le k \le 1$ 对于这些份额也是如此。这证实了完整的~闭式解，包括其中取决于两种偏好的 Q_A 和 Q_A 项。

S3 一个中立偏好

本节推导正文中在没有对属性 A（$\alpha = 0$；结果：“有一种中性偏好时，只能消除诱导隔离”）这一情形下的结果：位于 $\alpha = 0$的两个指数、消除 A上隔离的划分、等规模去相关划分（ESDS）的存在条件，以及规划者最优解。本节最后对ESDS与随机划分进行数值比较。关于数据的检验见 S5.4节。

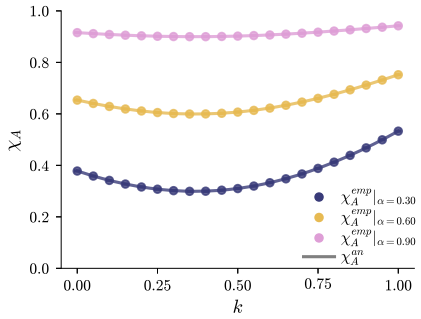

图 S2：闭式解与模拟结果一致。科尔曼指数 A与整合程度 k 在 α三个取值下的对比，数据测量于由 MAM 模拟生成的网络（符号，χ_A^{emp} 图例中标示；每个点对应 30 个网络，每个网络包含 $N = 2{,}000$ 个体），并使用正文中的公式（3）计算（线条，χ_A^{an}），其中 $f_{A_0} = 0.30$、$f_{B_0} = 0.40$ 和 $\beta = 0.40$。在独立性（$k = f_{B_0}$）下，指数等于 α，并随着 k 偏离独立性而偏离该值。

S3.1 A 在 $\alpha = 0$处的指数

在没有对 A的偏好时，分子的直接项（S27）消失，且 S2.4节给出

$$W - W^*\big|_{\alpha=0} = \frac{\beta}{2} f_{A_0} (k - f_{B_0}) \Delta. \tag{S39}$$

网络上的所有隔离 A 随后都由对 B的偏好所诱导。对于 $\beta \neq 0$，只有当属性彼此独立（$k = f_{B_0}$）或当 $\Delta = 0$时，隔离才会消失。在同质性状态下，除以 $Z - W^* = \frac{1}{2}[f_{A_0}(1 - f_{A_0}) + \beta \widetilde{Q}_A]$即可得到 A在 $\bar{\alpha} = 0$处的指数，正如正文公式（5）在 $\alpha = 0$中所述。在异质性状态下，分母为 W^*，但分子相同，因此该指数具有相同的符号和相同的零点。

S3.2 B 在 $\alpha = 0$处的指数

在 $\alpha = 0$处，对于每一种组成（f_{A_0}、f_{B_0}、k），B 的科尔曼指数都等于 β，前提是对 B 的偏好为同质偏好（$\beta > 0$）。当其为异质性偏好（$\beta < 0$）时，该指数仅通过 f_{B_0}取决于组成，并且仅当 $f_{B_0} = 1/2$时才等于 β。

为推导这些结论，令 $\alpha = 0$ 代入属性 B的公式，即式（S35）–（S36）。两个间接项均消失，因为其系数为 $\alpha/2$，并且

$$W_B - W_B^* = \frac{\beta}{2} f_{B_0} (1 - f_{B_0}), \qquad Z - W_B^* = \frac{1}{2} f_{B_0} (1 - f_{B_0}).$$

对于 $\beta > 0$，适用同质性状态，且该指数是二者之比，即 $\chi_B = \beta$。对于 $\beta < 0$，适用异质性状态，且分母本身就是 W_B^*。在 $\alpha = 0$ 处，连接概率为 $\frac{1}{2} H_b^{B_{b'}}$，因此由 B_b 的成员发出的关系密度为 $\Sigma_b^{\cdot} = \frac{1}{2} T_b M_b$，其中 $T_0 = f_{B_0}$、$T_1 = 1 - f_{B_0}$和 $M_b = \frac{1+\beta}{2} T_b + \frac{1-\beta}{2} T_{1-b}$。于是 $W_B^* = T_0 \Sigma_0' + T_1 \Sigma_1' = \frac{1}{2}(T_0^2 M_0 + T_1^2 M_1)$，其取决于 f_{B_0} 和 β，但不取决于 f_{A_0} 或 k。在 $f_{B_0} = 1/2$处，$T_0 = T_1 = M_0 = M_1 = 1/2$，因此 $W_B^* = 1/8$、$W_B - W_B^* = \beta/8$，且 $\chi_B = (W_B - W_B^*)/W_B^* = \beta$，与同质性状态下相同。当 $f_{B_0} \neq 1/2$时，W_B^* 随 f_{B_0}变化，指数也随之变化。

直观地说，在 $\alpha = 0$属性 A对每一段关系的贡献都相同，因此从 B 模型的角度来看，这是一个偏好为 β的单属性模型，其中 Coleman 基线恰好解释了两个 B群体之间关系数量的差异（第 S2.2节）。

S3.3 双类别划分

本小节阐述了划分的两个性质，本节其余部分将使用这些性质。划分、学校构成和班级平均值的守恒$\langle \chi_A \rangle$以及$\langle \chi_B \rangle$的定义如下

材料与方法中的“双类别划分”；我们用 $\lambda = N^{c_1}/N$ 表示班级 c_1的相对规模。在每个班级内，关系遵循具有相同偏好 α 和 β的 MAM。由于 MAM 中的科尔曼指数取决于班级的组成而非其规模，因此，两个具有学校构成的班级，其指数与未划分学校的指数相同。

在 $\alpha = 0$ 和 $\beta > 0$中，S3.2 给出了 $\chi_B^{c_j} = \beta$ 在每个班级中的值，无论其组成如何，因此$\langle \chi_B \rangle = \beta$ 对于每一种划分都成立：规划者无法通过班级的组成改变 B 上的隔离（正文所述政策上的不可能性）。

消除 A 上隔离的 S3.4 划分

根据公式 S39，A 在两个属性相互独立的任何班级中，其指数均为零，$k^{c_j} = f_{B_0}^{c_j}$。有两种划分可以实现这一点。

B 分层划分。如果学校中每个 B 组至少有一名学生，则将 B_0 的所有学生分配到班级 c_1，并将 B_1 的所有学生分配到班级 c_2，就会使每个班级中的 $\chi_A^{c_j} = 0$ 为 $\chi_A = 0$。事实上，守恒约束按构造即得到满足。在班级 c_1中，每名学生都属于 B_0，因此 $f_{B_0}^{c_1} = 1$；其中每个 A_0 的成员也属于 B_0，因此$k^{c_1} = 1$；于是 $k^{c_1} - f_{B_0}^{c_1} = 0$，且分子（S39）为零，无论 Δ^{c_1} 取何值。在班级 c_2中，$f_{B_0}^{c_2} = 0$ 和 $k^{c_2} = 0$，同样成立。然而，每个班级都只包含一个 B 组，因此 $f_{B_0}^{c_j}\left(1 - f_{B_0}^{c_j}\right) = 0$，且 B的指数无法在班级内部定义。可以将其理解为 B 上的完全隔离：规划者通过放弃对 B 上隔离的全部控制，获得了 $\chi_A = 0$。

去相关划分。一种较温和的划分会在每个班级中保留两个 B-群体，并使每个班级内的属性相互独立，$k^{c_j} = f_{B_0}^{c_j}$。这要求存在一个分解 $F = \lambda F^{c_1} + (1-\lambda) F^{c_2}$，其中每个 F^{c_j}都是其边际分布的乘积（等价地说，秩为1）。并非每所学校都存在这样的分解。对于两个规模相等的班级（$\lambda = 1/2$），当且仅当

$$0 \le k \le 2f_{B_0}, \qquad \text{equivalently} \qquad |k - f_{B_0}| \le f_{B_0}, \tag{S40}$$

且解构成一个单参数族。就归一化合并度 $\kappa = (k - f_{B_0})/f_{B_0} \in [-1, 1]$ 以及班级 c_1的边际分布的相对偏差而言，

$$t = \frac{f_{A_0}^{c_1} - f_{A_0}}{f_{A_0}}, \qquad u = \frac{f_{B_0}^{c_1} - f_{B_0}}{f_{B_0}},$$

所有等规模去相关划分 都可以通过选择 t并令 $|\kappa| \le |t| \le 1, t \ne 0$，然后设置 g

$$u = \kappa/t, \qquad f_{A_0}^{c_1} = f_{A_0}(1+t), \quad f_{B_0}^{c_1} = f_{B_0}(1+u), \qquad f_{A_0}^{c_2} = f_{A_0}(1-t), \quad f_{B_0}^{c_2} = f_{B_0}(1-u). \tag{S41}$$

在边界 $|\kappa| = 1$处，唯一的解满足 $|u| = 1$，因此一个班级包含单个 B-群体；要构造一种在每个班级中保留两个 B-群体的去相关划分，需要 $|\kappa| < 1$，即$0 < k < 2f_{B_0}$。我们将等规模去相关划分称为 ESDS。当条件（S40）不满足时（$k > 2f_{B_0}$），按 B-属性分层的划分仍然给出 $\langle \chi_A \rangle = 0$。

为推导条件（S40），注意到一个由其边际分布决定的、具有非负元素的秩为1的矩阵：$F_{A_0,\,B_0}^{c_j} = f_{A_0}^{c_j} f_{B_0}^{c_j}$、$F_{A_0,\,B_1}^{c_j} = f_{A_0}^{c_j}\left(1 - f_{B_0}^{c_j}\right)$，依此类推。分解$F = \frac{1}{2}\left(F^{c_1} + F^{c_2}\right)$ 随后要求：(i) $1_2\left(f_{A_0}^{c_1} \dashv f_{A_0}^{c_2}\right) = f_{A_0}$，(ii) $1_2\left(f_{B_0}^{c_1} + f_{B_0}^{c_2}\right) = f_{B_0}$，以及 (iii)$1_2\left(f_{A_0}^{c_1} f_{B_0}^{c_1} + f_{A_0}^{c_2} f_{B_0}^{c_2}\right) = k f_{A_0}$；其余三个元素可由此得到。从 (iii) 中消去 $f_{A_0}^{c_2} = 2f_{A_0} - f_{A_0}^{c_1}$和$f_{B_0}^{c_2} = 2f_{B_0} - f_{B_0}^{c_1}$，得到

$$\left(f_{A_0}^{c_1} - f_{A_0}\right)\left(f_{B_0}^{c_1} - f_{B_0}\right) = f_{A_0}\left(k - f_{B_0}\right), \tag{S42}$$

也就是说，$t\,u = \kappa$。按照少数派约定，所有边际分布都介于 0 和 1 之间这一要求可简化为（t，u）$\in [-1, 1]^2$。双曲线 $tu = \kappa$ 与该正方形相交，当且仅当 $|\kappa| \le 1$，

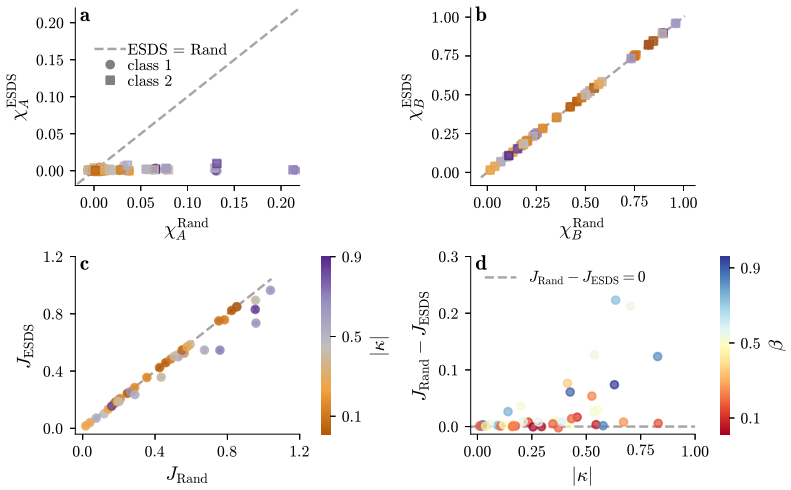

图 S3：随着巩固程度提高，ESDS 相较于随机划分的优势不断扩大。在 $\alpha = 0$（$N = 1,\ 000$；40 所学校；每所学校 3 个网络，每个网络进行 20 次随机划分）下的模拟学校。(a) ESDS 后（纵轴）和随机划分后（横轴）每个班级中的 A 指数（圆形：第 1 类；方形：第 2 类）：ESDS 得到的值为零，而随机划分不是。(b) B 指数的相同情况：两种划分得到相同的值。(c) 按 $|\kappa|$ 着色的 ESDS 后总体目标函数 J 与随机划分结果的对比。(d) 两种划分的目标函数之差与 $|\kappa|$ 的关系，按 β 着色；该差值随着 $|\kappa|$ 增大而增大。

这就是条件（S40）。反过来，若 $|\kappa| \leq 1$，任意一个 t 满足 $|\kappa| \leq |t| \leq 1$ 的值都会给出 $u = \kappa/t \in [-1, 1]$，而方程 S41 定义了两个秩一矩阵，其平均值为 F。

正文中的图 4 展示了 $(f_{B_0},\ k)$ 平面中的条件，以及用于检验该条件的 CILS4EU 班级（见第 S5.4 节）。

S3.5 规划者的最优方案

在 $\alpha = 0$ 和 $\beta > 0$处，对于任何满足 $0 < k < 2f_{B_0}$的学校，所有划分中总体目标函数的最小值为 $\min J = \beta$。任何能使每个班级中 A 的指数降为零，同时保留每个班级中的两个 B-群体的划分都能达到该值，例如 ESDS。下限 β 无法进一步降低。

推导很简短。根据 S3.3 节，对于每种划分，$\chi_B = \beta$，因此 $|\chi_B| = \beta$ 是固定的。剩下的唯一一项是 $|\chi_A| \geq 0$，任何去相关划分都会使其降为零。对于 $0 < k < 2f_{B_0}$，S3.4 节给出了一个 ESDS，其中每个班级都包含两个 B-群体（取 $|\kappa| < |t| < 1$，使得 $|u| < 1$），在该划分中定义了 $\chi_B^{cj} = \beta$。按 B分层的划分也会得到 $\chi_A = 0$，但会使 χ_B 未定义，因此无法使用。因此 $\min J = \beta$。在 ESDS 中，每个班级都有 $\chi_A^{cj} = 0$ 和 $\chi_B^{cj} = \beta > 0$，所以$J_{\mathrm{strict}} = J = \beta$，而且 ESDS 对两个目标函数都是最优的。

S3.6 ESDSanda 在模拟网络上的随机划分

随机划分是指将每个学生随机分配到任一班级。平均而言，这样划分后每个班级的组成与学校构成相同，因此每个班级都保持 $k^{cj} \approx k$ 和 $\kappa^{cj} \approx \kappa$。因此，$A$ 上的诱导隔离并未消除，而 ESDS 则通过构造使 $\kappa^{cj} = 0$ 成立。因此，随机划分的隔离程度超过 ESDS 的幅度应随 $|\kappa|$增大：当属性几乎相互独立时，几乎没有需要去相关的因素，两种划分的表现相近；当属性高度合并时，则需要 ESDS。图S3 在 $\alpha = 0$的模拟学校中证实了这一点。

平衡学校中的两个活跃偏好

本节推导正文中关于在两种属性上均衡的学校的结果$f_{A_0} = f_{B_0} = 1/2$（结果，“有两种活跃偏好时，只有在偏好冲突时划分才有帮助”以及“学校平均值可能掩盖隔离程度更高的班级”）：指数关于合并度平方的函数关系、独立情况下的最优划分、非独立情况下逐班级评估的最优划分、抵消陷阱，以及两个班级均有所改善的条件。全文中，$s = (2k-1)^2$ 表示合并度平方，指数由正文中的公式（9）给出；划分所得的两个班级规模相同，且保留学校各属性的份额，因此每个班级也都是均衡的。数据检验见S5.4节。

S4.1 平衡学校中的指数

当两个 A-群体的规模相同时，度份额不会影响 Coleman 基线：方程 S21 给出 $w_A^* = \frac{1}{2}(\phi_0 + \phi_1) = \frac{1}{2}$，因为无论组成如何，$\phi_0 + \phi_1 = 1$，所以 $W^* = Z/2$ 和 $Z - W^* = W^*$。两种制度的分母相同，因此一个公式即可涵盖两者。在 $f_{A_0} = f_{B_0} = 1/2$ 下，方程（S7）–（S8）给出 $\delta_0 = -\delta_1 = (2k-1)/2$，因此 $Q_A = s/4$ 和 $\sim Q_A = \alpha s/4$。此时，分子（S27）为 $(\alpha + \beta s)/8$，分母（S28）为 $(1 + \alpha\beta s)/8$，从而得到方程（9）的 $\chi_A(s)$；交换属性的角色即可得到 $\chi_B(s)$。

性质。 (i) 这两个指数是对称的：$\chi_B(\alpha,\ \beta,\ s) = \chi_A(\beta,\ \alpha,\ s)$。(ii) 在独立状态下（$s = 0$），$\chi_A = \alpha$ 和 $\chi_B = \beta$。(iii) 在完全合并的情况下（$s = 1$，即 $k = 0$ 或 $k = 1$），$\chi_A = \chi_B = (\alpha + \beta)/(1 + \alpha\beta)$，它关于 α 和 β对称。以上三点均可通过代入得出。

这对指数位于一条线段上。 随着 s 从 0 变到 1，这一对（$\chi_A,\ \chi_B$）沿着从（$\alpha,\ \beta$）到 (iii) 中的共同值的线段移动。事实上，

$$\frac{d\chi_A}{ds} = \frac{\beta\,(1-\alpha^2)}{(1+\alpha\beta s)^2}, \qquad \frac{d\chi_B}{ds} = \frac{\alpha\,(1-\beta^2)}{(1+\alpha\beta s)^2},$$

因此，斜率 $d\chi_B/d\chi_A = \alpha(1-\beta^2)/[\beta(1-\alpha^2)]$ 不依赖于 s。在保持学校份额不变的划分下，每个班级也都是均衡的，而班级指数的按规模加权的平均值是该线段上两点的平均值；由于这是一条直线段，因此所有可实现的数对（$\langle\chi_A\rangle$，$\langle\chi_B\rangle$）都位于其上。

阶段。 在一致阶段（$\alpha\beta > 0$）中，两个导数的符号都与指数相同，因此两个指数都不为零，并且其绝对值都会随 s 增大。在冲突阶段（$\alpha\beta < 0$）中，采用标记 $|\alpha| \le |\beta|$、χ_A（s）时，在 $s^* = -\alpha/\beta = |\alpha|/|\beta| \in [0,1]$ 处 $= 0$，其中分母为 $1 - \alpha^2 > 0$，因此 χ_A 在那里改变符号。B 的指数对所有 $s \in [0,1]$ 都保持 β 的符号：它在 $s = 0$ 处等于 β，并且在 $s = 1$ 处为（$\alpha + \beta$）/（$1 + \alpha\beta$），而 $\alpha + \beta$ 的符号与 β 相同，因为 $|\beta| \ge |\alpha|$。

带符号整合度的凹性。 在冲突阶段中，给定 $\alpha > 0 > \beta$，将班级带符号整合度记为 $v = 2k - 1 \in [-1, 1]$，使得 $s = v^2$，并将其指数 A 记为 $g(v) = \chi_A(v^2)$。于是，g 在 $[-1, 1]$ 上严格凹。根据链式法则，$g''(v) = 2\chi_A'(v^2) + 4v^2\chi_A''(v^2)$。一阶导数 $\chi_A'(s) = \beta(1-\alpha^2)/(1+\alpha\beta s)^2$, 为负，因为 $\beta < 0$；再次求导可得，

$$\chi_A''(s) = -\frac{2\alpha\beta^2(1-\alpha^2)}{(1+\alpha\beta s)^3} < 0,$$

因此，g'' 的两项均为负值。在保持份额不变的等规模划分下，两个班级的带符号整合度为 $u \pm 2\varepsilon$，其中 $u = 2k - 1$，因此$\chi_A = \frac{1}{2}[g(u + 2\varepsilon) + g(u - 2\varepsilon)]$。由于$g'$递减，$d\chi_A/d\varepsilon = g'(u + 2\varepsilon) - g'(u - 2\varepsilon) < 0$ 适用于 $\varepsilon > 0$：随着偏移量增大，A的平均指数严格递减，并且始终不大于未划分学校中其 $g(u)$的值。S4.3和S4.4节使用了这一性质。

S4.2 独立性下的最优划分

在独立性（$k = 1/2$）下，保持份额不变的等规模划分使班级具有 $k_\pm = 1/2 \pm \varepsilon$，并得到相同的合并度平方 $s = 4\varepsilon^2$，因此指数也相同。因此，取平均值与取绝对值可以交换，并且对于每个划分，无论 $\alpha\beta$的符号如何， $J_{\text{strict}} = J = |\chi_A(s)| + |\chi_B(s)|$ 。最优方案如下。

- 在一致阶段（$\alpha\beta > 0$）中， J（s）不断增加，其最小值 $|\alpha| + |\beta|$ 位于 $s = 0$：最佳选项是不进行划分。
- 在冲突阶段（$\alpha\beta < 0$、 $|\alpha| \le |\beta|$）中，最小值位于 $s = s^*$，此时$\langle\chi_A\rangle = 0$，$\langle\chi_B\rangle =$（$\beta^2 - \alpha^2$）/[β（$1 - \alpha^2$）], 且

$$J_{\min} = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{|\beta|\,(1 - \alpha^2)} < |\beta| \le |\alpha| + |\beta|. \tag{S43}$$

在具有 α、 $\beta > 0$ 的一致阶段中，两个指数在 s （第 S4.1 节）中均为正值且不断增加，因此 $J = \chi_A + \chi_B$严格递增；对于 α， $\beta < 0$ 对 $J = -\chi_A - \chi_B$ 也同样成立。在冲突阶段，不妨设 $\alpha > 0 > \beta$ 。在 $[0, s^*]$、 $\chi_A \ge 0$ 和 $\chi_B < 0$ 上，因此

$$J(s) = \chi_A - \chi_B = \frac{(\alpha - \beta)(1 - s)}{1 + \alpha\beta s}, \qquad \frac{dJ}{ds} = -\frac{(\alpha - \beta)(1 + \alpha\beta)}{(1 + \alpha\beta s)^2} < 0,$$

因为 $\alpha - \beta > 0$ 和 $1 + \alpha\beta > 0$。在 $[s^*, 1]$上， $\chi_A \le 0$ 和 $\chi_B < 0$，所以

$$J(s) = -\chi_A - \chi_B = \frac{-(\alpha + \beta)(1 + s)}{1 + \alpha\beta s}, \qquad \frac{dJ}{ds} = \frac{-(\alpha + \beta)(1 - \alpha\beta)}{(1 + \alpha\beta s)^2} > 0,$$

因为 $\alpha + \beta < 0$ 和 $1 - \alpha\beta > 1$。因此，唯一最小值出现在 s^*，此时 $\chi_A = 0$ 和$J = |\chi_B(s^*)|$。代入 $s^* = -\alpha/\beta$ 得到 $\chi_B(s^*) = (\beta^2 - \alpha^2)/[\beta(1 - \alpha^2)],$，其符号与 β相同，因此得到公式 S43。严格不等式成立，是因为当$\alpha \ne 0$ 和 $\beta^2 < 1$时，$(1 - \alpha^2/\beta^2)/(1 - \alpha^2) < 1$。对于 $\alpha = -0.2$ 和 $\beta = 0.6$， $s^* = 1/3$ 和 $J_{\min} = 0.32/0.576 \approx 0.56$，与不进行划分时的 0.80 相比。

偏离独立性，处于一致阶段。如正文所述，一致阶段的结果可推广到偏离独立性的学校（$k \ne 1/2$）。对于每个 k，当 $\alpha\beta \le 1/3$ 时，不进行划分始终是严格最优的。当 $\alpha\beta > 1/3$ 时，划分可以降低 J，但这仅发生在高度合并的学校中，且最多降低 J 的 0.12%。

根据对称性， $k \leftrightarrow 1 - k$ 我们取 $k \ge 1/2$ 并写作 $u = 2k - 1$。偏移量为$\varepsilon \in [0,$（$1 - u$）/2] 的划分使两个班级的带符号整合度分别为 $v = u \pm 2\varepsilon$，其平方为各班级的平方凝聚度 $s_\pm$ 。在一致阶段， χ_A 和 χ_B 在每个班级中都与 α 和 β 具有相同的符号（第S4.1节），因此 J 中的绝对值可以逐个班级处理，$J = J_{\text{strict}}$，并且

$$J(\varepsilon) = \tfrac{1}{2}\left[G(u + 2\varepsilon) + G(u - 2\varepsilon)\right], \qquad G(v) = T(v^2) = \frac{|\alpha + \beta|\,(1 + v^2)}{1 + \alpha\beta v^2}, \tag{S44}$$

其中， $T(s) = |\chi_A(s)| + |\chi_B(s)|$ 是一个班级的总隔离度（S4.3 节）；此处两个指数的符号相同，而 T 是它们之和的绝对值。未划分学校的 $J(0) = G(u)$，且 $J(\varepsilon)$是 G在两个点处的平均值，这两个点的中点为 u。当$c = \alpha\beta \in (0, 1)$且$w = v^2$时，

$$G''(v) = \frac{2\,|\alpha + \beta|\,(1 - c)\,(1 - 3cw)}{(1 + cw)^3}.$$

若 $c \le 1/3$，则 $G'' \ge 0$ 在 $[-1,1]$上，因此 G 是凸函数。凸函数在两点处的平均值不小于其在两点中点处的函数值（詹森不等式），因此，对于每个可行的 ε， $J(\varepsilon) \ge J(0)$：无论学校如何巩固，任何划分都不会降低 J。

如果 $c > 1/3$, G 在 $v^2 > 1/(3c)$ 处为凹函数，那么将一个班级划分到该区域的划分可以降低 J。为了界定降幅，我们根据公式 S44 计算了 $J(\varepsilon)$，该公式在模型中是精确的。相对降幅 $[J(0) - \min_\varepsilon J(\varepsilon)]/J(0)$ 仅取决于 c和 k，因为因子 $|\alpha+\beta|$ 会抵消。因此，以 0.0005 为步长，在 $c \in (1/3, 1)$ 和 $k \in [1/2, 1)$ 上取值，并为每个 k 设置 2,001 个偏移量的网格，涵盖了所有配对 (α, β)。最大降幅为 J 的 0.12%，出现在 $\alpha\beta \approx 0.77$ 和$k \approx 0.89$处，此时划分使一个班级完全合并。在该网格上，当 $(2k-1)^2 \le 1/(3\alpha\beta)$ 时不会出现降幅：只有在合并程度很高的学校中，划分才会起作用。

S4.3 按班级判定的最优划分

偏离独立性时，偏移量为 ε 的划分会得到班级 $k_\pm = k \pm \varepsilon$，其平方凝聚度 $s_\pm = (2k_\pm - 1)^2$, 此时不再相同。定义一个班级的总隔离度，

$$T(s) = |\chi_A(s)| + |\chi_B(s)|, \tag{S45}$$

使得 $J_{\text{strict}} = \frac{1}{2}[T(s_+) + T(s_-)]$：在 ε 上对其进行最小化，意味着选择图形 T 上平均值最低的两个点。

形状 T。在冲突阶段，当 $\alpha > 0 > \beta$和 $|\beta| \ge |\alpha|$时， $\chi_B < 0$在 $[0,1]$和χ_A 在 s^* 处变号（第S4.1节），因此

$$T(s) = \begin{cases} \dfrac{(\alpha-\beta)(1-s)}{1+\alpha\beta s}, & s \le s^*, \\ \dfrac{-(\alpha+\beta)(1+s)}{1+\alpha\beta s}, & s \ge s^*, \end{cases} \tag{S46}$$

且两条分支在 $T(s^*) = (\beta^2 - \alpha^2)/[|\beta|(1-\alpha^2)]$ 处相等 s^*。一阶导数已在第 S4.2节计算： T在 $[0, s^*]$ 上严格递减，在 $[s^*, 1]$上严格递增，呈 V 形，且最小值位于 s^*。二阶导数为，

$$T'' = \frac{2(\alpha-\beta)(1+\alpha\beta)\,\alpha\beta}{(1+\alpha\beta s)^3} < 0 \quad (s < s^*), \qquad T'' = \frac{2(\alpha+\beta)(1-\alpha\beta)\,\alpha\beta}{(1+\alpha\beta s)^3} > 0 \quad (s > s^*),$$

证明左分支严格凹，右分支严格凸（图S4）。V 形通常是不对称的：在 s^*处的单侧斜率之比，

$$\frac{|T'(s^{*-})|}{|T'(s^{*+})|} = \frac{(\alpha-\beta)(1+\alpha\beta)}{-(\alpha+\beta)(1-\alpha\beta)}, \tag{S47}$$

仅当 $\alpha = 0$ 时等于 1。

跨越窗口。如果不进行划分，两个班级都位于 $s_0 = (2k-1)^2$。划分的影响取决于 s_0 位于凹的左分支（$s_0 < s^*$）还是凸的右分支（$s_0 \ge s^*$）。条件 $s_0 \le s^*$ 可写为 $|2k-1| < \sqrt{s^*}$，即，

$$k \in (k_{\text{low}}, k_{\text{high}}), \qquad k_{\text{low}} = \frac{1-\sqrt{s^*}}{2}, \qquad k_{\text{high}} = \frac{1+\sqrt{s^*}}{2}, \tag{S48}$$

正文的跨越窗口。在冲突阶段，根据 J_{strict}判断，当且仅当学校位于此窗口内时，划分才有帮助。在窗口外，最佳选项是不进行划分。在窗口内，对于 $u = |2k-1|$ 以及最大的可行偏移量 $\varepsilon_{\max} = \min(k, 1-k) = (1-u)/2$，令

$$\varepsilon_1 = \frac{\sqrt{s^*} - u}{2}, \qquad \varepsilon_2 = \frac{\sqrt{s^*} + u}{2}.$$

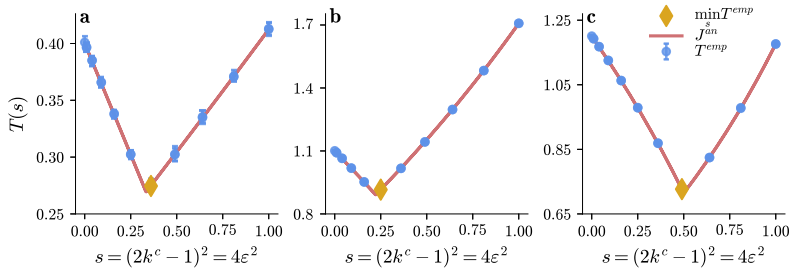

图 S4：在冲突阶段，一个班级的总隔离度呈 V 形。 $T(s) = |\chi_A(s)| + |\chi_B(s)|$ 相对于合并度平方 s，其中 (a) $\alpha = 0.1, \beta = -0.3$；(b) $\alpha = 0.2, \beta = -0.9$；(c) $\alpha = 0.4, \beta = -0.8$。左分支（$s < s^*$）为凹形，右分支（$s > s^*$）为凸形；最小值位于 $s^* = |\alpha|/|\beta|$。线条：计算值，图例中标记为 J^{an}；符号：在基于 MAM 模拟的网络上测得的值，标记为 T^{emp}；菱形：测得的最小值，$\min_s T^{emp}$。

两个偏移量都将一个班级置于 s^*；另一个班级在 $\sigma = (2u - \sqrt{s^*})^2 < s^*$ 时位于 $\overline{\varepsilon_1}$，在$\tau = (2u + \sqrt{s^*})^2 > s^*$时位于$\overline{\varepsilon_2}$。 J_{strict}对于 $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1]$严格递减，对于$\varepsilon \geq \varepsilon_2$严格递增，因此每个最优偏移量都位于 $[\varepsilon_1, \bar{\varepsilon}]$，其中 $\bar{\varepsilon} = \min(\varepsilon_2, \varepsilon_{\max})$。靠近 $k = 1/2$ 时，较优的一端是 ε_2；距离 $k = 1/2$ 较远时，则是 ε_1；如果 ε_2 不可行，则为 $\varepsilon_{\max}$。在 $k = 1/2$ 处，两个偏移量重合，两个班级都位于 s^*，如 S4.2 节所示。

为推导这些陈述，利用对称性 $k \leftrightarrow 1 - k$取 $k \geq 1/2$，因此 $u = 2k - 1$。令$r = \sqrt{s^*}$，并且对于 $v \in [-\overline{1}, 1]$，令 $G(v) = T(v^2)$，这是一个偶函数。写作 $x = u + 2\varepsilon$，两个班级位于 $s_+ = x^2$和 $s_- = (2u - x)^2$,，因此 $J_{\text{strict}} = \frac{1}{2}H(x)$，其中 $H(x) = G(x) + G(2u - x)$以及 $x \in [u, 1]$，其中 $x = 1$ 对应于 $\varepsilon_{\max}$。根据公式 S46，在 $c = \alpha\beta < 0$ 和 $w = v^2$ 的条件下，

$$G''(v) = \frac{2(\alpha - \beta)(1 + c)(3cw - 1)}{(1 + cw)^3} < 0 \quad (|v| < r),$$

$$G''(v) = \frac{-2(\alpha + \beta)(1 - c)(1 - 3cw)}{(1 + cw)^3} > 0 \quad (|v| > r).$$

因此， G 在 $[-r, r]$上是严格凹函数，并在 $v = 0$处取得最大值；在 $[-1, -r]$和 $[r, 1]$上是严格凸函数，分别递减和递增；其最小值 $T(s^*)$位于 $v = \pm r$。

在窗口（$u \geq r$）之外。令 $x \in (u, 1]$ 和 $y = 2u - x$，使得 $x > u \geq r$。如果$y \geq r$，则 G 在 $[r, 1]$ 上的凸性给出 $G(x) + G(y) \geq 2G(u)$。如果 $|y| < r$，那么 $G(y) > G(r)$；由于$x + r > x + y = 2u$， G 在 $[r, 1]$ 上的凸性和单调性给出 $G(x) + G(r) \geq 2G\left(\frac{x+r}{2}\right) \geq 2G(u)$。如果 $y \leq -r$，那么 $G(y) = G(|y|)$，其中 $|y| \geq r$ 和 $x + |y| = 2x - 2u > 2u$，因此再次有$G(x) + G(|y|) \geq 2G(u)$。在所有情况下， $H(x) \geq H(u)$：最佳偏移量为零，且 $J_{\text{strict}} = J = T(u^2)$。

窗口之外的总体目标函数。没有任何划分能降低 J，因此在窗口之外，两个目标函数具有相同的最小值，即 $T(u^2)$，且无需划分即可达到。按照 S4.1 节中的设定，令 $\alpha > 0 > \beta$和 $g(v) = \chi_A(v^2)$，则$\chi_A = \frac{1}{2}[g(u + 2\varepsilon) + g(u - 2\varepsilon)]$。(i) 根据 g的凹性，$\chi_A \leq g(u) = \chi_A(u^2) \leq 0$，最后一个不等式是因为 $u^2 \geq s^*$。由于 $D = \chi_A(u^2) - \chi_A \geq 0$，$|\chi_A| = |\chi_A(u^2)| + D$：该划分使 A 上的隔离增加了 D。(ii) 数对$(\chi_A(s)\ \chi_B(s))$ 位于斜率为 $m = \alpha(1 - \beta^2)/[\beta(1 - \alpha^2)] < 0$ 的直线上（S4.1 节），因此对两个班级取平均可得$\chi_B = \chi_B(u^2) + m\,[\chi_A - \chi_A(u^2)] = \chi_B(u^2) + |m|D$。由于每个班级中都有 $\chi_B < 0$，$|\chi_B| = |\chi_B(u^2)| - |m|D$：该划分使 B 上的隔离降低了 $|m|D$。(iii) 将两者相加， $J(\varepsilon) = J(0) + D(1 - |m|)$。(iv) 最后，

$$|m| = \frac{\alpha}{1 - \alpha^2} \cdot \frac{1 - \beta^2}{|\beta|} \leq 1,$$

因为函数 $x \mapsto x/(1 - x^2)$ 在 $[0, 1)$ 和 $\alpha \leq |\beta|$ 上递增，因此 $\alpha/(1 - \alpha^2) \leq |\beta|/(1 - \beta^2)$。因此，对于每个可行偏移量， $J(\varepsilon) \geq J(0)$，且 $\min J = J(0) = \min J_{\text{strict}}$。

在窗口内 $(u < r)$。(a) 对于 $x \in [u, r]$，即 $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1]$， x与 $2u - x$均位于$[-r, r]$中，因此 H 在该处严格凹；由于 $H'(u) = 0$， H在 $[u, r]$上严格递减，并且

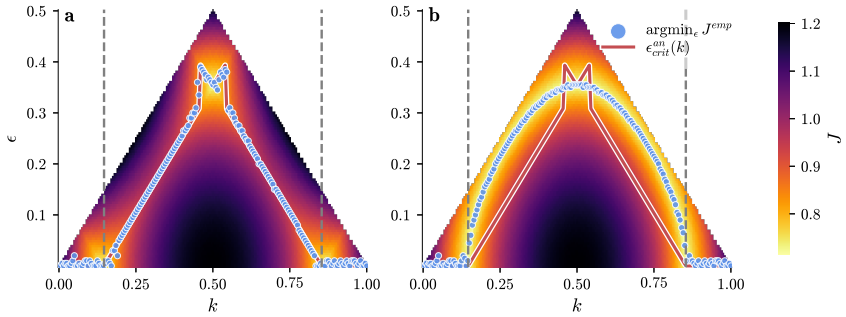

图 S5：(k, ε)平面中的逐类最优值和总体最优值。具有 $\alpha = 0.4$、$\beta = -0.8$的平衡学校。颜色：目标函数值；白色：不可行偏移量（$\varepsilon >$min$(k, 1-k)$）；灰色虚线：跨越窗口（$k_{\text{low}}, k_{\text{high}}$）$\approx$(0.146, 0.854)。红色曲线，图例中的 $\varepsilon^{an}_{\text{crit}}$：规则（S52），该规则使用 ε_1，但在 ε_2 可行的窄带内除外，$(1-\sqrt{s^*})/4 \leq k \leq (3-\sqrt{s^*})/4$，并给出更低的 J_{strict}。蓝色圆圈，图例中的 $\text{argmin}_\varepsilon J^{emp}$：在 ε上的数值极小值点。(a) J_{strict}：在整个窗口内，该规则都遵循数值最小值；$k \approx 0.5$ 附近的小折点是 ε_2 与 ε_1之间的切换。(b) J，采用相同的色标：使 J 最小的偏移量远远超出逐类最优值，此处 A 上的隔离在各班级之间相互抵消；窗口内 J 更深的谷是抵消陷阱的特征。

任何带有 $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$ 的划分都会严格降低 J_{strict}。(b) 对于 $x \geq 2u + r$，即 $\varepsilon \geq \varepsilon_2$，我们有 $x > r$ 和 $2u - x \leq -r$，因此 $H'(x) = G'(x) - G'(2u - x) > 0$。(c) 因此每一个极小值点都位于 $[\varepsilon_1, \bar{\varepsilon}]$ 中，并且 ε_2 可行当且仅当 $2u + r \leq 1$。该区间端点处的严格目标函数为

$$J_{\text{strict}}(\varepsilon_1) = \frac{|\alpha - \beta|\,(1-\sigma)}{2(1+\alpha\beta\sigma)} + \frac{T(s^*)}{2}, \tag{S49}$$

$$J_{\text{strict}}(\varepsilon_2) = \frac{|\alpha + \beta|\,(1+\tau)}{2(1+\alpha\beta\tau)} + \frac{T(s^*)}{2}, \tag{S50}$$

$$J_{\text{strict}}(\varepsilon_{\max}) = \frac{|\alpha + \beta|}{1+\alpha\beta} + \frac{|\alpha - \beta|\,(1-\sigma_m)}{2(1+\alpha\beta\sigma_m)}, \tag{S51}$$

在 $\varepsilon_{\max}$（当 $2u + r > 1$ 时），班级位于 1；而在 $\sigma_m = (1-2u)^2 < s^*$。(d) 对于较小的 u、$\sigma \approx s^* - 4ru$ 和 $\tau \approx s^* + 4ru$，因此 $T(\sigma) - T(\tau) \approx 4ru\,(|T'(s^{*-})| - T'(s^{*+})) > 0$ 根据公式 S47：靠近$k = 1/2$ 末端的 ε_2 是更优的方案。(e) 在 $[\varepsilon_1, \bar{\varepsilon}]$ 上，H 是凸项与凹项之和，不一定是凹函数。当它为凹函数时，较优的末端即为最优方案，由此得到以下规则

$$\varepsilon_{\text{opt}}(k) = \begin{cases} \varepsilon_2 & \text{if } \varepsilon_2 \leq \varepsilon_{\max} \text{ and } T(\tau) < T(\sigma), \\ \varepsilon_{\max} & \text{if } \varepsilon_2 > \varepsilon_{\max} \text{ and } J_{\text{strict}}(\varepsilon_{\max}) < J_{\text{strict}}(\varepsilon_1), \\ \varepsilon_1 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{S52}$$

否则，可能出现内部极小值。在由（α、β、k）构成的密集网格上进行数值搜索时，最优方案仅在（ε_1、$\bar{\varepsilon}$）的严格内部出现过，而且只在具有强偏好且 k位于较优末端从 ε_2 切换为 ε_1的值附近的狭窄区间内；在所考察的所有情况下，该规则所得结果均比 J_{strict} 的最小值高不到 0。01；对于图 S5 中的参数，则高不到 10^{-4}。

图 S5 将该规则与在 ε上针对两个目标函数进行的数值最小化结果进行比较 .

S4.4 抵消陷阱

J 和 J_{strict} 的最优值在跨越窗口（S4.3 节）之外一致，但在窗口内不同。差异完全来自属性 A：对于 $\alpha > 0 > \beta$ 和 $|\alpha| \leq |\beta|$，$\chi_B(s) < 0$ 对所有 $s \in [0, 1]$都成立，因此对每一种划分，$|\chi_B| = |\chi_B|$。在窗口内，对于 $k \neq 1/2$，J 可以通过完全抵消达到其下限：在某个偏移量处，$\chi_A = 0$，而 $|\chi_A(s_\pm)| > 0$。这个零值

必然是一次抵消，因为若 $\chi_A = 0$ 在两个班级中都成立，就要求 $s_+ = s_- = s^*$，而这只有在 $k = 1/2$时才可能。由于可实现的数对位于一条线段上（S4.1 节），$\chi_A = 0$ 确定了$\chi_B = \chi_B(s^*)$，因此 J 的下限为 $|\chi_B(s^*)|$，且不依赖于 k。在窗口之外，对每一种划分，$\chi_A \le \chi_A(s_0) \le 0$（S4.3 节），因此只有在窗口内才可能发生抵消。

何时能够达到下限。下限是否能够达到，是一个可行性问题：当 ε 从 0 运行至 $\varepsilon_{\max} = \min(k, 1-k)$ 时，χ_A 必须改变符号。在 $\varepsilon = 0$ 处，它是未划分学校的指数，即 $\chi_A(s_0)$，其中 $s_0 = (2k-1)^2$，；由于 $s_0 < s^*$ 位于窗口内，该值为正；它随 ε 连续变化，并随着 ε 增大而减小（S4.1 节）。因此，它在 $[0, \varepsilon_{\max}]$ 上有一个零点；当且仅当 $\chi_A \le 0$ 于 $\varepsilon_{\max}$ 时，才能达到下限。在这个偏移量下，一个班级被完全合并（$s = 1$）；对于 $k \ge 1/2$，另一个班级具有 $k - \varepsilon_{\max} = 2k - 1$，因此 $s = (4k-3)^2$,，条件变为 $\chi_A(1) + \chi_A((4k-3)^2) \le 0$。由于 χ_A 随 s 减小，第二项至多为 $\chi_A(0) = \alpha$；当 $k = 3/4$ 时取等号，此时另一个班级处于独立性状态。根据对称性 $k \leftrightarrow 1-k$，在 $k = 1/4$ 处同样成立。因此，该条件在 $k = 1/4$ 和 $k = 3/4$ 处最难满足；对于窗口中的每个 k，下限可达当且仅当 $\alpha + \chi_A(1) \le 0$，即 $s^* \le (1+\alpha^2)/2$；当该条件不成立时，$s^* > 1/2$，所以 $k = 1/4$ 和 $k = 3/4$ 位于窗口内。正文图 6 的参数（$\alpha = 0.4, \beta = -0.8$）满足该条件，其中 $\alpha + \chi_A(1) = 0.4 - 0.59 < 0$；但例如对于 $\alpha = 0.4$ 和 $\beta = -0.6$，条件不成立，即 $\alpha + \chi_A(1) = 0.4 - 0.26 > 0$: 此时，对于 $0.12 < k < 0.38$ 和 $0.62 < k < 0.88$（约占窗口的 60%），下限无法达到；而在窗口边缘附近以及独立性附近则可以达到。

当每个班级都更加隔离时。 当完全抵消可行时，使 J 最小的划分会使两个班级的指数分别为符号相反且大小相等的 A，即 $|\chi_A(s_+)| = |\chi_A(s_-)| > 0$。这个共同值并不总是大于未划分学校的 $|\chi_A(s_0)|$ 值：在 $k = 1/2$ 附近，它较小（对于 $\alpha = 0.4$、$\beta = -0.8$ 和 $k = 0.506$，班级值为 0。016，而学校值为 0。40），而在窗口边缘附近则较大。当$u = 2k - 1$时，两个班级在 A 上都比未划分学校更加隔离，当且仅当$|u| > 1/3$，或 $\chi_A(u^2) + \chi_A(9u^2)$ 的符号与 β 相同；对于 $\alpha = 0.4$ 和 $\beta = -0.8$，当且仅当$|2k-1| > 0.30$，这就是正文中所述的阈值。

为推导这一条件，取 $\alpha > 0 > \beta$（对于 $\alpha < 0 < \beta$ 两个指数改变符号），并利用对称性 $k \leftrightarrow 1-k$，$k > 1/2$。于是 $u = 2k - 1 \in (0, \sqrt{s^*})$，$\delta = \chi_A(s_0) > 0$ 和$\varepsilon_{\max} = (1-u)/2$；这些班级的带符号凝聚度分别为 $v_\pm = u \pm 2\varepsilon$ 和 $s_\pm = v_\pm^2$，且 χ_A关于 s严格递减。令 ε_J 为使 $\chi_A = 0$ 的偏移量。(i) 当且仅当 $\varepsilon_J < u$时，两个班级在 A 上的隔离程度都高于未划分学校。若 $\varepsilon_J < u$，则 $|v_-| < u$，所以 $s_- < s_0$ 和 $\chi_A(s_-) > \delta$；因此 $|\chi_A(s_\pm)| > \delta$。若 $\varepsilon_J \ge u$，则 $|v_-| \ge u$，所以 $s_- \ge s_0$ 和$\chi_A(s_-) \le \delta$；此外，$\chi_A(s_-) > 0$，因为 $s_- < s_+$ 且两个班级的符号相反，所以$|\chi_A(s_\pm)| = \chi_A(s_-) \le \delta$。(ii) 由于 χ_A随 ε 增大而严格递减（S4.1 节），且仅在 ε_J处为零：若 $u > \varepsilon_{\max}$，即 $u > 1/3$，则 $\varepsilon_J \le \varepsilon_{\max} < u$。否则，当且仅当在 $\varepsilon = u$处（此时两个班级分别位于 $s_- = u^2$ 和 $s_+ = 9u^2$）$\chi_A < 0$ 时，$\varepsilon_J < u$ 成立；也就是说，当且仅当 $\chi_A(u^2) + \chi_A(9u^2) < 0$。(iii) $\chi_A(u^2)$和 $\chi_A(9u^2)$均随 u 增大而递减，因此 (ii) 中的条件恰好在 u 高于阈值 u_{crit}时成立，且 $k_{\text{crit}} = (1 - u_{\text{crit}})/2$。该阈值位于窗口内：当 $u \to \sqrt{s^*}$时，$\chi_A(u^2) \to 0$；而若 $9u^2 \le 1$，则 $\chi_A(9u^2) < 0$（否则为 $u > 1/3$）。对于 $\alpha = 0.4$ 和 $\beta = -0.8$，$u_{\text{crit}} = 0.30$。

S4.5 当两个班级都得到改善时

本小节找出这样的合并 k：使 J_{strict} 最小化的划分相较于未划分学校，会降低两个班级以及两种属性上的隔离；正文引用了 $\alpha = 0.4$ 和 $\beta = -0.8$的阈值。在跨越窗口之外，这种情况不可能发生，因为最优方案是不进行划分。在其内部，置于 s^* 的班级始终具有更低的

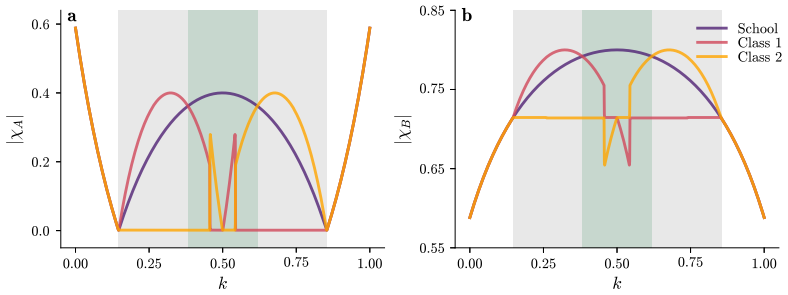

图 S6：逐类最优方案下哪些班级有所改善。在平衡学校中使 J_{strict} 最小的划分下的班级指数（$\alpha = 0.4$、$\beta = -0.8$、$s^* = 1/2$），与学校的巩固 k相比；所有线条均已计算。灰色带：跨越窗口；绿色带：内部窗口，在此窗口内，两个班级在两种属性上的隔离程度都低于学校。**(a)** $|\chi_A|$。在跨越窗口之外，最优方案是不进行划分，因此班级与学校相同。在窗口内，最优划分将一个班级置于 χ_A（s^*）$= 0$，另一个置于 σ 或 τ，具体取决于 k 与 $1/2$的距离；在 $k = 1/2$附近，最优偏移量在 ε_1 和 ε_2之间切换，被置于 s^* 的班级也随之改变，因此出现跳跃。**(b)** $|\chi_B|$的情况相同；在这些参数下，对于所有 k，χ_B 均为负值。

隔离，低于未划分学校在两种属性上的水平。另一个班级是否也同样如此，取决于 k。在末端 ε_1，另一个班级位于左分支上的 $\sigma = (2u - \sqrt{s^*})^2$，，其中$\chi_A$ 下降，且 $|\chi_B|$ 随 s下降；当且仅当 $\sigma > s_0 = u^2$时，它在两种属性上均有改善，即 $|2u - \sqrt{s^*}| > u$，对于 $u < \sqrt{s^*}$ 而言这意味着 $u < \sqrt{s^*}/3$。这定义了内部窗口

$$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{s^*}}{6} < k < \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{s^*}}{6}.$$

对于图S6的参数，仅当 k 位于内部窗口内时，两个班级在两个属性上都比未划分学校的隔离程度更低；距离 $k = 1/2$越远，另一个班级在两个属性上的隔离程度就越高于未划分学校。内部窗口并非普遍适用的条件，因为最优方案可能位于末端 ε_2，此时另一个班级处于$\tau > s^*$ 和 χ_A（τ）< 0：对于 $\alpha = 0.1$，$\beta = -0.3$ 和 $k = 0.57$，最优方案为 ε_2，且 k 位于内部窗口内，但处于 τ 的班级具有 $|\chi_A| = 0.12$，而未划分学校中为0。094 。

S5 数据与估计

本节介绍友谊网络（小节S5.1）、偏好的估计以及模型的比较（小节S5.2）、根据估计模型模拟的网络（小节S5.3），以及在数据上对分裂结果进行的检验（小节S5.4）。本节支持结果部分中的小节“单属性模型错误地将隔离归因于实证学校网络”、关于划分的小节中的数据检验，以及材料与方法部分中的“数据”“模型估计”和“班级拆分实验”等段落。

S5.1 网络数据

这些网络数据来自四个欧洲国家移民子女纵向调查（CILS4EU）[20]，，该调查研究了英格兰、德国、荷兰和瑞典移民子女的代际融合。第一轮调查于2010年开展；我们使用的是第二轮调查，数据采集于2011年和2012年。学生完成了问卷，内容涉及学业表现、家庭背景和社会经济地位等主题，并提名了与他们存在多种关系的同班同学。我们根据这些提名构建网络。

数据集标明了每位学生所属的班级和学校。由于提名是在同班同学之间收集的，我们将班级视为学生可能结交朋友的范围，并为每个班级建立一个网络。我们首先检查同一所学校的班级是否会相互混合，也就是说，

国家	数量 网络	N 范围	N 中位数	密度 范围	密度 中位数	最小度 范围	最大度 范围	平均度 范围
EN	23	[20, 55]	35	[0.08, 0.32]	0.14	[1, 6]	[10, 33]	[6, 16]
GE	33	[20, 29]	22	[0.17, 0.59]	0.35	[2, 12]	[14, 42]	[9, 23]
NL	29	[20, 26]	22	[0.12, 0.42]	0.21	[1, 8]	[10, 35]	[6, 21]
SW	54	[20, 27]	22	[0.17, 0.47]	0.25	[1, 10]	[13, 44]	[8, 21]

表 S1：按国家划分的139个学校班级网络。每个网络对应一个班级（少数情况下为一所学校），每个节点对应一名学生。各国网络的取值范围均汇总于此。各列从左到右依次为：国家代码（英格兰、德国、荷兰、瑞典）；网络数量；节点数量的范围和中位数 N；密度的范围和中位数，即约N^2 个可能关系中的关系数量；最小、最大和平均度的范围。

学生是否提名了本校其他班级的学生。在大多数学校中，各班级构成彼此分离的连通分量。在少数班级确实会相互混合的学校（例如英格兰的单位1045、1077和1096），我们在学校层面建立网络，以免友谊被班级边界截断。每项提名都从受访者指向其提名的同班同学，因此这些网络是有向的；同一对学生若出现在多个条目中，这条平局只保留一次。

我们使用简化版文件中的以下第2波变量（CILS4EU 代码本，第2波，v2.3.0，曼海姆大学，2016年）。标识符： `youthid`，班级和学校调查单位 `y2_svyunit_c` 以及 `y2_svyunit_s`，以及 `country`。属性来自青少年主问卷：性别（`y2_sex`）以及受访者、母亲和父亲的出生国家（`y2_cobRV`、 `y2_cobmRV`、 `y2_cobfRV`）。关系来自青少年同班同学问卷：班级内最好的朋友（`y2_bfs_*`，最多五项提名）、在校外共度时光（`y2_tos_*`）以及一起做作业（`y2_hw_*`）。

每名学生有两个二元属性：性别（男性或女性）和原籍国（移民背景）。根据 Dollmann 等 [29]以及 Böller 和 Kruse [11], 的研究，如果学生本人或其任一父母出生在调查国家以外，则将该学生归类为外国出身；如果父母的出生国家不同，则以母亲的出生国家为准。只有学生本人及其父母均出生在调查国家，才将该学生归类为调查国家出身。属性或调查单位缺失的学生将被剔除。在每个网络中，属性 A 指少数群体规模较小的那个属性，因此 A 可能是原籍国，也可能是性别。

我们保留符合四项标准的网络。第一，网络必须至少包含 20 名学生，以确保两个属性的所有组合均有代表。第二，两个属性的两个群体都必须存在，因为某一属性只有一个群体的网络，几乎无法提供关于群体间混合情况的信息。第三，四种类型中 $(A_a,\ B_b)$ 每种至少必须有一名学生，以确保所有交叉群体均有代表。第四，网络必须构成单个连通分量，以便明确定义依赖于整个网络的测量指标。最终样本包含 139 个网络；表 S1按国家对其进行了汇总。

隔离研究文献中使用最广泛的学校友谊数据集是 Add Health[36], ，它涵盖了自 1994 年以来美国的学校。我们出于两个原因改用 CILS4EU。首先，欧洲学校体系按班级组织，管理人员会将学生分配到各个班级，因此正文中研究的班级划分是现实可行的干预措施。其次，CILS4EU 的数据更新，也记录了每个班级学生的丰富属性。

S5.2 估计与模型比较

本小节介绍《材料与方法》中概述的模型、密度参数、似然和检验。我们为每个网络拟合三个模型。它们是嵌套的，依次为 SAM、 $\subset$ MAM 和 $\subset$ uMAM：SAM 是对其中一个属性具有中性偏好的 MAM，

而 MAM 是具有对称的行归一化偏好矩阵的 uMAM；uMAM 是 Martin-Gutierrez 等人提出的无约束模型。 [18], 其作者称之为 MAPS-AND（第 S1.2 小节）。我们对 SAM 拟合两次，分别将原籍国和性别作为其属性；正文报告的是前者。

MAM 和 SAM 的连接概率会乘以一个全局密度参数 ρ，该参数不取决于属性；在 uMAM 中，偏好矩阵的自由条目决定密度。密度参数设定关系的整体密度，对科尔曼指数没有影响。科尔曼指数比较的是关系的比例，但为了公平比较模型，仍需要密度参数，原因有二。首先，uMAM 可以独立改变其偏好矩阵中的每个条目，而 MAM 对这些条目有所限制；如果没有密度参数，MAM 就无法重现极稀疏网络的低密度，因此仅由于这一点，其拟合效果就会更差。其次，仅通过对 A 的偏好形成的网络，可由采用中性矩阵$H^B = \frac{1}{2}\left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{smallmatrix}\right)$的 MAM 生成，因为偏好矩阵是对称且按行归一化的；而 SAM 只需 H^A，因此 SAM 生成的网络密度会是前者的两倍。引入密度参数后，在$\rho\, H^{A}_{A(i)}$上拟合的 *MAM* 中，连接概率与$A(j)\,H^{B}_{B(i)}$成正比；$B(j)$而在属性$\rho\, H^{X}_{X(i)}$上拟合的 *SAM* 中，则与$X(j)$ 成正比。密度参数是缩放因子，而非密度：只要每个连接概率都低于 1， X就可以大于 1（表S2）。

所有参数均采用一种接近 Martin-Gutierrez 等人所用方法的程序进行估计 [18]：在给定每种类型学生人数的情况下，我们最大化两个属性的四种类型（A_a, B_b）之间观测到的关系数量的二项对数似然（例如，外国出身和女性），

$$\ell = \sum_{t,t'} \Big[m_{tt'} \ln p_{tt'} + (M_{tt'} - m_{tt'}) \ln(1 - p_{tt'}) \Big], \tag{S53}$$

其中， t 和 t' 遍历这四种类型， $m_{tt'}$ 是从类型 t 的学生指向类型 t'学生的关系数量， $M_{tt'}$ 是在给定班级组成的情况下，从类型 t的学生指向类型 t'学生的可能有向联系数量，而$p_{tt'}$ 是模型中从类型 t 的学生指向类型 t'学生的关系概率，其中包括 MAM 和 SAM 中的密度参数。

由于这三个模型都是基于同一张关系计数表通过最大似然进行拟合的，因此它们的似然可以直接比较；我们使用似然比检验比较每一对嵌套模型。统计量 LR $= 2(\log \hat{} L_{\text{larger}} - \log \hat{} L_{\text{smaller}})$ 在零假设（较小模型正确）下服从渐近分布 $\chi^2_{\Delta k}$，其中 Δk 是自由参数数量之差：SAM 有两个（一个偏好参数和 ρ），MAM 有三个（α、 β和 ρ），uMAM 有七个；uMAM 的八个条目仅在一个矩阵可将一个因子传递给另一个矩阵的意义下确定： $\Delta k = 1$ 表示 MAM 相对于 SAM， $\Delta k = 4$表示 uMAM 相对于 MAM。拒绝 MAM 相对于 SAM 的检验的零假设（$p < 0.05$）意味着第二个属性显著改善了拟合效果。未能拒绝 uMAM 相对于 MAM 的检验的零假设（$p \geq 0.05$）意味着无约束模型增加的灵活性并未显著改善拟合效果，因此 MAM 足以描述这些数据。

三个模型在全部 139 个网络中均收敛。MAM 在全部 139 个网络中的表现都优于拟合原籍国的 SAM，在其中 74 个网络中的表现优于拟合性别的 SAM。MAM 的约束使理论具有可处理性，而放宽这些约束便得到 uMAM；uMAM 的自由参数更多，预期拟合效果至少同样好。Martin-Gutierrez 等人的研究中也出现了可处理性与灵活性之间的同样权衡。 [18, 30], 他们将其乘法模型的受约束版本用于解析结果，并将无约束版本用于实证验证。因此，我们找出 MAM 的表现与 uMAM 相当的网络：在 69 个网络（49.6%）中，无法拒绝 MAM 优于 uMAM 的假设。使用估计偏好的实证分析，即第 S5.3 节中的模拟网络以及对分裂结果的检验，仅限于这 69 个网络，以确保

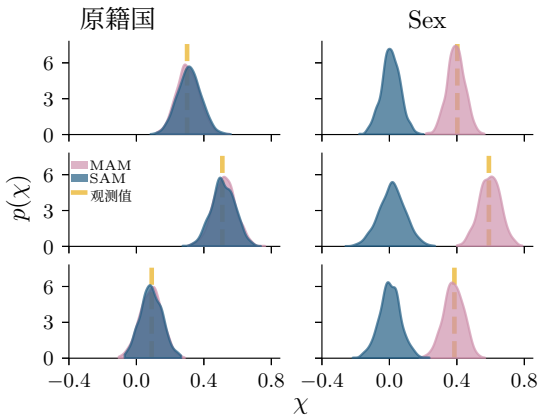

图 S7：单属性模型能够再现按原籍国划分的隔离，但无法再现按性别划分的隔离。在三个班级（行；表 S2）中，对 MAM（粉色）模拟的 1,000 个网络、对基于原籍国拟合的 SAM（蓝色）模拟的 1,000 个网络以及观测网络（虚线）测量的原籍国（左）和性别（右）的科尔曼指数。两个模型都再现了按原籍国划分的隔离，这是 SAM 的拟合目标；SAM 几乎无法产生按性别划分的隔离，而 MAM 能够再现这种隔离。

所依据的估计尽可能可靠。MAM 的表现优于拟合原籍国的 SAM 这一结果在整个样本中均成立，不受这一限制的影响。

S5.3 模拟网络

对于图 S7 和图S8C 中所示的网络，我们根据观测组成 F 以及估计偏好和密度模拟合成网络：按照观测到的数量将学生分配到四种类型中，并根据估计的联系概率独立地绘制有向联系，其中包括密度（如材料与方法中的“模拟”所述）。对于每个班级，我们分别使用 MAM 和 SAM 生成 1,000 个独立网络，并在每个模拟网络上测量每个属性的科尔曼指数。然后，将所得分布按属性分别与观测网络上测量的指数进行比较。

网络是根据其 B-不平衡程度选取的。根据正文中的式（5），诱导隔离程度随着两个 $\Delta = \delta_0 - \delta_1$ 群体的 B-不平衡程度之差 A而增大。在 δ_0 和 δ_1 较大且符号相反、因而 Δ 较大的网络中，第二个属性应因此表现出最强的影响。表S2 列出了这些网络。

拟合性别的 SAM。 图S8重复比较了正文图2A 和图S7，但使用的是拟合性别而非原籍国的 SAM。在 139 个网络中的 74 个网络，以及用于模拟的 69 个网络中的 34 个网络中，MAM 的表现优于该 SAM。拟合性别的 SAM 仅略微夸大了对性别的偏好（面板 A；差异最大约为 0.025，而正文图2A 中对原籍国的偏好差异约为 0.2），且这种夸大同样随着巩固程度的提高而增加。面板 B 将其与根据闭式解计算出的诱导隔离程度进行了比较。在模拟网络中（面板 C），两种模型都再现了观测网络中测得的按性别划分的隔离，而 SAM 产生的按原籍国划分的隔离低于观测值：这与图S7。呈镜像关系。

S5.4 分裂结果的检验

本小节介绍如何在实证网络中检验正文中的分裂结果。属性 A 指少数群体规模较小的属性，因此可以是原籍国或性别。每个班级均通过其组成（f_{A_0}、f_{B_0}、k）以及通过 MAM 估计的偏好（α、β）进行描述，并且仅使用 MAM 的拟合效果与 uMAM 大致相当的 69 个网络（见小节 S5.2）。

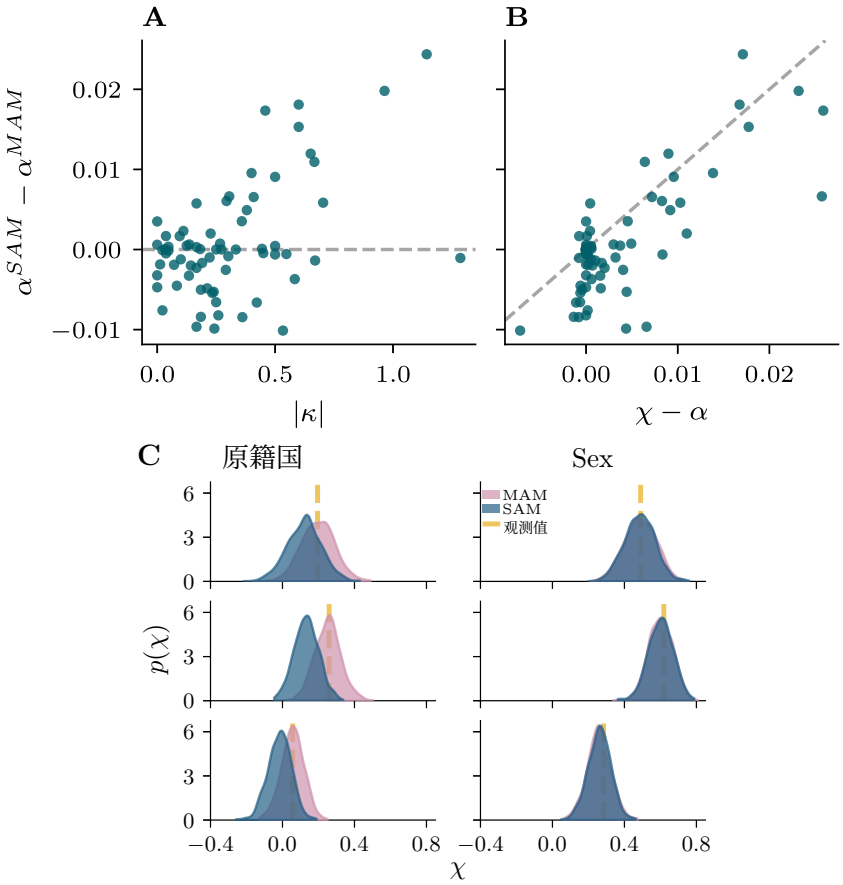

图 S8：拟合性别的单属性模型。(A) SAM 与 MAM 估计的性别偏好之间的差异，$\alpha^{\mathrm{SAM}} - \alpha^{\mathrm{MAM}}$与绝对归一化整合度 $|\kappa| = |k - f_{B_0}|/f_{B_0}$的关系，针对 MAM 拟合效果不逊于 uMAM 的 69 个网络；虚线表示零。(B) 同一差异与诱导隔离 $\chi - \alpha$ 的关系，该隔离根据闭式解计算；虚线表示对角线。(C) 基于从 MAM（粉色）和拟合性别的 SAM（蓝色）模拟得到的 1,000 个网络，以及观测网络（虚线），测得的原籍国（左）和性别（右）的科尔曼指数；展示三个网络（各行；表S2）。

Unit	国家	SAM 属性	N	f_{A_0}	f_{B_0}	k	δ_0	δ_1	h_A^{MAM}	h_B^{MAM}	h^{SAM}	ρ^{MAM}	ρ^{SAM}
211702	GE	起源	22	0.23	0.50	0.20	−0.14	0.14	0.65	0.70	0.66	1.45	0.71
411401	SW	起源	25	0.48	0.48	0.33	−0.16	0.12	0.76	0.80	0.76	0.87	0.43
104101	EN	起源	42	0.41	0.48	0.65	0.12	−0.17	0.53	0.69	0.55	0.49	0.25
400301	SW	Sex	22	0.46	0.50	0.20	−0.27	0.27	0.74	0.54	0.75	0.73	0.37
411402	SW	Sex	22	0.32	0.36	0.71	0.14	−0.41	0.80	0.56	0.81	1.06	0.54
203302	GE	Sex	20	0.35	0.50	0.57	0.05	−0.05	0.64	0.53	0.64	1.51	0.76

表 S2：用于模拟网络的班级。调查单位、国家、SAM 的属性（原籍国或性别）、学生人数 N，组成(f_{A_0}，f_{B_0}，k)，B-不平衡 δ_0和 δ_1，估计偏好，以对角线元素表示 $h = (1+\alpha)/2$ 的偏好矩阵（h_A^{MAM}和h_B^{MAM}分别对应 MAM，h^{SAM} 对应 SAM），以及估计的密度参数 ρ^{MAM} 和 ρ^{SAM}。拟合原籍国的 SAM 对应的行参见图S7；拟合性别的 SAM 对应的行按出现顺序参见图S8C。

Unit	国家	N	f_{A_0}	f_{B_0}	k	α	β
104101	EN	42	0.41	0.48	0.65	0.07	0.38
213201	GE	23	0.26	0.39	0.67	0.10	0.32
300437	NL	24	0.17	0.50	0.25	0.02	0.41
408102	SW	26	0.23	0.46	0.67	0.03	0.72
102501	EN	38	0.21	0.50	0.62	0.00	0.44
412302	SW	22	0.14	0.50	0.33	0.00	0.23
412602	SW	21	0.19	0.33	0.25	0.07	0.35
400302	SW	20	0.35	0.45	0.43	0.03	0.54
211001	GE	20	0.15	0.30	0.33	0.07	0.41
402602	SW	26	0.35	0.46	0.44	0.08	0.41
107401	EN	52	0.10	0.44	0.20	0.04	0.46
409701	SW	20	0.45	0.45	0.44	0.09	0.72
300649	NL	20	0.25	0.40	0.40	−0.06	0.89
105201	EN	37	0.22	0.38	0.12	0.08	0.57
106901	EN	31	0.13	0.48	0.50	−0.01	0.51
105801	EN	24	0.25	0.46	0.33	−0.01	0.56
300485	NL	22	0.18	0.46	0.25	0.01	0.36
407702	SW	20	0.35	0.40	0.43	0.07	0.45
203202	GE	27	0.33	0.41	0.33	0.02	0.33

表 S3：用于检验结果的班级（$\alpha = 0$）。在第 $|\alpha| \leq 0.1$ 节的 69 个班级中，有 19 个班级S5.2位于 ESDS 存在的区域内：调查单位、国家、学生人数 N、组成 (f_{A_0}、f_{B_0}、k)，以及用 MAM 估计的偏好。班级 409701 也用于均衡学校检验（表 S4）。

从目标构成到划分。每个经验网络对应一个班级，因此我们将班级划分为两个子班级，而不是将学校划分为班级。划分规则规定子班级 1 的目标构成，即每种类型的学生人数 $C_1[a, b]$ （A_a，B_b）；其余学生组成子班级 2。在每种类型中，随机抽取分配到子班级 1 的学生，并将每次划分重复 20 次。我们只保留每个子班级内部的关系，根据观测到的关系计算各子班级中的 χ_A 和 χ_B，并记录按规模加权的平均值 $\langle\chi_A\rangle$、$\langle\chi_B\rangle$ 以及总体目标函数 J。这与模型的假设一致，即班级内部的关系不取决于班级中还有哪些人；但这无法反映实际重新分配后友谊关系将如何重新形成。学生人数为奇数的班级将划分为两个规模相差一人的子班级。每个子班级有 10 至 26 名学生。

一种中性偏好。 由于 $\alpha = 0$从未被精确达到，我们选取具有 $|\alpha| \leq 0.1$的20个班级，约占69个班级的29%。为检查ESDS的存在条件（S40），对于数据中 f_{A_0} 的每个取值，我们扫描 （f_{B_0}，k）的密集网格，并在每个网格点上考察候选划分的一参数族（S41）；如果某个候选划分能够给出两个有效的总体矩阵，且它们的平均值为 F，则该网格点通过检验。正文中的图 4 展示了选定班级的结果图：除一个班级外，所有班级都位于ESDS存在的区域内。这19个班级被用于检验ESDS，表 S3 列出了这些班级。对于ESDS，目标 $C_1[a, b]$ 取自族（S41），结果汇总了所有可接受目标和重复实验（正文图 3C–D，以及总体目标函数对应的图 S9 ）。

与其他划分的比较。 我们将 ESDS 与另外两种划分进行比较：这两种划分采用相同的流程，将班级划分为大小相等的子班级，且仅目标不同 $C_1[a, b]$。在随机划分中，每名学生都会被随机分配到其中一个子班级，因此从期望上看，两个子班级的组成均与班级相同。在对角线划分中，首先将两种匹配类型的学生（A_0、B_0）和（A_1、B_1）分配到子班级 1，然后再分配其他学生，从而使两个子班级的规模差仍不超过一；这会使两个子班级都偏离独立性。每种划分重复 20 次。对角线划分会强化相关性

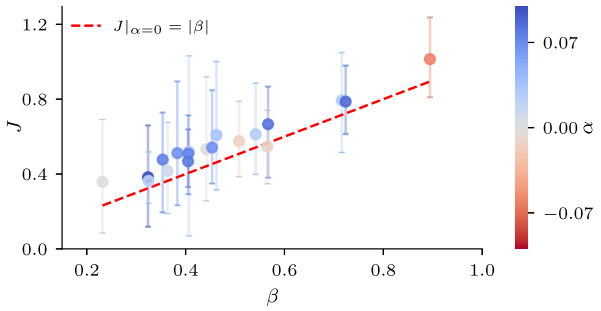

图 S9：ESDS 对具有 $\alpha \approx 0$ 的班级进行划分，可达到总体目标函数的下限。 总体目标函数 J 与估计的 β之间的 ESDS 划分结果，针对 CILS4EU 中位于 ESDS 存在区域内的 19 个班级（表 S3）；颜色表示估计的 α；虚线表示下限 $|\beta|$。 J 位于接近下限的位置，在误差条范围内；它结合了正文图 3C–D 中所示的两个平均值。

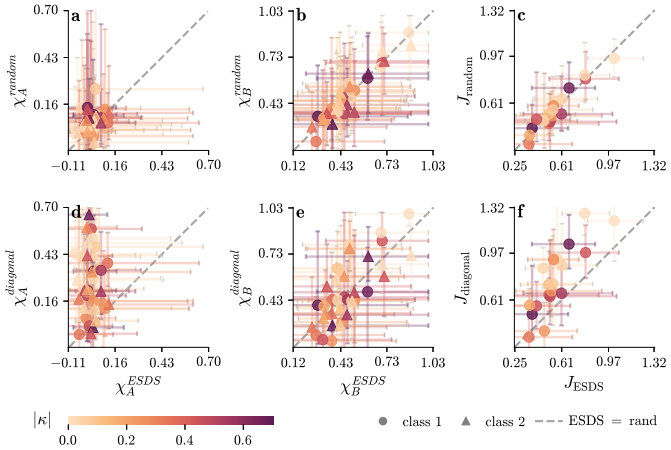

图 S10：ESDS、随机划分和对角线划分作用于具有 $\alpha \approx 0$的班级。 顶行：(a) 班级指数 χ_A^{cj} 和 (b) χ_B^{cj}，以及 (c) 总体目标函数 J；分别表示 ESDS 后（横轴）与随机划分后（纵轴）的结果；靠近对角线的点表示结果具有可比性。底行（d）–（f）：ESDS 与对角线划分的相同结果，对角线划分得到更大的 J。圆形表示第 1 类；三角形表示第 2 类；颜色表示 $|\kappa|$。班级同表 S3。

属性之间的相关性，使其数值高于 J 所有班级中的 ESDS。与随机划分的比较取决于 $|\kappa|$，与模拟网络（第S3.6节）中的情况相同。在这些班级中$|\kappa|$ 适中，因为大多数班级的 k 接近f_{B_0}，随机划分和 ESDS 得出的结果几乎相同。对于组成接近独立性的班级，随机划分无需了解其组成，因此表现与 ESDS 大致相当（图S10）。

平衡学校中的两种活跃偏好。我们从 69 个班级中选出与平衡学校及独立性较为接近的 7 个班级， $0.4 \leq f_{A_0}$， $f_{B_0} \leq 0.5$ 以及 $|k - 1/2| \leq 0.1$（图S11a 和表S4）。它们全都处于一致阶段（图S11b），因此根据第S4.2节，保持份额的最佳等规模划分是不划分，即 $J = |\alpha| + |\beta|$。为检验这一点，我们对两个子班级进行合并 $k_\pm = k \pm \varepsilon$，在均匀网格上扫描平方偏移量 $4\varepsilon^2$，扫描范围为 $[0, 1]$，且持续扫描，直到 $k_\pm$ 仍处于 $[0, \min(1,\ f_{B_0}/f_{A_0})]$,，构建两个子班级的总体矩阵（并检查其平均值是否为 F），按照上述方法划分网络，并对 J 随机分配取平均值。因此，各班级可达到的偏移量范围有所不同。结果见正文图5C。

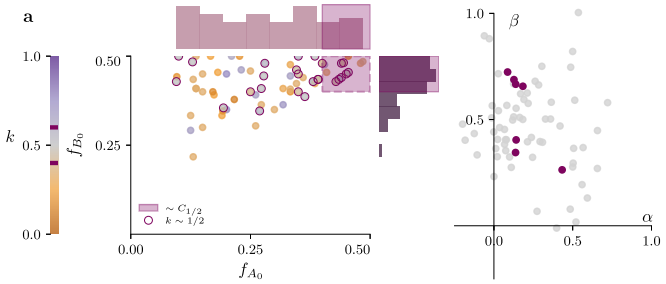

图 S11：接近平衡学校且接近独立性的班级。(a) CILS4EU 班级在（f_{A_0}，f_{B_0}）平面中的分布，按 k着色，并显示边际分布；阴影部分：接近平衡学校的班级（$0.4 \leq f_{A_0}$，$f_{B_0} \leq 0.5$）；圈出的部分：k 接近 $1/2$的班级。(b) 一致阶段中所有班级（灰色）和选出的 7 个班级（紫色）的估计偏好 α和 β。

Unit	国家	N	f_{A_0}	f_{B_0}	k	α	β
409701	SW	20	0.45	0.45	0.44	0.09	0.72
408601	SW	23	0.43	0.43	0.60	0.18	0.66
405401	SW	25	0.44	0.44	0.55	0.14	0.40
103301	EN	25	0.44	0.48	0.55	0.43	0.26
101702	EN	27	0.44	0.48	0.42	0.14	0.34
205001	GE	21	0.43	0.43	0.44	0.13	0.69
204905	GE	22	0.46	0.46	0.50	0.14	0.67

表 S4：用于检验平衡学校中结果的班级。S5.2 节 69 个班级中，符合 $0.4 \leq f_{A_0}$、$f_{B_0} \leq 0.5$ 和 $|k - 1/2| \leq 0.1$ 条件的 7 个班级：S5.2节中的调查单位、国家、学生人数 N、组成、f_{B_0}、k），以及通过 MAM 估计的偏好。班级 409701 也用于 $\alpha \approx 0$ （表S3）的检验。