arXiv:2611.32354v1 [math.AG] 24 Nov 2026

大特征下 Fano 型三维簇的有界性与 Kawamata–Viehweg 消失定理

XINTONG JIANG

摘要。我们研究大正特征代数闭域上的三维簇。设 $(X,\ B)$ 是一个射影对数典范对，其中 X 为 Fano 型，$-(K_X+B)$ 数值有效，且 B 的系数属于某个固定的超标准集。我们得到一个指标有界的单调补充。对于例外对，该补充是 Kawamata 对数终端的。我们证明，所有 ϵ-对数典范的弱对数 Fano 三维簇，在高于某个与 ϵ 无关的特征阈值时，均为算术有界。我们还证明，在高于某个绝对特征阈值时，Fano 型射影三维簇上的整$\mathbb{Q}$-Cartier 魏尔除子满足 Kawamata–Viehweg 消失定理。

目录

1. 引言 2 1.1. 主要结果 2 致谢 4 2. 预备知识 4 2.1. 除子、奇点与双有理模型 4 2.2. Frobenius、射流与 Witt 向量 7 2.3. 纤维化与例外对 8 3. 非例外补 9 3.1. 数值维数为零时的指标 9 3.2. 归约到素 plt 中心 16 3.3. Mori 纤维空间上的消失与补的提升 20 4. 双有理线性系与有界模型 27 4.1. 反典范截面与边界阈值 27 4.2. 有界簇族中的双有理模型 34 4.3. 由有界双有理系统得到的 klt 补边 37 5. 反典范体积与双有理性 43 5.1. 第一反典范次数与秩一约化 43 5.2. 由动除子得到的体积界 47 5.3. 界定第一双有理次数 54 6. 例外补 63 6.1. 带有二形式的典范三维簇上的铅笔 63 6.2. 反典范非消失与局部黎曼-罗赫 66 6.3. 不一致度间隙与有界补 75 7. 弱对数 Fano 三维簇的有界性 77 7.1. 从其反典范模型恢复弱模型 77

2020年 数学主题分类。 主要分类 14E30；次要分类 14J30、14J45、13A35。关键词与短语。 补、弱 Fano 三维簇、有界性、典范丛公式、Kawamata–Viehweg 消失定理、正特征。

7.2. 绝对特征界 78 8. Kawamata–Viehweg 消失定理 79 8.1. 通过伴随除子极小模型纲领进行归约 79 8.2. 通过限制到 plt 曲面实现消失 85 8.3. Frobenius 分裂与补的分层 88 参考文献 94

1. 引言

一般位置的四个平面在 $\mathbb{P}^3$ 中构成一个简单正规交叉除子 D，其满足 $K_{\mathbb{P}^3}+D\sim 0$。对于一个奇异三维簇 X，我们寻求一个具有 D/n 形式且满足 $D\in|-nK_X|$ 的边界。能否统一地选取 n，要求 D/n 包含一个给定的边界 B，并使 $(X,\ D/n)$ 对数典范？一个相关的问题涉及代数簇本身。在对数差异设定固定下界的条件下，所有弱 Fano 三维簇是否都能作为某个有限型射影族的纤维出现？

1.1. 主要结果。全文中，k 是一个特征为 $p>0$ 的代数闭域，主要定理中的三维簇均为正规射影簇。若代数簇 X 存在一个有效有理边界 Θ，使得 $(X,\ \Theta)$ 为 Kawamata 对数终端（klt），且 $-(K_X+\Theta)$ 丰沛，则称 X 为 *Fano* 型。对于有限有理数集 $R\subset[0,1]$，考虑超标准集

$$\Phi(R)=\{0,1\}\cup\{1-r/j\mid r\in R,\ j\in\mathbb{Z}_{>0}\}.$$

给定一个有理边界 B，其中 K_X+B $\mathbb{Q}$-Cartier，令 $L=-(K_X+B)$。本文中的一个 n-补是一个边界 $B^+\geq B$，使得（$X,\ B^+$）是对数典范（lc），并且

$$n(K_X+B^+)\sim 0,\qquad nB^+\geq n\lfloor B\rfloor+\lfloor(n+1)\{B\}\rfloor. \tag{1.1}$$

第一个条件表示 $n(K_X+B^+)$ 是一个整主除子。我们逐项取下取整和小数部分 $\{B\}=B-\lfloor B\rfloor$。不等式 $B^+\geq B$ 称为单调性。若（$X,\ B^+$）是 klt，则称补是 klt 的。

（$X,\ B$）的一个补全是一个除子 $B+P$，其中 $P\geq 0$ 是有理的且 $P\sim_{\mathbb{Q}} L$。对于 Fano 型的X 且 L 数值有效的情形，在特征 $p>5$下补全存在。若每个补全都是 klt，则该对是例外的。

例如，给三个不同的点赋予系数 $1/2,\ 2/3,\ 4/5$，这些点位于 $\mathbb{P}^1$上。由于 $\deg L=1/30$，添加任意次数为此值的有效除子后，每个系数仍小于一。这个对是例外的。将 $4/5$ 增至 $5/6$ 可得到一个 6-补。新的边界次数为二，其系数乘以六后为 3，4，5，如（1.1）所示。在 $\mathbb{P}^3$上，上述四个平面给出了零边界的一个非 klt 补全。

在特征零时，Birkar 证明了 Fano 型对的补子的有界性，以及弱对数 Fano 簇的 Borisov–Alexeev–Borisov 有界性定理（BAB）[9, 定理 1。7], [10, 定理 1。1]。在三维情形中，我们使用第 2.3 小节回顾的纤维补定理和典范丛公式。

定理 1.1 (补子的有界性)。对于每个有限的 $R\subset[0,1]\cap\mathbb{Q}$，都存在整数 $n(R)>0$ 和 $p_0(R)>5$，使其具有以下性质。设 (X,B) 是定义在特征为 $p>p_0(R)$的 k 上的射影 *lc* 三维簇对。假设 X 是 *Fano* 型，系数 $B\subset\Phi(R)$，且 $-(K_X+B)$ 是数值有效且为 $\mathbb{Q}$-*Cartier*。

那么 (X, B) 存在一个单调的 $n(R)$-补。若 (X, B) 是例外的，则该补是 *klt*。

仅有 klt 输入并不能保证存在有界指标的 klt 补。对于一个超平面 $H \subset \mathbb{P}^3$，考虑 $B = (1 - 1/j)H$，其中 $j > 1$。这些对是 klt 的，且系数属于 $\Phi(\{1\})$。对于任意固定的 $n < j$，nB^+ 的整性与单调性迫使 B^+ 中 H 的系数为 1。

对于 BAB，边界具有不同的作用。一个有效实除子 C 规定了该对的正性与差异界。这里，ϵ-对数典范意味着每个对数差异都至少为 ϵ，包括 X 上除子的对数差异（小节 2.1）。该族参数化这些簇 X。

定理 1.2（弱对数 Fano 三维簇的有界性）。存在一个整数$P_* > 5$，使得对于每个 $0 < \epsilon \leq 1$，存在一个在$\mathbb{Z}[1/(P_*!)]$上有限型的概形 S_ϵ 以及一个射影态射 $\boldsymbol{X}_\epsilon \to S_\epsilon$，具有如下性质。假设$p > P_*$ 且 X 具有一个有效实除子 C，使得

$$(X, C) \text{ is } \epsilon\text{-lc}, \qquad K_X + C \text{ is } \mathbb{R}\text{-Cartier}, \qquad -(K_X + C) \text{ is nef and big}.$$

那么，对于某个 k-点 S_ϵ，$X \simeq \boldsymbol{X}_\epsilon \times_{S_\epsilon} \operatorname{Spec} k$。

取.....包括所有 ϵ-对数典范弱 Fano 三维簇。条件是 $K_X + C$ 为 $\mathbb{R}$-卡蒂埃的，这使得 K_X 本身可以没有卡蒂埃倍数。界 P_* 是绝对的，而该族可以依赖于 ϵ。

消失定理中的特征界对于除子的卡蒂埃指标和边界的系数均为一致的。

定理 1.3（Kawamata–Viehweg 消失定理）。存在一个整数 P，具有如下性质。设 X 是代数闭域上特征为 $p > P$ 的 *Fano* 型射影三维簇。设 $\Delta \geq 0$ 是一个有理边界，使得（X, Δ）为 *klt*，并设 D 是一个整的 $\mathbb{Q}$-卡蒂埃魏尔除子。若 $D -$（$K_X + \Delta$）数值有效且大，则

$$H^i(X, \mathcal{O}_X(D)) = 0 \qquad (i > 0).$$

对于 $X = \mathbb{P}^3$，若 $\Delta = 0$ 且 $D = mH$ 是超平面的倍数，则假设为 $m + 4 > 0$。这恢复了 $m \geq -3$ 和 $i > 0$ 时 $H^i(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(m))$ 的熟知消失性。

证明提纲。定理 1.1 的证明从 $L = -(K_X + B)$ 的数值维数开始。若 $L \equiv 0$，有效除子 $B^+ - B$ 与非常丰除子的平方的交为零，因此 $B^+ = B$。我们必须界定 $K_X + B$ 的阶。在非 klt 情形下，除子对数终端模型上的系数为一的边界是曲面的并。伴随公式给出每个曲面上次数有界的多重典范形式。第 3.1 小节在双曲线上匹配它们的留数，并将所得截面提升到三维簇上。

如果 L 的数值维数为一或二，则其某个倍数定义了到曲线或曲面上的纤维化。随后适用纤维补定理。

假设 L 是大除子，且（X，B）是 klt 且非例外的。选取一个$B + P$ 不是 klt 的补全。将 P 的系数从零逐渐增大，直至出现一个 lc 位，这会在一个双有理模型上产生一个系数为一的曲面 S。如果某个除子层的 H^1 消失，则 S 上的曲面补可以提升。我们在一个莫里纤维空间上证明这一消失。

对于一个例外对，定理 4.7 为所有补全的对数差异给出了统一下界。只需找到一个次数有界的截面。

第 4 节和第 5 节给出了本文及 BAB 证明中所用的双有理估计和体积估计。若 $B \neq 0$，增大 t，直到 $-K_X - tB$ 到达伪有效锥的边界。极小模型纲领给出两种可能：一种是纤维化，此时纤维上的交数控制 B；另一种是皮卡德数为一的 Fano 三维簇，此时反典范体积给出所需的界（定理 5.15）。

若 $B = 0$，令 d 为反典范截面的最小正次数，并在丰模型上取 $V = (-K_X)^3$。对 $\mathrm{vol}(-dK_X) = d^3V$ 的有界性可得到固定指标的补。在非典范情形中，我们提取一个对数差异小于一的除子。在典范情形中，若消解上存在非零正则二形式，我们就使用铅笔；否则使用黎曼–罗赫定理。第 6.2 小节计算局部项，包括指标可被 p 整除的那些局部项。第 6.3 小节综合各种情形，证明定理 1.1。

第 7 节通过转向反典范环的丰模型来证明定理 1.2。在非例外情形中，我们已经有一个固定次数、零边界的 lc 补。双有理线性系和 Frobenius 可给出一个新的补，使每个原先的 lc 位处的对数差异均为正。定理 7.2 根据丰模型的有界性，推出弱模型的有界性。对于固定的 ϵ，第 7.2 小节构造定义在其余素数上的簇族。

在第 8 节中，我们写作 $D \sim_{\mathbb{Q}} K_X + C$ with (X, C) klt，并运行其极小模型纲领。在公共解消上的取整保持 $\mathcal{O}_X(D)$ 的上同调不变。固定指标的补和典范丛公式用于处理半正非大情形。对于带有 klt 补的丰沛输出，其反典范模型的对数差异有一个一致的下界。接着，我们可以像 Cascini、Tanaka 和 Witaszek 关于德尔佩佐曲面的论证那样，使用算术有界性 [16]。其余情形则通过限制映射到纯对数终端曲面（第 8.2 小节），或通过 Frobenius 分裂及其 Witt 向量类比（第 8.3 小节）处理。

AI 使用情况披露。作者与 GPT 5.6 Sol、GPT 6 Astra、GPT 6.1 Sol、GPT 6.2 Astra、GPT 6.2 Sol 在 Codex 中合作，并在数次网页聊天中与 GPT 6 Pro 合作，共同完成了本文的主要数学内容。GPT 6.2 Astra 审核了论证并准备了最终稿。

致谢。 我于2025年7月在科罗拉多州立大学代数几何暑期研究所开始研究这一系列问题。感谢我的导师 Caucher Birkar 在撰写本文期间给予我的持续支持和指导。

2. 预备知识

除非另有说明，边界均具有有理系数。我们使用同一个有理顶形式在双有理模型上选取典范除子。

2.1. 除子、奇点与双有理模型。

在正规簇 X 上，一个整 Weil 除子 D 确定了一个秩一反身层，其整体截面为

$$H^0(X, D) = \{f \in k(X)^* \mid \mathrm{div}(f) + D \geq 0\} \cup \{0\}.$$

有效除子 $\mathrm{div}(f) + D$ 构成完全线性系 $|D|$。对于有理除子，带有 $\lfloor D \rfloor$ 的相同描述同样成立。若某个正整数倍为 Cartier，则称该除子是 $\mathbb{Q}$-Cartier。局部地，使其成为 Cartier 的最小此类倍数称为其 卡蒂埃指标。我们使用 $\sim_{\mathbb{Q}}$ 表示相差主除子的有理线性组合

时的相等，并使用 $\equiv$ 表示与所有曲线的交数相等。因此，关系$D \sim_{\mathbb{Q}} 0$ 保证存在某个主倍数，但不能给出统一的指标。

对于系数 $0 \le b < 1$，有 $\lfloor (n+1)b \rfloor \le \lceil nb \rceil$。因此， $B^{+} \ge B$ 以及 nB^{+} 的整性蕴含取整不等式 (1.1)，包括在 $b = 1$处。同一个补在其指标的每个正倍数处都成立。

如果一个除子在每条曲线上都有非负次数，则称其为数值有效。伪有效锥是由有效除子类生成的锥的闭包。其内部是大锥。满足 $K_X + \Omega \sim_{\mathbb{Q}} 0$ 的有理边界 Ω 称为卡拉比–丘边界。半丰有理除子具有无基点的 Cartier 倍数。经过斯坦因分解后，它给出到其像的一个收缩。对于大半丰除子，该收缩是双有理的。在射影 m维簇上，有理除子的 体积为

$$\operatorname{vol}(D) = \limsup_{j \to \infty} \frac{h^{0}(X, \lfloor jD \rfloor)}{j^{m}/m!}.$$

对于数值有效且大的 $\mathbb{Q}$-Cartier 除子，这就是 D^{m}。对于数值有效除子，数值维数 $\nu(D)$ 是满足 $D^{i} H^{m-i} > 0$ （其中 H为丰沛 Cartier 除子）的最大 i。如果 D 是半丰的，则这就是其收缩的像的维数。特别地，$\nu(D) = 0$ 意味着 $D \equiv 0$，而 $\nu(D) = m$ 意味着 D 是大的。我们将 $\operatorname{Supp} D$ 记作其支集，同时也将其视为约化除子。线性系的自由部分是在其基理想的消解上无基点的动除子。无论诱导态射在哪里是拟有限的，其超平面都能检验曲线的次数。

一对 $(X,\ B)$ 由一个正规代数簇、一个系数属于 $[0,1]$ 的有效边界 B，以及一个 $\mathbb{R}$-Cartier 除子 $K_X + B$ 组成。对于正规双有理模型 $f\colon Y \to X$ 上的一个素除子 E，其对数差异为

$$A_{X,B}(E) = 1 + \operatorname{coeff}_{E}\big(K_Y - f^{*}(K_X + B)\big).$$

这个数仅取决于 $k(X)$ 的赋值 ord_E。它在 X 上的中心是 $f(E)$ 的闭包。lc、klt 和 ϵ-lc 条件分别表示：对于每个这样的 E，包括 X 上的素除子，$A_{X,\ B}(E) \ge 0$、> 0 和 $\ge \epsilon$。对于 $B = 0$，典范和终端分别表示：对于所有例外素除子，$A_{X,\ 0}(E) \ge 1$ 和 > 1。满足 $A_{X,\ B}(E) = 0$ 的除子是一个*lc* 位，其像是一个对数典范中心。例如，在光滑代数簇上吹起两个光滑系数为一的分支的横截交，会得到一个新的 lc 位。在新的交点处重复吹起，可以说明为何单个对可能有无穷多个这样的 lc 位。

对数解消是一个适当双有理态射 $f\colon\ Y \to X$，其中 Y 光滑，并且例外除子与边界的严格变换构成一个简单正规交叉（SNC）除子。局部地说，其分支是坐标超平面。在恒等式 $K_Y + B_Y = f^{*}(K_X + B)$ 中，每个素E 在 B_Y 中的系数为 $1 - A_{X,\ B}(E)$。该系数可以为负。在子对中允许出现具有负系数的除子，并且相同的差异不等式定义了子千足端和子对数正则。这样的恒等式称为保典范性。

对于一个对数正则对，除子对数终端（dlt）条件是指存在一个简单正规交开集，与每个对数典范中心的一般点相交。dlt 修改在一个 $\mathbb{Q}$-阶乘模型上展示相关中心，并且只抽取对数差异为零的除子。在边界的整系数部分的一个分支 S 上，伴随公式写作

$$(K_Y + B_Y)|_{S^{\nu}} \sim_{\mathbb{Q}} K_{S^{\nu}} + \operatorname{Diff}_{S^{\nu}}(B_Y - S).$$

这里 S^ν 表示正规化。不同既记录其他边界分量，也记录环境簇沿 S的奇点。我们在第 2–4] 章的双有理模型上处理有理边界时，也采用这些约定 [36,。

若 $H \geq 0$ 是有理 Cartier 除子，则其在点附近或沿某个中心的对数典范阈值是使得$(X,\ B+tH)$在该处为对数典范的 t 的上确界。在 $B+H$ 的对数解消上，它等于相关且分母为正的素除子中$A_{X,\ B}(E)/\mathrm{ord}_E(H)$的最小值，前提是$(X,\ B)$在该处为对数典范。非 *klt* 轨迹是对数差异非正的中心之并。我们既在双有理纤维上，也对数 Fano 对的非 klt 轨迹使用连通性 [22, 引理 3.4],[43,定理 4.12]。

若一个对数正则对的所有例外素除子的对数差异均为正，则称其为纯对数终端（plt）。若 S 是特征 $p>5$下 dlt 三维边界下取整中的一个不可约分支，则 S 是正规簇。在简单正规交叉的情形下，其不同就是其他分支的限制映射。伴随反演允许通过其伴随对来检验沿 S 的对数典范性。我们使用除子伴随，以及在满足 [8, 推论 10.1],[36, 第 2–4]章中假设条件时的这一逆命题。

设 D 为一个整魏尔除子，并设 S 为一个素除子。在 X 上沿 S 限制为零的截面给出正合列

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(D-S) \longrightarrow \mathcal{O}_X(D) \longrightarrow \mathcal{Q} \longrightarrow 0.$$

若 D 是 Cartier，则 $\mathcal{Q} = \mathcal{O}_S(D|_S)$。对于魏尔除子，引理 3.6 计算了 plt 对上的商。在这两种情况下，$H^1(X,\ \mathcal{O}_X(D-S)) = 0$ 都使得 $\mathcal{Q}$ 的截面可以提升到 X。一旦确定其整倍数，曲面上的一个补便恰好给出这样的截面。

当下取整 F 有多个分支时，必须先将它们各自的截面粘合起来。在双曲线上，正规化将 F 分成两个分支。导子记录了正规化所识别的曲线。半除子对数终端（sdlt）曲面在余维一处具有普通双交叉，且将导子加入边界后，其正规化分支为 dlt。对数形式在两个分支上的留数互为相反数。对于偶数张量幂，符号一致，留数相等便允许沿双曲线下降。条件 S_2（在每个 x 处深度至少为 $\min(2,\ \dim \mathcal{O}_{F,\ x})$）允许下降后的反身截面延拓到其余点 [47, 命题 3.1。7]。

一个收缩是一个射影满射 $f:\ X \to Z$ 满足 $f_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Z$。 $\mathbb{Q}$-阶乘代数簇是指每个魏尔除子都是 $\mathbb{Q}$-Cartier 的代数簇。小修改是双有理的，并且在余维一处是同构。根据魏尔截面空间关于有理函数的描述，它保持魏尔截面空间不变。双有理收缩$X \dashrightarrow Y$ 可以收缩 X 的素除子，但不会在 Y处提取任何素除子。若一个线性系的有理映射与其像诱导出函数域的同构，则称该线性系为双有理的。铅笔是由两个线性无关的截面张成的一维线性系。

相对 Picard 数 $\rho(X/Z)$ 是实 Cartier 除子类空间中，按被 $X \to Z$ 收缩的曲线上次数相等取商后所得空间的维数。特别地，在皮卡数为一的射影 $\mathbb{Q}$-阶化代数簇上，每个素除子在数值意义下都与一个丰沛类成比例。法诺簇具有丰沛的 $\mathbb{Q}$-Cartier $-K_X$，弱法诺簇具有数值有效且大的 $\mathbb{Q}$-Cartier $-K_X$，而德尔佩佐曲面是法诺曲面。

针对 $K_X + B$ 的极小模型纲领（MMP）会收缩 $K_X + B$ 次数为负的极端射线。每一步都是除子收缩或翻转。翻转以一个模型取代小收缩，在该模型上，变换后的对数除子相对丰沛。在极小模型上，对数除子是数值有效的。莫里纤维空间具有低维底空间、相对 Picard 数为一，且 $-(K + B)$ 相对丰沛。在三维且 $p > 5$ 的情形下，我们使用 [11, 定理 1.2–1.7], [13, 定理 1.4–1.7]；对于有效对数正则纲领，则使用 [60, 定理 1.1 和 1.6]。

在一个 $\mathbb{Q}$-阶乘的 Fano 型代数簇上，可以对有理除子D运行极小模型纲领。对数 Fano 边界的微扰给出一个 klt 边界 Γ，使得 $K_X + \Gamma$ 与 D的一个小正倍数在有理线性意义下等价。当这一纲领得到一个良极小模型及其丰沛收缩时，负性引理会在一个公共解消上比较原除子与丰沛除子。原除子的拉回等于丰沛除子的拉回加上一个有效例外除子。根据正数值维数下的无基点性，Fano 型三维簇上的数值有效 $\mathbb{Q}$-Cartier 除子是半丰沛的 [1, （推论 1.5] ）；而在数值维数为零时，这由引理 3.8 得出。

到 Z 的收缩的一般纤维取在其函数域 $k(Z)$ 上。即使 k 是代数闭的，这个域通常也不是完美域。其上的正则代数簇未必几何光滑。基变换后，重数也可能发生变化。

若一个簇类中的成员都是某个有限型底空间上的射影族的几何纤维，则称该簇类**有界**。这里，**算术有界**是指这个底空间在 $\mathbb{Z}$ 的某个局部化上有限型，而该局部化是通过求逆有限多个素数得到的。在一个族中，将几何泛纤维上的除子、态射或消解**扩展**，是指先在函数域的某个有限扩张上定义其有限集方程，再将其定义到正规化底空间的某个开集上。我们对闭补集应用诺特归纳。Spec $\mathbb{Z}$ 上的一个不可约分支，若其一般点的特征为零，则称为水平的；若它位于单个素数之上，则称为垂直的。

2.2. **Frobenius、射流与 Witt 向量**。在特征 p 下，绝对 Frobenius 态射 F 将函数提升到其 p 次幂。它在 F 有限域上的簇上是有限的；也就是说，域 K 满足 $[K : K^p] < \infty$。我们的基域及其有限生成扩张都具有这一性质。若对每个定义在 X 上的有效 Cartier 除子 H，包含映射

$$\mathcal{O}_X \longrightarrow F_*^e \mathcal{O}_X(\lceil (p^e - 1)\Delta \rceil + H)$$

对某个 $e > 0$ 分裂。**强 F正则性**是其局部版本。根据对偶性，可以通过迹映射检测这种分裂。我们在 [50,定理 1.2 和命题 5.5]的情形中，使用具有零边界的 klt 曲面奇点的局部结果，以及具有标准系数的对数 Fano 曲线的曲线结果。

对于映射到光滑曲线 C 的曲面 S，当 S 支配 C 时，其斯坦因分解的有限部分的函数域为 $H^0(S_K, \mathcal{O}_{S_K})$，其中带有 $K = k(C)$。为了证明有限部分是平凡的，还必须排除纯不可分常数。这正是命题 3.37 中使用绝对 Frobenius 的迹的地方。

在光滑图上，射流保留了普通微分会丢失的项。例如，在特征为 p 时，u^p 的导数为零，而 z^p 在$(u + z)^p$ 中的系数为一。在多个局部坐标下的泰勒展开中，z^I 的系数就是多重阶数为 I的***Hasse* 导数**。我们在

一般对角点处应用它，即由 $X \times X$中的对角线所诱导的 $X_{k(X)}$ 的 $k(X)$-点。在此处射流的消失度量了在一个移动的一般点处的消失。

Frobenius 分裂是一个 $\mathcal{O}_X$-线性收缩映射 $\mathcal{O}_X \to F_*\mathcal{O}_X$，其中局部函数 a通过 a^p 作用于目标空间。迭代也会分裂 $\mathcal{O}_X \to F_*^j\mathcal{O}_X$。对于丰沛 Cartier 除子 L，扭曲可得单射 $H^i(X, \mathcal{O}_X(L)) \to H^i(X, \mathcal{O}_X(p^j L))$。当 $i > 0$ 和 j 足够大时，Serre 消失定理使目标空间消失。对于整魏尔除子，可在正则轨迹上进行扭曲，并自反地延拓。

长度为-j 的 Witt层 $W_j\mathcal{O}_X$ 的截面具有 j 个坐标，取值于 $\mathcal{O}_X$，并带有 Witt加法和乘法。截断会舍去最后一个坐标。Verschiebung 插入一个首坐标为零的坐标，因此其连续商是若干个$\mathcal{O}_X$ 的副本，标量作用经过 Frobenius 扭曲。其逆极限记作 $W\mathcal{O}_X$。准 Frobenius 分裂是一个 $W_j\mathcal{O}_X$-线性映射 $F_*W_j\mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X$，其中某个有限的 j 使其与 Frobenius 的复合等于投影到首坐标。

对于有理除子 A，$W_j\mathcal{O}_X(A)$ 的一个截面是一个元组，其中第 i 个坐标属于 $\mathcal{O}_X(\lfloor p^i A \rfloor)$，且 $0 \le i < j$。对于约化除子 G，将每个界限替换为 $\lfloor p^i A \rfloor - G$，即可定义 $W_j\mathcal{I}_G(A)$。Teichmüller元素 $[z]$ 将第 i 个坐标乘以 z^{p^i}。沿第一坐标投影将 Frobenius $W_j\mathcal{O}_X(A)$ 推出到 $\to F_*W_j\mathcal{O}_X(pA)$，得到层 $Q_{A,\ j}$ 以及一个映射 $\mathcal{O}_X(\lfloor A \rfloor) \to Q_{A,\ j}$其余核为$B_{A,\ j}$ [35, 定义 3.3–3.5]。这些层使得我们能够像引理 8.9 中那样，在丰沛魏尔除子上使用准 Frobenius 分裂。在命题 8.11 中，约化边界的消灭理想将三维簇上的上同调与其边界曲面相交处的曲线上的上同调联系起来。

2.3. **纤维化与例外对**。 我们使用全局纤维补集定理以及适用于曲线和曲面上纤维化的两种典范丛公式形式。

设 $f\colon\ X \to Z$是一个收缩，且 $K_X + B \sim_{\mathbb{Q}} f^*D_Z$。在<style id='4'>典范丛公式中，记作

$$D_Z \sim_{\mathbb{Q}} K_Z + B_Z + M_Z.$$

在 Z 的一个光滑模型上，判别除子B_Z中素除子 T 的系数为 $1 - t_T$，其中 t_T是对 f^*T在 T的一般点上的对数典范阈值，并在该对的一个相容模型上计算。余除子 M_Z 是模部分。在所有双有理模型上保留这些除子，就记录了高阶中心上的阈值。模<style id='9'>b-除子的半丰性意味着，在某个双有理模型上，其迹是半丰沛的，并且在所有更高模型上的迹都是拉回。

属零公式适用于以下情形：几何泛纤维为 $\mathbb{P}^1$，其对是对数典范的，且一般边界由以下两部分之和构成：在次数与 p 互素的 Galois扩张下分裂的标记点，以及总几何加权次数小于一的有效循环。此时，模b-除子在特征 $p > 5$[31, 定理 5.9]中是半丰沛的。曲面底空间和曲线底空间的阈值公式见[31, 定理 5.11]。它们用于证明以下全局纤维结果。对于第 6.1 小节中使用的圆锥曲线纤维化，在满足 [62, 命题 3.2]的假设时，我们使用有效公式 $D_Z \sim_{\mathbb{Q}} K_Z + D'$，其中 $D' \ge 0$ 。

对于一个射影 lc 三维簇对（$X,\ B$），其 X 为 Fano 型，系数 $B \subset \Phi(R)$ 且 L 数值有效，假设 $K_X + B \sim_{\mathbb{Q},\ Z} 0$ 对于到曲线或曲面的收缩成立。全局纤维定理给出 X 上的单调补充，其指标和特征界仅取决于 R [31, 定理 1.1]。这里 $\sim_{\mathbb{Q},\ Z} 0$ 表示

与来自 Z 的拉回作有理线性等价。该补充在整个 X 上满足一个整的主关系。为了从曲面提升，我们还使用曲面补定理、除子层的传输，以及提升命题 [31, 推论 3.26、引理 4.3 和命题 4.9] 证明中的限制映射计算。

如果每个递减序列最终都稳定，则称一组系数满足降链条件（DCC）。对于超标准集 $\Phi(R)$，我们记作 $\delta_R = \min(\Phi(R) \cap (0,1])$。阈值的升链条件（ACC）给出了引理 3.22 中一致的系数比较。我们将在推论 4.6 和定理 4.7 中利用这些结果，界定 klt 数值 Calabi–Yau 对的 $-K_X$ 体积以及例外补全的不一致数。

3. 非例外补

3.1. 数值维数为零时的指标。 如果 $K_X + B \equiv 0$，将$B^+ - B$ 与丰沛除子的平方相交可得 $B^+ = B$。为了界定 $K_X + B$的阶，我们在 dlt 模型的约化边界上粘合形式，并将由此得到的截面提升到三维簇上。

引理 3.1。 *对于一个有理 DCC 集 $I \subset [0,1]$，存在一个整数 $q = q(I) > 0$，使得对于特征为 $p > 5$ 且满足$K_T + \Theta \equiv 0$、系数 $\Theta \subset I$ 取自该集合的任意射影 klt 曲面对(T, Θ)，$q(K_T + \Theta)$ 都是 Cartier。在极小解消$\mu : U \to T$上，保正则边界 Θ_U 是有效的，且 $q\Theta_U$ 是整的。*

证明。 曲面全局升链条件以及 [34, 中的差异估计、引理 3.1 和命题 3.2] 给出一个有限系数集和一致 klt 间隙。对整魏尔除子 [33, ，将引理 3.6], 中的一致 Cartier 倍数乘以这些系数的公分母，即得 q。μ 的每条例外曲线 E 都是有理曲线，且满足 $E^2 \le -2$，因此 $K_U \cdot E \ge 0$。负定交数矩阵的非对角元非负，这迫使 $\mu^* K_T - K_U$ 的系数非负。加上 Θ 的有效拉回，得到 $\Theta_U \ge 0$；而拉回$q(K_T + \Theta)$ 则得到整性。□

引理 3.2。 *设 $g : U = \mathbb{P}_C(E) \to C$ 是定义在正亏格曲线上的光滑极小有理曲面。假设 (U, Θ) 是对数典范的，$K_U + \Theta \equiv 0$ 且 $q\Theta$ 是整的。若 $p >$ 最大值 $\{3, 2q\}$，则 $q\,(2q)!\,(K_U + \Theta) \sim 0$。*

证明。 边界在一条纤维上的次数为二。对于系数为 b 的水平素除子 H，在分解不可分部分后，由 Hurwitz 公式可知，H 的正规化的亏格至少为 $g(C)$。由伴随公式得到

$$(1-b)H^2 = 2p_a(H) - 2 + (\Theta - bH)\cdot H \ge 0. \tag{3.1}$$

若 $b = 1$，等号意味着 H 是一条与边界其余部分不相交的光滑椭圆曲线。其映射 $h : H \to C$ 的次数为 $d \le 2$ 且是 étale 的。线丛$\mathcal{O}_U(q(K_U + \Theta))$ 的纤维次数为零，因此对于 C上的某个线丛 M，它是 g^*M。由伴随公式得到 $h^*M \simeq \mathcal{O}_H(qK_H) \simeq \mathcal{O}_H$，从而由范数得到 $M^{\otimes d} \simeq \mathcal{O}_C$。

若所有水平系数都小于一，则由 (3.1) 可知水平分量的自交数非负。垂直素除子都是纤维。因此，$\Theta^2 = K_U^2 = 8(1-g(C))$迫使 $g(C) = 1$ 且 $\Theta^2 = 0$。这些分支彼此不交，因此不存在垂直分支。由伴随公式可知，每个多截面都是光滑椭圆曲线。它们的总次数 d 至多为 $2q$，因为每个系数都至少为 $1/q$。因此它们是 étale 的。它们叶层上的联合置换作用给出一个连通有限

次数为 $e \mid d$!的 étale 覆盖，将它们分裂为截面。至少有三个截面，因为它们的系数之和为二，且都小于一。在 $\mathbb{P}^1$-丛上，三个互不相交的截面使其平凡化；任何其他截面都避开这三个取值，因而是常值的。在椭圆覆盖上的乘积上，由 $\mathbb{P}^1$上的次数二计算可得 $q(K_{U'}+\Theta')\sim 0$。范数和 $e\mid(2q)$!给出所述结论。□

定理 3.3。对于一个有理 *DCC* 集 $I\subset[0,1]$，存在 $n_s(I)>0$ 和$p_s(I)$，使得对于每个满足$K_T+\Theta\equiv 0$、系数 $\Theta\subset I$ 且 $p>p_s(I)$的射影 *klt* 曲面对(T,Θ)，$n_s(I)(K_T+\Theta)\sim 0$。

证明。在极小解消 U 上应用引理 3.1。若 $\Theta_U=0$，特征大于三时，满足 $K_U\equiv 0$ 的光滑极小曲面分类给出$12K_U\sim 0$ [14]。否则，$K_U\equiv-\Theta_U$ 不是伪有效的。将 (-1)-曲线收缩到光滑极小有理曲面或带状曲面 V。每次收缩都是保正则形式的，因为与拉回之差是例外的且数值平凡。推前后的边界分母仍整除 q。有理曲面上的数值平凡线丛都是平凡的。对于非有理的带状曲面，使用引理 3.2。因此$p_s(I)=\max\{5,2q\}$ 且 $n_s(I)=12q(2q)!$ 在 U 上成立。由于 $q\mid n_s(I)$，T 上的倍数是 Cartier 的，且平凡性可由投影公式下降。□

引理 3.4. 设 $g:U\to C$ 是从正规 $\mathbb{Q}$-阶乘曲面到光滑射影曲线的射影压缩，且一般纤维光滑、亏格为零。设 $D\equiv 0$是整 *Weil* 除子，并且在一条次数为 d的光滑水平曲线 H 附近为 *Cartier*。若$D|_H\sim 0$，则 $dD\sim 0$。

证明。一般纤维上的黎曼–罗赫定理给出一个主调整 $D\sim E$，使得E 垂直。在纤维 $F=\sum m_iF_i$上，令 $\sum r_iF_i$ 为 E 中支集于该处的部分。对 $v=\max_i(r_i/m_i)$，将其从 vF 中减去。这个有效循环有一个系数为零，并且与每个 F_i 的交都为零。不同不可约分支之间的交非负，结合连通性可知该循环必为零。因此，对曲线 C上的某个有理除子 A，有 $E=g^*A$。若 $\gamma=g|_H$ 且 $\gamma^*A=\operatorname{div}(u)$，则范数恒等式 $\gamma_*\operatorname{div}(u)=\operatorname{div}(\operatorname{Nm}(u))$ 表明 dA为主除子。将其拉回即可得到 $dD\sim 0$。□

定理 3.5。对于一个有理 *DCC* 集 $I\subset[0,1]$，存在 $n_{\mathrm{lc}}(I)>0$ 和$p_{\mathrm{lc}}(I)$，使得 $n_{\mathrm{lc}}(I)(K_T+\Theta)\sim 0$ 对每个射影 *lc* 曲面对 (T,Θ) 且$K_T+\Theta\equiv 0$、系数 $\Theta\subset I$ 以及 $p>p_{\mathrm{lc}}(I)$均成立。

证明。klt 情形即为定理 3.3。否则取一个保正则形式 dlt 修改，将 I 增加一个元素，并利用全局 ACC 得到有限系数集 J。将边界写为 $C+\Delta$，其中 C 是非空的下取整。由 [34, 命题 3.2], ，降低后的对是一致 ϵ（J）-klt。其极小模型纲领以莫里纤维空间 $W\to Z$结束，因为 $K_T+\Delta\equiv -C$。该间隙仍然存在，并且根据负性，每一步对于完整的对数除子都是保正则形式的。

若 Z 是一个点，则 [63, 命题 6.1(d)] 通过取有界局部指标的最小公倍数，为 W 上的整 Weil 除子给出一个一致 Cartier 倍数。同时消去 J 的分母，可得到D的一个数值平凡 Cartier 倍数 $K_W+\Theta_W$。在 klt 对数德尔佩佐曲面上的消失给出 $\chi(\mathcal{O}_W)=1$ [1,定理 1.1]。然后，由黎曼–罗赫定理，$\chi(\mathcal{O}_W(D))=1$；由对偶性以及 K_W 相对于丰沛类的负性，$H^2(W,\mathcal{O}_W(D))=0$。非零截面使$D$ 为主，因为有效数值平凡除子必为零。

若 Z 是一条曲线，则正则一般纤维 F 的典范次数为负，因此它是圆锥曲线。奇特征下的正则圆锥曲线是光滑的。相对丰沛性

–($K_W + \Delta_W$)给出 $C_W \cdot F > 0$，而 $\Theta_W \cdot F = 2$。在 (W, Θ_W) 的 crepant dlt 模型 U 上，水平地板分量的严格变换 H 是一个次数为 $d \le 2$ 、定义在 Z 上的光滑曲线。其不同 Θ_H 的系数属于一个固定的超标准集。在亏格一曲线上，次数条件给出 $\Theta_H = 0$。在 $\mathbb{P}^1$ 曲线上，全局 ACC 可界定分母。因此，对于单个 $a = a(J)$， $a(K_H + \Theta_H) \sim 0$ 。当不同系数 c 为 1 时，该对是 snc。其他情况下，局部阶乘指标m_x 满足 $1 - 1/m_x \le c \le 1 - 1/a$ ，这由零边界不同子式公式 [26,引理 3.3 及其证明]给出。清除 J 的系数，并取 a 和 lcm$(1, \dots, a)$ 的一个倍数 q，使得 $q(K_U + \Theta_U)$ 是整的，在 H 附近为 Cartier，并由伴随公式在H 上平凡。由引理 3.4，该倍数的两倍是主的。两种情形下有界的指数均可保正则形式地传递到 T。□

我们将使用两个事实来从曲面上提升截面。第一个事实确定了整魏尔除子到纯对数终端中心的限制映射。第二个事实在 Mori 基底为一点时给出消失。

引理 3.6。 设 X 是特征 $p > 5$ 中的一个射影 $\mathbb{Q}$-阶乘 ***klt*** 三维簇，且 (X, S) 纯对数终端， S 为素除子。对于整魏尔除子 L，存在一个自然的正合列

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(L - S) \longrightarrow \mathcal{O}_X(L) \longrightarrow \mathcal{O}_S(G_L) \longrightarrow 0,$$
$$G_L \sim_{\mathbb{Q}} L|_S - \delta_L, \qquad 0 \le \delta_L \le \mathrm{Diff}_S(0).$$

这里 G_L 是整魏尔除子。若 L 在 S 上每条曲线的一般点处都是 ***Cartier***，则该商是 L 的除子限制。

证明。 S 的正规性以及除子层的 Cohen–Macaulay 性由[5, 定理 3 和 19]推出。将其引理 5 应用于 $L - K_X - S$，得到修正项$\delta_L =$ 不同$_S$(0) $- \Theta_{L-K_X-S}$；根据 $\mathcal{O}_X($ $L - S$) 上的 S_3 条件，映射是满射的。商在 S 上是自反的，并且当 L 为 Cartier 时与通常的限制映射一致，这就证明了最后一个断言。□

定理 3.7。 设 Y 是特征$p > 5$ 下的射影 $\mathbb{Q}$-因子 ***klt*** 三维簇，并满足 $\rho(Y) = 1$。若(Y, S) 是纯对数终端对，其中 S 为素除子，且 $-(K_Y + S)$ 丰沛，则对于 $i = 1$、2 以及每个整 ***Weil*** 除子 D, 有$H^i(Y,\mathcal{O}_Y(D)) = 0$。特别地，引理 *3.6* 中的限制映射在整体截面上是满射的。

证明。令 $A = S|_S$ 和 $\Delta_0 =$ 不同$_S$(0)。皮卡数为一使得 A 丰沛，且 (S, Δ_0) 是 klt 对数 Fano。根据引理 3.6，将 $D - jS$ 限制到 S，商为 $\mathrm{O}_S(G_j)$，修正项为 δ_j。记 $(D - jS)$ $|_S \equiv \lambda_j A$。若 $\lambda_j \ge 0$，则 $G_j - (K_S + \Delta_0 - \delta_j)$ 丰沛，并且 [1, 定理 1.1] 给出 $H^1(S, \mathrm{O}_S($ $G_j)) = 0$。若 $\lambda_j < 0$，则 $-G_j - \delta_j$丰沛。对带边界 δ_j 的 $K_S - G_j$ 应用同一消失定理，并使用对偶性。对于被 S 的 Cartier 指标整除的充分大的 m ，对偶性和 Serre 消失定理给出 $H^1(Y, \mathrm{O}_Y(D - mS))^\vee = H^2(Y, \mathrm{O}_Y(K_Y - D + mS)) = 0$。将限制正合列下降到 $j = 0$。利用 $K_Y - D$ 的对偶性得到关于$i = 2$的断言，而 $D - S$ 中的 $i = 1$ 情形给出满射性。□

引理 3.8。 在特征为 $p > 5$ 的 ***Fano*** 型射影三维簇上，每个数值平凡的 $\mathbb{Q}$-***Cartier*** 有理除子都是 $\mathbb{Q}$-线性平凡的。

证明。 有理链连通性 [23, 定理 1.5] 表明 Albanese 平凡，因而 $\mathrm{Pic}^0_{\mathrm{red}}$ 也平凡。对于数值平凡的线丛，根据 Néron–Severi 定理，其某个正次幂是代数平凡的。由于 Pic$^0(k)$ 平凡，该次幂也平凡。将此结论应用于 Cartier 倍数。 □

引理 3.9。 设 (X, B) 是纯对数终端的，且 $K_X+B \sim_{\mathbb{Q}} 0$。在 $\mathbb{Q}$-因子化模型之间进行双有理压缩时，如果没有系数为一的素除子被收缩，则推前的对仍保持纯对数终端。

证明。 定义 $K_X + B$ 的主倍数的有理函数在目标空间上定义相同的倍数，因此该映射是保正则形式的。新出现的例外赋值对应于系数小于一的被压缩素除子，且具有正的对数差异。对于小映射，不存在被压缩素除子。□

双有理极小模型纲领步骤保持 Fano 型。事实上，通过半丰扰动[58, 定理 1]，可以将一个 klt 对数 Fano 边界补充为一个大 klt 边界 Υ，使得 $K_X + \Upsilon \sim_{\mathbb{Q}} 0$。其推前是保正则形式的，且仍然是大且 klt 的。在任何具有此类边界的模型上，写作 $\Upsilon \sim_{\mathbb{Q}} A + E$，其中 A 丰沛，且 $E \geq 0$。对于足够小的 $\epsilon > 0$，边界 $(1-\epsilon)\Upsilon + \epsilon E$ 是 klt 的，并且其负对数除子是丰沛的。

推论 3.10。 固定一个有限有理数集 $R \subset [0,1]$。存在整数 $n_{\mathrm{nb}}(R) > 0$ 和 $p_{\mathrm{nb}}(R) > 5$，使得任意满足以下条件的射影 *lc* 三维簇对 (X, B)： X 为 *Fano* 型，系数 $B \subset \Phi(R)$，$N = -(K_X + B)$ 数值有效，$0 < \nu(N) < 3$，且 $p > p_{\mathrm{nb}}(R)$，均存在一个全局单调 $n_{\mathrm{nb}}(R)$-补。

证明。 对于 klt 对数 Fano 边界 Γ，N 的 Cartier 倍数 L 满足 $L-(K_X+\Gamma)$ 丰沛。由 [1, 推论 1.5]，N 半丰沛，并定义一个像的维数为 $\nu(N)$ 的收缩。由于 $K_X + B$ 在相对意义下关于 $\mathbb{Q}$ 线性平凡，应用 [31,定理 1.1]。□

命题 3.11。 设 (X, B) 是特征为 $p > 5$、X 为法诺型的射影非 *klt* 对数典范三维对，系数 $B \subset \Phi(R)$ 且 $K_X + B \equiv 0$。存在一个保正则形式的双有理 $\mathbb{Q}$-因子阶化 *dlt* 模型 (Y, B_Y)，其为法诺型；并存在一个收缩$Y \to Z$，满足 维数 $Z \leq 2$。下取整的支撑集包含一个有效的相对丰沛 $\mathbb{Q}$-除子，且系数 $B_Y \subset \Phi(R)$。

证明。 由引理 3.8，$K_X + B \sim_{\mathbb{Q}} 0$。取一个保正则形式的 $\mathbb{Q}$-因子阶化 dlt 修改，并应用 [4, 定理 5.7] 的普通对情形。每个对数典范中心都支配 Z，因此非空的下取整给出维数界。Y 上任何在X 上例外的素除子，其系数均为一，从而保持系数集不变。

在 X 上的 klt 对数 Fano 边界中加入一个避开新素除子中心的小的丰沛有效除子 A，并补全为 klt 对数 Calabi–Yau 边界 Υ。在公共解消上，A 的拉回经推前得到其严格变换 A_Y，因此 A_Y 是大的。对于保 K 变换 Υ_Y，$\Upsilon_Y - A_Y$ 的任何负系数都出现在新素除子上，而在这些新素除子上，B_Y 的系数为一。因此，对充分小的 $\epsilon > 0$，$(1-\epsilon)B_Y + \epsilon\Upsilon_Y$ 是 klt，支配 ϵA_Y，且其对数除子是 $\mathbb{Q}$-线性平凡的。这个大 klt 边界使 Y 具有 Fano 型。□

命题 3.12。 取一个有限有理数集 $R \subset [0,1]$。设 (Y, B) 是一个射影$\mathbb{Q}$-因子化 *dlt* 三维簇，满足 $K_Y + B \equiv 0$，系数 $B \subset \Phi(R)$，且下取整支集支撑一个有效丰沛的 $\mathbb{Q}$-除子。存在整数 $n_f(R) > 0$ 和 $p_f(R)$，使得对于$p > p_f(R)$，$D = n_f(R)(K_Y + B)$ 是整的，在下取整中每条曲线的一般点处都是 *Cartier*，并且对于下取整的每个不可约分支 S，都有 $D|_S \sim 0$。

证明。 伴随公式给出 lc 曲面对 $(S,\ \Theta_S)$，其中 $K_S + \Theta_S \equiv 0$。在系数为一的分层之外，不同服从余维二公式

$$c = \frac{m - 1 + \sum_i l_i b_i}{m}, \qquad m \geq 1, \quad l_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}. \tag{3.2}$$

其系数属于一个固定的超标准集。事实上，若 η 是非零 b_i的正下界，那么在和不超过一的情形下，项 $b_i > 1-\eta$必须单独出现。其他求和至多包含有限集中的有界个项。现在定理 3.5 给出一个公共的$a = a(R)$，其中 $a(K_S + \Theta_S) \sim 0$。

每个分数边界素因子都沿一条曲线与丰沛取整部分相交。该处的不同为 $c < 1$，因为系数为一的分层是两个取整分量的简单正规交叉。其系数 b 以正重数出现在 (3.2) 中，因此$b \le c \le 1 - 1/a$。所以，某个固定的 b_R 可以消去 B的分母。在任意满足 $c < 1$的曲线上，由 [26, 引理 3.3 及其证明可知，局部阶乘指标 m 至多为 a]。在 $c = 1$ 处，环境三维簇在一般点处正则。取$n_f = ab_R\operatorname{lcm}(1, \dots, a)$。由余维一处的伴随公式，至 S的限制是 $n_f(K_S + \Theta_S)$。□

曲面指标限制了约化边界每个分支的次数。现在我们选取截面，使其留数在双曲线上一致。

引理 3.13。 设$\{(C_i, \Delta_i)\}$是特征为 $p > 3$ 且满足 $a(K_{C_i} + \Delta_i) \sim 0$ 的光滑连通射影 *lc* 曲线的有限集，其中所有曲线共用同一个整数$a > 0$。令 $e(a) = 12(2a)!$ 并令 $m = ae(a)$。存在$m(K_{C_i} + \Delta_i)$ 的处处不消失截面，它们与对数对之间的每个同构相容，并且在每个系数为一的点处具有 m重留数一。特别地，它们在具有这些正规化对的 *sdlt* 曲线的节点处粘合。

证明。 对于椭圆曲线，边界为零。平移保持微分形式不变，而 12 可消去固定原点的自同构特征。在 $\mathbb{P}^1$ 上，边界的次数为二，且由 $a\Delta_i$ 的整性可知支撑点至多有 $2a$ 个。若至少有三个，支撑点的置换给出忠实作用，因此 $(2a)!$ 可消去该特征。若有两个点，则两者的系数均为一，而 $(dx/x)^m$ 在 0 处的留数为一，∞，且与坐标无关。若有一个系数为一的点，则将形式按该点处的留数正规化。若一个也没有，则对每个同构类选取一个生成元，并利用特征平凡性将其传输过去。在节点处，由于留数相等，且 m为偶数，故可下降。□

引理 3.14。 设 (T, Θ) 是特征$p > 3$ 下的整射影 *dlt* 曲面，具有 $C = \lfloor \Theta \rfloor \neq 0$ 和 $m(K_T + \Theta) \sim 0$，其中 m 为偶数。若其在 C 的不可约分支上的留数与其伴随对数对的任意同构相容，则 $\mathcal{O}_C(m(K_T + \Theta)|_C)$ 的一个生成元可延拓为 T 上的生成元。

证明。 对于连通的 C，这由 $H^0(C, \mathcal{O}_C) = k$得到。对于不连通的 C， [55, 命题 2.7 的点基情形及其证明] 给出一个态射 $g\colon T \to V$到一条具有两个水平底层截面的光滑曲线 C_1，C_2。C 的每个连通分支都包含其中一个截面。它们的次数穷尽了水平边界。取 C_1，C_2 在 0，∞ 在一般 $\mathbb{P}^1$上，平凡对数线丛的一个生成元 u 具有形式 $c(dx/x \wedge g^*\eta)^{\otimes m}$，其中 η 是 V上的一个有理微分，且 $c \in k(V)^*$。由于 m 为偶数，它们的留数相同。在 $C_1 \simeq V \simeq C_2$下，它们的除子标识出两个伴随边界。将 u 缩放，使其与 C_1上的指定截面一致。相容性给出在 C_2上的一致性，而其比值在 C的每个连通分支上都是常数。□

定理 3.15（半对数典范曲面上的粘合）。 设 (F, Δ_F) 是特征为 $p > 3$ 的射影半对数典范曲面，其正规化对为 (S_i, Θ_i)。若对每个 i 都有 $a(K_{S_i} + \Theta_i) \sim 0$，则 $ae(a)(K_F + \Delta_F) \sim 0$，且 $e(a) = 12(2a)!$

证明。 对 $(S_i,\ \Theta_i)$ 的每条层曲线，Cartier伴随给出 $a(K_C+\Delta_C)\sim 0$。由引理 3.13，选取次数为 $m=ae(a)$ 的相容形式。它们在每条层曲线上粘合，并由引理 3.14 延拓为 S_i 上的生成元。层为空的不可约分支没有导子，因此可以任取生成元。导子对合保持伴随曲线对 [47,推论 3.1.8]。因此，偶次幂留数判据 [47,命题 3.1.7] 将这些生成元下降到 $\omega_F^{[m]}(m\Delta_F)$。它们在每个余维一点处生成该层，且与 $\mathcal{O}_F$ 的同构由 S_2 延拓。□

推论 3.16。 在命题 *3.12* 中，令 $F=\lfloor B\rfloor$ 和 $D_g=n_g（R）（K_Y+B）$ 为$n_g（R）=n_f（R）e（n_f（R））$。那么

$$\mathcal{O}_Y(D_g)/\mathcal{O}_Y(D_g-F)\simeq\mathcal{O}_F. \tag{3.3}$$

此外，D_g 在 F 附近是 ***Cartier*** 的，且其限制映射是平凡的。

证明。 对于 $\mathcal{O}_F=\mathcal{O}_Y/\mathcal{O}_Y(-F)$ 的序列，以及两个环境层 [5, 定理3和定理19(2)] 的 Cohen–Macaulay 性，使得 F 成为 Cohen–Macaulay。由于 F 已经是 S_2，伴随公式结合 [46, 引理5.2和定理5.3] 在 F上给出一个半除数对数终端对，其正规化对为（S, Θ_S）。同样，由深度可知，(3.3) 中的商是一个 $S_2\mathcal{O}_F$-模。在 F 的余维一处，除子 D_g 是 Cartier 的，而伴随公式将该商识别为 $\omega_F^{[n_g]}(n_g\Delta_F)$。该识别通过 S_2延拓，并且定理 3.15 将其平凡化。

在 $y\in F$ 附近，将商的一个生成元提升为 $\mathcal{O}_Y(D_g)$ 的一个截面，其有效除子为 G。 F 的任何不可约分支都不包含在 G 中。若 G 与经过 y 的不可约分支 S 相交，则 G 的某个 Cartier 倍数会在 S 上截出一条经过 y 的曲线。在其一般点处， D_g 是 Cartier 的，因此该截面在那里无法生成商。故在 y 附近， G 避开 F，且该截面在那里平凡化 $\mathcal{O}_Y(D_g)$。其商就是通常的限制映射。□

引理3.17。 固定一个有理 ***DCC*** 集 $I\subset[0,1]$。存在 $p_\ell(I)$，使得对 $p>p_\ell(I)$，以下结论成立。设 (T,Θ) 是一个具有 $K_T+\Theta\equiv 0$ 且 系数 $\Theta\subset I$ 的射影 ***dlt*** 曲面。若有理子边界 $\lfloor\Theta\rfloor\le\Theta_0\le\Theta$ 的所有正系数均至少为 $1/2$，则 $(T,$ 支集 $\Theta_0)$ 存在一个对数解消提升，并将其边界和例外除子提升至 $W(k)$。

证明。 对于 klt 对，使用 [34, 命题 3.5] 并删去未使用的分支。否则，按照定理 3.5 中的做法，对分数边界运行极小模型纲领，直到 $W\to Z$。完整的对仍然保正则形式，降低后的对则一致 klt。可提升性由 [34, 引理 2.7(2)]继承。若底空间是一条曲线，则下取整部分有一个水平分量，并且–$(K_W+\Theta_{0,\ W})$根据与完整边界的比较是相对 nef。正系数属于 $[1/2,1]$，因此 [34, 引理 3.6] 适用。

若底空间是一个点，则有限系数集和有界阶乘指标给出 Θ_W 的一个一致 Cartier 倍数。极化界以及 $|K_W^2|$ 的界见 [63,推论 1.4 和引理 6.2]，；结合 $\Theta_W\equiv -K_W$ 和 $\chi(\mathcal{O}_W)=1$，可得 [34, 引理 2.9]中不变量的有限多个取值。这就提升了完整边界。删去未使用的分支。□

引理 3.18。 在引理*3.17*中，设 $0\le\Delta$ 具有有理系数，且 $\lfloor\Delta\rfloor=0$以及支集 $\Delta\subset$支集Θ_0。若 L 是整 ***Weil***，且 $A=L-(K_T+\Delta)$ 是数值有效且大，则对于 $i>0$，有 $H^i(T,\mathcal{O}_T(L))=0$。

证明。 对于可提升的对数解消 $f\colon V\to T$，取整并推前得到$\mathcal{O}_T(K_T-L)=\mathcal{O}_T(\lfloor -A\rfloor)=f_*\mathcal{O}_V(-\lceil f^*A\rceil)$。 f^*A 的分数支撑

包含于提升的简单正规交除子中。因此，根据 [33, 定理 2.11]， $H^j(V,\ \mathcal{O}_V(-\lceil f^*A\rceil)) = 0$ 对 $j = 0,\ 1$ 成立。Leray 给出$\mathcal{O}_T(K_T - L)$ 的同一消失，而正规曲面上的对偶性完成证明。□

定理 3.19. 固定一个有限有理数集 $R \subset [0,1]$。在特征 $p > p_v(R)$下，设(Y, B) 是一个射影 $\mathbb{Q}$-阶乘 *dlt* 三维簇，满足 $K_Y + B \equiv 0$，且 系数 $B \subset \Phi(R)$，并假设 $F = \lfloor B\rfloor$ 支撑一个有效丰沛的 $\mathbb{Q}$-除子。对于每个整魏尔除子 $D \equiv 0$，都有 $H^1(Y, \mathcal{O}_Y(D-F)) = 0$。特别地，整体截面满射到 $\mathcal{O}_Y(D)/\mathcal{O}_Y(D-F)$的整体截面上。

证明. 写作 $F = \sum S_i$，并选取一个丰沛 Cartier 除子 $H = \sum h_i S_i$，使其正整 h_i。在 S_i 上记 $\Theta_i = \mathrm{Diff}_{S_i}(B - S_i)$、$\Delta_i^0 = \mathrm{Diff}_{S_i}(0)$ 和 $C_{ij} = S_j|_{S_i}$，其中 $j \neq i$。dlt 条件使 C_{ij} 约化，且各项之和中的素分量互不相同，并且有

$$\Theta_{0,i} = \Delta_i^0 + \sum_{j\neq i} C_{ij} \le \Theta_i, \qquad \lfloor \Theta_i\rfloor = \sum_{j\neq i} C_{ij}.$$

$\Theta_{0,\ i}$ 的正系数是标准的，并且根据 (3.2)，Θ_i 的系数属于一个固定的降链条件集。因此，引理 3.18 在 S_i上一致适用。

从 $Z = F$开始，在 z_i/h_i为极小时加入 S_i，其中 $Z = \sum z_j S_j$。在每个阶段，$\lambda = \min_j z_j/h_j$ 满足

$$0 \le z_j - \lambda h_j \le 1 \quad \text{for every } j. \tag{3.4}$$

增大一个实现最小值的系数会保持上界不变。对于任意整数 $N \ge 1$，该过程都会到达NH，因为当较小的比值仍然存在时，等于 N 的比值不可能增大。

在加入 S_i的步骤中，引理 3.6 给出商 $\mathcal{O}_{S_i}(G)$，其中 $G \sim_{\mathbb{Q}} (D - Z)|_{S_i} - \delta$且 $0 \le \delta \le \Delta_i^0$。令 $t_j = z_j - \lambda h_j$。则 $Z|_{S_i} = \lambda H|_{S_i} + \sum_{j\neq i} t_j C_{ij}$，因为$t_i = 0$。将每个 $t_j = 1$ 替换为一个充分接近 1 的有理数 $t_j' < 1$，同时保持其他 t_j 不变。边界 $\Delta = \delta + \sum_{j\neq i} t_j' C_{ij}$ 的整数部分为零，且支集包含于$\Theta_{0,\ i}$。此外

$$(K_{S_i} - G) - (K_{S_i} + \Delta) \equiv \lambda H|_{S_i} + \sum_{j\neq i} (t_j - t_j')C_{ij}$$

是丰沛的。应用引理 3.18 和曲面对偶性可得 $H^1(S_i,\ \mathcal{O}_{S_i}(G)) = 0$。对于充分大的 N，Cohen–Macaulay 对偶性将 $H^1(Y,\ \mathcal{O}_Y(D - NH))^\vee$识别为$H^2(Y,\ \mathcal{O}_Y(K_Y - D + NH))$，后者由 Serre 定理消失。沿限制正合列下降即可完成证明。□

定理 3.20（非 klt 对数 Calabi–Yau 三维簇的指标）。 对于一个有限有理数$R \subset [0,1]$, 存在整数 $n_0(R) > 0$ 和 $p_0(R)$，使得每个满足 X 为法诺 型、系数 $B \subset \Phi(R)$ 且 $K_X + B \equiv 0$ 在特征 $p > p_0$（R）中的射影非 *klt lc* 三维对（X, B）都满足 $n_0(R)(K_X + B) \sim 0$。特别地，B 本身是一个单调的 $n_0(R)$-补。

证明。 取命题 3.11 中的模型。若底空间维数为正，则全局纤维化定理 [31, 定理 1.1] 给出一个有界补。其增量因数值平凡性而消失。若底空间是一个点，则推论 3.16 和定理 3.19 给出一个非零截面 $\mathcal{O}_Y(D_g)$，它将 F 上的单位元提升。其有效除子数值平凡，因此为零。取两个指标的公倍数，即可将其保正则形式地下降到 X。$n_0 B$ 的整性给出取整不等式。□

3.2. **归约到素 plt 中心**。 我们将问题归约到一个边界系数只有有限种可能的非 klt 对，并在一个保 K 模型上选取下取整的一个素分量 S 。令 $N = -(K_X + B)$。要将补从 S 提升，只需证明 $H^1(X, \mathcal{O}_X(nN - S)) = 0$。对 $-S$ 施行极小模型纲领，可将问题归约到定义在一点、曲线或曲面上的莫里纤维空间。

命题 *3.21.* 设 (X, B) 是特征 $p > 5$ 下的射影 *klt* 三维对，且为 *Fano* 型，其系数为 $B \subset \Phi(R)$，并且 $N = -(K_X + B)$ 数值有效且大。假设$P \geq 0$ $P \sim_{\mathbb{Q}} N$且 $(X, B + P)$ 为非 *klt*。则存在一个射影 $\mathbb{Q}$-*factorial* 对数典范对 (W, Θ_W)，其为 *Fano* 型，系数为 $\Theta_W \subset \Phi(R)$，且 $\lfloor \Theta_W \rfloor \neq 0$ 以及 $N_W = -(K_W + \Theta_W)$ 数值有效；其单调 n-补可在相同指标下转移到 (X, B)。若 $(X, B + P)$ 为非对数典范，则 N_W为大。

证明。 取一个小的 $\mathbb{Q}$-factorial化；通过拉回一个 klt 对数 Fano 边界以及 Kodaira 扰动，它是 Fano 型的。令 $t = \mathrm{lct}(X, B; P) \in (0, 1], \Omega = B + tP$。在一个保正则形式的 dlt 修改 h 上：$(Y, \Omega_Y) \to (X, \Omega)$，置 $F = \lfloor \Omega_Y \rfloor \neq 0$。令 Θ_Y在 F 上具有系数一，并在其他地方保留 B 的严格变换系数。它支配 (X, B) 的保对偶子边界，并且 $\Omega_Y - \Theta_Y$是有效的，其支集避开 F的分支。

由 N 的半丰性以及半丰扰动，存在 $Q \geq 0$, $Q \sim_{\mathbb{Q}} (1 - t)h^*N$，使得 $\Psi_Y = \Omega_Y + Q$ 是对数典范的，并且 $K_Y + \Psi_Y \sim_{\mathbb{Q}} 0$ [1, 推论 1.5], [58,定理 1]。特别地， Q 在 F 中没有不可约分支。对于 X上的 klt 对数 Fano 边界C ，其保 K 变换 C_Y 在例外素除子上可能为负，而这些除子在 Ψ_Y中的系数均为一。因此，当 $a > 0$足够小时，边界 $(1 - a)\Psi_Y + aC_Y$是有效 klt 的，且其负对数除子数值有效且大。由 Kodaira 引理和一个小扰动可得一个 klt 对数 Fano 边界。

对 $D_Y = -(K_Y + \Theta_Y)$运行极小模型纲领。在一个 Fano 型模型上，有理除子 D 的一个小倍数与一个 klt 对数除子 $\mathbb{Q}$-线性等价：将 $\epsilon D - (K_Y + C')$的一个有效代表元加到 klt 对数 Fano 边界 C'上。由 [13,定理 1.6]，所得带丰性缩放的极小模型纲领终止。这里

$$D_Y \sim_{\mathbb{Q}} Q + (\Omega_Y - \Theta_Y) \sim_{\mathbb{Q}} (1 - t)h^*N + (\Omega_Y - \Theta_Y)$$

是伪有效的。因此，输出在双有理意义下是数值有效的。F的不可约分支均未被收缩，因为有效代表元 $Q + \Omega_Y - \Theta_Y$在覆盖该不可约分支的一般收缩曲线上具有非负次数。目标空间是 Fano 型的，且 Ψ_Y 的主对数除子保正则形式地传递。这给出了一个具有非空下取整部分的对数典范对（W， Θ_W）。如果 $t < 1$，则 D_Y的大性推出 N_W的大性。

在具有映射 $u : U \to Y$ 和 $v : U \to W$ 的公共解消上，由负性得到 $u^*D_Y = v^*N_W + E$、 $E \geq 0$。因此

$$v^*(K_W + \Theta_W) \geq u^*(K_Y + \Theta_Y) \geq u^*h^*(K_X + B).$$

对于 W上的一个补，使用同一个有理函数定义 $n(K_X + B^+)$。所显示的不等式给出 $B^+ \geq B$ ，而相等的主拉回给出对数典范性。整性和单调性蕴含了（1.1）中的取整不等式。□

对于一个有理 DCC 集 $I \subset [0, 1]$，记作

$$I^{\mathrm{adj}} = \{1\} \cup \left\{ \frac{m - 1 + f}{m} \leq 1 : \ m \in \mathbb{Z}_{>0}, \ f \in (I \cup \{0, 1\})_+ \right\},$$

其中，下标表示有限和，包括零。该集合满足下降链条件，并包含除子伴随的系数，包括在某个

非正规取整分量的正规化上 [61, 命题 2.7]。对于有限的 I，它是具有有限种子的超标准集合，因为只会出现有限多个和 $f \le 1$ 。

引理 3.22. 对于一个有理 *DCC* 集 $J \subset [0,1]$，存在正常数 $\eta_{\mathrm{lc}}(J)$和 $\eta_{\mathrm{num}}(J)$，它们关于特征 $p > 5$是一致的，并具有以下性质。

(1) 设 $\mathbb{Q}$ 阶乘 *klt* 三维簇 V 定义在代数闭域上，且 $C \ge 0$ 满足 系数 $C \subset J$。若 $(V, (1-\eta)C)$ 对 $0 < \eta < \eta_{\mathrm{lc}}(J)$是对数典范的，则 (V, C) 是对数典范的。

(2) 设 (T, C) 是定义在任意特征为 $p > 5$ 的域上的一维或二维对数典范射影对，且其系数 $C \subset J$。若 C' 是有理的，且 $K_T + C'$$\mathbb{Q}$-*Cartier*，并且$(1-\eta)$ $C \le C' \le C$, $K_T + C' \equiv 0$, $0 < \eta < \eta_{\mathrm{num}}(J)$，则 $C' = C$。

证明。 对于（1），反例给出了从下方趋近于 1 的阈值 lct$(V,\ 0;\ C)$，这与一致 ACC [61, 定理 1.5]相矛盾。对于（2），取满足 $\eta_i \to 0$ 的反例。 C_i' 的系数集的并集满足 DCC：严格递减的序列将有一个指标趋于无穷的子序列，而 C_i 中相应的系数将从上方趋近同一个极限。曲线和曲面的全局 ACC [20, 命题 5.4], [61, 定理 1.4], 说明，C_i'-系数属于一个有限集。对于曲面，使用保正则形式 dlt 修改，它只增加系数为一的素除子 [57, 定理 4.7 和注 4.8]。沿着一个子序列， $C_i - C_i'$ 的一个不可约分支于是具有固定的 C_i'-系数 $c > 0$，而其C_i-系数属于 $(c,\ c/(1-\eta_i)]$,，这与 J的 DCC 相矛盾。□

命题 3.23。 固定一个包含0、1的有理 *DCC* 集 $I \subset [0,1]$。存在一个有理数 $\eta = \eta(I) > 0$，其与特征 $p > 5$无关，并具有以下性质。设$(X, B = \sum b_j B_j)$ 是一个三维射影 $\mathbb{Q}$-阶化的 *Fano* 型对数正则对，其中系数 $B \subset I$、 $\lfloor B \rfloor \ne 0$ 属于 $I \subset [0,1]$，且 $N = -(K_X + B)$ 是数值有效的。令

$$\Theta = \sum_{b_j \le 1-\eta} b_j B_j + \sum_{b_j > 1-\eta} B_j .$$

$-(K_X + \Theta)$ 的一个极小模型纲领在双有理意义下终止于一个具有数值有效负对数除子的 $\mathbb{Q}$-阶化对数正则对(W, Θ_W)，该对为 *Fano* 型，并保留 $\lfloor \Theta \rfloor$的每个不可约分支。其单调的 n-补传递到(X, B)，且指标相同。对于 $I = \Phi(R)$， Θ_W 的系数属于固定有限集 $J(R) = (\Phi(R) \cap [0, 1-\eta]) \cup \{1\}$。

证明。 取 $0 < \eta < 1/2$ 如下 $\eta_{\mathrm{lc}}(I)$、 $\eta_{\mathrm{num}}(I)$ 和 $\eta_{\mathrm{num}}(I^{\mathrm{adj}})$。根据 [1, 推论 1.5] 和引理 3.8, 除子 N 是半丰沛的。通过半丰扰动将 B 补全为对数典范对数 Calabi–Yau 边界 $B + P$。按照命题 3.21 运行极小模型纲领。该补全保持保正则形式，且双有理模型仍为 Fano 型。由于 $(1-\eta)\Theta_i \le B_i \le \Theta_i$，引理 3.22 使每个 $(X_i,\ \Theta_i)$ 都是对数典范的。在一个除子步f 中: $X_i \to X_{i+1}$ 收缩 E时，根据 $-(K_{X_i} + \Theta_i)$ 的负性， E 在 $K_{X_i} + \Theta_i - f^*(K_{X_{i+1}} + \Theta_{i+1})$ 中的系数为负。如果 $E \subset \lfloor \Theta_i \rfloor$，则其相对于目标空间的保正则形式系数将超过一。

假设存在一个森纤维终点 $g\colon W \to T$。由于 P_W 是有效的，且 $K_W + B_W + P_W \sim_{\mathbb{Q}} 0$、 $K_W + B_W$ 在纤维射线上的次数非正，而 $K_W + \Theta_W$ 的次数为正。对某个有理数 $0 \le u < 1$，对数典范边界 $\Gamma = B_W + u(\Theta_W - B_W)$ 具有 $K_W + \Gamma \equiv_T 0$。它满足 $(1-\eta)\Theta_W \le \Gamma \le \Theta_W$。当 $\dim T > 0$ 时，在正规泛纤维上应用引理 3.22 的第 (2) 部分，得到 $\Gamma|_{W_{k(T)}} = \Theta_W|_{W_{k(T)}}$，这与其在纤维射线上的正性矛盾。

若 T 是一个点，取 $\lfloor B\rfloor$ 的一个存留分支 S。对其正规化应用伴随公式，得到对数典范边界 Γ_S，Θ_S。公式 $\mathrm{Diff}_{S^\nu}(\Gamma-S)=\mathrm{Diff}_{S^\nu}(0)+(\Gamma-S)|_{S^\nu}$ 及其关于 Θ_W 的类似公式给出

$$(1-\eta)\Theta_S\le\Gamma_S\le\Theta_S,\qquad K_{S^\nu}+\Gamma_S\equiv 0,\qquad \operatorname{coeff}\Theta_S\subset I^{\mathrm{adj}}.$$

第 (2) 部分给出等式，但 $\Theta_W-\Gamma$ 是一个非零有效除子，因 $\rho(W)=1$ 而丰沛。它在 S^ν 上的限制不可能为零。因此，极小模型纲领有一个数值有效输出。在一个公共解消上，由负性可得 $v^*(K_W+\Theta_W)\ge u^*(K_X+\Theta)\ge u^*(K_X+B)$。如命题 3.21 中那样转移定义有理函数。□

推论 3.24。对于系数属于 $\Phi(R)$ 的非 *klt* 数值有效且大对的有界补，只需处理具有非空下取整部分、系数属于 $J(R)$ 且对数除子负部数值有效且大的 $\mathbb{Q}$-阶乘对数典范 *Fano* 型三维簇。

证明。取一个 crepant dlt 修改；由命题 3.21 中的混合论证，它属于 Fano 型，然后应用命题 3.23。若其数值有效输出不是大除子，则使用定理 3.20 和推论 3.10，以 R 为种子，因为 $J(R)\subset\Phi(R)$。然后将补转移回来。□

命题 3.25. 设 (X,B) 是特征 $p>5$ 下的有理射影非 *klt lc* 三维簇对，其中 X 为 *Fano* 型，且 $N=-(K_X+B)$ 数值有效且大。存在一个射影双有理态射 $h\colon Y\to X$，其源自一个 *Fano* 型的 $\mathbb{Q}$-阶乘三维簇，并带有一个有效边界 B_Y，使得

$$K_Y+B_Y=h^*(K_X+B),\qquad \operatorname{coeff}B_Y\subset\operatorname{coeff}B\cup\{1\}.$$

在 Y 上存在一个有理纯对数终端边界 Γ，其素下取整为 $S\subset\lfloor B_Y\rfloor$，且 $-(K_Y+\Gamma)$ 丰沛。特别地，S 是 *Fano* 型正规曲面，且补以相同指标下降。

证明. 如推论 3.24 所示，从一个 Fano 型的 crepant dlt 修改开始，并将其重新记为 (X,B)。对于一个 klt 对数 Fano 边界 C，取足够小的有理数 $\tau>0$ 和一个 Kodaira 分解 $N-\tau C\sim_{\mathbb{Q}}A+G$，其中 A 丰沛且 $G\ge 0$。对足够小的 $0<\varepsilon<\tau/2$，令

$$\widetilde{B}=(1-\varepsilon)B+\varepsilon C,\quad G_\varepsilon=G+(\tau-\varepsilon)C,\quad H_\varepsilon=G_\varepsilon+\varepsilon B.$$

$\widetilde{}$对 (X,B) 是 klt 的，且其负对数除子 $N_{\widetilde{B}}\sim_{\mathbb{Q}}A+H_\varepsilon$ 丰沛。取 ε 足够小，使得 $A+\varepsilon C$ 丰沛。

若 $\mathrm{Supp}(G+C)$ 不含 (X,B) 的对数典范中心，则对足够小的 $\delta>0$，$\Omega=B+\delta G_\varepsilon$ 为 dlt。其负对数除子与 $(1-\delta)$ $N+\delta$ $(A+\varepsilon C)$ 等价，因而丰沛。否则，取一个中心包含于 $\mathrm{Supp}(G+C)$ 的 lc 位 E。商$\sim_{\widetilde{}a}(E,X,B)/\operatorname{ord}_E H_\varepsilon$ 为 $O(\varepsilon)$，故 $u_\varepsilon=\mathrm{lct}(X,B;H_\varepsilon)<1$ 趋于零。对数典范的、$\widetilde{}$非 klt 边界 $\Omega=B+u_\varepsilon H_\varepsilon$ 趋于 B。其负对数除子与 $(1-u_\varepsilon)N_{\widetilde{B}}+u_\varepsilon A$ 等价，因而丰沛。在 $B+C+G$ 的固定对数解消上，对足够小的 ε，Ω 的每个系数为一的不可约分支在 B 中的系数也已经为一。对数光滑子对的 lc 位来自系数为一的分层，因此 Ω 的每个 lc 位都是 B 之一。

如果 $\lfloor\Omega\rfloor$ 有一个不可约分支 T，它就包含在 B 的 dlt 整数部分中，因此 (X,T) 是纯对数终端的。将 Ω 朝 T 作一个小的凸扰动，得到 Γ。否则，取一个保典范的 dlt 修改 $\rho\colon(Z,\Omega_Z)\to(X,\Omega)$，其中 $F=\lfloor\Omega_Z\rfloor=\mathrm{Exc}(\rho)_{\mathrm{red}}$。在 $\mathbb{Q}$-阶乘的 X [27，上运行 (K_Z+F)-极小模型纲领。定理 1.1]。在每个模型上，与 $\rho_i^*K_X$ 的不同均为有效例外除子，且每个例外系数都等于

正差异 $a(E_i,\ X,\ 0)$。负性迫使它在数值有效输出上消失。该输出在 X 上是小的，因此由 $\mathbb{Q}$-阶乘性可知它等于 X 。最后一步是一个除子收缩 $g\colon\ Y \to X$，其例外素除子为 T；$(Y,\ T)$ 是纯对数终端的，且$-(K_Y + T)$ 是 g-丰沛的。

Ω-对在 X 上仍然保正则形式，因此 T 是 B 和 $B_Y = B^{\sim} + T$ 的 lc 位。对于充分小的 $\lambda > 0,\ \Gamma = (1-\lambda)\Omega_Y + \lambda T$ 是纯对数终端的，其负对数除子是丰沛的，因为 $(1-\lambda)g^*(-(K_X + \Omega)) + \lambda(-(K_Y + T))$。对下取整降低一级便得到 Fano 型。对 T 应用伴随公式得到一个 klt 对数 Fano 曲面。复合这些态射得到所述的保 K 模型，而主函数下降保持指标不变。□

命题 3.26。设 (X, B) 是特征 $p > 5$ 下一个射影 $\mathbb{Q}$-阶乘的 ***Fano*** 型对数典范三维簇对，且 $N = -(K_X + B)$ 数值有效且大。设 Γ 是一个有理纯对数终端边界，其素下取整为 $S \subset \lfloor B \rfloor$，且 $A = -(K_X + \Gamma)$ 丰沛。固定$n > 0$，其中 $D = nN$ 为整 ***Weil***。存在一个有限的 $-S$-极小模型纲领

$$X = X_0 \dashrightarrow \cdots \dashrightarrow X_l = W, \qquad g : W \to T,$$

以莫里纤维空间结束，并具有以下性质。

(1) 相邻的双有理压缩发生在有理参数 $0 \le r_1 \le \cdots \le r_l \le r_*$，其中 $r_* > 0$ 是 g的参数。在参数为 r的每次压缩中，$D_i - rS_i$ 是数值有效的，并且沿该压缩下降。在相邻参数之间，相应的除子是数值有效的。***(2)*** X_i 是 ***Fano*** 型的，而有效纯对数终端对数 ***Calabi–Yau*** 边界在 X 上的严格变换 Ω_i 是保典纯对数终端的，其下取整为 S_i，且 $\Omega_i - S_i$ 是大的。***(3)*** 每个 S_i 都是正规簇，带有 ***klt*** 对数 ***Fano*** 边界 $\Xi_i \ge \Delta_i^0$：=不同$_{S_i}(0)$。***(4)*** 除子 S_W 是 g-丰沛的，并且对于 T上的数值有效有理 ***Cartier*** 除子 A_T，$H_* :=\ D_W - r_*S_W \sim_{\mathbb{Q}} g^*A_T$ 。

证明。取 $Q \sim_{\mathbb{Q}} 2A$为有效除子，使得（$X,\ \Gamma+Q$）是对数典范的，并令 $\Omega^0 = \Gamma + Q/2$。于是 Ω^0是纯对数终端对数 Calabi–Yau，而 $\Theta^0 = \Omega^0 - \epsilon S$对于 $0 < \epsilon < 1$是大 klt，其中 $K_X + \Theta^0 \sim_{\mathbb{Q}} -\epsilon S$。这些模型仍然是 Fano 型的。中心 S 得以保留，因为它在选定射线上为正，而被压缩素除子在这些射线上具有负次数。因此，根据引理 3.9，Ω^0-对仍然是保正则形式的纯对数终端的。

数值有效且大的 D 通过[1, 推论 1.5]定义了到正规簇 V 的双有理压缩。首先运行带有缩放的 $-S$-极小模型纲领 over V，其中缩放的是所选取的 cA 的有效代表元，以保持 klt。这由 [13, 定理 1.6]保证终止。其压缩均发生在参数零处，且 D_i 从 V拉回。缩放方程 $(-\epsilon S_i + \lambda c A_i)\cdot R = 0$ with $\lambda > 0$ 给出 $A_i \cdot\ R > 0$。

输出在 V 上是 $-S$-数值有效的。由于 Fano 型模型的曲线锥是有理多面体的，对于足够小的有理数 $\delta > 0,\ \ D - \delta S$ 在该处数值有效且大。通过半丰扰动，选取一个有效代表元 $C \sim_{\mathbb{Q}} (\epsilon/\delta)D$，使其与 Θ^0 的严格变换相加后为 klt。使用 [13, ，按照 C 缩放运行极小模型纲领，依据定理 1.5]。在缩放参数 $\lambda > 0$ 处，其数值有效除子是 $D_i - rS_i$, $r = \delta/\lambda$ 的正倍数。随着 λ 减小，这些除子随参数递增；由凸性可知，在每个中间区间内也数值有效。数值有效支撑沿相应的收缩数值平凡，并通过相对无基点性下降。在底空间上作有理主调整，可使每次下降都成为除子相等。由于 $-S_i$ 与丰沛除子的平方的交为负，该纲领以莫里纤维空间结束；在该空间中，S_W 相对丰沛，且 $D_W \cdot R = r_* S_W \cdot R > 0$。相对无基点性给出了 H_* 的所述下降；若底空间是一个点，则使用引理 3.8。

为控制到中心上的限制，取接近 1 的有理数 $a<1$，并令 $\Gamma_a = aB + (1-a)\Gamma$，$A_a = -(K_X+\Gamma_a) = aN + (1-a)A$。该对是纯对数终端的，下取整为 S，且 A_a 丰沛。当参数为零时，$N_i \cdot R = 0$, $A_i \cdot R > 0$；当参数为正时，$N_i \cdot R > 0$。步骤有限，因此我们可以确保每一步都有 $A_{a,i} \cdot R > 0$。与 Ω^0，一样，用足够稀释的 $P \sim_{\mathbb{Q}} A_a$ 补全 Γ_a，得到一个纯对数终端的对数 Calabi–Yau 边界 $\Omega = \Gamma_a + P$。其严格变换仍然保正则形式的纯对数终端，且 $\Omega_i - S_i$ 仍然是大除子，因为 P 是大除子。

在一个双有理步骤中，对于从公共解消到源空间和目标空间的映射 u，v，负性给出 $v^*A_{a,\ i+1} = u^*A_{a,\ i} + E$, $E \geq 0$ [13, 引理 2.3]。例外除子 E 不包含 S_i 的严格变换，因此 $A_{a,\ i}$ 到 S_i 的限制映射仍然是大的。特别地

$$\Omega_{S_i} - \Delta_i^0 = (\Gamma_{a,i} - S_i + P_i)|_{S_i}$$

是有效且大的，因为它包含 $P_i|_{S_i} \sim_{\mathbb{Q}} A_{a,\ i}|_{S_i}$。将这个不同写作 $Q_i \sim_{\mathbb{Q}} A_i^S + E_i^S$，其中 A_i^S 是丰沛的，且 $E_i^S \geq 0$。当 $v_i > 0$ 足够小时，边界 $\Xi_i = \Delta_i^0 + (1-v_i)Q_i + v_iE_i^S$ 具有所需的性质。□

定理 3.27 (提升消失的约化)。给定命题 *3.26* 的数据，令 $M = \lceil r_* \rceil$，$a_* = M - r_* \in [0,1)$ 和 $L_* = D_W - MS_W = H_* - a_*S_W$。存在一个满射

$$H^1(W, \mathcal{O}_W(L_*)) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X(D-S)).$$

如果 T 是一个点，则左侧的群消失。

证明。对于 X_i上的任意数值有效整魏尔 H，引理 3.6 的实际限制商 $\mathcal{O}_{S_i}(G_H)$ 满足 $G_H \sim_{\mathbb{Q}} H|_{S_i} - \delta_H$，其中 $0 \leq \delta_H \leq \Delta_i^0$。边界 $\Xi_i - \delta_H$是有效 klt，并且

$$G_H - (K_{S_i} + \Xi_i - \delta_H) \sim_{\mathbb{Q}} H|_{S_i} - (K_{S_i} + \Xi_i)$$

是丰沛的。因此，根据 [1, 定理 1，$H^{>0}(S_i,\ \mathcal{O}_{S_i}(G_H)) = 0$ 1]。

在参数 r处，[31, 引理 4.3] 确定了两个模型上整魏尔除子 $(D_i - rS_i) - bS_i$、$0 \leq b \leq 1$的上同调。支撑除子 $D_i - rS_i$下降，而 bS_i 则计入沿 plt 中心的分数修正。对于翻转，在公共收缩目标的两侧分别应用该结论。

对于 $1 \leq j < M$，取模型 $X^{(j)}$，它是在参数至多为 j的双有理步骤之后得到的，并令 $X^{(M)} = W$。$X^{(j)}$ 上的除子 $D_j - jS_j$ 是数值有效的。其限制序列与前述曲面消失定理给出

$$H^1(X^{(j)}, \mathcal{O}(D_j - (j+1)S_j)) \twoheadrightarrow H^1(X^{(j)}, \mathcal{O}(D_j - jS_j)).$$

传输将源群与 $X^{(j+1)}$ 上相应的群等同，因为每个中间参数 $r \in (j,\ j+1]$ 都具有 $0 \leq j+1-r < 1$。在初始步骤 $r \in [0,1]$ 中，传输适用于具有 $b = 1-r$ 的 $D_i - S_i$。复合后得到满射，即使在 $M = 1$ 时也是如此。如果 T 是一个点，则 $(W,\ S_W)$ 是纯对数终端的，并且 $-(K_W + S_W) \sim_{\mathbb{Q}} \Omega_W - S_W$ 由大性可知是丰沛的，而 $\rho(W) = 1$。于是定理 3.7 适用于整 Weil 除子 L_*。□

3.3. 莫里纤维空间上的消失与补的提升。 当莫里基底为曲面时，我们对一维纤维的收缩使用相对消失。

引理 3.28。设 $f\colon X \to Z$ 是一个射影簇，其中 X 是特征为 $p > 5$ 的代数闭域上的正规 $\mathbb{Q}$-阶乘 *klt* 三维簇。若 P 是一个整 *Weil* 除子，满足

$$\dim X_z \le 1 \quad \textit{for every } z \in Z, \tag{3.5}$$

$$A := P - K_X \quad f\textit{-ample}, \tag{3.6}$$

then

$$R^1 f_* \mathcal{O}_X(P) = 0. \tag{3.7}$$

证明。强 F-正则轨迹 $U \subset X$ 包含余维二点，这是 [50, 定理 1.2], 因此其补是有限的。取 $E \ge 0$ 整 Weil，使其$E - K_X$ 为Cartier，并将 K_X 的卡蒂埃指标写为 mp^a, $p \nmid m$。当 $\ell > a$ 充分大时，令

$$\Theta_\ell = E/(p^\ell - 1), \tag{3.8}$$

$$m(p^\ell - 1)(K_X + \Theta_\ell) = m\big[p^\ell K_X + (E - K_X)\big], \tag{3.9}$$

$$A_\ell = P - (K_X + \Theta_\ell) = A - \Theta_\ell. \tag{3.10}$$

中间的除子是Cartier，因此对数指数与 p互素。通过小的有效扰动和拟紧性，$(U,\ \Theta_\ell)$ 是强 F-正则的，并且 A_ℓ仍然是$\sim$ $\sim f$-丰沛的。固定 $\Theta_\ell = \Theta$ 和 $A_\ell = A$。对 U 取有限覆盖，并利用迹的传递性$\widetilde{\ }$，得到一个指数 $e > 0$，使得 $(p^e - 1)(K_X + \Theta)$ 是 Cartier，并且

$$\mathrm{Tr}_e : F_*^e \mathcal{O}_X((1 - p^e)(K_X + \widetilde{\Theta})) \to \mathcal{O}_X \tag{3.11}$$

其迭代在 U上是满射的。令 $q = p^{ne}$

$$M_q = (1 - q)(K_X + \widetilde{\Theta}) + qP = P + (q - 1)\widetilde{A}. \tag{3.12}$$

将迹扭曲后限制在正则轨迹上，再自反地延拓，得到

$$\tau_{q,P} : F_*^{ne} \mathcal{O}_X(M_q) \to \mathcal{O}_X(P). \tag{3.13}$$

将迹与 $\mathcal{O}_X(P)$ 张量后，在 U 上得到一个满射。根据有限态射投影公式和除子层的自然乘法，该满射经由 $\tau_{q,\ P}$分解。因此，余核 $\mathcal{C}_q$ 的支集包含于 $X \setminus U$。令核为 $\mathcal{K}_q$，像为 $\mathcal{I}_q$，则有如下正合列:

$$0 \to \mathcal{K}_q \to F_*^{ne} \mathcal{O}_X(M_q) \to \mathcal{I}_q \to 0, \tag{3.14}$$

$$0 \to \mathcal{I}_q \to \mathcal{O}_X(P) \to \mathcal{C}_q \to 0. \tag{3.15}$$

$\widetilde{\ }$对于 rA Cartier，设 $q - 1 = a_q r + b_q$, $0 \le b_q < r$，则 $\mathcal{O}_X(M_q)$ 可表示为$\widetilde{\ }$有限个经 $a_q rA$ 扭曲的凝聚层之一。由相对 Serre 消失定理及 Frobenius 的有限性可得，对于 $q \gg 0$,

$$R^1 f_* \mathcal{O}_X(M_q) = 0, \tag{3.16}$$

$$R^1 f_* F_*^{ne} \mathcal{O}_X(M_q) = F_{Z*}^{ne} R^1 f_* \mathcal{O}_X(M_q) = 0. \tag{3.17}$$

纤维界给出

$$R^2 f_* \mathcal{K}_q = 0. \tag{3.18}$$

这些正合列给出 $R^1 f_* \mathcal{I}_q = 0$，进而得到 $R^1 f_* \mathcal{O}_X(P) = 0$，因为 $R^1 f_* \mathcal{C}_q = 0$。 □

命题 3.29. 在定理 *3.27* 的设定下，假设 维数$T = 2$。那么$a_* = 0$且 $H^1(W, \mathcal{O}_W(L_*)) = 0$。

证明。记 $S = S_W$ 和 $\Omega_W = S + \Delta$。在 $K = k(T)$ 上的一般纤维 F 是正则的，且 $H^0(F, \mathcal{O}_F) = K$。令 $d = \deg S_F > 0$ 且 $e = \deg \Delta_F > 0$，后者由 Δ的大性可得。对数 Calabi–Yau 等式给出

$$2h^1(F, \mathcal{O}_F) - 2 + d + e = 0.$$

因此 $h^1 = 0$ 且 $d = 1$，所以由黎曼–罗赫定理 $F \simeq \mathbb{P}^1_K$ [54, Tag 0C6U]。特别地 $\mu = g|_S\colon S \to T$ 是双有理的。整除子 $L_*|_F$ 的次数为 $-a_* d$，因此$a_* = 0$。

每个纤维的维数都是一。否则，位于 T的一个闭点上方的素曲面 E 在 T上数值平凡，因为 $\rho(W/T) = 1$，且它与 F不相交。相对底空间无基点性使某个 Cartier 倍数成为半丰沛的，而其收缩在 g 的纤维上为常值，因为 $E \equiv_T 0$。于是其斯坦因目标在 T上有限双有理，因此 $E \sim_{\mathbb{Q}} g^* A_E$。给出这一等价关系的有理函数在 F上限制为常值，故来自 K^*。将其除子吸收到下方后，可将 E 表示为实际的拉回，这不可能支集于一个点上。

通过主调整，利用 $F \simeq \mathbb{P}^1_K$ 和次数为零使 L_* 垂直。对有理函数应用相同的论证可得等式 $L = g^* A$，其中 L 是经过调整的整除子，而 A 是数值有效有理 Cartier。令 $\mathcal{O}_S(G)$ 表示关于 L 的限制商。作为 K 的子层，我们有

$$g_* \mathcal{O}_W(L) = \mathcal{O}_T(\lfloor A \rfloor) = \mu_* \mathcal{O}_S(G). \tag{3.19}$$

事实上，$\mathcal{O}_W(L)$ 的截面在 F 上为常数。对于来自 K 的函数，W 上的除子不等式通过拉回等价于 T 上的除子不等式，从而得到第一个等式以及到右侧层的包含关系。反过来，$\mathcal{O}_S(G)$ 的局部截面 s 局部提升为 $\mathcal{O}_W(L)$。如果 qA 是 Cartier，则该提升的 q 次幂限制为 $\mathcal{O}_S(\mu^*(qA))$ 的一个截面。在 T 的一个素除子 P 上方的一般点处，此处 μ 为同构，这给出 $q\,\mathrm{ord}_P(s) + q\,\mathrm{coeff}_P A \geq 0$。由于 $\mathrm{ord}_P(s)$ 是整数，在所有素除子处的不等式使得 s 属于 $\mathcal{O}_T(\lfloor A \rfloor)$。

除子 $L - K_W$ 在 F 上按其次数二以及 $\rho(W/T) = 1$是 g-丰沛的。因此$R^1 g_* \mathcal{O}_W(L) = 0$ 由引理 3.28得出。定理 3.27中的曲面消失定理给出$H^1(S, \mathcal{O}_S(G)) = 0$。对 μ 应用 Leray 得到 $H^1(T, \mu_* \mathcal{O}_S(G)) = 0$，而 (3.19) 以及对 g 应用 Leray 证明了该结果。□

在曲线上，一般纤维是一个曲面。我们证明每个闭纤维附近的相对消失，同时始终将分数项 $a_* S_W$ 保留在除子中。

引理 3.30。设 $h\colon Y \to X$ 是特征 $p > 5$下正规三维簇之间的射影双有理态射，并且有效的纯对数终端对满足 $K_Y + \Lambda_Y = h^*(K_X + \Lambda_X)$。若

$$h^* H_X = L_Y + \delta_Y, \qquad 0 \leq \delta_Y \leq \Lambda_Y,$$

其中 H_X 是有理 *Cartier*，L_Y 是整 *Weil*，且δ_Y的例外系数小于一，则 $h_* \mathcal{O}_Y(L_Y) = \mathcal{O}_X(h_* L_Y)$ 以及 $R^{>0} h_* \mathcal{O}_Y(L_Y) = 0$。

证明。这将 [31, 引理4.3] 的传输论证推广到例外分数系数。在 $L_X = h_* L_Y$ 与 $\delta_X = h_* \delta_Y$下，(L_X, δ_X)的通常Fujita变换为 L_Y，修正项为 δ_Y，并具有规定的拉回和。由此得到零阶直像。它同时也是 K-扭曲变换，因为在 X 上它等价于 $K_Y + \Lambda_Y - \delta_Y$，且互补边界是有效的，其例外系数小于一。

在公共对数解消上，关于 Y 的 K-扭曲变换同时也是关于 X的扭曲变换。它与通常变换之差是整例外的，其系数等于两个非负边界修正项之和减去保正则形式Λ-系数。这些系数比 -1多出纯对数终端无差异性，因此该差是有效的，且零阶像一致。两个消解映射的Grauert–Riemenschneider消失定理与Leray给出所断言的高阶像 [5, 定理3、定义8及断言9–11]。□

引理3.31。设 $f\colon X \to C$ 是从射影簇到光滑曲线的收缩，其中 X 是关于 C 的 $\mathbb{Q}$-阶乘三维法诺型簇，且其特征为 $p > 5$。假设 (X, B) 是有理对数典范的，$-(K_X + B)$ 在 C 上数值有效且大，并且非空的非 *klt* 轨迹包含于 X_z 中，其中 z为闭点。设 H 为有理 *Cartier* 除子，且对于 *{H}*的每个不可约分支 E，其系数$_E B >$ 系数$_E${H}。则存在一个无差异射影双有理模型 $h\colon (Y, B_Y) \to (X, B)$，仅抽取对数典范中心；还存在一个有理纯对数终端边界 Γ，使得

$$\lfloor \Gamma \rfloor = V \subset Y_z \ \textit{is prime}, \qquad -(K_Y + \Gamma) \ \textit{is ample over } C, \qquad \Gamma \geq \{h^* H\}.$$

这里的 Y 是 $\mathbb{Q}$-阶乘的，并且关于 C是法诺型的。

证明。使用命题 3.25中关于 C的构造。相对 Kodaira 分解和半丰扰动在对底空间进行丰沛扭曲后使用有效代表元。在第一个 crepant dlt 模型 $h_0 : X_0 \to X$上，δ_0 的支集上不等式$B_0 > \delta_0 :=\{h_0^* H\}$ 仍然成立，因为新抽取的 B_0 系数为一。在构造的两个分支中，我们可以选择 Ω_0 任意接近 B_0，使所有对数典范中心都位于 z 之上，并保留相对于δ_0 的严格不等式。最终向一个取整分量的扰动同样可以保留这些不等式。若改为抽取一个额外的素除子 V，则其 Γ-系数为一，从而支配那里的分数系数。相对丰沛性和法诺型性由该构造得到。□

命题3.32。设 $f\colon X \to C$ 是射影簇的一个收缩，其中X 是一个在光滑曲线上、定义于特征为 $p > 5$ 的代数闭域上的 *Fano* 型 $\mathbb{Q}$-阶化三维簇。设 (X, S) 是纯对数终端的，且 S 为素除子，S 和$-(K_X + S)$ f-丰沛。若 L 为整 *Weil* 且 $H = L + aS \sim_{\mathbb{Q},\, C} 0$, $0 \leq a < 1$，则$R^i f_* \mathcal{O}_X(L) = 0$ 对 $i > 0$成立。

证明。固定 $z \in C$ 闭，记 $F = f^* z$，并选取有理数 $a < b < 1$。置$t =$ lct$(X, bS; F)$。对数正则对 $B = bS + tF$ 在 z 上的非 klt 轨迹非空，并具有相对丰沛的负对数除子。对 $\{H\} = aS$应用引理3.31，并使用其 $h\colon Y \to X$、V和 Γ。记 $A = -(K_Y + \Gamma)$、$L_Y = \lfloor h^* H \rfloor$ 以及 $\delta_Y = \{h^* H\}$。当 $u < 1$ 充分接近 1 时，klt 边界 $bS + utF$在提取的素除子处具有保 crepant 系数 $1 - (1 - u)t\mathrm{ord}_E F$，因此其保 K 变换是有效的，并且支配 δ_Y。于是引理 3.30 给出

$$Rh_* \mathcal{O}_Y(L_Y) \simeq \mathcal{O}_X(L). \tag{3.20}$$

将 Γ 补全为相对 plt 对数 Calabi–Yau 边界 $\Omega = \Gamma + P$、$P \sim_{\mathbb{Q},\, C} A$。对 cA 的一个代表元进行带缩放的 $-V$-极小模型纲领，使其与 $\Omega - \varepsilon V$的和为 klt，且具有相对于 C的数值有效对数除子。根据 [23, 定理 2.12]，该过程终止。由于 $(fh)^* z = mV + F\prime$对于 $F\prime \geq 0$避开 V、$-V \sim_{\mathbb{Q},\, C} F\prime/m$是相对伪有效的。因此，输出 $g'\colon Y' \to C$具有 $-V\prime$数值有效性，且 V得以保留。Ω-对在整个过程中保持保正则形式的纯对数终端性质。除子 H 在每一步都下降为一个底空间拉回加一个有理主除子。其修正项受相应的

Ω 严格控制在 1 以下。在每次收缩以及每次翻转的两侧应用引理 3.30，可保持在 C上的导出像。

与 V' 相交的另一个纤维分支将包含一条具有正$V_\prime$次数的纤维曲线，这与 $-V'$的数值有效性矛盾。因此，由连通性可得 $g'^*z = m'V_\prime$，从而有 $V_\prime|_{V'} \sim_{\mathbb{Q}} 0$。记 S' 为 S 的推前，则在 $Y_\prime$ 上的修正为$aS' + dV_\prime$，其中 $0 \le d < 1$，因为位于 X 之上的新素除子均位于 z之上，而 $V_\prime$是剩下的唯一此类素除子。缩放方程在每条选定射线上给出 $A_i \cdot R > 0$。命题 3.26 中的限制映射论证保持 $A_i|_{V_i}$ 为大。我们有

$$\Omega_{V'} - \mathrm{Diff}_{V'}(aS') = (\Gamma_{Y'} - V' - aS' + P_{Y'})|_{V'}$$

有效且为大，因此 Kodaira 扰动给出一个 klt 对数 Fano 边界 $\Xi \ge \mathrm{Diff}_{V'}(aS')$。

对于每个整数 $j \ge 0$，使用关于 $L_{Y'} - jV_\prime$的正合限制序列。其商 $\mathcal{O}_{V'}(G_j)$ 具有 $G_j \sim_{\mathbb{Q}} -aS'|_{V'} - \epsilon_j$, $0 \le \epsilon_j \le \mathrm{Diff}_{V'}(0)$，因为 $H|_{V'} \sim_{\mathbb{Q}} 0$。边界 $\Xi - aS'|_{V'} - \epsilon_j$ 是有效 klt 的，其对数除子与 G_j 相差丰沛的 $-(K_{V'} + \Xi)$。根据 [1, 定理 1.1]，$H^{>0}(V_\prime, \mathcal{O}_{V'}(G_j)) = 0$。复合 m'个连续的限制映射以得到满射

$$R^i g'_* \mathcal{O}_{Y'}(L_{Y'}) \otimes \mathcal{O}_C(-z) \longrightarrow R^i g'_* \mathcal{O}_{Y'}(L_{Y'}), \qquad i > 0.$$

在 z 处，这些是由一个局部参数给出的乘法，因此 Nakayama 引理消去了茎。由传输以及(3.20)，对每个 z 都得到该结果。□

推论 3.33。对于曲线底空间 g： $W \to C$ 在定理 *3.27* 中， $R^i g_* \mathcal{O}_W(L_*) = 0$对于 $i > 0$。若 $a_* > 0$，则 $H^1(W, \mathcal{O}_W(L_*)) = 0$。

证明。除子 S_W 是相对丰沛的， $-(K_W + S_W) \sim_{\mathbb{Q}} \Omega_W - S_W$ 也如此，因为它在一般纤维上具有大性，并且 $\rho(W/C) = 1$。应用命题3.32。对于 $a_* > 0$，一般限制映射是反丰的且没有截面，因此无挠层$g_*\mathcal{O}_W(L_*)$ 为零。使用 Leray。□

引理 3.34。在定理 *3.27* 的曲线 *Mori* 端点处，若 $a_* = 0$ 且对于 $\mu = g|_{S_W}$有 $\mu_*\mathcal{O}_{S_W} = \mathcal{O}_C$，则 $H^1(W, \mathcal{O}_W(L_*)) = 0$。

证明。如果 L_* 没有一般纤维截面，则其推前为零，推论 3.33 适用。否则，其数值平凡的一般纤维限制是主的，因为截面的有效除子必为零。经过主调整，可使 L_* 垂直，从而由命题 3.29 得到 $L = g^*A$，其中 A 为数值有效有理 Cartier。这里主函数能够下降，是因为其在射影泛纤维上的限制既无零点也无极点，且 g 是一个收缩。特别地， $g_*\mathcal{O}_W(L) = \mathcal{O}_C(\lfloor A \rfloor)$。

令 $\mathcal{O}_S(G)$ 为 $S = S_W$ 上的限制商。我们还有 $\mu_*\mathcal{O}_S(G) = \mathcal{O}_C(\lfloor A \rfloor)$：斯坦假设将其一般纤维截面与 $k(C)$ 对应。对于局部截面 s，命题 3.29 的幂次论证表明，在 μ^*z的一个不可约分支 E 上，其重数为 $e_E > 0$，

$$qe_E(\mathrm{ord}_z(s) + \mathrm{coeff}_z A) \ge 0$$

对于 qACartier。这给出了所需的包含关系，而反向包含来自W上的限制映射。定理 3.27 的曲面消失定理给出 $H^1(S, \mathcal{O}_S(G)) = 0$。现在对 μ 和 g 应用 Leray，得到 $H^1(W, \mathcal{O}_W(L)) = 0$。□

对于曲线上方的水平 plt 中心，我们还需要确定其斯坦因分解中的有限映射。

引理 3.35。 设 T 是定义在特征为 $p>5$ 的 F有限域K 上的正规射影整曲线。若 (T,Δ) 是 *klt* 对数 *Fano*，且 Δ 的系数为标准系数，则它是全局 F-正则的。

证明。 将 T视为定义在其有限常数域 $K'=H^0(T,\mathcal{O}_T)$上的曲线。由于有限态射 Spec $K'\to$Spec K的相对对偶化模在 K'上是一维的，根据对偶性，定义在 K 和 K' 上的典范类相同。对具有标准系数的、定义在 K' 上的对数 Fano 对应用 [50, 命题 5.5]。整体F-正则性在任一域上都使用相同的绝对 Frobenius。□

引理 3.36。 设 V 是定义在正特征 F-有限域上的正规射影 $\mathbb{Q}$-阶乘曲面。设(V,T) 是纯对数终端的，且 T是正规素除子，$-(K_V+T)$丰沛。若$(T,$ 不同$_T(0))$ 整体 F-正则，则 $H^0(V,\mathcal{O}_V)\to H^0(T,\mathcal{O}_T)$ 是满射。

证明。 写作 $D=K_V+T$，选取其代表元，使其沿T的系数为零。取一个 Cartier除子 $C_D\geq D$，使其沿 T的系数也为零；这可通过用一个充分丰沛的线丛扭曲$\mathcal{O}_V(-D)$，再利用整体生成来实现。置$E=C_D-D$。对于被 p 整除且 ND 为 Cartier 的 N，取足够大的 $q=1+kN$，并令$\Lambda_q=E/q$。于是 $q(D+\Lambda_q)=kND+C_D$ 是 Cartier，且 $p\nmid q$。当 q充分大时，对$(V,\ T+\Lambda_q)$是纯对数终端对数 Fano 对，且 $\Delta_q=$Diff$_T(0)+E|_T/q$是其不同。

在 T 上的整体 F-正则性在某个指数 e_0 处给出一个带有额外整除子 $G_T\geq E|_T$ 的分裂。增大 q，使得 $(p^{e_0}-1)E|_T/q\leq G_T$。这在 e_0处为 Δ_q 给出一个分裂，而迭代则在 e_0的所有倍数处给出分裂，其中迭代除子支配取整后的边界。取任意大的此类 e，使得 $q\mid p^e-1$。对于丰沛 Cartier 除子 $M_e=(1-p^e)(D+\Lambda_q)$，Frobenius 伴随将沿 T 的商迹与由 Δ_q [18, 定理 5.3] 定义的迹对应起来。因此，下图交换:

$$\begin{array}{ccc} H^0(V,F^e_*\mathcal{O}_V(M_e)) & \longrightarrow & H^0(T,F^e_*\mathcal{O}_T(M_e|_T)) \\ \downarrow\varphi_V & & \downarrow\varphi_T \\ H^0(V,\mathcal{O}_V) & \longrightarrow & H^0(T,\mathcal{O}_T). \end{array}$$

迹通过其在 T 的一般点处的系数为一公式保持 T 的理想，而 Frobenius 不同与普通不同子式相等，从而在正规曲线上得到商迹。右箭头由于分裂而为满射。对于足够大的 e，顶端箭头由 Serre 消失定理保证为满射，其中对象为经 M_e 扭曲的 $\mathcal{O}_V(-T)$，而 M_e 是固定丰沛 Cartier 除子的不断增大的倍数。底端箭头随之成立。□

命题 3.37 （plt 中心的斯坦因分解）。 设 $f:X\to C$ 是从正规 $\mathbb{Q}$-阶乘三维簇到代数闭域上光滑曲线的射影收缩，域的特征为 $p>5$。假设 (X,S) 是纯对数终端的，且 S 是一个水平素除子，$-(K_X+S)$ f-丰沛。那么 $(f|_S)_*\mathcal{O}_S=\mathcal{O}_C$。

证明。 在 $K=k(C)$ 上，正规 $\mathbb{Q}$-阶乘纯对数终端曲面对 $(V,T)=(X_K,S_K)$ 具有 $-(K_V+T)$ 丰沛，且 $H^0(V,\mathcal{O}_V)=K$。klt 对数 Fano 伴随曲线具有标准系数 [26, 引理 3.3]。由于 K 是 F- 有限的，引理 3.35 和 3.36 得到 $H^0(T,\mathcal{O}_T)=K$。 $S\to C$ 的斯坦因分解中的有限映射是双有理的，因此由 C 的正规性可知它是同构。□

推论 3.38. 对于一个有限有理数集 $J\subset[0,1]$，存在一个 $n(J)>0$，具有以下性质。设 (X,B) Γ,S,N满足命题 *3.26* 的假设

且其系数 $B \subset J$。若 $H^1(X, \mathcal{O}_X(n(J)N - S)) = 0$，则 (X, B) 有一个单调的$n(J)$-补。

证明。根据伴随公式，对 (S, B_S) 是对数典范的，具有数值有效的负对数除子，且系数属于 J^{adj}。辅助的 plt 对数 Fano 对使 S 具有 Fano 型。选取$n = n(J)$，使其被 J 的分母以及 J^{adj} [31, 有限种子的补充指标整除（推论 3.26]）。于是 nB 是整的，并且 (S, B_S) 具有单调的n-补 B_S^+。

使用 [31, 命题 4.9]证明中的消解与限制映射计算。在其对数消解 $\phi\colon X' \to X$ 上，整除子 $L' + P'$ 与 P' 有效例外除子满足

$$\phi_*\mathcal{O}_{X'}(L' + P' - S') = \mathcal{O}_X(nN - S), \qquad R^{>0}\phi_*\mathcal{O}_{X'}(L' + P' - S') = 0.$$

这些陈述使用了整除子型层的比较以及 Grauert–Riemenschneider 消失。它们在底空间为一点时仍成立。Leray 以及所假设的整体 H^1-消失使到 S' 的限制映射在整体截面上为满射。因此，由 B_S^+ 确定的有效整剩余除子得以提升，从而得到 $G \geq 0$、$G \sim nN$，其中 $B^+ = B + G/n$ 和 $\mathrm{Diff}_S(B^+ - S) = B_S^+$，这由同一构造的精确伴随计算得到。

伴随反演使得 (X, B^+) 在 S [8, 附近为对数典范，见1]推论 10。若其在其他地方为非对数典范，则当 $c < 1$ 足够接近 1 时，$(X, cB^+ + (1-c)\Gamma)$ 在 S 附近将是纯对数终端的，在其他地方为非对数典范，并具有丰沛的负对数除子。其非 klt 轨迹将以 S 作为一个开且闭的不可约分支，这与连通性 [43, 定理 1 矛盾。因此，(X, B^+) 是对数典范的，而整性与单调性给出取整不等式。□

定理 3.39 (非例外补)。固定一个有限的 $R \subset [0,1] \cap \mathbb{Q}$。在充分大的特征下，且该特征仅取决于 R，令（X，B）为一个具有 X *Fano* 型、系数 $B \subset \Phi$（R），且 $L = -(K_X + B)$ 为数值有效且$\mathbb{Q}$-*Cartier* 的射影 *lc* 三维簇。如果某个有效有理 $P \sim_{\mathbb{Q}} L$ 使得（X，$B+P$）为非 *klt*，则（X，B）具有一个指标仅取决于 R 的单调补充。在这些假设下，这包括每一个非 *klt* 对。

证明。若 $0 < \nu(L) < 3$，则使用推论 3.10。若 $L \equiv 0$，则通过与一个丰沛平方求交可知，唯一可能的 P 是零。因此 (X, B) 是非 klt 的，而定理 3.20 给出了 $K_X + B$ 的阶的界。

假设 L 是大类。对于 klt 对 (X, B)，使用命题 3.21 得到一个非 klt 对。该约化会以相同指标将补提升回来。它还允许得到一个数值维数更小的输出，而这种情况已在上文讨论。对于大类情形中的非 klt 对，推论 3.24 将系数约化到一个固定的有限集中，而命题 3.25 则给出系数为一的曲面 S 及辅助的 plt 对。固定用于在推论 3.38 中提升曲面补的倍数 n。

将命题 3.26 应用于预备模型上的整 Weil 除子 $D = nL$。在点底或曲面底的情形下，定理 3.27 和命题 3.29 给出 $H^1(X, \mathcal{O}_X(D - S)) = 0$。在曲线底的情形下，命题 3.37 确定了 S 的斯坦因分解。随后，余项系数的两种情形分别由推论 3.33 和引理 3.34 覆盖。于是得到同样的消失。按照推论 3.38，在 S 上提升该截面，即可在预备模型上得到一个补。通过此前的双有理步骤将其传递到原对上。取特征界的最大值

以及指标的一个公倍数，并使用 (1.1)。最后，如果 $(X,\ B)$ 本身是非 klt 的，则每个补全都是非 klt 的，而半丰性至少给出一个。□

4. 双有理线性系与有界模型

4.1. 反典范截面与边界阈值。 令 q 消去 R 中的分母（取 $q=1$ 作为 $R=\varnothing$）。若 $q\mid n$ 且 $b\in\Phi(R)$，其中 $b<1$，则

$$\lfloor (n+1)b\rfloor = \lceil nb\rceil. \tag{4.1}$$

对于 $b=1-r/j>0$，记 $nr=aj+h,\ 0\le h<j$。由于 $0<h+r\le j$，两边均等于 $n-a$。对于 $b=0$，两边均消失。例外对没有系数为一的项。因此，对于这些对和这些 n，有

$$H^0\big(X,-nK_X-\lceil nB\rceil\big)\neq 0 \iff (X,B)\text{ has a monotonic }n\text{-complement.}$$

事实上，左侧线性系的一个有效成员 G 给出 $B^+=(G+\lceil nB\rceil)/n$。它是一个补，因此是 klt 的。反之，$nB^+-\lceil nB\rceil$ 就是这样的一个成员。

对于在光滑闭点 x 处的数值有效有理 Cartier 除子 A，*Seshadri* 常数

$$\varepsilon(A;x)=\inf_{C\ni x}\frac{A\cdot C}{\operatorname{mult}_x C}$$

衡量 mA 的截面在 x 处分离射流的渐近阶数，以 m 为单位。在将 x 沿例外除子 E 吹起后，同一个数是使 π^*A-tE 数值有效的 t 的上确界。对于丰沛的 A，通过射流分离可知，取充分高的 Cartier 倍数后，严格下界在某个开集上仍成立。

引理 4.1。 设 M 是正特征下正规射影三维簇上的整 *Weil* 除子，并假设 $A=M-(K_X+\Psi)$ 是一个针对有效有理 Ψ 的数值有效、大且半丰沛的 $\mathbb{Q}$-*Cartier* 除子。若光滑闭点 $x\notin$ 支集 Ψ 满足 $\varepsilon(A;\ x)>3$，则 M 的某个截面在 x 处非零。若 $\varepsilon(A;\ x)>6$，则该系统 $|M|$ 是双有理的。

证明。 首先假设 A 是丰沛的。对 $q=p^e$ 置 $D_q=(1-q)K_X+qM-\lceil(q-1)\Psi\rceil$。在正则轨迹上，将典范层上的 Frobenius 迹扭曲 $M-K_X$，并将源限制为 $\lceil(q-1)\Psi\rceil$。反身延拓给出

$$F_*^e\mathcal{O}_X(D_q)\longrightarrow\mathcal{O}_X(M).$$

令 π 爆破 Supp Ψ 之外的光滑闭点有限集 Z，其例外除子为 E。选取 $\beta\in\mathbb{Q}_{>0}$ 使得 $\pi^*A-\beta E$ 丰沛，并选取 r 使得 rA 为 Cartier，$r\Psi$ 为整且 $r\beta\in\mathbb{Z}$。写作 $q=rt+j$，由 $0\le j<r$ 得到$D_q=t(rA)+D_j$，其中 D_j 由相同的除子公式给出。置 $k_q=\lceil q\beta\rceil$ 和 $H=\pi^*(rA)-r\beta E$。于是

$$\pi^*\mathcal{O}_X(D_q)(-k_qE)=\pi^*\mathcal{O}_X(D_j)(-\lceil j\beta\rceil E)\otimes\mathcal{O}(tH).$$

右侧根据有限多个剩余层的 Serre 消失定理，对 $q\gg 0$ 有 H^1 消失。由于 $\mathcal{O}_X(D_q)$ 在 Z 附近可逆，并且 $\pi_*\mathcal{O}(-k_qE)=I_Z^{k_q}$，推前为 $\mathcal{O}_X(D_q)I_Z^{k_q}$。因此，Leray 给出了对源端喷流模 $I_Z^{k_q}$ 的满射性。

在 Z 的每一点处，使用相容坐标和平凡化，迹将$u=(z_1z_2z_3)^{q-1}$ 映射为 1，并将 $z_i^q u$ 映射为 z_i [42, 截面 3]。对于 $s=1,\ 2$，单项式包含

$$\mathfrak{m}^{3(q-1)+(s-1)q+1}\ \subset\ (\mathfrak{m}^s)^{[q]}$$

表明，这一阶的误差迹入 $\mathfrak{m}^s$，其中 $J^{[q]}$ 是由 J 的q次幂生成的理想。因此， $\beta > 3$ 在 Z 处给出任意值，而 $\beta > 4$ 给出任意一阶喷射。取 $Z = \{x\}$，当 $\varepsilon(A; x) > 3$ 时即可得到非消失。

对于 $\varepsilon(A; x) > 6$，取一个避开边界的开邻域，使其中的常数大于 6。对于此开集中的不同点 y、z，通过比较两条曲线重数之和与其最大值可知，两点 nef 阈值至少为较小单点常数的一半。取一个严格小于 nef 阈值的正参数，与一个较小的正参数作插值即可得到丰沛类。因此，可以在 $\beta > 3$ 上取截面，以在 $\{y、z\}$ 的吹起上分离这两个点。在 x 处的一阶喷射给出满微分秩，因此该线性系一般有限且可分地映到其像上。它在稠密开集上分离点，故次数为一。

若 A 数值有效、大且半丰沛，则其某个倍数定义一个双有理压缩 $f : X \to Y$，其中 rA 是从某个丰沛 Cartier 除子拉回的，且该结论对充分可整除的 r 成立。若一点满足 $\varepsilon(A; x) > 0$，则该点不在任何收缩曲线上。它在其纤维中是孤立的，因此由连通性和正规性可知，在 $f(x)$ 的某个邻域上方存在同构。在那里，通过取曲线的严格变换，Seshadri 常数相同。在 Y 上对有限多个层 $f_*\mathcal{O}_X(D_j)$ 应用前述射流计算。投影公式给出 X 上相同的整体源截面，我们在此应用迹。□

同样的喷射计数也给出了带零边界的例外 Fano 三维簇的体积界。令 $L = -K_X$ 并固定一个光滑点 $x_\circ$。x 的吹起具有对数差异三。对于每个 $G \in |mL|$，例外性给出 $\operatorname{mult}_x G < 3m_\circ$ 对于 Cartier 倍数 mL，在局部平凡化之后，限制映射到 $\mathcal{O}_{X,\,x}/\mathfrak{m}_x^{3m}$上的截面因而是单射的。由于该环的长度为 $\binom{3m+2}{3}$，比较首项得到

$$(-K_X)^3 \le 27. \tag{4.2}$$

引理 4.2。 固定一个有理 *DCC* 集 $J \subset [0, 1]$。存在一个整数 $m = m(J) > 0$，具有如下性质。设 (S, Θ) 是代数闭域上特征为 $p > 5$的射影 *lc* 曲面对，其中 系数 $\Theta \subset J$ 且 $D = K_S + \Theta$丰沛。则 $D^2 \ge m^{-2}$，并且在光滑轨迹的一个稠密开子集上， $\varepsilon(D;\ x) \ge m^{-1}$。

证明。 根据 [19, 定理 12]， $|\lfloor mD \rfloor|$ 对单个 $m = m(J)$ 是双有理的。在该系统的一个消解 π 上，写作 $m\pi^* D \sim_{\mathbb{Q}} H + F$，其中 H 是其自由部分，而 $F \ge 0$。事实上， $\lfloor mD \rfloor$ 的一个截面的除子不等式对 mD 也成立，因此其有理 Cartier 拉回支配相应的动除子。由于 H 定义了一个到其像上的双有理态射， $m^2 D^2 \ge$ 体积 $(H) = H^2 \ge 1$。取 x，使得该映射和 π 分别同构到开子集上，并且 F 不存在。对于经过 x的每条曲线，取一个经过其像点的超平面，使其不包含该像曲线。局部交数将 x 处的重数界定为与 H 的次数，因此也界定为与 mD 的次数。□

引理 4.3。 固定 $e > 0$。设 (Y, D) 是特征$p > 5$下的射影 *lc* 三维簇对，其中 D 约化且 $A = K_Y + D$ 丰沛。假设 $A \sim_{\mathbb{Q}} E$，其中 支集 $E = D$且 $E \ge eD$。存在一个整数 $b = b(e) > 0$，使得 $|bA|$ 是双有理的。对于一个带有约化正规交叉除子边界H 的光滑射影三维簇 W，若 $K_W + H \sim_{\mathbb{Q}} E_W$对应某个支集为 支集 $E_W = H$的大除子 $E_W \ge eH$，同一个整数也适用。

证明。由于 A 是丰沛的， $D=$支集E 非空。取一个不可约分支 S，并令 S^{ν} 为其正规化。伴随公式给出 $A|_{S^{\nu}}\sim_{\mathbb{Q}}K_{S^{\nu}}+\Theta$，其具有标准系数[11, 命题 4.1–4.2]。将对数解消上的保正则边界限制到 S 的严格变换上，得到一个系数至多为一的对数光滑子边界。因此 (S^{ν},Θ) 是对数典范的。应用引理 4.2，取 $J=\{1\}\cup\{1-1/j\colon j\geq 1\}$，并在其开集内选取一点 x，使得 Y 和 S 光滑，且 D 的其他分支不存在。取一条经过 x 且包含于 S 的曲线 C，则有 $A\cdot C\geq \operatorname{mult}_x C/m$。对于任何其他这样的曲线 C，有效有理 Cartier 除子 E 限制到其正规化上仍为有效的。在 x 附近有 $E=c_S S$，其中 $c_S\geq e$，所以 $A\cdot C=E\cdot C\geq e\operatorname{mult}_x C$。

取 $c=\min\{e,\ 1/m\}$。严格界 $\varepsilon(A;x)>c/2$ 在一个开子集上保持成立，因此在 D之外的某个光滑点处也成立。对于 $b=2+\lceil 12/c\rceil$ 整 Weil 除子$M=bA$ 满足 $M-(K_Y+D)=(b-1)A$，且该处的 Seshadri 常数大于六。应用引理 4.1。

根据定理 1.1、1.6 和推论 1.8]，取 $(W,\ H)$ 的对数典范模型 $(Y,\ D)$。 $H,$ E_W 的严格变换满足刚刚证明的条件。在一个公共解消上， K_W+H 的拉回等于 A 的拉回加上一个关于 Y为例外的有效除子。将 bA 的一个截面的有效有理 Cartier 除子拉回，并加上乘以 b 的这个例外差，得到 $b(K_W+H)$的一个截面。因此后一个线性系统是双有理的。□

下一个估计为作为铅笔的纤维出现的曲面提供次数受控的曲线。

引理 4.4。 设 A 是代数闭域V 上的光滑射影曲面上的丰沛且大的*Cartier*除子，其特征为 $p>5$。记 $d=A^2$。若对 $C\geq 0$有$K_V\cdot A\leq Cd$，则对于 $m=\lceil C\rceil+4,\ \ |mA|$ 是一般有限的。当$K_V\cdot A<d$ 时，可以取 $m=4$。在任一情形下，在V的稠密开集上都有 $\varepsilon(A;\ x)\geq 1/m$。

证明。 我们首先从下方估计 $\chi(\mathcal{O}_V)$。若其为负，则根据 [25, 定理 1.6]， V 是沿亏格为 $g=1-\chi(\mathcal{O}_V)$的曲线双有理纤维化的。将 A 压到相对极小纤维曲面 V_0 上，并令 a 为其在一条纤维上的次数。逐次变换 A_i 的爆破公式给出 $A_i=\pi_i^{*}A_{i-1}-a_iE_i$，其中由数值有效性以及与总纤维减去 E_i的交可知 $0\leq a_i\leq a$。在 V_0 上， [28, 第五章第 2] 节的带状曲面交公式给出 $K_{V_0}A_0=2a(g-1)-A_0^2/a$。因此

$$K_V A=2a(g-1)-d/a+\sum_i(a_i-a_i^2/a)\geq 2(g-1)-d.$$

特别地， $\chi(\mathcal{O}_V)\geq -(C+1)\,d/2$ 对于 χ 的任一符号均成立。由于(K_V-mA) $A<0$，由塞尔双对偶和曲面黎曼–罗赫定理可得

$$h^0(V,mA)\geq (m^2-mC-C-1)d/2>md+1.$$

在严格情形下，根据整性以及 $\chi(\mathcal{O}_V)>-d$，因此 $h^0(V,\ 4A)>4d+1$也成立。

如果像的维数为一，则对该线性系作解消，并取其斯坦因因子曲线。自由部分是从这条曲线上的一个次数为 a' 的除子拉回得到的。一般纤维循环与 A 的拉回相交所得的整次数为正，因此 $a'\leq md$，且该线性系至多有 $md+1$ 个截面。这证明了一般有限性。在有理映射有定义且拟有限的开集上，选择一个经过 x 的像的超平面，使其拉回不包含正在考察的曲线。局部交给出 $mA\cdot C'\geq \operatorname{mult}_x C'$。□

数值卡拉比–丘对的体积估计依赖于对数典范中心的比较。

引理 4.5。对于任意有理 *DCC* 集 $J \subset [0,1]$，存在 $\eta = \eta(J) > 0$，且在任何特征 $p > 5$下均成立，并具有以下性质。设 Δ、Φ 是 *Fano* 型三维簇 X 上的有效对数典范边界，且满足 $K_X + \Delta \sim_{\mathbb{Q}} K_X + \Phi \sim_{\mathbb{Q}} 0$。若 Δ 的系数属于 J，并且 $\Phi \geq (1-\eta)\Delta$，那么 Φ 的每个 *lc* 位都是 Δ的 *lc* 位。

证明。 将引理 3.22 应用于 $I = J \cup \{0,1\}$ 及其伴随系数集。选取小于所得阈值的 η 。我们利用三维簇上的断言，在增大系数后保持对数典范性；并利用曲线或曲面上的数值断言来判定等号。这就是 [20,定理 7.1] 中使用的系数比较。

假设对于 Φ出现了一个新的对数典范中心。根据引理 7.7]，在一个 $\mathbb{Q}$-factorial 保正则形式 dlt 模型f上展示它：$(Y, \Psi) \to (X, \Phi)$，该模型只提取对数典范中心。该模型是 Fano 型的。来自 X的保 crepant 对数 Fano 见证与 Ψ取平均后，少量正贡献使边界保持有效，因为 Ψ 的每个例外系数均为 1。该平均是 klt 的，并具有数值有效且大的负对数除子，因此 Kodaira 扰动给出一个对数 Fano 边界。

写作 $\Sigma = \lfloor \Psi \rfloor$，令 Γ 为 Δ 在 Σ之外的严格变换，并令 $T = \Gamma + \Sigma$。则 $\Psi \geq \Sigma + (1-\eta)\Gamma$ 且

$$K_Y + T = f^*(K_X + \Delta) + \sum_{S \subset \Sigma} A_{X,\Delta}(S)S.$$

该和是有效的，且新的对数典范中心作出正贡献。运行一个 $-(K_Y + T)$-极小模型纲领，该纲领因 Fano 型而存在。在每个模型上，推前的 Ψ 均为保正则形式的，这是由其主关系得到的，并且支配 $(1-\eta)T$。因此，阈值间隙保证 T 是对数典范的。 Σ 的任何不可约分支都不能以除子型方式被压缩。在这样的步骤中， $K + T$ 在该射线上为正，因此根据负性，被压缩素除子在下一边界的保正则迹中的系数将大于 1。

在莫里纤维空间的输出中， $K + T$是相对丰沛的，而通过与一般纤维上的 $K + \Psi$ 比较， $K + \Sigma + (1-\eta)\Gamma$ 在其射线上为非正。插值给出在底空间上关于 $0 < u \leq \eta$的 $K + \Sigma + (1-u)\Gamma \equiv 0$ 。如果底空间具有正维数，则限制到实际一般纤维，并将曲线或曲面比较应用于两个对数典范边界 $\Sigma + (1-u)\Gamma$ 和 T。它们在那里相同，这与 $K + T$的相对丰沛性相矛盾。如果底空间是一个点，则对 Σ的一个存留分支的正规化应用伴随公式，在曲面上得到相同的比较。较小的不同至少是较大的不同的 $1-u$ 倍，因为利用 $\Gamma = 0$ 得到的不同部分是有效的，而所添加的限制映射关于 Γ的系数呈线性。较小的伴随除子是数值平凡的，而较大的伴随除子是丰沛的，再次产生矛盾。

在数值有效输出中， $K + T$ 既是反数值有效的，又与剩余分量的非零有效和有理等价。该有效和与一个非常丰平方的交为正，这与反数值有效性相矛盾。□

推论 4.6。 固定一个有理 *DCC* 集 $I \subset [0,1]$。存在常数 $V(I)$，使得对于任意特征为 $p > 5$ 的代数闭域上的每个射影 *klt* 三维对(X, B)，若 X 为 *Fano* 型，且系数 $B \subset I$，则 $K_X + B \equiv 0$ 满足体积 $(-K_X) \leq V(I)$。

证明。 由引理 3.8， $K_X + B \sim_{\mathbb{Q}} 0$。取一个使用 klt 对数 Fano 边界的微小 $\mathbb{Q}$-阶乘化。其保 K 变换为 klt，且负对数除子数值有效且大，因此由 Kodaira 扰动可知新模型为 Fano 型。(X, B) 的变换是保正则形式的。根据通过有理函数和素除子描述截面的方式，两个模型上的反典范 Weil 截面空间相同。

在 $\mathbb{Q}$-factorial 模型上，取一个有理 $0 < h < \min\{1, \eta(I)\}$，其来自引理 4.5，并设 $D = hB \sim_{\mathbb{Q}} -hK_X$。对于每个满足 mD Cartier 的 m 以及每个 $G \in |mD|$，有效有理除子 $\Phi = (1-h)B + G/m$ 满足 $K_X + \Phi \sim_{\mathbb{Q}} 0$。如果 (X, Φ) 不是 klt，则从 B 插值至 Φ，直到第一个非 klt 边界。该边界是对数典范的，并且通过在公共对数解消上的计算可知参数是有理数。它仍然支配 $(1-h)B$，且具有有理平凡的对数除子。由引理 4.5，它没有 lc 位，矛盾。

在一个不属于 $\operatorname{Supp} B$ 的光滑闭点 x 处，普通的点爆破现在给出 $\operatorname{mult}_x G < 3m$。利用局部平凡化，将 mD 的截面限制到 $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x^{3m}$ 是单射的。该商的长度为 $\binom{3m+2}{3}$。对 Cartier 次数取渐近界可得 $\operatorname{vol}(D) \le 27$，因此 $\operatorname{vol}(-K_X) \le 27h^{-3}$。□

定理 4.7 （例外补全的差异）。 固定一个有理 *DCC* 集$I \subset [0,1]$。存在一个 $e(I) > 0$，其对特征为$p > 5$的代数闭域是一致的，使得以下结论成立。设（X， B）是一个具有 X *Fano* 型、系数 $B \subset I$ 且 $L = -(K_X + B)$ 数值有效的射影例外三维对。那么每个有效有理 $P \sim_{\mathbb{Q}} L$ 都满足

$$A_{X,B+P}(E) \ge e(I)$$

对每个 X上的素除子 E 均成立。对（X， B）也有相同的界。

证明。 如果不存在统一的界，则取一列补全 $B + P$及素除子 E，使得$a = A_{X,\ B+P}(E)$趋于零。由于例外性，每个 a 均为正。记为 $u = 1 - a$，省略序列下标。取一个小 $\mathbb{Q}$-阶化，这保持补全及其不一致数不变。取 a小于 $1/2$ 以及引理 3.22 中关于 $J = I \cup \{0,\ 1\}$的两个常数。若 E 是例外的，则对 klt 对（X， $B + P$）应用 [11, 引理 7.7]，得到一个射影$\mathbb{Q}$-阶提取 $f\colon\ Y \to X$ 仅提取 E。若 E 位于 X上，则置 $f = \mathrm{id}_X$。记为

$$K_Y + \Psi = f^*(K_X + B + P), \qquad \Psi = C + uE + R,$$

其中， C 是远离 E 的 B 的严格变换，而 $R \ge 0$ 不包含任何 E。不等式 $K_Y + C + uE \ge f^*(K_X + B)$成立，因为不同支集在$E$上，其系数为系数$_E(f^*P)$。将来自 X的保正则形式对数 Fano 见证的一小部分正贡献与 Ψ取平均，可得到一个具有数值有效且大负对数除子的有效 klt 边界。在提取出的素除子处，有效性由 $u > 0$推出。Kodaira 扰动表明 Y属于 Fano 型。

设 $T = C + E$ 并运行一个 $-(K_Y + T)$-极小模型纲领。在将其除子的一个小的正倍数实现为 Y上的klt对数除子之后，这是一个klt极小模型纲领。这些模型是$\mathbb{Q}$-阶乘的且为Fano型，后者是通过推前一个大klt Calabi–Yau边界得到的。

$K_Y + \Psi$ 的推前由其主关系保持为保正则形式。因此在每个模型上$(1-a)T \le \Psi$，而引理3.22的阈值部分给出 T的对数典范性。素除子 E 得以保留。事实上，若除子收缩 g收缩 E，则 $K + T = g^*(K' + T') + bE$，其中 $b < 0$，因为 $K + T$在收缩射线上为正，而 E 在该处为负。它在lc目标上的保crepant系数将是 $1 - b > 1$。

若输出 W 使得 $-(K_W + T_W)$数值有效，则由半丰性选取一个有效有理 $Q_W \sim_{\mathbb{Q}} -(K_W + T_W)$。在带有映射 r 到 Y以及 s到 W的公共解消上，负性给出

$$s^*(K_W + T_W + Q_W) \geq r^*(K_Y + T) \geq (f \circ r)^*(K_X + B).$$

记 $n(K_W + T_W + Q_W) = \mathrm{div}(h')$，并在 X 上令 $n(K_X + B^\dagger) = \mathrm{div}(h')$。这两个主对数除子的拉回相等，因此由不等式可得 $B^\dagger \geq B$。保留下来的 E 在 W 上的系数至少为一。同一等式将其非正差异传输到 $(X, B^\dagger)$。由于 $B^\dagger - B \sim_{\mathbb{Q}} L$，这与例外性矛盾。

因此，输出是一个莫里纤维空间 $W \to Z$，其中 $K_W + C_W + E_W$ 相对丰沛。在其射线上，$K_W + C_W + uE_W$ 的次数非正，因为有效差 $\Psi_W - C_W - uE_W$ 在一般纤维中移动的曲线上次数非负。通过插值可得一个有理数 $t \in [u, 1)$，使得 $K_W + C_W + tE_W \equiv_Z 0$。由凸性可知，此对是 klt，因为系数为 u 的对低于 Ψ_W，而系数为一的对是对数典范的。对于 $\dim Z > 0$，根据引理 3.4–3.5]，将其限制到 $k(Z)$ 上的正规泛纤维 $[20,$。引理 3.22 的数值部分表明，系数为 t 和一的两个限制边界相等，因为前者支配后者的u 倍。这与取整对数除子的相对丰沛性矛盾。

对于所得的点基序列，$\rho(W) = 1$ 和 $t \to 1$。取一个子序列，使得 t 严格递增。于是，$C_W + tE_W$ 的系数都属于一个由将这些 t 的值添入 I而得到的单一降链条件集 J'。由推论 4.6，$\mathrm{vol}(-K_W) \leq V(J')$。此外，$E_W$是丰沛的，且 $-K_W \equiv C_W + tE_W$，所以 $t^3 E_W^3 \leq V(J')$。对 E_W 的正规化 S 应用伴随公式，得到一个系数属于J^{adj} 的对数正则对 (S, Θ)，并且

$$K_S + \Theta \equiv (1-t)E_W|_S, \qquad (K_S + \Theta)^2 = (1-t)^2 E_W^3.$$

该限制映射是丰沛的。结合引理 4.2 中的 $m = m(J^{\mathrm{adj}})$，我们得到

$$0 < m^{-2} \leq (K_S + \Theta)^2 \leq (1-t)^2 t^{-3} V(J') \longrightarrow 0,$$

矛盾。最后，L 是半丰沛的，因此补全存在，而删去其有效增量不会使差异数降低。□

对于 $I = \Phi(R)$，差异界使得例外边界 B 的系数取值范围为一个有限集。事实上，只要 $r > 0$，$1 - r/j \leq 1 - e(I)$ 就给出 $j \leq r/e(I)$。

对于 $B \neq 0$，我们将 t 增加到 $-K_X - tB$ 的伪有效阈值。在该阈值处，极小模型纲领给出一个纤维化，纤维补定理适用于该纤维化；或者给出一个皮卡德数为一的法诺三维簇。

命题 4.8（通过伪有效阈值约化）。设（X、B）是定理 *1.1* 中的例外对，且 $B \neq 0$ 和 $L = -(K_X + B)$ 为大。在特征 $p > 5$ 中，将阈值定义为

$$\lambda = \sup\{t \geq 1 \mid -K_X - tB \text{ is pseudo-effective}\}$$

在一个小的 $\mathbb{Q}$-阶化上。它是有理数且大于一。存在一个双有理模型 T和一个莫里纤维空间 $T \to Z'$，使得 $K_T + \lambda B_T$在 Z'上关于 $\mathbb{Q}$线性平凡，并且 $-(K_T + \lambda B_T)$是数值有效的。清除取整分母后，$(T, \lambda B_T)$ 的一个补可转移到(X, B)。

若维数 $Z'>0$，则这些对(X,B)在大特征下有一个共同的补指标。若 Z' 是一个点，则 T 是一个皮卡数为一的 $\mathbb{Q}$-阶化 *Fano* 三维簇，且$(T,\lambda B_T)$是 $e(R)$-对数典范，且具有 $K_T+\lambda B_T\sim_{\mathbb{Q}}0$。

证明。在小的 $\mathbb{Q}$-阶乘化上工作。$t=1$ 处的大性给出 $\lambda>1$，与一个丰沛平方相交可从上方界定 λ。为证明有理性，在 λ两侧选取有理数。取一个小的有理数 $a>0$。在每个端点，将 $a(-K_X-tB)$ 写成一个在有理线性等价意义下的 klt 伴随除子。为此，从一个对数 Fano 边界出发，保留一小部分公共丰沛部分，并在剩余的丰沛类中使用一般扰动 [58, 定理 1]。插值关于t是线性的。根据 [49, 设定 6.1 和推论 6.5]，该线段的伪有效部分是有理多面体的。

对 $-(K_X+\lambda B)$ 运行除子极小模型纲领，得到数值有效模型 Y，并令 $f\colon Y\to Z$ 为其半丰沛收缩。该除子位于大锥的边界上，因此 $\dim Z<3$。我们有 $-(K_Y+\lambda B_Y)\sim_{\mathbb{Q}}f^*A$，其中 A 在 Z 上丰沛；若 Z 是一个点，则取 $A=0$。所有模型都是 Fano 型，因为大有效 klt 卡拉比–丘边界的推前在每个模型上都会给出一个这样的边界。在带有映射u 到 X 以及 v 到 Y的公共解消上，写作

$$u^*(-K_X-\lambda B)=v^*(-K_Y-\lambda B_Y)+F,\qquad F\geq 0.$$

对于具有 $P_Y\sim_{\mathbb{Q}}-(K_Y+\lambda B_Y)$ 的 $P_Y\geq 0$，边界 $\lambda B+u_*(F+v^*P_Y)$ 补全了 (X,B)。其对数除子与 $K_Y+\lambda B_Y+P_Y$是保正则形式的。事实上，在一个模型上使某个倍数平凡化的有理函数，在另一个模型上也使同一倍数平凡化。因此，定理 4.7 在 Y 上给出间隙 $e(R)=e(\Phi(R))$。

L 的变换是大的，并且在数值上为 $f^*A+(\lambda-1)B_Y$。因此 B_Y在 Z 上是大的。对于小的有理数 $u_0>0$，$K_Y+(\lambda-u_0)B_Y$在 Z 上的极小模型纲领对 $-B_Y$ 是负的。它终止于 Z 上的莫里纤维空间 $T\to Z'$。每一步对来自 Z 的 $K_Y+\lambda B_Y$ 都是保正则形式的。此外，B_T在 Z' 上是丰沛的，并且前述主对数除子的转移仍然适用。对于任何可被 q 整除的所得指标，整性与 (4.1) 在 X 上给出所需的取整。

假设 $\dim Z'>0$。记 F_η 为 $k(Z')$ 上的一般纤维。它具有丰沛$-K_{F_\eta}$ 和 $K_{F_\eta}+\lambda B_{F_\eta}\equiv 0$。通过局部化一个展示一般纤维上每个除子的双有理模型，不一致数可限制下来 [20, 引理 3.4–3.5]。它们也给出了零边界的 F_η 的 $e(R)$ 下界。选取 q_0 以清除定理 4.7 和超标准公式给出的 B 的有限个可能系数。局部化使 $q_0B_{F_\eta}$ 成为整数。

对于曲线纤维 F_η，正则性和 $H^0(F_\eta,\mathcal{O})=k(Z')$ 给出 $k(Z')$ 上的 $\deg K_{F_\eta}=2g-2$。其负次数迫使 $g=0$。因此，对于正整数$j\leq 2q_0$，有 $\lambda=2q_0/j$。对于曲面纤维，选取有理数 $0<e_0<e(R)$。关于德尔佩佐曲面在其常数域上的有界性定理给出整数 r，V_2，它们仅依赖于 e_0，使得 $H=-rK_{F_\eta}$ 是丰沛 Cartier，且 $K_{F_\eta}^2\leq V_2$。在 $p>5$ 中的应用定理 5.6、5.12 和推论 5.8时，已将几何整性和驯性纳入考量。与 H 相交得到

$$\lambda=\frac{q_0H^2}{rj},\qquad 1\leq H^2\leq r^2V_2,\qquad 1\leq j=(q_0B_{F_\eta})H\leq q_0rV_2.$$

因此，无论哪种情况，λ 都只取有限多个值。λB_T 的系数在加入这些有限个系数 b 到 R的数 $1-b$ 之后，属于一个固定的超标准集。应用 [31, 定理 11] 于 $T\to Z'$，并转移所得的

主关系。如果 Z' 是一个点，那么 Z也是一个点，且 $-K_T \sim_{\mathbb{Q}} \lambda B_T$ 是丰沛的。这就给出了所述的第二种结果。□

4.2. 有界族中的双有理模型。 对于射影族，我们需要控制 Cartier 指标、对数差异较小的除子以及双有理压缩。在所选几何点的约化闭包的每个不可约分支上，我们按照第 2 节的做法将构造扩张到一个稠密开集上，然后对其补集应用诺特归纳。该开集的一个有限满射覆盖可以覆盖其中的每个几何点。

引理 4.9. 设一个射影族的纤维均为正规三维簇，并带有分别标记且具有固定有理系数的素除子。假设所选的正特征纤维 (Y_s, D_s) 为 ***klt***，且 $K_{Y_s} + D_s$ $\mathbb{Q}$-***Cartier***。在 [2，中的绝对特征界 推论 4.4], 之上，可以按照上述方式对该族分层，使得一个相对线丛在每个层上给出 $K_{Y_s} + D_s$ 的固定 ***Cartier*** 倍数。相对带标记的对数消解上的保正则边界的系数保持不变，包括在几何泛纤维上。如果所选纤维上的 $-(K_{Y_s} + D_s)$ 是丰沛的，那么在几何泛纤维上也如此。

证明。 取几何泛纤维的一个对数解消，并将其扩张至 $h\colon\ W \to Y$，其中 W 在底空间上光滑且射影，例外素除子 E_i 以及严格变换分别相对为简单正规交叉，而 Y 平坦且具有几何正规纤维。扩张 h的开同构。通过缩小，可保持其补集的不可约分支及其像的维数不变，因此纤维上的例外素除子恰好是 E_i。

E_i 的类相对于 h 是独立的，这是对数值平凡例外除子的正负两种情形应用负性引理所得。选择几何泛纤维上的收缩曲线，使其与 E_i的交矩阵可逆。扩张这些曲线及其像。在选定的纤维上，

$$K_{W_s} + \widetilde{D}_s = h_s^*(K_{Y_s} + D_s) + \sum_i a_i E_{i,s} \tag{4.3}$$

因此是一个单一有理数线性系统的解。通过 r消去~标记和 a_i 的分母。线丛 $M = \mathcal{O}_W(r(K_{W/S} + D - \sum_i a_i E_i))$ 在每个选定纤维上相对于 Y_s 数值平凡。
Bernasconi下降定理表明，它是 Y_s上某个线丛的拉回，即 $h_{s,\ *}M_s$。该定理适用于每个选定纤维的代数闭域，并具有相同的特征界。

缩小后， h_*M 与取几何纤维相交换。事实上，在 Y 的仿射开集上，利用有限的仿射Čech复形计算推前。它们的项在底空间上是平坦的，而其相干上同调层的泛平坦性给出了所需的基变换。逐纤维的局部自由性与取值映射$h^*h_*M \to M$ 随后给出一个可逆的推前；由泛平坦性、中山引理和真性，在包含一般纤维的开集上得到一个同构。在每个纤维的余维一处，该推前表示 $r(K_Y + D)$。拉回恒等式给出一般的保正则迹，因此相对SNC计算证明了差异断言。逆线丛的丰性是开条件。在所选轨迹的闭余部分上重复上述过程。□

引理 4.10. 设 W 光滑， $\Sigma = \sum_i \Sigma_i$ 为约化简单正规交叉除子，且 $D_W = \sum_i d_i \Sigma_i$ 满足 $d_i \le 1 - e$、 $e > 0$。对数差异至多为一的 W 上的任意素异常除子

对于 D_W，均可由吹起 Σ 的分层得到。它沿原始不可约分支的正阶之和至多为 $1/e$。在相对简单正规交叉族上，只需有限多个此类修改；并且在每个层上，单个铺展的光滑模型即可支配它们。

证明。 对于除子赋值 v，简单正规交叉亏格公式给出

$$A_{W,D_W}(v) = A_{W,\Sigma}(v) + \sum_i (1-d_i)v(\Sigma_i).$$

第一项是非负整数。边界之外的例外中心，其差异至少为二；这可由吹起其光滑的一般点得到。若中心位于边界内，则该和为正，且假设的界迫使$A_{W,\ \Sigma}(v) = 0$ 且 $\sum_i v(\Sigma_i) \le 1/e$。零亏格赋值的中心是一个层。事实上，若中心的余维为 r，且仅位于 $s < r$ 个分支上，那么在其一般点处吹起时，至少会贡献 $(r-s)v(E) > 0$，其中例外除子为 E，并将 E 加入约化边界。吹起经过该中心的两个分支的交，会将两个正阶 w_i，w_j 替换为 $\min(w_i,\ w_j)$ 和 $|w_i - w_j|$，并省略零项。对于约化边界，这一操作是保正则形式的，且会降低阶的总和。当中心本身成为一个除子时，该过程便终止。若不施加阶的界，同样的论证表明，约化简单正规交叉对的所有 lc 位都是其各层上的单项式赋值。对于有界列表，先将各层拆分为几何分支，再在铺展之前对几何一般三维簇上的公共图进行解消。□

引理 4.11. 设 $T \to S$ 在一个整分层上是射影的，其几何一般纤维 T_η 是一个 $\mathbb{Q}$-因子局部阶乘的 *Fano* 型三维簇。假设一般特征为零或大于五。经过有限覆盖并缩小后，几何纤维的所有射影正规双有理压缩都属于有限多个射影族。这些簇族在每个剩余几何纤维上都具有有理对数 *Fano* 边界。

证明. 除子类。 将光滑射影消解 $g : W_\eta \to T_\eta$ 及其例外素除子推广到整个族。在特征零时，klt 奇点的有理性和对数 Fano 消失定理给出 $H^1(W_\eta,\ \mathcal{O}) = H^2(W_\eta,\ \mathcal{O}) = 0$。在下降到一个有限生成域后，利用关于 $\mathbb{C}$ 的比较以及 Lefschetz (1, 1) 定理可知，除子张成第二 ℓ-进上同调。在正特征下，W_η 上的任意两个一般点都可由一条有理曲线链连接。这种有理链连通性由 [23, 定理 4.8 和命题 4.11]推出。循环类定理 [24,定理 1.2] 给出相同的张成结论；此外，Albanese 平凡，因为每条有理曲线链映到阿贝尔簇上的一个点。因此，在这两种情形下，第一贝蒂数都消失。

取 $\mathrm{Cl}(T_\eta)_{\mathbb{Q}}$ 的一个有理基，其 Cartier代表元为 D_i。通过推前及负性，它们的拉回与 g 的例外素除子构成 $\mathrm{Pic}(W_\eta)_{\mathbb{Q}}$ 的一个基。将这些除子扩张开来。对于底空间上某个可逆的素除子 ℓ，光滑适当基变换使它们的类在二次 {v?} 中仍构成一个基，并保持第一贝蒂数为零。因此，W_s 的约化皮卡德簇为零，故由 Kummer嵌入可知，这些扩张除子构成 $\mathrm{Pic}(W_s)_{\mathbb{Q}}$ 的一个基。向下推前，并利用核由例外除子给出的精确描述，表明 $D_{i,s}$ 构成一个有理基。特别地，T_s 是 $\mathbb{Q}$-阶乘的。

一般模型。在特征零下，T_η 根据 [12, 推论 1.32]是一个Mori梦空间。其有理多面体 Mori室将每个有效有理

类表示为：某个双有理收缩上的半丰沛类的拉回，加上一个有效例外除子 [44, 命题 2.8 和 213]。此处及下文中，正部分和例外部分在每个锥上都按有理线性变化。

对于正特征，使用 T_η 上的一个有效 klt 对数 Fano 边界 Θ 。在坐标 D_i 中，以除子 D_v 表示零点附近一个有理盒的顶点。选取足够小的 $t > 0$ 有理数以及一个有效丰沛有理 A ，使得 $(T_\eta,\ \Theta + A)$ 为 klt，且在每个顶点处 $tD_v - (K_{T_\eta} + \Theta + A)$ 都是丰沛的。半丰扰动给出满足 $K_{T_\eta} + \Delta_v \sim_{\mathbb{Q}} tD_v$ 的 klt 边界 $\Delta_v \geq A$ 。 Δ_v 的凸包具有公共的大部分 A。定理 1.4] 所述的该多面体极小模型的有限性 [13, 适用于其伪有效伴随除子。将一个类缩放至盒内，便可得出由此得到的有限多个映射 $T_\eta \dashrightarrow T_j$ 为所有伪有效有理类给出极小模型。由于这些对是 klt 的，它们不会提取任何素除子。

将大 klt Calabi–Yau 边界及其主倍数向前推，表明每个 T_j 都是 Fano 型。锥定理和无基点定理使其丰沛锥成为有理多面体锥，并使其有理丰沛类半丰沛。

在带有从 u 到 T_η 以及从 v 到 T_j的态射的公共解消上，要求变换D_j 是数值有效的，并且 $u^*D - v^*D_j$ 有效且为 v-例外的。由于该差异是在有限除子基中计算的，这些是有理线性不等式和等式。根据极小模型不一致性不等式和负性，这些锥覆盖有理伪有效类。反之，对于满足这些条件的任意类，例外差在可整除次数上保持截面不变。这在正特征下通过半丰模型给出了相同的有限描述。

转到纤维。 我们利用曲线将大类从特殊纤维提升到一般纤维。对于一般伪有效锥的每个面，选取其相对内部中的一个有理类，并使用其一个半丰模型。该半丰沛态射具有正的相对维数。在对其底空间的函数域作有限扩张后，其一般纤维含有一个整约化分支。在使用此分支时，我们允许几何泛纤维是非约化的。该分支支配实际一般纤维。

在半丰模型上，逆映射不是同构的轨迹以及解消例外除子的像的余维至少为二。当相对维数为一时，一般纤维避开这些轨迹。在更高的相对维数下，在约化分支上取一般完全交曲线，避开它们与该分支的交。将这些曲线铺展后，得到 T_η 的光滑开集上的一个覆盖族；该族在所选面的类上的次数为零，而在某个丰沛除子上的次数为正。由于这些曲线覆盖一个开集，其次数泛函在有效类上非负。因此，该泛函就能识别该面。在秩一的情形，取丰沛完全交曲线作为位于零处的面。

将测试族铺展为几何整曲线的真平坦族，并带有求值映射。缩小后，它们的求值映射在每个纤维上覆盖一个开集，并且与 D_i 和一个固定的相对非常丰除子相交的所有次数保持不变。特殊纤维上的大类在每条测试曲线上都有严格正的次数。为说明这一点，减去一个充分小的丰沛类，选取所得余类的一个有效代表元，并在该族中取一条不包含于其支集内的曲线。因此，该特殊类提升到一般伪有效锥的内部。

设 $T_s \dashrightarrow X$ 为一个双有理压缩，并令 D_s 为非常丰卡蒂尔除子 H_X的变换。由于 X 的所有素除子都出现在 T_s上，检验

公共图上的有理截面的有效性可得

$$H^0(X, jH_X) = H^0(T_s, jD_s) \qquad (j \geq 0). \tag{4.4}$$

因此， D_s 是大类，并且落在某个一般锥中。将这些图表、每条有理射线上的半丰沛除子与例外除子，以及有限多个射线恒等式对应的主函数，在公共解消上铺展。所选倍数的自由性和例外像的维数在一个开集上保持不变。对于一组射线生成元的正线性组合，取相应半丰沛映射乘积的斯坦因分解。由该分解到乘积像有限，以及乘积像上的丰性可知，这些生成元的正线性组合是从该分解拉回的丰沛类。只要所提升的类是大类，该分解就是双有理的。将有限多个这样的双有理分解及态射铺展，同时保持分解空间正规且到乘积像有限。于是，对具有该组正系数的每个有理线性组合，同样的正性在各纤维上仍成立。

在公共解消上，有效例外除子不会改变拉回的 Cartier 除子在可整除次数下的截面。结合射线恒等式，(4.4)便将 X 还原为相应铺展族的丰模型。每个一般纤维上的双有理压缩，都可通过边界及其主关系的推前得到一个有效的大 klt Calabi–Yau 边界。其大性可通过在公共解消上与目标空间上某个丰沛除子的拉回相比较而得出。若推前的边界为 $\Xi \sim_{\mathbb{Q}} A_0 + G$，则 A_0 丰沛且 $G \geq 0$，那么对于充分小的 $h > 0$，$(1-h)\Xi + hG$ 是 klt 的，且其负对数除子丰沛。将一个有理对数 Fano 边界、其对数解消，以及其对数除子的一个 Cartier 倍数（该倍数的负除子丰沛）铺展。这些数据在保留下来的纤维上给出了见证。□

4.3. 由有界双有理线性系得到的 klt 补。标记是代数簇上素除子的列表。双有理线性系将三维簇及其未被压缩的标记除子映入射影空间。我们对这些像的次数作出界定，从而将它们纳入有限型族。若 Γ 是 X 上的约化除子，且 $|G|$ 是双有理的，那么证明 [49, 定理 5.3] 中对 vol(G) 和 vol($K_X + \Gamma + 14G$) 的界，分别将像及其标记除子的次数界定为 vol(G) 和 8 vol($K_X + \Gamma + 14G$)。在正规化像上，标记记录了 Γ 的严格变换以及在 X 上例外的素除子。非退化性根据像的次数界定环境维数。

这些估计给出了有限型算术参数空间，对于任意一个固定素除子也成立。次数为 d 的整子簇，其点集可由次数至多为 d 的形式切出。为分离其外部一点，将其投影到维数比该子簇大一的空间，并选取经过该点且避开该子簇的纤维。由于 O(1) 的拉回是丰沛的，限制映射是有限的。像超曲面的方程拉回后即可分离该点。因此，像及其标记分支的方程属于有限个 Grassmann 流形。

在几何泛纤维上取约化概形，并将其扩张。根据泛幂包含关系，这两个定义理想在扩张纤维上具有相同的根基。稠密开集上的几何整性与正规性使得正规化扩张为到这些约化概形的有限双有理映射。对它们的几何泛纤维进行消解，标记像中标记分量上方的除子型分支以及消解例外素因子。通过分层，这些构造给出有限多个带有相对简单正规交叉标记的光滑射影族。我们将

这一构造同时用于水平分层以及 Cartier 下降界以上的固定素除子。

定理 4.12 (约化伴随的有界体积)。 固定 $0 < e < 1$ 和$U > 0$。设 X 是一个 *Fano* 型三维簇，其带有有效有理 e-对数典范边界 Ω，且 $K_X + \Omega \sim_{\mathbb{Q}} 0$。令 $D_X = (\Omega \text{ 的支集})_{\mathrm{red}}$，假设

$$\mathrm{vol}(K_X + D_X) \le U. \tag{4.5}$$

当满足下列条件时，这对 $U = (\delta^{-1} - 1)^3 V$ 成立

$$\mathrm{coeff}^{>0}\, \Omega \ge \delta > 0, \qquad 0 < \mathrm{vol}(-K_X) \le V. \tag{4.6}$$

在充分大的特征下，底层簇是算术有界的，并且具有共同指标的 *klt* 补，该指标仅取决于 e、U。若给定一个系数属于固定有限集的有理边界 $B \le \Omega$，则补可以支配 B，其指标还取决于该有限集。在 *Cartier* 下降的界以上的任意固定素数上，同样的结论仍然成立，只是允许族和指标取决于该素数。

证明。 取一个小的 $\mathbb{Q}$-阶乘化。它保持严格Weil变换的截面空间不变。当 (4.6) 成立时，有效除子 $D_X - \Omega \sim_{\mathbb{Q}} K_X + D_X$ 位于 eD_X 与 $(\delta^{-1} - 1)\Omega$ 之间，因此 (4.5) 成立。在一个消解上，将其约化例外除子加入 Ω 的严格支集中，得到 D_W。保正则迹 Ω_W 满足 $K_W + D_W \sim_{\mathbb{Q}} D_W - \Omega_W \ge eD_W$，且右侧具有相同的支集。由于其支集包含 Ω 的大拉回的支集，该除子是大的。应用引理 4.3，再进行推前，可使 $G = b(K_X + D_X)$ 对于固定的$b = b(e)$ 是双有理的。 G 和 $K_X + D_X + 14G$ 的体积由 $(1+14b)^3 U$ 从上方界定。标记像构造提供了一个有界光滑模型 W，在该模型上 Ω_W 支集于标记中。事实上，一个未标记素除子对应于 X 上位于 Ω 的支集之外的素除子，其保 crepant 系数为零。

X 上缺失而在 W 上的任意素除子，对于 Ω 的对数差异至多为一。使用引理 4.10，并扩大有限标记图，使得 $W \dashrightarrow X$ 是一个双有理压缩。在标记中记录在 X 上被 E_i 收缩的素除子，以及 Supp Ω 的严格变换 S_j。记录 B 在 S_j上的预定系数 b_j，包括零系数。这只留下有限种标记和系数的选择。

固定这样一种选择，取其闭包，并令 $H = \sum_i E_i + \sum_j S_j$。选择一个相对很充足除子 A 和一个有理数 $0 < e' < e$。我们通过施加以下条件，选取支集在 H 中的新系数 α:

$$\alpha_{E_i} \le 1 - e', \qquad 0 < \alpha_{S_j} \le 1 - e', \qquad \alpha_{S_j} \ge b_j.$$

对于 $U_W = K_{W/S} + \alpha$，施加线性方程

$$U_W A^2 = U_W A K_{W/S} = U_W A E_i = U_W A S_j = 0 \quad \text{for all } i, j.$$

交数是常数。任意一个选定纤维的保正则边界给出一个有理解，我们现在在整个层上都使用该解。于是$U_W A^2 = U_W^2 A = 0$，并且对除子的Hodge指标定理给出 $U_W \equiv 0$ 在每个纤维 [30, 命题 2.9]。 α 的系数使光滑标记对成为子千足端。在一个选定纤维上， $K_{W_s} + \alpha_s$ 与$K_X + \alpha_X$的拉回之差（其中 α_X 为推前）是例外的，并且在X上数值平凡。由负性可得等式。因此 α_X 是有效 klt 的，并且 $K_X + \alpha_X \equiv 0$。Fano型簇上的无基点定理表明，数值平凡的有理 Cartier 除子是有理平凡的。因此，在每个选定纤维上$U_{W,\ s} \sim_{\mathbb{Q}} 0$ 。

为找到一个指标，我们构造一个一般收缩，使其恰好包含 X的所有素除子。在每个选定纤维上，将 Ω 拉回到一个公共解消，再将其推前到 W_s，所得的大有效除子由 H_s 支撑。因此，右侧的 $K_{W_s}+H_s \sim_{\mathbb{Q}} H_s-\alpha_s \geq e' H_s$是大除子，并具有相同的支集。引理 4.3给出一个公共双有理次数 b'。四个截面中的三个比值代数独立，因此在次数 jb'中至少给出 $\binom{j+3}{3}$ 个截面。半连续性表明，对于每个 j，这一下界一般成立，从而在几何泛纤维上具有大性。由于 $H_\eta-\alpha_\eta \equiv K_{W_\eta}+H_\eta$具有满支集 H_η，每个具有该支集的正有理组合都是大的。

设 $\Gamma=\sum_j \alpha_{S_j} S_j+(1-e'/2) \sum_i E_i$。这是几何泛纤维上的大 klt 边界，并且 $F=\Gamma-\alpha$ 是有效的，其支集恰好为 E_i。在每个选定的纤维上， $h^0(W_s, m(K_{W_s}+\Gamma_s)) \leq 1$ 在每个消去系数的次数中均成立。事实上，再取一个更大的倍数后，该除子线性等价于F_s的某个倍数。后一个线性系中的有效除子推前为 X上的有效主除子，因此其定义函数为常数。次数为 m 时的两个线性无关截面，在更高的次数中将具有线性无关的幂。因此，由半连续性可知，在每个可整除次数中，一般空间的维数至多为一。

对 $K_W+\Gamma$运行一般MMP，使用大边界极小模型定理 [12,定理 1.2 和推论 1.4。2] 或 [13,定理 1.4–1.6]取决于特征。根据大边界无基点定理（在正特征下为 [29, 定理 1.4(3)]），其最终的丰对数除子是半丰沛的。截面界迫使饭高维数为零，因此该对数除子在有理意义下为平凡的。在整个MMP过程中，由于负性，$U_{W,\eta}$ 的推前保持数值平凡。因而，一个负的除子步会收缩当前 F的一个不可约分支，因为收缩曲线覆盖该素除子。在最终模型上， T_η F的推前是有效且数值为零的，因而为零。恰好 E_i 被收缩了。 Γ 的推前是一个大 klt Calabi–Yau 边界，从而使 T_η 具有 Fano 型。

根据特征零下的对数 Fano 消失定理，以及正特征下光滑公共解消的有理链连通性， W_η 的约化皮卡德簇是平凡的 [23, 定理 4.8 和命题 4.11]。因此$U_{W,\ \eta} \sim_{\mathbb{Q}} 0$。在几何泛纤维上选取一个整的主倍数。给出该倍数的有理函数在有限扩张后下降，并在缩小后扩张为族上的一个平凡化。在每个选定的 X 上，推前这一主关系。它给出一个具有所述指标并满足所需支配性的 klt 补。

同时扩张一般极小模型纲领的输出以及一个带有 W的公共解消。保持除子像维数不变，可确保 $W_s \dashrightarrow T_s$ 恰好收缩E_i ，且不提取任何素除子。于是 $T_s \dashrightarrow X$ 是小收缩，而引理 4.11 给出了 X的界，其中包括从所选 $\mathbb{Q}$-阶乘化返回的小收缩。对余下部分分层，可得到有限个这样的构造。取它们指标的一个公倍数，即完成证明。□

根据引理 4.5，要扰动一个 lc 补，只需增大其各个对数典范中心处的不一致数。我们通过一个双有理线性系的截面来实现这一点。

推论 4.13. 在引理 *4.5* 中，设 X 为一个 *klt Fano* 三维簇。若 $P \geq 0$、 $P \sim_{\mathbb{Q}} -K_X$和 $A_{X,\ P}(v)>0$在 Δ的每个对数典范中心 v处都成立，则对于任意有理数$0<h<\eta$，$(1-h)\Delta+hP$均为 *klt*。

证明。 通过半丰扰动选择一个单独指标为 Ξ的有效 klt 补。将其从 klt 边界（$1-h$）$\Delta+h\Xi$ 插值到（$1-h$）$\Delta+hP$。

该线段中的每个边界都支配（$1-h$）Δ，并且在旧的对数典范中心处具有正差异。如果端点不是 klt，则第一个非 klt 边界是对数典范的，并且通过在公共对数解消上的计算可知，它出现在某个有理数参数处。其对数典范中心与引理 4.5 矛盾。□

命题 4.14。设 Δ 是特征为 $p>5$ 的 *klt* 法诺三维簇上的 *lc* N-补。假设对于 Δ 的每个 *lc* 位，都存在 $G_v \in |-mK_X|$ 使得 $v(G_v) < mA_{X,\,0}(v)$，且对某个 m 成立。则存在一个指标仅依赖于 m、N 的 *klt* 补。

证明。在一个公共光滑模型上，同时消解 $|-mK_X|$ 的补和分数基理想。其截面除子的拉回为 $F+M_G$，其中 F 是一个固定有效有理除子，而 M_G 是一个无基点线性系。根据引理 4.10 中的差异计算，每个旧的 lc 位的中心都是保正则形式的简单正规交叉边界中系数为一的分支的某个层。选取无基点线性系中的一个成员，使其不包含这些有限多个层中的任何一个。它在每个旧的 lc 位处的阶均为零。因此，相应的截面除子在原补的每个 lc 位处同时达到原线性系中的最小阶。对 $P=G/m$ 应用推论 4.13，并取一个固定的有理 $h<\eta$（0，$1/N$，.....，1}）。通过将两个主关系相乘并相加，该混合物是指标为 $mN\mathrm{den}(h)$ 的 klt 补。□

引理 4.15。令 (Z,Σ) 遍历一个具有约化相对简单正规交叉边界及相对很充足除子 H 的有界光滑射影三维簇族。对于有效有理除子 G，令 $v_w(G)$ 表示其沿某个层、关于局部边界参数中非负权重 w 的单项式阶。存在一个族常数C，使得

$$|v_w(G)-v_{w'}(G)| \le C(H^2G)\|w-w'\|_\infty.$$

若 $H^2B \le C_0$，$B\ge 0$ 以及 (Z,B) 是 e-对数典范的，则存在仅依赖于该族、C_0、e的 $\eta>0$，使得在 (Z,Σ)的每个 *lc* 位 v 处，

$$A_{Z,B}(v) \ge \eta A_{Z,0}(v).$$

证明。选取 ℓ，使得经过分层后，对于所有标记分支，$\ell H-\Sigma_i$ 都是整体生成的。对于余维为 k 的层，选取一个有限投影$Z\to\mathbb{P}^3$，其将 $\mathcal{O}(1)$ 拉回为 $\mathcal{O}(\ell H)$，其中前 k 个仿射坐标在一般点处横截地切出这些分支。对于指定坐标，取这些分支的定义截面与 $\ell H-\Sigma_i$ 的一般截面的乘积。由简单正规交叉性及连续的一般无基点切割，它们的公共零点集的余维至少为 k。其余的 $4-k$ 个截面使该投影无基点，因此由丰性可知其为有限投影。借助很丰性，可以选择不受约束的坐标比，使其沿该层具有线性无关的微分。因此，该投影在其一般点处是 étale 的。

对于素除子 G，推前超曲面循环的次数为 $(\ell H)^2G$。其方程拉回后是 G 的局部方程的倍数。在该层的完备局部环中，取横截投影坐标作为参数。沿该层的剩余域扩张是可分的，因此可以选择一个包含不受限制的比值的系数域。于是，推前循环的方程关于横截变量是多项式，其总次数至多为 $(\ell H)^2G$。对于正有理无关权重，每个因子的首项单项式都是唯一的。它们的乘积以相同的次数界限制了 G 的首项单项式的总指数。由此可得

由正锥上的连续性可知，阶是具有该指数界的线性形式的最小值。在一个面上，权为零的变量属于其余参数的系数环，并给出相同的最小值。这证明了 素除子 的 Lipschitz界，进而也证明了有效有理和的 Lipschitz界。

函数 $F(w)=\sum_i w_i - v_w(B)$ 具有统一的 Lipschitz 常数 M，并且是齐次的。对于任意非零非负整向量 u，由差异得到$F(u)\ge e$；当 u 不是本原向量时，利用齐次性。正规化 $\|w\|_\infty=1$，并取一个整数 $Q>2M/e+2$。由同时逼近，存在 $1\le j\le Q^k$以及一个整向量 $u\ge 0$，使得 $\|jw-u\|_\infty\le 1/Q$。u 的一个坐标是 j。因此$jF(w)\ge e/2$，由于 $\sum_i w_i\le 3$，从而用 $\eta=e/(6Q^3)$得到所述断言。□

引理 4.16。设 Z 是特征为 $p>0$的光滑射影三维簇，H非常丰，且 D 是整 *Cartier*。设 $V_j\subset H^0(Z,\ jD)$ 是 r的倍数 $j>0$ 对应的非零线性系，其基理想为 $\mathfrak{b}_j$。固定一个整数 $t>0$，对于 $q=p^e$，取 j 为满足 $j\ge qt$且可被 r 整除的最小值。对所有充分大的 q，存在一个理想I，使得 $I\otimes \mathcal{O}_Z(K_Z+tD+4H)$ 整体生成，并且对于每个除子赋值 v，

$$\frac{v(\mathfrak{b}_j)}{q}-(1-1/q)A_{Z,0}(v)\le v(I)\le \frac{v(\mathfrak{b}_j)}{q}.$$

证明。令 $I\omega_Z$ 为 $F_*^e(\mathfrak{b}_j\omega_Z)$ 的迹像。在局部 Frobenius基 中，系数投影通过在源上进行乘法并取迹得到。因此 $\mathfrak{b}_j\subset I^{[q]}$，从而得到上界。对于下界，在光滑模型上展示 v。Z 上的局部典范生成元拉回后具有阶 $A_{Z,\,0}(v)-1$。在函数坐标中，迹因此将赋值环上的正则迹应用于一个乘以阶为 $-(q-1)(A_{Z,\,0}(v)-1)$ 因子的源。正则迹通过提取一致化元的幂并对余项应用正则性，将阶为 s 的元素映射为至少具有 $\lfloor s/q\rfloor$阶的元素。利用 $\lfloor s/q\rfloor\ge (s-(q-1))/q$ 即得下界。

根据投影公式以及对 V_j 的取值映射，扭曲迹像是若干份

$$F_*^e\big(\omega_Z((qt-j)D+4qH)\big).$$

这些层是 0-正则的，因为根据 Serre 消失定理，扭曲$-iH$, $1\le i\le 3$后的 i次上同调消失；这是因为 $qt-j$ 仅取有限多个值，且 $4-i>0$。这证明了整体生成。所需的 q 可能取决于Z，D，r，而输出扭曲使用给定的 t 和 H。□

定理 4.17（由有界缩放体积得到的 klt 补）。固定 $\epsilon>0$、$N>0$为整且 $U>0$。设 X 是一个 ϵ-对数典范的 *Fano* 三维簇，带有一个对数典范的 N-补 Δ。假设某个正整数 $b=b_X$ 满足

$$|-bK_X|\ \text{birational},\qquad b^3(-K_X)^3\le U. \tag{4.7}$$

在充分大的特征下，这类 X 是算术有界的，并且具有一个仅取决于 ϵ、N、U的 *klt* 补指标。相同的构造给出了有界性，并且对每个大于 *Cartier* 下降界限的固定素除子，都得到一个指标；该指标可以依赖于该素除子。

证明。记 $L=-K_X$。根据定理 4.12，klt 指数足以推出有界性结论，因为 $L^3\le U$。我们可以假设 Δ具有一个 lc 位。令 $G=bN\Delta\sim$

bNL。系统 $|G|$ 是双有理的，因为它包含 $|bL|$的截面的乘积。此外

$$\mathrm{vol}(G) \le N^3U, \qquad \mathrm{vol}(K_X + (\mathrm{Supp}\,\Delta)_{\mathrm{red}} + 14G) \le (15N)^3U.$$

后一个界由 $(\text{支集 }\Delta)_{\mathrm{red}} \le N\Delta$ 得出，利用小的 $\mathbb{Q}$-阶乘化来计算体积。第4.3小节中的构造给出了一个有界光滑模型 Z，它位于正规化像上，并带有由标记素除子构成的约化简单正规交除子 Σ。记 A 为射影像的超平面之拉回，记 H 为 Z上的相对很充足除子。存在一个公共 c，使得 $cA - H$ 在线性等价意义下有效。事实上，一般 $H_0 \in |H|$ 的像是次数至多为A^2H的曲面。将射影像有限地投影到 $\mathbb{P}^3$，再拉回该曲面像的方程。所得的有界倍数的 $|A|$的成员包含H_0。

标记模型上的界。在带有映射 f 到 X 以及g到 Z的一个公共解消上，令 $B_0 = g_*f^*\Delta$。取 $\mathrm{div}_X(u) = N(K_X + \Delta)$，并利用相容的典范除子定义 $K_Z + \Delta_Z = \mathrm{div}_Z(u)/N$。$B_0$ 和 Δ_Z 的支集都包含于 Σ中。此外，由于对数典范，$\Delta_Z \le \Sigma$。记 $M = bNf^*\Delta = g^*A_\Delta + F$，其中 A_Δ是对应于 $bN\Delta$ 的超平面成员，而 F 是有效固定部分。三个除子 M，g^*A，g^*H均为数值有效，因此依次用差为有效除子的较大类替换这些类，得到

$$bNH^2B_0 = (g^*H)^2M \le c^2(g^*A)^2M \le c^2M^3 \le c^2N^3U.$$

Δ_Z中存在一个系数为一的素除子，因为所有系数都小于一的保典 SNC 边界是子千足端的。在该素除子处，B_0 中的系数是（X,0）的对数差异，至少为 ϵ。由此我们得到 b的一个界。Δ_Z 的负系数也有界，因为 $H^2\Delta_Z^- = H^2(\Delta_Z^+ + K_Z)$且 $\Delta_Z^+ \le \Sigma$。固定一个非负整数 C，使得 $B_0 - \Delta_Z \le C\Sigma$ 在这些有界簇族上成立。

取 $2L$ [58,的一个 KLT代表元（定理 1]），并取其一半，从而得到一个有效有理的 $\epsilon/2$-对数典范卡拉比–丘边界 Ξ_X。其保正则迹 Ξ_Z为 $\Delta_Z - B_0 + g_*f^*\Xi_X$。因此，$\Xi_Z \ge -C\Sigma$；结合 $\alpha = 1/(1 + C)$，边界 $B = \alpha\Xi_Z + (1 - \alpha)\Sigma$ 是有效的且为 $\alpha\epsilon/2$-对数典范。其 H^2次数由其数值类有界。每个旧的 lc 位 v 都是（Z, Σ）的一个 lc 位。应用引理 4.15，可在所有这些位置得到一致比较，

$$\alpha A_{X,0}(v) \ge \alpha A_{X,\Xi_X}(v) = A_{Z,B}(v) \ge \eta A_{Z,0}(v). \tag{4.8}$$

固定次数下的截面转移。取 $D = N(\Delta_Z + C\Sigma)$，它是一个系数有界的有效整除子，并令 $T = g^*D - Nf^*\Delta$。由负性可知差 $g^*B_0 - f^*\Delta$ 有效，因为它是 g-例外的且为 g-反数值有效。因此，对于每个 v，都有 $T \ge 0$ 和 $v(T) \le v(D)$。对于有理函数 s，截面除子满足

$$g^*(\mathrm{div}_Z(s) + kD) = f^*(\mathrm{div}_X(s) + kN\Delta) + kT. \tag{4.9}$$

因此，原线性系 $V_k = H^0(X, kN\Delta)$ 是 $H^0(Z, kD)$ 的子系。取一个 r，使得 $rN\Delta$ 为无基点卡蒂尔除子。若 k 可被 r 整除，则基理想 $\mathfrak{b}_k$ 沿每个 v 的阶为 $kv(T)$，因为无基点线性系中的一个截面可以避开 v 的中心。

除子 $R = bD - A_\Delta$之所以有效，是因为 $g^*R = bT + F$。利用$cA - H$的有效代表元以及对高 H扭曲的相对 Serre 消失定理，存在一个公ℓ和一个有效的 $J_0 \sim \ell A - (K_Z + 4H) - 2\Sigma$。令 $m_2 = b\ell$为

$$J = \ell R + 2\Sigma + J_0 \sim m_2D - (K_Z + 4H).$$

于是，对于每个赋值， $v(J) \geq m_2 v(T) + 2v(\Sigma)$。其 H^2-次数由其线性类一致有界。在旧的对数典范中心处，引理 4.15 给出 $v(J) \leq C_1 A_{Z,0}(v)$，其中 C_1是一致的。取一个整数 t，使得 $Nt > (C_1+1)\alpha/\eta$。

对于每个旧的 lc 位 v，引理 4.16 给出一个来自生成理想的截面除子 $S_v \in |K_Z + tD + 4H|$，满足 $v(S_v) = v(I)$。取足够大的 q，使得同时有 (r/q) 最大系数 $D \leq 1$。记 $S_v + J = \mathrm{div}_Z(s) + (t+m_2)D$，并令 $G_v = \mathrm{div}_X(s) + (t+m_2)N\Delta$。为证明 $G_v \geq 0$，利用 (4.9) 检验每个 X 的素除子 P。若其中心包含于 Σ，则 $P(\Sigma) \geq 1$，且

$$A_{Z,0}(P) - P(\Sigma) = A_{Z,\Sigma}(P) \leq A_{X,\Delta}(P) \leq 1.$$

下界迹给出 $P(S_v) \geq tP(T) - A_{Z,0}(P)$。$P(J)$ 的下界中的项 $2P(\Sigma)$ 抵消了这一可能的损失，因此 $P(S_v + J) \geq (t+m_2)P(T)$。中心在一般意义上不落在 Σ 上的素除子已经位于 Z上，因为那里的例外赋值会满足 $A_{Z,\Sigma} \geq 2$。对于这样的素除子， $P(D)$ 和 $P(T)$ 均为零，因此有效性成立。

在选定的旧点处使用上迹界和 $qt \leq j < qt + r$ 以得到

$$v(G_v) \leq v(J) - m_2 v(T) + (r/q)v(T) \leq (C_1+1)A_{Z,0}(v) < N(t+m_2)A_{X,0}(v).$$

这里 $v(T) \leq v(D) \leq$(最大系数 D)$v(\Sigma)$，且 $v(\Sigma) = A_{Z,0}(v)$。我们为每个旧点构造了一个次数为 $N(t+m_2)$ 的有效截面除子。由于 b 有界，该次数遍历一个有限集。取幂可将所有截面置于同一个公共次数中，并保持严格不等式。命题 4.14 给出 klt 指数，而定理 4.12 给出算术有界性。在垂直分层上，对展开的光滑标记模型应用相同的阶和迹估计。□

5. 反典范体积与双有理性

5.1. 第一个反典范次数与秩一约化。 令 X 为一个具有零边界的例外 Fano 三维簇，并设 $L = -K_X$。由于 L 是丰沛的，整数 $d = \min\{j > 0 \mid H^0(X, jL) \neq 0\}$ 存在。事实上 $d \geq 2$。$|L|$ 的一个有效成员将具有一个系数至少为一的不可约分支，并会给出一个非 klt 完备化。

引理 5.1。 设 X 是特征 $p > 5$ 下的 *klt Fano* 三维簇，并令 $L = -K_X$。若 $|bL|$ 定义了一个概有限映射，则

$$H^1(X, -jL) = 0 \qquad whenever\ j \geq 1\ and\ 1 + (p-1)j > 5b.$$

对于例外的 X，存在一个绝对的 b_0，使得 $|b_0(d-1)L|$ 是双有理的。特别地，对于 $p > 10b_0 + 1$，

$$\chi(X, (d-1)L) \leq 0.$$

证明。 假设 $H^1(X, -jL)$ 中的一个类非零。根据 [64, , 将引理 4.9]，分别应用于模 L 的非常丰 Cartier 倍数的各个留数后，该类的迭代 Frobenius 拉回最终会消失。设最后一个非零类的扭曲为 $-D_0 = -p^v jL$。由于正规簇 X 上的反身层沿着 $X \setminus U$ 的深度至少为二，它在 $U = X_{\mathrm{reg}}$ 上仍然非零。

在 U 上，除子 $-D_0$ 是 Cartier。记 $\mathcal{L} = \mathcal{O}_U(-D_0)$。该类的一个余循环给出一个仿射直线丛，其在 $\mathcal{L}$ 的局部标架下的过渡函数为 $y_i = g_{ij}y_j + c_{ij}$。由于 Frobenius 消去该类，存在函数 h_i 满足 $h_i - g_{ij}^p h_j = c_{ij}^p$。因此，方程 $y_i^p = h_i$ 定义了丛中 U 的一个有限平坦覆盖。根据整性，在$k(X)$中的一个根在每个正规仿射图表上都是正则的。这些根将

粘合成仿射直线丛的一个截面，从而消去该类。因此，该覆盖的函数域是 $k(X)$ 上次数为 p 的扩张。仿射直线丛的相对典范丛是 $\mathcal{L}^{-1}$ 的拉回，而这些方程给出一个类为$\mathcal{L}^p$ 的 Cartier除子。伴随公式表明，其典范类是 $K_U-(p-1)D_0$ 的拉回。这就是 [64, 定理 4.5] 的局部构造。

令 $g\colon T\to X$ 为此域扩张中的正规化。在 U 上，根据超曲面覆盖 [64, 的有限对偶性，正规化贡献了有效导子除子 C，参见推论 4.6] 的证明。$g^{-1}(U)$ 的补集余维至少为二，因此取闭包可得一个魏尔除子关系

$$K_T+C\sim_{\mathbb{Q}} g^*\big(K_X-(p-1)p^v jL\big).$$

特别地，K_T+C 是 $\mathbb{Q}$-Cartier。

在 $|bL|$ 的图的光滑解消上，其自由部分 M 是数值有效且大的 Cartier 除子，并且 bL 的拉回在有理线性等价意义下支配 M。取 W 为 T 的一个光滑双有理模型，使其映到该图解消上，其中 M_W 是 M 的拉回。记 $h\colon W\to T$ 为诱导态射。根据定理 3.4], , 除子 K_W+5M_W 是伪有效的，因此它与数值有效除子 h^*g^*L 的平方的交非负。将 $b\,h^*g^*L-M_W$ 的有效余项乘以系数五，再加上 C 的严格变换。投影公式给出

$$0\le (K_T+C+5b\,g^*L)(g^*L)^2=\big(5b-1-(p-1)p^v j\big)(g^*L)^3,$$

这与所述不等式不相容。

现在令 $G\in|dL|$，并假设 X 为例外的。根据定理 4.7，在边界取为零的情况下，对 $(X,G/d)$ 对于某个绝对的 $e>0$ 是 e-对数典范的。在对数解消 $f\colon W\to X$ 上，令 H 为 G 的变换后支集与所有例外素除子的并。H 与 G/d 的保正则边界之差支集包含于 H 中，并且支配 eH。由于它支配 f^*G 的正倍数，故其为大。引理 4.3 再结合推前，得到 $|b_0(K_X+\text{支集 }G)|$ 的双有理性。加入固定的有效除子 $b_0(G-\text{支集 }G)$，便将此系统嵌入 $|b_0(d-1)L|$ 中。对 $j=d$ 应用第一条断言。根据定理 3 和 19]，除子层 [5, 的 Cohen–Macaulay 对偶性将 $H^2(X,(d-1)L)$ 识别为$H^1(X,-dL)^\vee$。因此前者为零；根据 d 的选取，H^0 也为零；根据对偶性与丰性，H^3 同样为零。这证明了关于 χ 的断言。□

命题5.2。对于零边界的例外法诺三维簇，若 $d^3(-K_X)^3$ 有一致上界，则存在一致有界指标的 *klt* 补，并且在充分大的特征下具有算术有界性。

证明。对于 $G\in|-dK_X|$，令 $\Omega=G/d$。定理 4.7 给出 (X,Ω) 的对数差异的一个绝对正下界。由于 $\operatorname{Supp}\Omega\le G$,

$$\operatorname{vol}(K_X+\operatorname{Supp}\Omega)\le(d-1)^3(-K_X)^3.$$

应用定理 4.12。因此，当该次数中的体积有界时，次数 d 随 X 变化的截面已足够。□

推论 5.3。在某个固定反典范次数上有截面的例外法诺三维簇，在充分大的特征下构成一个算术有界族。

证明。如果次数为 n，则所得的 klt 边界 $\Omega=G/n$ 具有所有正系数，并且所有对数差异至少为 $1/n$，因为 $n(K_X+\Omega)$ 是主的。体积界 (4.2) 和定理 4.12 适用。□

推论 5.4。 设 (X, B) 满足定理 *1.1* 的假设。如果 (X, B) 是例外的，且 $L = -(K_X + B)$ 不是大，则它具有有界指标的 *klt* 补。

证明。 L 的一个适当倍数定义了一个收缩。若其像的维数为一或二，则应用推论 3.10。若其像是一个点， $K_X + B \sim_{\mathbb{Q}} 0$。根据差异间隙， B 的系数属于一个有限集，且其正系数至少为 δ_R。在一个小的 $\mathbb{Q}$-阶化上，我们有支集 $B \leq B/\delta_R$和 $K_X + B \sim_{\mathbb{Q}} 0$。因此，$\mathrm{vol}(K_X + \text{支集 } B) \leq (\delta_R^{-1} - 1)^3 \mathrm{vol}(-K_X)$，而小性保持这两个体积。右侧由推论 4.6 有界。这给出了定理 4.12 的体积假设。取 B 为指定值应用该定理。 B 上的任何有效增量在数值上都是平凡的，因此与一个非常丰的平方相交可知其为零。因此， $K_X + B$ 的某个固定倍数是主的。取其与 q 的一个公倍数即可得到 (1.1)。□

较大的反典范体积可给出一个有效有理除子，其反典范次数较小，且在某个光滑点处重数较高。我们对其系数进行缩放，直至达到指定的对数差异 e ，然后取一个含有具有该差异的素除子的模型。在所得的莫里纤维空间中，曲线和曲面上的次数估计迫使底空间为一点。

定理 5.5。 固定 $0 < \epsilon \leq 1$。存在一个有理数 $0 < e < \epsilon$，仅依赖于 ϵ，使得在特征 $p > 5$ 下具有以下性质。如果 ϵ-对数典范 *Fano* 三维簇的体积无界，则存在 $\mathbb{Q}$-因子化的 e-对数典范 *Fano* 三维簇 T_i ，其皮卡数为一，并存在素除子 D_i ，使得

$$-K_{T_i} \sim_{\mathbb{Q}} s_i D_i, \qquad s_i \longrightarrow \infty, \qquad (-K_{T_i})^3 \longrightarrow \infty.$$

每个 (T_i, D_i) 均为对数典范，且 T_i 具有一个有效的 e-对数典范有理边界 $\Omega_i \geq (1-e)D_i$，其中 $K_{T_i} + \Omega_i \sim_{\mathbb{Q}} 0$。

证明。 我们改编了 [9, 第 9 节定理 1.6] 的证明中的提取过程。根据对数典范阈值的 ACC，我们可以选取有理数 $e < \min(\epsilon, 1/2)$，使得若 $(T, (1-e)D)$ 为对数典范，则对于 klt 三维簇[61,上的素 $\mathbb{Q}$-Cartier 除子，(T, D) 为对数典范（定理 1.5]）。

置 $L = -K_X$。若 $0 < a < 1$ 为有理数且 $a^3 L^3 > 27$，则比较 $h^0(X, maL)$ 与光滑点处阶为 $3m$ 的射流长度。对于充分可整除的 m ，这给出重数大于 3 的 $G \geq 0$、$G \sim_{\mathbb{Q}} aL$。在对数解消上，将t 从零开始增大，直到 (X, tG) 为 e-lc，并存在一个对数差异恰为 e 的素 E 。这一首个参数为有理数，小于 1，并且由解消边界的不可约分支计算得到。记 $\Delta = tG$ 和 $\alpha = ta$。

为以相同差异界完成 Δ ，在对数解消 h 上： $W \to X$将其保正则迹的正部分除以 $1 - e$。这给出一个系数至多为一的简单正规交叉边界C 。半丰扰动给出 $H_W \sim_{\mathbb{Q}} h^*((1-\alpha)L/(1-e))$，其中 $C + H_W$lc $[58, \text{定理 } 1]$。该类的 Cartier 倍数的截面从 X拉回，因此 $(1-e)H_W = h^*P$对于 $P \geq 0$ ，且 $P \sim_{\mathbb{Q}} (1-\alpha)L$。 $\Delta + P$的保正则迹至多为 $(1-e)(C + H_W)$；根据凸性，结合 $(W, 0)$，它是 e-lc。

仅提取 E ，通过 $\mathbb{Q}$-阶乘化修改 $\mu : Y \to X$；若 E 位于 X [11, ，则根据引理 7.7] 进行小的 $\mathbb{Q}$-阶乘化。记 $K_Y + \Delta_Y = \mu^*(K_X + \Delta)$ 和 $P_Y = \mu^*\Delta$。于是 $\Delta_Y \geq 0$ 在 E 上的系数为 $1 - e$ ，并且

$$P_Y \geq (\epsilon - e)E$$

由于 $\mathrm{ord}_E \mu^*\Delta = A_{X,\ 0}(E) - A_{X,\ \Delta}(E) \geq \epsilon - e$。保正则补全 $\Omega_Y = \Delta_Y + \mu^*P$ 是有效的且为 e-对数典范。对于有理数 $0 < \tau < 1 - e$，对 $K_Y + \Omega_Y - \tau E \sim_{\mathbb{Q}} -\tau E$ 运行极小模型纲领，得到一个莫里纤维空间 $T \to Z$ [13, 定理 1.7]。E 的变换在每条收缩射线上都具有正次数，因此它会保留下来，其最终变换 D 是相对丰沛的。$K_Y + \Omega_Y$ 的主关系保正则地下降。因此 $\Omega_T \geq (1-e)D$，而 e 的选择给出 $(T,\ D)$ 对数典范。

置 $b = (1-\alpha)/\alpha$。T 上的严格变换满足

$$-K_T \sim_{\mathbb{Q}} \Delta_T + bP_T, \qquad P_T \geq (\epsilon - e)D.$$

若 $\dim Z > 0$，令 F 为 $k(Z)$上的一般纤维。相对秩一且 $\Omega_T \geq (1-e)D$ 使 $-K_F$ 丰沛。局部化给出该零边界纤维上的差异界，如命题 4.8 所示。限制映射 D_F 是定义在此域上的整有效除子。在维数一的情形，$\deg(-K_F) = 2$，因此 $b(\epsilon - e) \leq 2$。在维数二的情形，取有理数 $0 < e_0 < e/2$。存在仅依赖于 e_0的 r，V_2，其中 $-rK_F$ 为丰沛 Cartier 且 $K_F^2 \leq V_2$，在同一域 [6, 上满足定理 5.6、5.12 和推论 5.8]。与 $-rK_F$相交得到 $b(\epsilon - e) \leq rV_2$，因为 $(-rK_F)D_F$是正整数。

沿着无界序列选取 $a \to 0$ 使得 $a^3L^3 > 27$。于是 $b \to \infty$，因此最终 Z 是一个点。秩一性给出 $-K_T \equiv sD$ 使得 $s \geq b(\epsilon - e)$。大 klt 边界 Ω_T 使 T 成为 Fano 型，因此数值成比例性可由无基点性提升为有理线性等价。最后，从 Y 到 T的推前保持 bP_Y的某个可整除倍数的每个截面不变。因此

$$(-K_T)^3 \geq \mathrm{vol}(bP_T) \geq \mathrm{vol}(bP_Y) = (1-\alpha)^3L^3.$$

□

引理 5.6。令 T遍历充分大的特征下的一个算术有界族中的 *klt Fano* 三维簇。设 $-K_T \equiv tD_T$ 对于某个非零有理有效除子 D_T成立，其中 q_0D_T 对于固定整数 q_0 是整的，并且 $t \geq a > 0$。那么 t 遍历一个仅依赖于该族、q_0 和 a的有限集。

证明。在有限个分层中的每一个上选取一个相对非常丰沛除子 H。引理 4.9 给出一个统一的 r，使得 $-rK_T$ 由一个相对线丛表示。因此，$h = (-rK_T)H^2$ 属于一个正整数有限集。将$j = (q_0D_T)H^2$ 写成

$$t = \frac{q_0h}{rj}, \qquad 1 \leq j \leq \frac{q_0h}{ra}.$$

该分数中的两个整数都只有有限种可能。 □

命题 5.7。设 X 是一个带零边界的例外 *Fano* 三维簇，并设 E 是一个对固定 $\gamma > 0$ 具有对数差异 $a \leq 1 - \gamma$ 的素赋值。提取 E，并将命题 *4.8* 的阈值构造应用于其系数。若最终的 *Mori* 基底具有正维数，则 X 具有一个取决于 γ 的一致 *klt* 补。在点基底的情形下，只要在所得的 *Fano* 三维簇 T 上，$(-K_T)^3$ 一致有界，同样的结论也成立。若 X 在一条曲线的一般点处是非典范的，则可以取 $\gamma = 1/3$。

证明。在提取 f 上：$Y \to X$ 设 $b = 1 - a$，因此 $K_Y + bE = f^*K_X$ 且$1 > b \geq \gamma$。有效 klt 弱对数 Fano 对使 Y 具有 Fano 型。定义

$$v = \sup\{t \geq b : -(K_Y + tE) \text{ is pseudo-effective}\}.$$

大性以及与丰沛平方的交给出 $b < v < \infty$。应用命题 4.8 的有理性和两次极小模型纲领。在第一个半丰模型上， $-(K_Y + bE)$ 的推前是大的，因此 E 的变换是相对大的。最终的莫里纤维空间 T 上带有相对丰沛的素除子 E_T，而 $-(K_T + vE_T)$ 来自第一个半丰底空间。 vE_T 的一个有效补全通过同一个主函数转移为 bE 的一个有效补全，进而转移为 $(X,\ 0)$ 的一个补全。它具有一致的差异界，因此无论 b 的分母为何，均有 $v < 1$ 。

在一般曲线纤维 $v = 2/j$ 上，其中 $j = \deg E_F$ 是介于 1 和 $2/\gamma$ 之间的整数。在曲面纤维上，取 $H = -rK_F$ 如命题 4.8 中所述。于是

$$v = \frac{H^2}{rj}, \qquad 1 \le H^2 \le r^2 V_2, \qquad 1 \le j = HE_F \le rV_2/\gamma.$$

这些在一般域上的计算给出了有限多个可能的系数。纤维定理提供了一个阶有界的主关系。在点 $(T,\ vE_T)$ 处， $v \ge \gamma$ 是一个 klt 卡拉比–丘对。体积界与定理 4.12 算术地界定了 T。采用引理 5.6 中相同的丰沛平方论证，并使用 $v \ge \gamma$，可得到有限多个 v。在定理 4.12 中规定 vE_T，即可界定 $K_T + vE_T$ 的阶。在任一情形下，极小模型纲领比较都将该关系传递到 X。

对于横截断言，在一般曲线点处局部化，或者在一般曲面上取曲线上某个参数的相应闭点，使该参数彼此分离。局部环与对数差异相同。在该 klt 曲面奇点的极小正则解消上，写作 $K_V + \sum b_i E_i = f^* K$。根据有理 klt 曲面奇点的极小解消计算[6, 命题 2.6 及引理 5.9] 的证明，系数均为非负。非典范性给出一个非零和。负定性提供了一个 E_i ，满足 $K_V E_i > 0$。写作 $E_i^2 = -d_i j_i$，其中 d_i 是其常数域的次数，而 j_i 是一个正整数。伴随公式给出 $K_V E_i / d_i \ge j_i - 2$，且该次数为正整数。与其他例外曲线的交均为非负，因此

$$b_i \ge \frac{K_V E_i}{d_i j_i} \ge \frac{\max(1, j_i - 2)}{j_i} \ge \frac{1}{3}.$$

取 E_i 在曲线上的闭包，便得到所述的 X 赋值。 □

5.2. **动除子的体积界**。 具有素成员的铅笔有几何整的一般纤维。其正规化图上的连通性迫使每个水平例外素除子的固定部分都满足一个下界。在该铅笔的消解的 Mori 纤维上，可以通过曲线次数或曲面次数来衡量该固定部分。

命题 5.8. 设 X 是一个定义在特征为 $p > 5$ 的代数闭域上的 $\mathbb{Q}$-阶乘 ϵ-对数典范法诺三维簇，且其皮卡数为一，并设 $S \equiv d(-K_X)$ 为素除子。若 $h^0(X, \mathcal{O}_X(S)) \ge 2$，则 $d \ge \lambda(\epsilon) > 0$，且该结论关于 p 一致成立。这适用于整曲线上整素除子的非平凡平坦族中的成员。更准确地，固定有理数 $0 < e < \min(1, \epsilon)$ ，并令 r, V_2 分别为证明中 $e/2$-对数典范德尔佩佐纤维所用的 *Cartier* 倍数和体积界。可以取

$$\lambda(\epsilon) = \frac{e}{4\max\{2, rV_2\} + 2e}.$$

证明。 U 的光滑射影消解是有理链连通的 [23,定理 1.5 和 4.8], ，因此 $\mathrm{Pic}^0(U)(k) = 0$。在参数曲线的正规化上，该族严格变换的闭包是……上的一个 Cartier除子

光滑乘积。其纤维除子推前到原来的成员；在 $U \to X$ 是余维一同构处即可验证这一点。根据代数等价，它们在U 上的线丛类相同。因此，这些素成员在 X 上 Weil 线性等价。即使不假设皮卡数，该论证也成立。

令 $L = -K_X$，并选取一个非恒定函数 $u \in H^0(X, \mathcal{O}_X(S))$。它的简单极点除子为 S。正规化图 $\pi\colon W \to X$ 带有 $f\colon W \to \mathbb{P}^1$。其纤维有限映射到 X，且在无穷远处，其唯一的素纤维分支是 S的严格变换，重数为一。因此，斯坦因分解中的有限映射次数为一。简单极点还表明 $u \notin k(X)^p$，因此 $k(X)/k(u)$ 是可分生成的。由此，一般纤维几何整。一般闭纤维有限且双有理地映射到素除子 $S_t \sim S \sim_{\mathbb{Q}} dL$。

假设 $d < 1/2$。对于不同的一般参数，令 $Q = S_{t_1} + S_{t_2}$ 和 $K_W + B_W^0 = \pi^*(K_X + Q)$。若一个 π-例外素除子 E 支配 $\mathbb{P}^1$，则 $E \to \pi(E) \times \mathbb{P}^1$ 有限映射到其像。由维数可得 $\dim \pi(E) = 1$，且该像是乘积。特别地，对于一般的 $x \in \pi(E)$，两个图纤维都与 E 在 x 上相交，并且可从第一个交点中选取一个不属于其他例外素除子的点。两个图纤维在 B_W^0 中的系数均为一。双有理连通性 [22, 引理 3.4] 表明，纤维在 x 上方的非 klt 子集是连通的。每条收缩曲线都包含在例外素除子的并集中。事实上，从相对丰沛 Cartier 除子中减去推前的拉回，利用负性可知所得例外除子非正，而这个差在每条收缩曲线上均为正。因此，所选点必定位于E内一个正维的非 klt 分支上。改变 x 可知， E 本身的系数至少为一。等价地，

$$\operatorname{ord}_E \pi^* Q \geq A_{X,0}(E). \tag{5.1}$$

将 $K_W + \Gamma_W - R_W = \pi^* K_X$ 写成具有有效不相交部分的形式。根据 (5.1)，从 $\mathbb{P}^1$ 拉回后，我们有 $B_W \geq \Gamma_W$。在对数解消 h 上： $Z \to W$ 使用边界

$$\Theta = \Gamma_W^{\mathrm{str}} + (1 - e/2)\operatorname{Exc}(h)_{\mathrm{red}}.$$

它是 $e/2$-对数典范的。根据定理 1.6–1.7]，在 W 上运行其伴随极小模型纲领，得到数值有效模型 Y [13, 。若 B_Y是 B_W的保正则迹，则 $\Theta_Y - B_Y$在 W上数值有效，并且推到一个非正除子上。由负性得到 $\Theta_Y \leq B_Y$。因此，一个存留的水平 h-例外素除子在 Q 上的阶至少为 $A_{X,\,0}(E) - e/2$。

令 H，Q_Y为 L，Q在 Y上的拉回，并将 $K_Y + \Gamma - R = -H$写成具有有效不相交部分的形式。由于 $\Gamma \leq \Theta_Y$，(Y, Γ) 是 $e/2$-对数典范的。对于 $\mathbb{P}^1$ 上的水平素除子，前述估计给出

$$Q_Y \sim_{\mathbb{Q}} 2dH, \qquad Q_Y \geq R^{\mathrm{hor}}, \qquad Q_Y \geq (e/2)E$$

对每个在 X 上方的水平素除子 E 例外。在铅笔的一般曲面上， H 数值有效且大，并且 $(K_Y + \Gamma)H \leq (2d - 1)H^2 < 0$。因此， $K_Y + \Gamma$ 并非相对伪有效。它在 $\mathbb{P}^1$ 上的极小模型纲领给出一个莫里纤维空间 $\psi\colon T \to V$，其中 $1 \leq$ 维 $V < 3$。

某个在 X 上方的素除子 E_T 支配 V。事实上，在一个公共图上，取一般非常丰除子 A_V 的拉回，并将其推前到 X。由于秩一，其推前是丰沛的。其拉回在 T 上的迹是大的，并且等于 $\psi^* A_V$ 加上一个在 X 上例外的有效除子。若后者中的每个素除子都是垂直的，则可用来自 V 的拉回来支配整个除子，这与大性矛盾。

令 G 为 ψ 在 $k(V)$ 上的一般纤维。局部化保持对数差异[21, 引理 2.1 和推论 2.2], ，而相对秩一使 $-K_G$ 丰沛，因为

Γ_G 是有效的。将 Y 上的不等式及其严格变换加以限制，得到

$$-K_G \sim_{\mathbb{Q}} H_G + \Gamma_G - R_G \sim_{\mathbb{Q}} \frac{e(1-2d)}{4d} E_G + G_0, \qquad G_0 \geq 0.$$

事实上，展开 $H_G \sim_{\mathbb{Q}} (1/(2d)-1)Q_G + Q_G$ 并使用 $Q_G \geq R_G$。除子 E_G 在 $k(V)$上是整的。若 G 是曲线，则其亏格为零，且 $\deg(-K_G) = 2$。若 G 是曲面，则应用 [6, 的一般域上的结果：定理 5.6、推论 5.8 以及定理 5.12] 的证明，并取严格间隙 $e/4$。它们给出 $-rK_G$ 丰沛 Cartier 和 $K_G^2 \leq V_2$。于是，正整数 $(-rK_G)E_G$ 给出 $rV_2 \geq e(1-2d)/(4d)$。在曲线情形中，2 代替 rV_2。解出 d 即可得到所述的界。□

一个双有理线性系为微分截面提供三个坐标。每次求导都会使次数增加一个固定量。相对于族的一个参数求导会保持次数不变。

引理 5.9。设 $L = -K_X$ 和 $|bL|$是双有理的。存在分离坐标 t_1、t_2、t_3 以及一个有效的 $D \sim (7b-1)L$，其由一个有理截面 u切出，使得

$$u^{2a}\partial_t^{[I]} H^0(X, mL) \subseteq H^0(X, (m + (14b-2)a)L), \qquad |I| = a.$$

当参数取自第二个因子、仅对第一个因子进行微分时，同样的估计成立。

证明。在次数为 b 的截面之比中选取 $t_i = s_i/s_0$，使其微分形式张成函数域的余切空间。令 $H = \operatorname{div}(s_0) + bL$，选取$K_X = \operatorname{div}(dt_1 \wedge dt_2 \wedge dt_3)$，并设 $J = K_X + 4H$、$D = J + 3H$。若 f_0 沿一个素除子切出 H，且 $f_i = f_0 t_i$，则 $f_0^4 dt_1 \wedge dt_2 \wedge dt_3$ 是个正则形式 $f_i\, df_0 \wedge \cdots \widehat{df_i} \cdots \wedge df_3$的交错和。因此 $J \geq 0$。

在素除子 P 处，使用正则 étale 坐标 x。记 $h = H_P$、$j = J_P$ 和 $k_P = (K_X)_P$。x-泰勒系数中，t_i 的阶为 c 的项，其阶至少为 $-(c+1)h$。事实上，对于 $h > 0$，展开分母至多损失 $h + c$，而如果 $h = 0$，这些系数就是整的。逆雅可比矩阵的各项阶至少为 $-j$，因为求逆前其行列式的阶为 k_P，而其余子式的阶至少为 $-4h$。

形式逆变换 $w = x(t+y) - x(t)$ 存在，因为这些坐标具有分离性。其次数为 $a \geq 1$ 的系数的阶至少为 $-(2a-1)(j+3h)$。这就是一次项中的雅可比估计。次数为 $c \geq 2$ 的项出现在关于次数 a 的递归中，它使用的低阶系数的阶之和为 a。归纳法表明，在乘以逆雅可比矩阵之前，该项的极点至多为 $(2a-c)(j+3h) + (c+1)h$。使用 $(c-1)(j+3h) \geq j + (c+1)h$ 即可得出结论。截面 s of mL 的 x-泰勒系数中，阶为 c 的项的阶至少为 $mk_P - c$，这是因为将一致化元展开为其整阶乘以一个单位元。代入 w 可得 $\operatorname{ord}_P(\partial_t^{[I]} s) \geq mk_P - 2aD_P$。如果 $D_P = 0$，则 $h = k_P = 0$，且展开式是整的。在每个素除子处乘以 u^{2a} 都能消除这些极点，从而证明断言。□

要去除经过移动点的素因子，在 $X \times X$ 的一般对角线上工作，并设 s 是第一因子中的一个截面，其对角阶为 M。其除子的一个经过对角线、系数为 a_P 的素除子 P，可以通过沿某个坐标方向取 a_P 阶 Hasse 导数来去除；该方向上的一阶导数在 P 的一般点处将其局部方程映为单位元。在该阶的泰勒系数中，只有 a_P 个局部因子的一阶导数之积能够

在模 P 意义下存留下来。该导数至多使对角阶降低 a_P。在两组分离坐标中存在这样的方向，因为光滑乘积中的约化素子簇在 k 上一般光滑。

如果参数因子的所有方向都不适用，那么所有这些导子都会保持方程理想。在对角线上的完备正则局部环中，以第一投影作为系数域，此时方程的首齐次部分的所有偏导数都为零。因此，其次数至少为 p，且$a_P \le M/p$ 在此情形下。每个经过对角线的素除子都支配两个因子，所以消分母乘子在该处都是单位元。将截面化为相同次数后，导数的一个一般线性组合避开了经过对角线的s的所有有限多个素除子。

我们还将使用以下观察。如果 $a_P > M/2$，那么 P 的方程沿对角线的阶为一。在参数上的一般纤维上，这给出了相应素除子的一个光滑有理点。由正规性可知，其正则局部环包含函数域的代数常数，且其剩余域为基域。因此，常数是平凡的，而该点处的光滑性意味着可分生成。该素除子是几何整的。铺展之后，其成员包含移动点，并构成一个非常值覆盖族。

引理 5.10. 设 X 是一个 $\mathbb{Q}$-阶乘的 ϵ-对数典范法诺三维簇，其皮卡数为一，定义在特征为 $p > 5$ 的域上，并假设 $|bL|$ 是双有理的。按照命题 *5.8* 中的记号，取满足 $v^3 < L^3$ 的有理数 $v > 2/\lambda$。若

$$\frac{6}{v}\left(1+\frac{14b-2}{\lambda}\right) < \alpha < \frac{1}{2},$$

存在正整数 n、μ，满足 $3n < \alpha\mu$，且有一个由 X 的稠密光滑开子集参数化的、含两个成员的 $|nL|$ 族。两个成员在参数点处的重数均至少为 μ，且没有公共素除子经过该点。

证明. 对 $X_{k(X)}$ 的对角线所对应的有理点进行截面和射流计数，可在某个充分大的可整除次数 m 下得到一个对角阶为 $M > vm$ 的截面。对于经过对角线的素除子 P，选取其一般纤维中经过几何对角点的一个约化几何分支。将该分支及关联关系下降到参数域的一个有限扩张，再推广为一个整素除子的覆盖族。沿 L 的数值系数至多为 m/a_P，因为该截面在该分支上的系数至少为 a_P，即使几何纤维非约化也如此。由命题 5.8 得到 $a_P \le m/\lambda$。因此，经过前述剔除并应用引理 5.9，即可在某个公共次数下得到所需的一对成员

$$n \le m\left(1+\frac{14b-2}{\lambda}\right).$$

每个截面的阶至少为 $\mu = \lceil M/2 \rceil$，因为 $m/\lambda < M/2$。对角理想幂中的成员关系以及对角线处基 locus 的维数界会延伸到一个稠密开集。□

两个高阶成员在移动点处具有余维至少为二的非 klt中心。首先利用连通性排除点中心，然后对剩余曲线的次数给出界。在参数曲面上应用连通性即可得到体积界。

引理 5.11。 在引理 *5.10* 的假设下，存在一个由不同的几何整曲线组成的平坦射影族 C_t ，其覆盖 X的一个稠密子集，且 t位于一个光滑整曲面上。每条曲线都满足

$$0 < LC_t \leq (1-2\alpha)^{-1}.$$

对于每个闭的 t 和有理数 $\theta > 0$ ，都存在一个有效的 $\Delta_t \sim_{\mathbb{Q}} \alpha L$ ，它在 C_t的一般点处非 *klt*，且所有系数均为 $< \theta$。经过参数域的有限纯不可分扩张并限制到一个开集后，正规化构成一个光滑射影族。

证明。 固定一个参数 z_0 ，并在 z_0处的第一成员之外进行讨论。对于这个开集中的每个点 x ，一般第一成员都避开 x。经 $3/\mu$缩放后，它在自身参数处是非 klt 的，且其类为 cL ，其中 $c < \alpha$。因此，一个带有 $\beta < 1-\alpha$ 的有效$P \sim_{\mathbb{Q}} \beta L$ 不可能以 x 为孤立的非 klt 点。否则，加入缩放后的除子会使对数 Fano 对的非 klt 轨迹不连通，这与定理 4.12]的 [43, 相矛盾。若 (X, P) 在x附近是 lc 的，那么 x 本身也不可能是 lc 中心。为此，取非常丰线性系中一个经过 x且避开经过 x的正维 lc 中心泛点的成员 H_x 。在一个展示以点为中心的 lc 位的消解上，令 h 为在以 x为中心的已展示 lc 位中，$A_{X,0}(E)/\mathrm{ord}_E(H_x)$ 的最小值。对于充分小的有理数 $\delta > 0$，边界 $(1-\delta)P + \delta h H_x$ 具有一个以点为中心的 lc 位，经过 x 的其他中心上所有已展示的不一致数均为正，且其类仍为 $< (1-\alpha)L$。SNC 计算表明， x 是一个孤立的非 klt 点，而这已被排除。

在参数空间的几何泛点处消解铅笔理想。将带标记的对数消解下降到参数域的有限扩张，并在稠密开集上延拓到正规化。缩小后，保正则形式系数、理想的阶以及经过参数点的中心列表均为常数。选择一个在该点计算阈值的标记素除子 E ，其阈值为 τ 。光滑点吹起给出 $0 < \tau \leq 3/\mu$。其中心 C 的维数至多为一，因为没有公共素除子经过该点。

为了用任意小的系数表示该阈值，在 z处的闭纤维中工作。减去避开 z的公共固定魏尔除子 Q。在进一步的对数消解 π 上： $W \to X$ 余项铅笔拉回为无基点 Cartier 铅笔 M 与一个有效例外固定除子 F。若 $K_W + B_W = \pi^* K_X$，则 $B_W + \tau F$在 z 的某个邻域上是对数典范的，并且沿所选素除子的系数为一。截断至一的正部分在整体上是一个简单正规交叉对数典范边界。对该边界应用半丰扰动，并对任意大的整数 a应用 $a\tau M$ 。由此得到的有效代表元 J' 的系数至多为一，并避开系数为一的素除子。推前 $P = \pi_*(J'/a)$ 满足

$$\pi^* P = J'/a + \tau F, \qquad P \sim_{\mathbb{Q}} \tau(nL - Q).$$

这些是清除分母后拉回的主关系的恒等式。因此，$(X,\ P)$ 在 z 附近是对数典范的，并保留 E 作为一个 lc 位。由秩一性， $P \sim_{\mathbb{Q}} \beta L$ 与 $\beta \leq \tau n < \alpha$。加入一个系数较小、支集避开 z 的 $(\alpha - \beta)L$ 的代表元，得到 Δ。令 a 足够大，即可使其所有系数任意小。点中心排除表明， C 是一条曲线。

设 $H = (1-2\alpha)L$。若 $HC > 1$，则取点中心排除所用开集中的一般光滑点 $x \in C$，并且该点处（$X,\ \Delta$）是对数典范的。在一个对数解消上选取系数为一的素除子 E' ，其位于 C之上。通过避开两两交的竖直分支的有限多个像，我们可以选取其在 x 上的纤维的一个不可约分支，使其一般点不落在其他标记除子上，方法是避开

两两交的竖直分支的有限多个像。对于充分大的可整除的 m，由黎曼–罗赫定理可得一个 $mH|_C$ 的截面，其在 x处的阶为 $m' > m$ 。取 $H^0(X, mH)$ 中限制到其张成空间的子空间。由 Serre 消失定理以及 $\mathcal{I}_C(mH)$ 的生成性，其基概形支集位于 C 上的有限多个零点处。对该子空间作消解，将其拉回写成自由部分加固定部分。相同的截断边界扰动给出一个有效的 $B \sim_{\mathbb{Q}} H$，使得在 x 的穿孔邻域上（X, $\Delta + B$）是对数典范的，并且其拉回包含除以 m 后的固定部分。

在 E' 上选定的不可约分支处，u基理想包含于 $(u, w^{m'})$ 中，其中 u 切出 E'，而 w 是沿着 E' 上纤维的局部参数。权重为 $(m', 1)$ 的单项式赋值，对于 (X, Δ) 的保正则迹具有一的对数差异，并且在该理想上的阶至少为 m'。因此，$(X, \Delta + B)$ 在 x 处是非对数典范的。经过 x 的旧对数典范中心由点中心排除可知具有正维中心，因此由穿孔邻域上的对数典范性，它们在 B 上的阶为零。在一个公共解消上，加入 B 时的第一个局部阈值因此属于 $(0, 1)$，并给出一个以 x 为中心的新对数典范中心。其边界类严格低于 $(\alpha + 1 - 2\alpha)L$，再次被排除。这证明了 $HC \leq 1$。

标记像构成一个射影族；由于标记素除子是几何整的，且概形论像与平坦域扩张相交换，一般像也是几何整的。缩小后可得到平坦性以及几何整纤维。由于这些曲线覆盖X，且原点参数的维数为三，希尔伯特像的维数为二或三。在三维情形中，紧化空间中的一般超平面会在其有限边界之外与一般取值映射纤维曲线的射影闭包相交。因此，曲面不可约分支仍然给出一个覆盖族。限制到实际希尔伯特像中的一个光滑开集，使得这些曲线彼此不同，并且每个闭参数都保留上述构造。为了同时对它们进行正规化，在参数域的完美化上对一般曲线进行正规化，此时该正规化是光滑的。将有限映射和公共同构开集下降到一个有限纯不可分扩张，并进行扩张。参数变换是根式的，并保持彼此不同。□

引理 5.12. 设 $g : W \to Z$ 是代数闭域上维数至多为三的光滑簇之间的占优态射。g^*H 在闭点 w 处的局部对数典范阈值不大于有效有理除子 H 在 $g(w)$ 处的局部对数典范阈值。重数为 < 1 的有效有理除子在光滑点处是 *klt* 的。

证明. 清除系数，将问题化为卡蒂埃理想。根据乘积消解，拉回到 $W \times Z$ 后的阈值等于原来的阈值。在 $(w, g(w))$ 附近，图由 Z 上 étale 坐标中的一系列光滑方程 $z_i - g^* z_i = 0$ 刻画。沿此旗标 [65, 应用对数典范阈值的限制不等式，得推论 4.5]。沿经过一点的一般光滑曲线应用同一不等式，可知该点处的阈值不小于重数的倒数。□

引理 5.13. 设 X 是特征 $p > 5$ 下的一个射影 $\mathbb{Q}$-因子分解的 e-对数典范三维簇，其中 $0 < e \leq 1$。设 $f\colon\ W \to T$ 是一个以光滑整曲面为底的几何整曲线光滑射影族，并带有一个一般有限主导映射 $g\colon\ W \to X$。每个 F_t 都有限且双有理地映到 C_t 上，并且这些 C_t 互不相同。假设对每个闭 t 和有理数 $\theta > 0$，都存在一个系数为 $< \theta$ 的 $H_t \geq 0$，其在 C_t 的一般点处非 *klt*，且 $H_t C_t \leq a < e/2$。经过缩小后，

这些曲线彼此不交，位于光滑轨迹中，且其反典范次数为整数。如果对于每个稠密参数开集中的任意两个不同闭参数，都存在这样的 H_s、H_t，使得 $-(K_X + H_s + H_t)$ 对任意小的 θ 都数值有效且大，则上述假设不可能成立。

证明。缩小 T，使得 g 中的每个被压缩素除子在 W 上都是水平的。这样的除子只有有限多个，因为 g 一般有限。记 $d = [k(W): k(X)]$。对于系数为 $< \theta$ 的固定 $H \geq 0$，将 $g^*H = H_h + H_v$ 在 T上分解。根据光滑性和整纤维，垂直素除子是 T 上一条素曲线的约化拉回。它映到 X 中的一个素除子上，并且系数为 $< d\theta$。H_h 在每个纤维上的次数都是 HC_t；对于这个固定的 H，该次数在族中保持不变。在某个子簇的一般点处，若其参数像具有正维数，则纤维不包含于 H_h中，因为水平除子不可能包含一条曲线上方的所有纤维。H_h 在那里处的重数至多为其在该纤维上的次数。至多有一个垂直素除子经过这样的点，并且它在该处是光滑的。

对一般的 t，取 $H = H_t$ 和 $a + d\theta < 1$。重数界和引理 5.12 表明，Nklt(W, g^*H_t) 映到有限多个参数。由于该族覆盖，C_t 的一般点在 X 上光滑。在一般闭点处，阈值不等式表明，所有支配 C_t 且位于 C_t 上方的不可约分支都属于非 klt 轨迹。它们各自都是一个纤维，而彼此不同这一点迫使它等于 F_t。由于 $F_t \to C_t$ 是双有理的，一般 C_t 的一般点只有一个原像。将此点选在开集内，使得 g 的纤维的几何点数等于可分次数，由此可知 $k(W)/k(X)$ 是纯不可分的。

取 p 的一个幂 q_0，使得 $k(T)^{q_0} \subset k(X)$。将由此诱导的从 X 到 T 的 Frobenius 扭曲的正规射影紧化的有理映射之图作解消。记 $\pi\colon Y \to X$ 为具有简单正规交叉例外除子的光滑模型，并记 h 为到该紧化的映射。在 $k(W)$ 中的正规化在 Y 上是有限纯不可分的。在稠密的底空间开集上，它与 W 一致，因为在一般点处二者都是函数域相同的正规本征曲线。将所得映射记为$q\colon W \to Y^\circ$。缩小底空间，使得 π 中与 Y° 相交的每个例外除子都是水平的，并且 π 在每个 C_t 的一般点处都是同构。

写出 $K_Y + \Gamma = \pi^*K_X$。Γ 的正部分具有 SNC 支集，且系数不超过 $1-e$。对于不同的 s、t，取满足 $2a+2d\theta < e$ 的 $H = H_s + H_t$。由相同的重数界可知，在参数像维数为正的任意子簇的一般点处，g^*H/e 的重数为 < 1。q 的图不等式表明，$(Y, \pi^*H/e)$ 在该处是 klt。对于 $e < 1$，将其与对数正则对 $(Y, \Gamma^+/(1-e))$ 按权重 e、$1-e$ 作凸组合，可知 $(Y, \Gamma^+ + \pi^*H)$ 在该处是 klt。对于 $e = 1$，正部分为零。因此，$Z = \text{Nklt}(Y, \Gamma + \pi^*H)$ 在开集上的参数像是有限的。它包含 C_s、C_t 的严格变换。若它们在 X 上的 x 处相交，双有理连通性将由引理 3.4] 得到一个连通集 $Z \cap \pi^{-1}(x)$ [22, 。该集合在 h 下的像将包含两个不同的孤立点，这是不可能的。若 $-(K_X + H)$ 数值有效且大，则由定理 4.12], , Nklt(X, H) 是连通的 [43, ; 而 Z 由真性及其到该轨迹的映射的连通纤维可知是连通的。它在 h 下的像给出同样的矛盾。

互不相交性和纤维有限性现使 g 拟有限。有限满射 q 随后使 $\pi|_{Y^\circ}$ 拟有限。扎里斯基主定理表明，它与到 X 中的一个开浸入同构。因此，这些曲线位于一个光滑开集中，且具有整反典范次数。□

定理 5.14（固定双有理次数下的体积）。 固定 $\epsilon > 0$ 和一个整数$b \geq 1$。在特征 $p > 5$ 下，皮卡数为一且具有 $|-bK_X|$ 双有理的 $\mathbb{Q}$-阶乘 ϵ-对数典范 *Fano* 三维簇的体积（$-K_X$）^{3} 一致有界。

证明。 取有理数 $0 < e < \min(\epsilon,1)$ 和 $\alpha = e/16$。固定一个足够大的整数 v，使其满足引理 5.10 中的不等式，其中 $\lambda = \lambda(e)$。若 $(-K_X)^3 > v^3$，则引理 5.10 和引理 5.11 给出一个覆盖族，其具有 $H_t = \Delta_t$ 且 $H_tC_t \leq \alpha/(1-2\alpha) < e/2$。在正规化族上，求值映射一般有限，因为源空间和目标空间的维数均为三。此外，$-(K_X + H_s + H_t) \sim_{\mathbb{Q}} (1-2\alpha)(-K_X)$ 是丰沛的。这与引理 5.13 矛盾。□

定理 5.15 (非零边界补)。 固定一个有限有理数集$R \subset [0,1]$。在仅取决于 R 的充分大的特征下，定理 *1.1* 中满足 $B \neq 0$ 的每个例外对都存在一个单调 *klt* 补，其共同指标仅取决于 R。

具有零边界的例外 *Fano* 三维簇，若具有对数差异不超过 $1-\gamma$ 且固定$\gamma > 0$ 的素赋值，则也具有统一的 *klt* 补充。

证明。 命题 4.8 和 5.7 处理正维底空间的情形。在点基底情形下，它们给出一个 $\mathbb{Q}$-阶乘的秩一 Fano T，带有一个 e-对数典范补全 P，其正系数至少为固定的 $\delta > 0$。令 $D =$支集 P。在一个对数解消上，D 的约化标记与例外除子的总和至少比保正则迹大 e 倍的标记。由于它支配 P的拉回的一个正倍数，这个差异是大的。引理 4.3 给出一个双有理线性系 $|J| = |m(K_T + D)|$，满足$m = m(e)$。对于 $a_0 > 0$ 和 $a_0 \geq m(\delta^{-1} - 1)$，我们有

$$a_0(-K_T) - J \sim_{\mathbb{Q}} (a_0 + m)P - mD \geq 0.$$

在一般光滑点处，自由超平面检验给出 $\varepsilon(-K_T;\ x) \geq 1/a_0$。引理 4.1 使 $|-bK_T|$ 成为 $b+1 > 6a_0$上的双有理映射。定理 5.14 对 T的体积给出了界。

引理 5.6 中的丰沛平方计算现在表明，当$P = \lambda B_T$时，λ属于一个有限集。若 $P = vE_T$，则同一计算利用 $v \geq \gamma$ 来界定分母。应用定理 4.12，并指定 P，可在 T上得到一个有界的主关系；命题 4.8 和 5.7 将其传递到 X。推论 5.4 给出了低维情形。□

5.3. **界定第一双有理次数**。 现在我们要在双有理次数变化时界定体积。在一般点处高阶消失的截面可能含有一条经过该点的大固定素除子。移动该点便得到一个次数较小的素除子族。若不存在这样的素除子，则导数给出两个在该点附近没有公因子的截面，它们的交产生一条曲线，可对其应用前述次数估计。记极化为 R，并令$V = R^3$。对于有理数 $v \geq 16$，令 l 为大于$vV^{-1/3}$的最小正整数。

定理 5.16. 考虑代数闭域上的以下两类射影 $\mathbb{Q}$-阶乘三维簇之一。

(i) (Y, B)是 *dlt*，$N(K_Y + B) \sim 0$对于固定的 N，且 R是一个数值有效、大、半丰有理除子，满足 $R \geq B$ 以及 支集$R =$ 支集B。令 d 为线性系 $|\lfloor dR \rfloor|$的第一双有理次数。

(ii) Y 对于固定的 $e>0$ 是 e-对数典范的，$R=-K_Y$ 数值有效、大且半丰沛，$d\geq 2$ 是第一个有效次数，且对于某个 $b\leq Jd$，$|bR|$ 是双有理的，其中 J 固定。存在仅取决于 (i) 中的 N 以及 (ii) 中的 J、e 的常数 P、K，使得对于每个 $v\geq 16$，若 $p>P$ 且 $d>Kl$，则存在一个覆盖 Y 的非常数整素除子族，其一般成员满足 $R^2S/V<2l/v$。

证明。在全文中，我们可以将 P,K 增大为仅依赖于所示数据的常数。在 (i) 中，令 $b=d$。取 $Y_{k(Y)}$ 上由对角线给出的有理点 ξ，并用上划线表示几何基变换。存在一条经过 ξ 的整曲线 C^{-}，使得

$$0<\gamma=\frac{RC}{\operatorname{mult}_{\bar{\xi}}C}<D_1/d,\qquad b\gamma<D_2,$$

对于固定的 D_1,D_2。在 (ii) 中，若 Seshadri 常数更大，则由引理 4.1 可在次数 $d-1$ 处得到一个截面，因此可以取 $D_1=4$。在 (i) 中，令 $j=\lfloor(d-1)/N\rfloor-N$。若 Seshadri 常数为 $>6/j$，则通过带取整边界的迹，可以在 $K_Y+\lceil jR\rceil$ 中得到一个双有理线性系。其 N 重乘积保持这些比值，并且根据关于 $N(K_Y+B)$ 的主关系以及

$$N\lceil jR\rceil-NB\leq N(j+N)R,$$

给出一个低于 d 的双有理线性系。不等式用到了 R 的每个正系数都至少为 $1/N$。当 d 较大时，$6/j<20N/d$。每次对 nef 且大的除子取迹时，都将其写成丰沛除子加有效除子，并将有效部分的一个小倍数加到迹边界中。这样便得到一个丰沛正类，同时保留对角点处严格的 Seshadri 界。截面和双有理性在$^{-}$基域扩张下可下降。由于半丰沛映射在一个稠密开集上是同构，因此经过 ξ 的任意曲线上的次数均为正。

具有高对角阶的截面。写作 $\Lambda_j=H^0(Y,\ \lfloor jR\rfloor)$。将其乘以适当幂次的固定有理函数后，在第一因子上取阶为 a 的 Hasse 导数，会将 Λ_j 映入 Λ_{j+D_0a}，其中 $D_0\leq c_0d$。该乘数沿着支配第一因子的子簇是一个单位元。在 (ii) 中，这是引理 5.9，其中$D_0=14b-2$。在 (i) 中，取分离坐标 $t_i\in\Lambda_b$，使用截面 1。设$H=\lfloor(b+N)R\rfloor$，$K_Y=\operatorname{div}(dt_1\wedge dt_2\wedge dt_3)$，且 $D'=K_Y+7H\geq 0$。对于 $s\in\Lambda_j$，从 $\operatorname{ord}_P(s)\geq-\lfloor jR_P\rfloor$开始应用引理 5.9 的泰勒计算，得到

$$\operatorname{ord}_P(\partial_t^{[I]}s)\geq-\lfloor jR_P\rfloor-2aD'_P,\qquad a=|I|.$$

如果 $D'_P=0$，那么 $H_P=R_P=0$，因此展开式在此处是整的。将 $2aD'$ 替换为 $2aND'$，并乘以 u^{2a}，其中 $\operatorname{div}(u)=N(K_Y+B)$，从而得到 $D_0=14N(b+N)$。对参数因子求导不会增加次数。

由于 $l^3V>v^3$，射流计数得出一个 nlR 的截面，其对角阶为 $M>vn$，对充分大的可整除 n 均成立。若有一个经过对角线且系数为 $>M/2$ 的素除子，则根据引理 5.10 前的光滑有理点论证，它在参数域上几何整。将其铺展，得到 $R^2S/V\leq nl/\operatorname{coeff}(S)<2l/v$，如所需。否则，使用该引理前的素除子消去。每个系数至多为 $M/2$，而需要第一因子微分的系数至多为 M/p。我们得到一对具有公共次数 $n'\leq nl+D_0M/p$ 的成员，其对角阶至少为 $M/2$，且在该处没有公共素除子。令

$$h=\lceil l+16D_0/p\rceil.$$

取 h 次幂，得到次数为 $n'hR$ 的两个成员，其阶至少为 $4n'$，并具有相同的公共素理想排除。取 n' 的一个倍数 n_1，使其消去 hR 的一个卡蒂埃次数。

恢复曲线的次数。令 $V_c(x)$ 为 n_1hR 在 x 处阶至少为 $\lceil cn_1\rceil$ 的截面空间。令 Υ 为 C 在参数域上的约化像，并令 $\mathcal{U}\subset Y\times Y$ 为其闭包，其中第一个坐标为曲线点。其一般点 ζ 支配两个因子。选取固定的有理数 $\tau>0$，使得 $\tau(1+D_0\gamma)<1$。由于 $D_0\gamma<c_0D_1$，这可以一致地实现。我们有

$$h\gamma\le(l+1)D_1/d+16c_0D_1/p<e_0\tau/8,$$

通过增大 K，P，其中在 (i) 中 $e_0=1/N$，而在 (ii) 中 $e_0=$ 为 $\min(e,1)$。$V_\tau(\xi)$ 的一个成员必须包含 Υ，因为若其与 C 在 ξ 处适当相交，就会得到 $\tau\le h\gamma$。

$V_4(\xi)$ 的每个成员 s 在 ζ 处的阶至少为 $\lceil\tau n_1\rceil$。若其在那里阶为 $a<\tau n_1$，则某个阶为 a 的联合 Hasse 导数模去 $\mathcal{U}$ 的理想后将非零。事实上，ζ 处的正则局部环维数为二，并且其余法空间嵌入光滑乘积在 $\mathcal{U}$ 一般点处的余切空间中。将两个参数的独立线性泰勒项代入 s 的初始形式，会得到一个非零系数。修正后的导数在 C 上非零，其次数至多为 n_1h+D_0a，对角阶至少为 $4n_1-a$。这与

$$4n_1-a\le(n_1h+D_0a)\gamma$$

由 $h\gamma$ 和 τ 的选取可得。

为从 γ 中去掉重数，将 ζ 表示为（y，x），其中底域取为具有较大超越次数的代数闭扩张。由共轭性和有理对角点，Υ_x 的每个几何分支都包含 x。只有一个分支经过 y，因为 y 在 $k(x)$ 上的超越次数为一，且不同分支仅在有限多个点相交。它也是经过 y 的 $V_4(x)$ 的基 locus 的唯一分支，因为根据所构造的对，基 locus 包含 Υ_x，且不存在经过 x 的除子型分支。这些关于一般点的断言在基变换下仍然成立。在 ζ 处的阶界给出 $V_4(x)\subseteq V_\tau(y)$，这是通过将一般喷射核特化，并将理想幂限制到 x 处的纤维上得到的。Υ_y 的每个分支都包含于该基 locus 中，并包含 y。因此它们都等于经过 y 的唯一分支。由于 y 也表示 Y 的一般点，该约化曲线在几何上不可约，且 $(\Upsilon_x)_{\mathrm{red}}=(\Upsilon_y)_{\mathrm{red}}$。右侧曲线的奇点在 $k(y)$ 上代数。点 x 在 $k(y)$ 上的超越次数为一，因此它是该曲线上的光滑点。于是 $\mathrm{mult}_\xi C=1$ 和 $RC=\gamma$。

矛盾。将约化几何曲线下降到参数域的有限扩张上，并利用喷射截面将其展开。ζ 处的局部理想隶属关系也随之展开，因此在一般闭纤维的一般曲线点处，这些截面的阶至少为 $\lceil\tau n_1\rceil$。通过在 ζ 处的二生成理想中包含曲线理想的某个幂，那里对公共素理想的排除也随之展开。普通曲线爆破将该铅笔的阈值界定为 $2/(\tau n_1)$。在曲线的一般点处应用引理 5.11 中的剩余铅笔扰动。公共固定除子不经过一般点，因此减去它会降低曲线上的次数。这给出了 H_t，其系数可以任意小，在 C_t 的一般点处为非 klt，并且

$$H_tC_t\le2h\gamma/\tau<e_0/2.$$

如引理 5.11中所述，取希尔伯特像中的一个覆盖参数曲面，并在纯不可分参数扩张后进行正规化。次数仍为$RC_t = \gamma$。在 (i) 中，对（Y，0）是 $1/N$-对数典范的，因为正的完备对数不一致度至少为 $1/N$，且对数典范中心位于一般光滑 dlt 分层之上。引理 5.13直接给出 $-K_Y C_t = BC_t \in \mathbb{Z}$。由于 B 是大除子，这个值为正，且至多为RC_t。在 (ii) 中，该引理使 RC_t 本身为整的。对于足够大的 d，任一情形都与 $0 < \gamma < 1$ 矛盾。□

命题 5.17。 设 X 是一个带有 *lc* N-补 Δ 的 ϵ-对数典范 *Fano* 三维簇。在一个仅提取对数典范中心的 $\mathbb{Q}$-阶化 *dlt* 修改 $f\colon Y \to X$ 上，令

$$K_Y + B = f^*(K_X + \Delta), \qquad R = qf^*\Delta, \qquad q = \lceil 1/\epsilon \rceil.$$

则 Y 是 *Fano* 型，且这些数据满足定理 *5.16*（i）。 $||\lfloor mR \rfloor||$ 的双有理性蕴含 $|-NmqK_X|$ 的双有理性。

证明。 被提取的素除子 E 在 B 中的系数为 1，且 $\operatorname{ord}_E(f^*\Delta) = A_{X,\,0}(E) \geq \epsilon$。因此，$R \geq B$ 及其支集相同。将 B 与 $(X,\,0)$ 的保正则边界在 Y 上按小比例混合，可得到一个有效 klt 弱对数 Fano 对，而 Kodaira 扰动给出 Fano 型。对于一个有理函数，R 的次数为 m 时的有效除子不等式成立，当且仅当 Δ 的次数为 mq 时该不等式成立，这是通过下推和拉回有理 Cartier 不等式得到的。取 N 重积保留这些比值，而 $N\Delta \sim -NK_X$ 给出所述次数。□

定理 5.18 (一致反典范体积)。 存在一个绝对的 P_0，使得对于每个 $\epsilon > 0$，特征 $p > P_0$ 下的所有 ϵ-对数典范法诺三维簇都满足 $(-K_X)^3 \leq U(\epsilon)$。

证明。 取 P_0 大于 5，其中 5 是零边界情形下定理 3.39 中的阈值，并取该指标 N 对应的定理 5.16(i) 的特征界。若体积无界，则定理 5.5 给出具有 T、皮卡数为一且体积无界的 $\mathbb{Q}$-阶乘 e-对数典范法诺三维簇 $-K_T \sim_{\mathbb{Q}} sD$，以及 $s \to \infty$。它们处于相同的特征范围内，该范围可以包含某个固定特征。有效除子sD 表明（T，0）是非例外的，因此定理 3.39 给出其上的对数典范 N-补。

应用命题 5.17，其中 $q = \lceil 1/e \rceil$。固定一个整数 $v \geq 16$，使得 $2q/v < \lambda(e)$ 满足命题 5.8。由于 $R^3 = q^3(-K_T)^3 \to \infty$，最终有 $l = 1$。如果第一双有理次数超过定理 5.16 中的 K，则所得的素除子 S 向前推到一个数值系数为

$$\frac{(-K_T)^2 f_* S}{(-K_T)^3} = q\frac{R^2 S}{R^3} < 2q/v.$$

一般成员避开例外素除子，且不同的一般成员具有不同的像。命题 5.8 排除了这一次数。因此，预备模型的双有理次数有界。由命题 5.17 并取一个公倍数可知，T 上的反典范系统的双有理次数也有界。定理 5.14 与其无界体积相矛盾。□

铅笔成员的次数控制其一般曲面上的混合交数。我们在该曲面上寻找一个一般有限系统，使其与限制极化的交数在相同尺度下有界。该系统中的超平面限制了纤维内曲线的次数。铅笔则限制横截曲线的次数。

定理 5.19。 设 k 为特征 $p>\max(5,\ N)$ 的代数闭域，设$(X,\ B)$为一个射影 $\mathbb{Q}$-阶乘 *dlt* 三维簇，并假设 $N(K_X+B)\sim 0$。设 R 为一个数值有效、大且半丰沛的 $\mathbb{Q}$-除子，满足 $R\geq B$ 且 支集$R=$支集B。假设S_0、 S_∞ 是不同的线性等价素除子，且 $R^2S_\infty\leq\sigma R^3$。那么，对于某个 $m\leq C_N(1+\sigma)$， $||\lfloor mR\rfloor||$ 是双有理的。

证明。来自交数界的截面。 设 V是无限 F-有限域 K上的正规射影曲面。在正则闭点 x 处，Seshadri 比中的分母为 $[\kappa(x):\ K]\mathrm{mult}_x\,C$。假设 M是整的， $\Psi\geq 0$是有理数，且$D=M-(K_V+\Psi)$ 数值有效、大且半丰沛，并满足 $\varepsilon(D;x)>3$。若 x 处的边界支集至多落在一条系数为 $c\leq 1$的正则曲线上，则 $|M|$ 是一般有限的。引理 4.1 的吹起与丰沛模型论证给出 $3<\beta<\varepsilon(D;x)$ 模 $\mathfrak{m}_x^{\lceil q\beta\rceil}$的射流。

为计算它们在 $\kappa(x)$ 上的迹，置 $R=\mathcal{O}_{V,\ x}$ 并选取参数 z_1， z_2，当 $c>0$时取 $z_1=0$ 为边界方程。有限对偶性将无限制迹等同为源环 [52,§2]上 $\mathrm{Hom}_R(F_*^eR,\ R)$ 的一个生成元。Kunz 定理使 F_*^eR成为自由的 [54, Tag 0EC0]。由于 $w=(z_1z_2)^{q-1}\notin\mathfrak{m}_x^{[q]}$，某个泛函将 F_*^ew映为单位元。因此对某个$a\in R$，该迹将 aw映为单位元。此元素属于受限源，因为 w 可被$z_1^{\lceil(q-1)c\rceil}$ 整除。指定它的射流以及 z_i^qaw的射流。 $\mathfrak{m}_x^{3q-1}$中的误差经二元单项式计算迹入 $\mathfrak{m}_x^2$ 。所得截面比由中山引理生成 $\mathfrak{m}_x$ ，故 x 在其纤维中是孤立的。当$\kappa(x)/K$ 不可分时，此论证同样适用。

若 P 仅为数值有效且大，则写作 $P\sim_{\mathbb{Q}}H+E$ ，其中 H 丰沛且 $E\geq 0$。在 E之外，针对 P 的 Seshadri 界 r 给出 $P-E/2$的界 $r/2$ 。对带有 $a>6/r$的 $M=K_V+\lceil aP\rceil$ 和 $\Psi=\lceil aP\rceil-aP+aE/2$ 应用迹。对于几何整正则曲面，可在 K 上的有理对角线 V 处进行此计算；它是 K 的正则扩张。所得的一般有限线性系通过截面的基变换下降。

在 h 上解消铅笔： $W\to X$，其中 $f:\ W\to\mathbb{P}^1$，一般纤维为 F，且$\sim P=h^*R|_F$。将 $R=h^*R$、 $J=f^*\mathrm{O}(1)$ 写成除子。假设 F 的某个模型有一个定义一般有限映射的无基点线性系 A，且 $PA\leq cP^2$。那么，对于某个整数 $t>2c$， $tP-A$是大除子 $\tilde{}$；根据丰沛 Morse 不等式 [17, 命题 5.4]，当 $n>3\sigma$ 时， $nR-J$ 是大除子。将纤维线性系及 $tP-A$ 的一个有效代表元扩张到某个底空间开集上。在避开这些有效差的一个一般闭点处， $\tilde{}$ 个无基点超平面给出次数与重数之比至少为一：对于垂直$\tilde{}$曲线上的 tR 如此，对于横截曲线上的 nR 亦如此。因此，在 X 的一个稠密开集上， $\varepsilon(R;x)\geq 1/(t+n)$。取迹可得 $K_X+\lceil 7(t+n)R\rceil$中的一个双有理线性系。取 N 重乘积并利用 $N(K_X+B)\sim 0$，便将这些比值置于 R 的次数 $N(7(t+n)+N)$中，因为 R 的每个正系数都至少为 $1/N$。只需构造满足$c=O_N(1+\sigma)$ 的 A 。

一般曲面上的伴随公式。令 W_0 为正规化图，并选取W，使得 $\Sigma=\mathrm{Exc}(h)_{\mathrm{red}}+\mathrm{Supp}\ B^{\mathrm{str}}$ 为简单正规交叉。命题 5.8 的图论证适用于此铅笔。其函数沿 S_∞ 有一个简单极点，而 W_0 上的无穷远纤维有一个约化素子簇，因为它在 X上有限。斯坦因分解是平凡的，且该函数是分离的。因此， F 在 $K=k(\mathbb{P}^1)$上正则且几何整。 W_0 中每个在 X 上例外的水平素除子 E 均满足

$$2\,\mathrm{ord}_E\,S_\infty\geq A_{X,0}(E)\geq 1/N. \tag{5.2}$$

事实上，第一个不等式是 (5.1)，应用于两个一般的铅笔成员，它们的拉回具有相同的水平部分。其连通性证明仅使用 $\mathbb{Q}$-因子分解性质、 X 以及素铅笔。对于第二个不等式，使用 $N(K_X+B) \sim 0$以及 dlt 分层泛点处的 SNC 轨迹。

置 $\Theta = \Sigma|_F$，记作 $K_F + B_F = h^*(K_X + B)|_F$，并令 $L_F = h^* S_\infty|_F$。最后一个除子是 F 上的水平固定部分。由投影公式和霍奇指标定理可得

$$P^2 = R^2 S_\infty > 0, \qquad PL_F = RS_\infty^2 \le \sigma P^2.$$

Θ 中具有正 P 次数的分支来自 B，其系数在 P 中至少为 $1/N$；或者来自 W_0 上的水平例外素除子，它们满足（5.2）。因此$P\Theta \le N(1+2\sigma)P^2$。在 W_0的一般纤维上，根据（5.2）， $B_F + 2L_F$的迹是有效的。在其极小正则解消上，由典范除子的相对 nef 性和负定性，保正则迹仍然有效。由于 F 支配该解消，
$PK_F \le 2PL_F$。特别地

$$N(K_F + B_F) \sim 0, \qquad E = \Theta - B_F \ge 0, \qquad PE \le \lambda P^2, \qquad \lambda = N(1+2\sigma) + 2\sigma. \tag{5.3}$$

E 的正系数至少为 $1/N$。 B_F 的系数为一的分量是该 dlt 对的旧 lc 位。在其一般中心之上，零边界的对数差异是一个整数，并且等于 B的阶，因此 P 在那里具有至少为一的系数。

在 $\mathbb{P}^1$ [60, 上运行 $(K_W + \Sigma)$-极小模型纲领，见推论 1.8]。根据 (5.3) 及其在 W 上的对应结果，伴随除子与一个有效除子有理等价。在一般纤维上，翻转都是同构，因此由定理 4.10] 得到一个态射 $F \to T$，映至一个 dlt 曲面，其 $D_T = K_T + \Theta_T$ 半丰沛。由其半丰模型拉回的无基点线性系的混合次数，受相应的 PE 倍数所界，这是极小模型纲领负性的结果。

伴随公式将正维情形归结为曲线计算。若正则射影曲线 C 定义在 K 上，且有 $a = \deg(K_C + \Delta) > 0$，其系数属于 Δ 中的标准系数，则 $a \ge c[H^0(C, \mathcal{O}_C) : K]$，其中 $c > 0$ 为绝对常数。在亏格零的情形，这由至多六个非零标准系数之和满足下降链条件得出，这些系数按其在常数域上的次数计数。在更高亏格的情形，这由典范次数以及正系数至少为 $1/2$ 这一事实得出。可以在有限子集之外选取一个次数为 $O(a)$ 的闭点。在亏格零时使用 $|-K_C|$的一个成员，在亏格至少为二时使用 $|3K_C|$，或在亏格一时使用 Δ 的一个点的三倍。这些线性系由黎曼–罗赫定理可知无基点。根据命题 2.7], 将对数正则约化边界的一个约化分支正规化后再应用伴随公式，可得标准系数 [61,。

如果 $\kappa(D_T) = 2$，则转到丰对数典范模型。取 C ofE_T 的一个不可约分支，其系数至少为 $1/N$。伴随公式给出其正规化上的正次数 $a = D_T C$。选择 C of $O(a)$ 的一个次数为 $O(a)$ 的正则点，在该点处它是唯一的边界分量。将除 C 之外的测试曲线与 E_T 相交，并将 C 与其次数 a 相交。这给出了 D_T 的 Seshadri 下界，且只取决于 N。对 $M = mD_T$ and $\Psi = \Theta_T$ 的曲面迹为固定的 $m = O(N)$ 提供了一般有限系统; 在 F 之上的消解上，其混合次数至多为 $m\lambda P^2$。

若 $\kappa(D_T) = 1$，令 $g\colon T \to C$ 为半丰沛收缩，且 $D_T \sim_{\mathbb{Q}} g^* D_C$。除子 E_T 在一般曲线 G 上消失，因此 $\Theta_G = B_G$。G 上的极化为正，支集包含于此边界上，且其在该处的系数至少为一。因此 G 是一个正则的亏格零圆锥曲线，对于 $p > 2$ [7, 光滑。引理 2.17], 以及

P_G 的次数至少为二。一个水平边界分量的正规化 S是到 C的次数为 $\ell \leq 2$的有限可分映射。伴随公式给出 deg(K_S +不同) $= \ell$ deg D_C，因此根据曲线计算，deg $D_C \geq c/2$。黎曼–赫尔维茨公式给出 deg $K_C \leq$deg D_C。对于次数为 O（deg D_C）的自由 H_C，在亏格至少为二时使用 $3K_C$，或在亏格零时使用 $-K_C$。在亏格一时，当 deg $K_S > 0$时，使用 S上一个典范成员的推前三倍；或者当 deg $K_S = 0$时，使用来自不同的一个点的三倍，该点的次数至多为 2ℓdeg D_C。 C 的常数域是 K，因为 F是几何整的。

J_C在 F上对 H_C的拉回具有 $PJ_C = O(\lambda)P^2$。在一般对角线上，竖直曲线是光滑圆锥曲线，而横截曲线则通过 J_C检验。因此$\varepsilon(P + J_C; x) \geq 1$。对于固定的 $a > 6$，$P + J_C$的丰沛扰动迹在 $K_F + \lceil a$中给出一个一般有限系统$P + J_C(\rfloor$。由（5.3）、关于 PK_F的界以及支集在 $\Theta +$上的取整误差可知，其混合次数为 $O(\lambda)P^2$。

饭高维数为零。 这里 $E_T = 0$，且其在 F 上的支集恰由收缩曲线组成。事实上，在任一步骤被收缩的曲线都必须与当前的有效差 $\Theta - B$相交为负，而 E 的每个不可约分支在 T上都消失。因此， $\Theta_T = B_T$是约化 dlt，且 $N(K_T + \Theta_T) \sim 0$。根据投影公式以及双有理曲面推前下自交数的增加，推前 P_T数值有效且大。其支集恰为 Θ_T，且系数至少为一。

在 T 和 F上选取相容的典范除子。将两个曲面在通过添加其除子为 $N(K_T + \Theta_T)$的函数的 N 次方根所得到的域扩张中进行正规化。这是次数整除 N 的循环可分扩张。在分歧指数为 r 、位于系数 b 之上的素除子处，依据库默尔理论和温和 Hurwitz 公式 [36, 第 2.41–2.43] 节，新的保正则系数为整数 $1 - r(1 - b)$。 T 的覆盖是准 étale 的，并且在每个对数典范中心的简单正规交叉轨迹附近是 étale 的；在那里，该函数的除子为 N 乘以一个局部卡蒂埃除子，因此余下的 Kummer 数据是一个单位元。在其他地方，温和公式保持 klt。该覆盖对是 dlt 的，并且具有主对数典范除子。

令 V_0 为 T的覆盖的极小正则解消。由 K_{V_0} 的相对 nef 性和负性可知，其保正则例外系数非负；由 dlt 可知这些系数为整数且小于 1，因此必为零。严格边界 D_0 与例外集不相交，因为 $K_{V_0} + D_0 \sim 0$ 以及这两项在例外曲线上的次数均非负。于是， P_0 对 P_T 的拉回具有支集 D_0，且各系数至少为一。约化边界 D_0 是简单正规交叉的；对于充分小的 $\eta > 0$，有效 klt 对 $(V_0,\ D_0 - \eta P_0)$ 具有数值有效且大的负伴随除子。因此， V_0 属于德尔佩佐型。

令 Y 为 F 在该扩张中的正规化的极小正则解消，其中 $\pi\colon\ Y \to F$。存在一个态射 $\rho\colon\ Y \to V_0$。事实上，在一个公共正则解消上，朝向 Y 的映射的一条最后例外曲线也会向 V_0 收缩。否则，其负典范次数将与 K_{V_0} 的相对 nef 性以及与有效例外亏格除子的非负交数相矛盾。逐次经过点爆破下降。这使用了正则曲面上的双有理态射可分解为在闭点处进行的点爆破 [54, Tag 0C5R]。

在非完美域上，一个具有 $KC < 0$ 和 $C^2 < 0$ 的被压缩素除子有 $KC = C^2 = -[H^0(C,\ \mathcal{O}_C)$：由伴随公式和其常数域上的整性可得 $K]$ 。其算术亏格为零，且$\mathcal{O}_C(-C)$在这些常数域上的次数为一。黎曼–罗赫定理给出一个到射影直线的次数为一的映射，因此得到正则点压缩 [54, 标签 0C2L 和 0C2M]。这也证明了极小正则解消上典范除子的相对 nef 性。交计算

在上方使用 Y的实际常数域，它是 K 的有限可分扩张，因为F 是几何整的。

控制点爆破。记 $P' = \pi^* P$、 $Q = P'^2$，并令 Γ 为 D_0 的严格变换 D 与 ρ-例外曲线的约化并。除子 Γ 在每个阶段都是简单正规交的，因为在具有此约化总边界的正则曲面上吹起一个闭点会保持正规交。 Y 上的保正则边界具有形式 $B_Y = D - D^-$，其中 $D^- \geq 0$ 为例外的。事实上，根据温和 Hurwitz 公式，其系数均为整数。位于 F 的一条曲线上方的系数为一的曲线，必映到 B_F的一个系数为一的分支上。这样的分支在 $\Theta - B_F$中的系数为零，并且在 T上仍然存在，因此这条曲线不是 ρ-例外的。若一条系数为一的曲线是 F 上的例外曲线，则它位于 $(F,\ B_F)$的一个零维对数典范中心上方，即两个系数为一的分支的交点。在此处， B_F是整 Cartier，去除一个 N次幂后，库默尔数据是一个单位元，且覆盖是 étale 的。其极小正则解消不会在此处引入任何曲线。

吹起序列还表明，负部与 D 不相交。 D 上只与非负系数相交的点会产生非负系数，而在具有非正系数的 D 外进行吹起则会产生负系数。两个正曲线的交点不可能曾被吹起，因为那会在 Y 上引入一个系数为一的例外素除子。

我们有 $P' \geq D$，并且

$$P'(\Gamma - B_Y) \leq \lambda Q. \tag{5.4}$$

对于映到 F 的曲线，这由温和系数公式和 (5.3) 得出，对剩余次数求和即可。它们的像属于 Θ，因为它们要么是边界，要么被压缩到 T。其他曲线的 P'-次数为零。记 E_i^* 为从 V_0 到 Y 的吹起中各个例外曲线的全变换，记 n_i 为它们的吹起剩余次数。推前 $\rho_* P'$ 等于 P_0，因为二者之差是有效的，其支集包含在相对于 T 的覆盖而言为例外且与 D_0 不相交的曲线上，并且相对数值有效，因此由负性可知它为零。记

$$P' = \rho^* P_0 - \sum_i b_i E_i^*, \qquad b_i \geq 0, \qquad n_i b_i \leq \lambda Q.$$

事实上 $E_i^* \leq \Gamma - B_Y$。其在产生时的系数至少为一，后续吹起会在 $s \leq 2$表示经过中心的约化分支数时，将有效超额（$2-s$）E_j加到 $K+\Gamma$的拉回上。由正交性和 $K_{V_0} + D_0 \sim 0$可得

$$P_0^2 - Q = \sum_i n_i b_i^2, \qquad \sum_i n_i b_i = K_Y P' + D_0 P_0 \leq \lambda Q + P_0^2. \tag{5.5}$$

若 $\lambda Q \leq 1/4$，这些不等式给出 $P_0^2 \leq 2\lambda Q$。在 V_0上运行一个 $K + 2P_0$-负程序，并在每一步向前推送极化；根据曲面锥定理与收缩定理 [57, 定理 2.14 和 4.4]。负射线是 K-负的，且伴随除子仍然是大除子，因为 $K + 2P \sim_{\mathbb{Q}} 2P - D \geq P$。因此，这些步骤是正则曲面之间的双有理映射。记 $l\colon\ V_0 \to V$为输出，其中 $K_V + 2P_V$数值有效，且 $K_V + D_V \sim 0$。我们有

$$2(l^* P_V - P_0) \leq K_{V_0} - l^* K_V = l^* D_V - D_0 \leq l^* P_V, \qquad l^* P_V \leq 2P_0.$$

约化边界 D_V 是对数典范的，并且由曲面无基点定理应用于 Cartier 倍数和 klt 边界 $D_V - \eta P_V$ [57,定理 4.2]可知， P_V 是半丰沛的。某个分支 C 满足 $D_V C > 0$。若边界交数矩阵的所有行和均非正，则其非对角元非负性和

$2a_ia_j \le a_i^2 + a_j^2$ 将推出 $P_V^2 \le 0$。此外， $P_V C \ge D_V C/2$。由对数典范伴随可知， C的正规化的亏格至多为一，因此根据其次数， $3D_V|_{C^\nu}$ 是无基点的。取 C 上的一个正则点，使其不属于其他次数至多为 $3D_V C$的分支。通过用曲线与 P_V进行检验，并根据次数考察 C，可得该点处有$\varepsilon(P_V; x) \ge 1/6$。迹给出固定 $a > 18$时在 $K_V + \lceil aP_V \rceil$ 中的一个一般有限系统。由于 $\lceil aP_V \rceil - D_V \preceq \lfloor aP_V \rfloor$，其拉回到 Y后的自由混合次数至多为 $2aP_0^2 = O(\lambda)Q$。

假设 $\lambda Q > 1/4$。每当 C D^- 的一个 K-负例外不可约分支的当前正规化次数 $a = PC/n$ 小于 $1/(1+\lambda)$ 时，就将其吹起，其中 n 是其常数域的次数。在例外曲线上吹起一个点，至少会使其典范次数增加其初始剩余次数。因此，吹起序列中的 K-负曲线在其上不再有后续中心。移除它会使 P^2 增加 na^2，使 PD^- 减少 na，并使 $P\Gamma$ 至多增加 na。事实上， D^- 旧的是 D^-_{new} 的拉回加上 C；而对于 Γ，拉回差的系数为 $s-1$，且 $s \le 2$。在所得的 V_1 上，我们得到

$$Q \le P_1^2 \le 2Q, \qquad P_1 D_1^- \le \lambda Q, \qquad P_1\Gamma_1 \le 3\lambda Q,$$
$$K_{V_1} P_1 \le \lambda Q, \qquad -(D_1^-)^2 \le \lambda(1+\lambda)Q.$$

第一行由对增量求和及（5.4）得到。对于最后一个不等式，沿 D_1^- 的各个不可约分支，按其系数对 $-KC \le (1+\lambda)P_1 C$ 求和。该界成立是因为对于剩余的 K-负曲线有 $-KC = n$，并且在此支集上有 $KC = D_1^- C$。

对于从 V_1 到一条曲线的收缩，位于有理点 G 上且既约不可约的纤维满足 $P_1 G \ge 1/(4\lambda)$。若 D_0 的变换的某个不可约分支是水平的，则其系数给出 $P_1 G \ge 1$。否则，取吹起序列中最后一条相对于该收缩为水平的例外曲线 E。这样的曲线确实存在，因为 $P_1 G > 0$，且 P_1 支集在边界和例外曲线上。该收缩可越过后续的吹起下降，这些吹起的例外曲线均为垂直的。在生成 E的模型上，令 P_i， G_i 分别为对应的极化和纤维。对于 n 剩余次数和 $\delta = P_1 G$，我们有

$$E^2 = -n, \quad G_i^2 = 0, \quad \ell = G_i E \ge n, \quad P_i E = n b_i \le \lambda Q, \quad P_i G_i = \delta, \quad P_i^2 \ge Q.$$

在 E， G_i 张成的空间上应用霍奇不等式，得到

$$Q \le 2\delta(P_i E)/\ell + n\delta^2/\ell^2 \le 2\lambda Q\delta + \delta^2.$$

由于 $\lambda Q > 1/4$，这就推出了所述下界。经过正则基域扩张到一般对角线后，同样的计算仍然成立。

在特征至少为七的情形下，曲面 V_0 属于德尔佩佐型，因此是几何整的，且有 $H^1(\mathcal{O}) = 0$ [7, 推论 5.5 及定理 5.7]。这些性质在点爆破以及可分生成的基域扩张下保持不变。在 V_1的函数域上，考虑任意一条经过有理对角点 x的整曲线 C。如果 $h^0(\mathcal{O}(C)) = 1$，则 C 的正合列给出$H^0(\mathcal{O}_C(C)) = 0$。其希尔伯特点的相对切空间为零，因此它在原域上的定义域是有限可分扩张。函数域扩张是正则的，所以该曲线可以下降，且不可能包含 x。因此 C 移动，并且 $C^2 \ge 0$。如果 $C^2 = 0$，则它与一个线性等价成员定义了一个无基点铅笔，因为二者不相交。由于其中一个纤维是包含有理点的约化整曲线，斯坦因分解是平凡的。前述纤维估计适用。

由 P_1 的霍奇指标定理正交性，我们有

$$K_{V_1}C \le D_1^- C \le (\lambda + \sqrt{2\lambda^2+\lambda})P_1C \le 3\lambda P_1 C.$$

若 $j = \mathrm{mult}_x C$，则点爆破上的严格变换与例外除子的交给出其常数域次数至多为 j。那里的伴随公式给出$C^2 + KC \ge j(j-1) - 2j$。若 $P_1C/j < 1/(100\lambda)$，则 $C^2 \le (P_1C)^2/P_1^2$，因此这两个不等式迫使 $j \le 3$ 和 $C^2 = 0$成立。这与纤维估计矛盾。因此$\varepsilon(P_1; x) \ge 1/(100\lambda)$。利用带有 $a = \lceil 600\lambda \rceil + 1$ 的丰沛扰动迹，在 $K_{V_1} + \lceil aP_1 \rceil$中得到一个一般有限系统。所显示的界给出混合次数 $O(\lambda)Q$。拉回到 Y 保持这一上界，因为对于吹下 g 有 $P' \le g^* P_1$。

系的下降。 在这两种情形中，温和覆盖在一个双有理模型上都有一个一般有限的无基点线性系，其混合次数为 $O(\lambda)Q$。通过范数将其除子和截面推下至 F。对于任意生成比值 $z_i = s_i/s_0$，有限个常数 $a \in K$ 对应的$s_i - a s_0$ 的范数，可通过插值恢复 $\mathrm{Nm}(z_i - T)$ 的系数。因此，上方的比值在下方比值所生成的域上是代数的，且下方的系一般有限。由投影公式和覆盖的次数可知，其自由部分的混合次数为 $O(N\lambda)P^2$。现在，初始的塞沙德里论证给出所需的 m。□

6. 例外补

6.1. 带有二形式的典范三维簇上的铅笔。 对于本小节中的典范法诺三维簇，光滑解消上的非零正则二形式迫使铅笔的一般曲面具有伪有效典范除子。我们利用该曲面上的例外曲线，找到一个大伴随除子的有界 Cartier 倍数。

引理 6.1。 *设 X 是典范法诺三维簇，$L = -K_X$、$V = L^3$和 d分别表示其首个有效反典范次数。假设 $p \ge 11$，且 X 的光滑射影消解具有非零正则二形式。存在一个绝对的 C，使得一个由 L^2次数为 cV的素除子构成的非常值平坦族蕴含 $d \le C(c+1)$。*

证明。一般曲面的典范除子。 取一个光滑射影双有理模型 $g\colon U \to X$，并带有一个收缩 $f\colon U \to C_0$ 到一条光滑曲线。令$P = g^*L$ 和 F 为其一般曲面。若 K_F 不是伪有效的，则相对K_U-极小模型纲领以一个终端莫里纤维空间 [29, 结束（定理 1.1、1.3 和 1.4]）。由余维一处的真性和跨余维二处的扩张，正则二形式在光滑射影模型上保持不变。由同样的论证，它在终端输出的光滑轨迹上正则。

如果 Mori 基底是一条曲线，那么其一般纤维是一个正则德尔佩佐曲面，并以底函数域作为常数域，因为终端三维奇点是孤立的。根据 [7, 命题 5.2]，它是光滑的。在光滑闭纤维上，G 余切序列通过 Ω^1_G 和 K_G对二形式的限制进行滤化。对于光滑有理德尔佩佐曲面，这两个整体截面空间都消失。这迫使该形式在三维簇的一个稠密开集上消失，矛盾。

若 Mori 基底是曲面，则一般纤维是正则圆锥曲线，在此特征下光滑 [7, 引理 2.17]。将底空间消解为 Z，并将图消解为光滑的$g'\colon U' \to X$，其收缩为 $h\colon U' \to Z$。实际一般纤维 G 保持不变。在 G 上的余切序列以及 $H^0(G, \Omega^1_G) = 0$ 将该二形式等同于

Z上一个有理二形式的拉回。 G上次数至多为二的一个点给出一个可分次数至多为二的多截面。该形式在其消解上正则地拉回。在 Z 的任一素除子处，该域中其上方的分歧是驯分歧，且其微分修正项 $r-1$ 无法抵消阶为 r 或更高阶的极点。因此我们可以取 $K_Z \geq 0$。

令 $P\prime = -(g\prime)^*K_X$，于是 $K_{U'} = -P\prime + E$对于 $E \geq 0$例外的。由于 $P\prime G \geq 2$，置 $\lambda = 2/(P\prime G) \leq 1$。对于 H上的非常丰 Z，取 $D_0 \geq 0$于 $|mr\lambda P' - h^*H|$中，当 m充分大时，其中 $r\lambda P'$ 来自 X上的一个非常丰 Cartier 除子。对于充分小的有理数 $a > 0$ 和充分大的 N，使用一般的 $D_i \in |r\lambda P'|$ 来构造

$$\Delta' = aD_0 + \frac{1-amr}{rN}\sum_{i=1}^{N} D_i \sim_{\mathbb{Q}} \lambda P' - ah^*H.$$

固定线性系中的重数可由通过该点的两个非常丰除子的交一致地界定。选择 D_i 使得不存在四个相交，于是充分小的a 和充分大的 N 使 Δ' 在每一点处的重数都小于一。根据引理 5.12，它是 klt 的。在几何泛纤维圆锥曲线上，可以选取约化且彼此不相交的 D_i，避开 D_0 以及那里的例外轨迹。事实上，由 X 上的非常丰线性系给出的映射，在几何泛纤维圆锥曲线上的有限多个点之外是浸入的，并且该线性系没有基点。在几何一般域上的开条件可以在无限域 k上满足。约化 a 还会使几何泛纤维边界成为 klt。

相对 $(K_{U'} + \Delta\prime)$-极小模型纲领以及边界相对为大时的半丰性，将所得对数除子表示为从与 Z [29, 双有理的曲面拉回的除子定理 1.4]。由于圆锥曲线上的对数次数为零，几何一般对保持不变。曲线典范丛公式表明，底空间除子与典范除子加上一个有效除子有理等价 [62, 命题 3.2]。由 Z 上的二形式可知，其典范除子有效。在公共解消上应用负性，便得到 $P'^2(K_{U'} + \Delta\prime) \geq 0$。然而

$$P'^2(K_{U'} + \Delta') = (\lambda - 1)V - aP'^2h^*H < 0,$$

因为 H 的一般拉回不是 X 上的例外除子。这排除了圆锥曲线情形，因此 K_F 是伪有效的。

至多有十个标记分支的大伴随除子。 取一个消解，使得 X 上的约化例外除子 Γ 为简单正规交叉。有效例外除子 $K_U + P$ 在 F 上是大的，因为 $P|_F$ 是大的，而 K_F 是伪有效的。因此 $\Gamma|_F$ 是大的。我们声称，只需取其中至多十个素除子，就能使 $K_F + \Gamma_0|_F/3$ 为大，其中 Γ_0 表示它们在 U 上的闭包。

相对的 K_U-极小模型纲领给出一个态射 $\rho\colon F \to F_0$ 到一个带有K_{F_0} 数值有效的正则曲面，这是因为翻转在一般纤维上是同构的，且终端输出在那里是正则的。此外，$K_F - \rho^*K_{F_0}$ 沿每条收缩曲线均为正。在一般域 [56, 上应用曲面丰沛性1]定理 11]。如果 $\kappa(K_{F_0}) = 2$，则无需任何素除子。如果 $\kappa(K_{F_0}) = 1$，由于推前是大的， $\rho_*(\Gamma|_F)$的某个不可约分支支配饭高基底。加入该不可约分支即可得到一个大除子。

若 $\kappa(K_{F_0}) = 0$，则 $K_{F_0} \equiv 0$。将 $D = \rho_*(\Gamma|_F)$ 写成具有不可约分支 D_i 的形式，并令a_i 为 D_i 的常数域次数。伴随公式给出其常数域上的 $D_i^2/a_i = 2p_a(D_i) - 2$。 D 的支集上的交形式具有一个正方向，因为大倍数的自由移动部分向下推得到一个平方为正的数值有效子除子。正对角元给出一条曲线，而非零非对角元的零对角元

给出两条曲线。否则舍弃孤立的零元。剩下的整矩阵（$-D_iD_j/a_i$）是一个可对称化广义卡坦矩阵。具有不定对称化的极小连通主子矩阵是双曲型的，其秩至多为十 [15, 第 3] 节。该支集上的交形式具有一个坐标非负的正方向，因为将坐标替换为绝对值只会增大平方。取这些素除子上的一个平方为正的有效有理除子，则它是大的，因此它们的约化和是大的。将所选素除子拉回至 F，并从中减去 F_0 上大伴随除子的拉回的一个小正倍数，同时利用典范除子的正例外差以及 K_{F_0}的伪有效性。

实际纤维上的 *Cartier* 倍数。在 C_0 上运行 $(K_U+\Gamma_0/3)$-极小模型纲领，得到 $(Y,\ \Delta_Y)$。令 $J_Y=K_Y+\Delta_Y$ 和 $S=Y_\eta$。我们证明，对于 $I=3(2^{10})!$，$IJ_Y|_S$ 是 Cartier 的。在典范源的一般纤维曲面步骤中，由于相对典范除子的数值有效性和负性，极小正则解消是保典范的。设该处有一条曲线 D，其在该解消上的严格变换为 D'，则 $D^2\geq(D')^2$ 且 $KD=K_{\mathrm{res}}D'$。若 $KD>0$，令 a 为 D' 的常数域次数，并且 $j=-(D')^2/a$。由伴随公式和整性可得 $K_{\mathrm{res}}D'/a\geq\max(1,\ j-2)$。特别地，$KD+\min(0,\ D^2)/3\geq 0$。与其他边界分量的交非负，因此对数负收缩是 K-非正的。它保持典范性，且所有 K-平凡的收缩曲线都是边界分量。因此至多有十条这样的曲线被收缩。K-负的收缩曲线在收缩后具有正差异。S 的极小解消是保典范的，由 F 支配，因此至多有十条例外曲线。

在这些曲线的 S 点处，矩阵（$-E_iE_j/a_i$）是整矩阵，其中 a_i 是它们的常数域次数；由伴随公式可知其对角线元素为 2。它与具有相同对角线元素的正定对称矩阵相似，因此其行列式至多为 2^{10}。魏尔除子的数值拉回由该矩阵及整右端唯一确定。其行列式可消去例外系数。有理曲面奇点处的整值数值拉回可以下降，见 [39, 第 14 节和命题 17。1]一般域上的典范曲面奇点是有理的，见[6, 命题 2。6]因此，$(2^{10})!$ 可消去它们的韦伊指标，从而证明$IJ_Y|_S$的情形。

将截面返回到 X。取 H_0 上的正次数自由 Cartier 除子，令$M=f_Y^*H_0$，并设 $N=J_Y+7M$。射线长度界 6 给出 $N-M$数值有效，而 N 数值有效且大，因为 $J_Y|_S$ 数值有效且大。底空间 $k(C_0)$在 $k(Y)$中相对代数闭，其唯一的 p-基元素仍不属于 $k(Y)^p$。相对代数闭性与可分生成性推出 S的几何整性。在 $k(C_0)$上，对基变换所得对象的正规化作极小解消。在此解消上，R 令 A 为 $IJ_Y|_S$的拉回。它是数值有效且大 Cartier 除子，并且$K_RA\leq A^2/I$。确实，导子公式给出基变换后的典范除子与正规化所得对象的典范除子之差为有效差，见 [45, 定理 1。1]与 A相交后，极小解消和负性仍保留该不等式。边界的拉回是有效的。

将该消解、其 Cartier 极化及其共同的双有理同构态射开集下降到参数域的一个有限扩张，并延拓到该基曲线的一个开集上。由真性，一般 Cartier 倍数可延拓到某个开集上。在所得的光滑曲面上，它们的拉回是数值有效且大的，并满足相同的交不等式。引理 4.4 给出 Seshadri 下界 $1/4$，对于 A 上的一个

此类曲面的稠密开集。在 Y的相应光滑点处，竖曲线的 Seshadri 比至少为 $1/(4I)$，对于 N而言。水平曲线的比至少为一，这是因为 $N-M$ 是数值有效的，并且经过该点的纤维除子数值等于$M/\deg\ H_0$。该点可以选在任意预先给定的真闭子集之外。

取 $u=48I+2$。将 $uN\sim_{\mathbb{Q}} H'+E'$写为 H'丰沛且 $E'\geq 0$。正类 $uN-E'/2$ 的 Seshadri 常数在适当的点 $8I$处至少为 $u/(8I)\ >6$。将引理 4.1 应用于 Weil目标 $K_Y+\lceil uN\rceil$ 和边界 $\lceil uN\rceil-uN+E'/2$。由于$u\equiv -1$模 3，目标空间为

$$K_Y+\lceil uN\rceil=(u+1)J_Y+7uM.$$

设 $P^2f^*H_0\leq cV$。在公共光滑图 W上，双有理线性系的自由移动部分 B_W满足 $P_W^2B_W\leq 7ucV$。事实上，极小模型纲领比较将来自 J_Y的贡献控制在 $K_U+\Gamma_0/3$ 关于 P^2的次数以内，而该次数为$-V$。对于 $j+1>84u(c+1)$，丰沛Morse不等式

$$\mathrm{vol}((j+1)P_W-4B_W)\geq (j+1)^3V-12(j+1)^2P_W^2B_W$$

给出大性。在有效代表元之差之外的一般光滑点处， B_W的超平面给出（$j+1$）ε（L； x） ≥ 4。随后，迹判据给出 jL的一个截面。

最后，将所给族的一般成员提升到一个光滑解消上。在一个光滑参数开集上，它们的严格变换构成一个 Cartier族，并且根据与命题 5.8 中相同的有理链连通性和 Picard 论证，它们线性等价。解消两个不同成员所成的铅笔，并对其在 C_0 上作斯坦因分解。对于一点的拉回 H_0 $\mathbb{P}^1$，我们有 $P^2f^*H_0\leq cV$，因为去掉固定部分只会降低次数。取如上所述的 j，即可证明该断言，例如取 $C=84u+2$。□

定理 6.2。 其光滑解消具有非零正则二形式的例外典范法诺三维簇具有共同的 *klt* 补指标，并且在充分大的特征下是算术有界的。

证明。 令 d 为首个有效反典范次数，且 $V=(-K_X)^3$。引理 5.1 给出一个次数为 $b\leq b_0d$ 、具有固定 b_0 的双有理线性系。对于 $d\geq 2$ ，在一个小 $\mathbb{Q}$-阶乘化上应用定理 5.16(ii)，其中 $v=16$ 。若 $d>Kl$，则素除子族下降到 X ，其规范化次数为 $<l/8$。由此，引理 6.1 给出$d\leq C(1+l/8)$。因此 $d=O(1+V^{-1/3})$，而例外界 $V\leq 27$ 给出 d^3V的一个界。命题5.2给出指标及算术有界性。□

6.2. **反典范非消失与局部黎曼–罗赫定理**。 我们在一个保正则形式的终端化上工作，即一个射影双有理态射 $f:Y\to X$ ，其中 Y为终端且 $K_Y=f^*K_X$。由终端曲面芽的正则性，终端三维簇具有孤立奇点 [36, 推论 2.30(1)]。在每个奇点处，局部黎曼–罗赫修正记录了 mK_Y 的取整拉回如何随 m变化。这些修正能够检测消解上切丛的不稳定性。在不稳定的情形下，我们利用一条反典范次数较小的有理曲线，通过计算奇点处的射流数来约束体积。

引理 6.3。 设 T 是特征 $p>5$ 下的射影终端三维簇，且 $g:\ Z\to T$ 是在正则轨迹上为同构的射影对数解消。令 $A=-g^*K_T$、 $V=A^3$、 $c=c_2(T_Z)\cdot A$ 以及 $\chi_0=\chi(\mathcal{O}_T)$。则对每个整数

m,

$$\chi(T,-mK_T)=\chi_0+\frac{m(m+1)(2m+1)}{12}V+\frac{m}{12}c+\sum_Q\gamma_Q(m). \tag{6.1}$$

这里，γ_Q（m） 是非戈伦斯坦点 Q 上的一个局部交项。当 mK_T 在 Q 附近为 *Cartier* 时，它为零。若 $T\to X$ 是到典范三维簇的射影保正则形式双有理态射，则 χ（T、$-mK_T$）$=\chi$（X、$-mK_X$）。

证明。对于典范三维簇的对数解消 h： $U\to W$，使用

$$D_m=K_U-\lfloor(m+1)h^*K_W\rfloor=-mh^*K_W+(K_U-h^*K_W)+\{(m+1)h^*K_W\}.$$

有效 $\mathbb{Q}$-Cartier除子的拉回以及差异除子的非负性给出 $h_*\mathcal{O}_U(D_m)=\mathcal{O}_W(-mK_W)$。事实上，后一个层的一个截面在拉回并加上剩余的两个项后是有效的，而上面的有效性向下推。显示式中的小数部分是例外的，其系数属于 $[0,1)$。因此，Grauert–Riemenschneider 消失定理给出 $R^ih_*\mathcal{O}_U(D_m)=0$ 对于 $i>0$ [5,定义 1 和定理 3]。在一个公共对数解消上，除子 D_m 对于 T和 X 由于保典范性而一致，因此 Leray 给出比较结果。

对 D_m 在 Z上应用光滑黎曼–罗赫定理，写成 $D_m=mA+P_m$ 其中 $P_m=K_Z+A+\{(m+1)g^*K_T\}$。减去在 $m=0$处的公式。涉及A 与例外除子的乘积为零，因为 A 的某个 Cartier 倍数在每个例外纤维上都是平凡的。位于不同点上方的例外支集彼此不交。这就得到（6.1），其中 $\gamma_Q(m)$ 是在 m 处和 0 处的值之差，来自

$$\frac{P^3}{6}-\frac{P^2K_Z}{4}+\frac{P(K_Z^2+c_2(T_Z))}{12},\qquad P=\text{the part of }P_m\text{ supported over }Q.$$

若 mK_T 在 Q附近是 Cartier 除子，则两者的小数部分在此处相同。特别地，Gorenstein 点的贡献为零。□

我们说明计算这些项时所用的局部性。若 T 是 $\mathbb{Q}$-阶乘的，则孤立点上方的消解是一次理想的吹起。为此，将一个相对丰沛 Cartier 除子替换为其某个倍数，并减去其 Cartier 推前的拉回。所得除子是例外的。其非负倍数的截面构成理想，因为这些截面在下方余维一处没有极点。由一个次数为一的 Veronese 子代数生成的代数，将该态射表示为次数一理想的吹起。此理想在该点以外是单位理想。

这样的理想包含极大理想的某个幂，并且可以通过完备局部环之间的同构传输。由 Artin 逼近，且两者模该幂一致， [54, Tag 0CAV], 这两个吹起在某个共同的带标记 étale 邻域上相同。因此，例外纤维、其差异系数以及与切丛陈类的交数均相同。即使比较的代数簇不具有 $\mathbb{Q}$-阶乘性，也可以使用此论证：从具有 $\mathbb{Q}$-阶乘性的一侧传输理想即可。对于固定的 $\mathbb{Q}$-阶乘 T，数值 $\gamma_Q(m)$ 与消解的选取无关。事实上，在 K_T的一个正 Cartier 倍数处， c 由 (6.1) 确定，而不同点处的一次理想可以独立选取。比较仅在 Q处不同的消解，即得所述结论。

对于互质的 a， r 且满足 $r\geq 2$，类型为 $\frac{1}{r}(1,\ a,\ -a)$ 的循环图表是指 $k[[x,y,z]]$ 中带有这些权重并模 r后的零次子环。这个定义

包含 $p \mid r$。记作 $b \equiv a^{-1}$（模 r），并令 $[u]_r$ 表示 $\{0, \dots, r-1\}$中的剩余类。令

$$\sigma_r = r - r^{-1}, \qquad \ell_{r,b}(m) = \sum_{j=1}^{m} \frac{[jb]_r(r-[jb]_r)}{2r} \quad (m \geq 0).$$

循环篮子是指由此类对组成的有限重多集（r，b）。一个点可以贡献多个对，将它们的修正项相加。

引理 6.4。在具有上述循环图表的点处，典范指标为 r，重数至多为 $2r$，且 (6.1) 的局部项为

$$\gamma_Q(m) = \frac{m\sigma_r}{12} - \ell_{r,b}(m) \quad (m \geq 0), \qquad \gamma_Q(-1) = -\frac{\sigma_r}{12}.$$

证明。仿射循环图表是格 $\mathbb{Z}^3 + \mathbb{Z}(1,\ a,\ -a)/r$ 中的第一正交象限。它的所有真面都是正则的。在三个坐标射线上的取值为一的泛函，在对偶格中的分母为 r，由此得到该指标。取一个保留这些面的射影正则细分。其态射是吹起一个以顶点为支集的理想，因此根据前面的比较，该细分给出了完备图表的局部项。

为与特征零进行比较，将该锥补全为一个射影单纯形扇，并在锥外进行解消，同时保持该锥不变。然后对该锥执行所选的细分。最后的扇定义了一个在$\mathbb{Z}$上的光滑射影托里克概形。根据格的描述以及该光滑概形中例外交数的特殊化，在所有纤维上，不一致数和支集在顶点上的黎曼–罗赫多项式的各项均相同。

在 $\mathbb{C}$ 中，最后一次细分之前的紧化有一个终端循环点。根据局部等价于 iK [48, (10.1) 的除子的修正项的 Reid公式以及带有 $i = [-m]_r$ 的定理 10.2], ，得到

$$-\frac{i\sigma_r}{12} + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{[jb]_r(r-[jb]_r)}{2r}.$$

Reid公式的多项式部分与 (6.1) 的多项式部分一致，这可在 Cartier 倍数处看出。由对称性以及 $\ell_{r,\ b}(r) = r\sigma_r/12$，显示的项给出了所述表达式。最后，$(x^r,\ y^r + z^r,\ yz)$ 是一个不变参数理想。它在 $k[[x,y,z]]$ 中的扩张余长度为 $2r^2$。取零次分量会使长度除以 r，因为因子 $k[x]/(x^r)$ 的每个权都恰有一个基元素。不变环是 Cohen–Macaulay 的，因此其重数至多为这个参数理想的余长度 $2r$。□

引理 6.5。若 X 是特征 $p > 5$ 下的典范丰 *Fano* 三维簇，则$\chi(\mathcal{O}_X) \geq 1$。若 X 的光滑射影消解 Z 满足 $H^0(Z,\ \Omega^2_Z) = 0$，则$\chi(\mathcal{O}_X) = 1$。

证明。由 [23, 定理 4.8 和命题 4.11] 可知，该消解是有理链连通的。到阿贝尔簇的每个态射在有理链上都是常值的，因此 $\mathrm{Pic}^0(Z)$ 的维数为零。Picard变形不等式给出

$$\dim \mathrm{Pic}^0(Z) \ \geq \ h^1(\mathcal{O}_Z) - h^2(\mathcal{O}_Z).$$

回顾一下为何这也适用于可能非约化的皮卡德概形。将其完备局部环写作 S/I，其中 S 是一个关于 h^1 个（$\mathcal{O}_Z$）变量的幂级数环，且 $I \subset \mathfrak{m}_S^2$。将泛线丛提升到核为

$I/\mathfrak{m}_S I$ 的平方零扩张上时，障碍（通过截去足够高阶的 $S/\mathfrak{m}_S I \to S/I$ 得到）属于 H^2 个（$\mathcal{O}_Z$） $\otimes I/\mathfrak{m}_S I$。它在核的每个一维商中的像都非零。事实上，若能提升该类，就能提升从 S/I 出发的典范映射；而将参数的提升改动为被 $\mathfrak{m}_S$ 消去的元素，不会改变关系在 $I \subset \mathfrak{m}_S^2$ 中的像。这将方程的数量限制为 h^2 个（$\mathcal{O}_Z$）。

K_Z 的一个截面会向下推到 K_X的一个截面，因此 h^3（$\mathcal{O}_Z$） $= 0$。X [5, 奇点的有理性定理 3 和 19] 给出 χ（$\mathcal{O}_X$） $= \chi$（$\mathcal{O}_Z$） ≥ 1。对于上界，我们只需要霍奇–维特欧拉公式及其在三维中的对称性的以下推论 [64, 定理 4.4 和 §4.2]。$h^{0,j}_W$ 均为非负，因此

$$\chi(\mathcal{O}_Z) \leq h^{0,0}_W(Z) + h^{2,0}_W(Z) \leq 1 + h^0(Z, \Omega^2_Z).$$

□

命题 6.6。设 X 是一个具有零边界的例外典范 *Fano* 三维簇，满足 χ（O_X） $\leq H$，并设 f： $Y \to X$ 是一个射影保正则形式的 $\mathbb{Q}$-阶乘终端化。假设每个非戈伦斯坦点 Q 都有一个循环篮子，将γ_Q 表示为引理 *6.4* 中各项之和。假设该篮子包含局部指标，且 e_Q（Y） $\leq M\sigma_Q$，其中 σ_Q 是该篮子中 σ_r 之和。那么在充分大的特征下， $-K_X$ 的第一个有效次数由 H 和 M限定。

证明。令 $L = -K_X$、 $A_Y = f^*L$ 和 $A = g^*A_Y$，其中 g 是引理 6.3 的消解。置 $V = L^3 > 0$、 $c = c_2(T_Z) \cdot A$、 $\chi_0 = \chi(\mathcal{O}_X)$ 以及 $\sigma = \sum_Q \sigma_Q$。由于根据 Cohen–Macaulay 塞尔对偶，$\chi(X, K_X) = -\chi_0$，在 $m = -1$ 处对（6.1）求值，得到 $c = 24\chi_0 - \sigma$。对于 $m \geq 0$，公式变为

$$\chi(X, mL) = (2m+1)\chi_0 + \frac{m(m+1)(2m+1)}{12} V - \sum_{(r,b)} \ell_{r,b}(m), \qquad c = 24\chi_0 - \sigma. \tag{6.2}$$

求和遍历所有篮子。

记 d 为第一个有效次数。我们可以假设 $d \geq 2$。取 p 足够大，以适用引理 5.1，从而得到 $\chi(X,(d-1)L) \leq 0$。$\ell_{r,b}(d-1)$ 中的每一项都至多为 $r/8 \leq \sigma_r/6$。结合 $\chi_0 \geq 1$，可得

$$\sigma \geq \frac{d(2d-1)}{2} V + 12\chi_0 \geq \frac{3}{4} d^2 V. \tag{6.3}$$

若 $\sigma \leq 48H$，则 K_Y的所有局部指标都不超过 $48H + 1$。因此，它们的公倍数给出 V的一个正下界，因为 A_Y的 Cartier 倍数的立方是一个正整数。这就限制了 d。

假设 $\sigma > 48H$，于是 $c < -\sigma/2$。取一个丰沛 Cartier 除子 H_Z 和一个较小的正有理数 η，并令 $B = A + \eta H_Z$。设

$$v = -K_Z B^2, \qquad u = K_Z^2 B, \qquad w = B^3, \qquad c_B = c_2(T_Z) \cdot B$$

我们可以安排使 u， $v > 0$、 $c_B < -\sigma/2$、 $w/v < 8/7$ 以及 $v^2/w < 2V$成立。事实上， u， v， w趋于 V，而 c_B 趋于 c。

使用斜率 $\mu(\mathcal{E}) = c_1(\mathcal{E})B^2/\mathrm{rk}\,\mathcal{E}$，并令 $\theta = \mu_{\max}(T_Z)/v$。Harder–Narasimhan 滤过具有斜率递减的半稳定连续商。其首个和末个斜率分别记为 $\mu_{\max}$ 和 $\mu_{\min}$。由于 $\mu(T_Z)$ $= v/3$，我们有$\theta \geq 1/3$和 $\mu_{\min}(T_Z) \geq -2\theta v$。因此 $\mu_{\max}(\Omega^1_Z) \leq 2\theta v$。记

$L_{\max}$，$L_{\min}$ 在除以 p^e 后，极端斜率在 e Frobenius 拉回下的极限。对于秩为 s 的层，Langer 斜率偏差界为 $(s-1)[L_{\max}(\Omega^1_Z)]_+/p$[38, 推论 6.2]。首先将其应用于 Ω^1_Z，得到 $[L_{\max}(\Omega^1_Z)]_+ \le 2p\theta v/(p-2)$。现在对 T_Z 的界给出 $L_{\max}(T_Z) \le 2\theta v$ 和 $L_{\min}(T_Z) \ge -3\theta v$，其中 $p \ge 7$。

应用 Langer 判别式不等式 [38, 定理 5.1(5.1.1)]，并清除 B的 Cartier 分母后，可得

$$w(6c_B - 2u) \ge -9\big(L_{\max}(T_Z) - v/3\big)\big(v/3 - L_{\min}(T_Z)\big) \ge -72\theta^2 v^2.$$

利用 $u > 0$ 和 $c_B < -\sigma/2$，可得

$$\sigma < 24\theta^2 v^2/w < 48\theta^2 V. \tag{6.4}$$

结合 σ 的两个界，可得 $d < 8\theta$。因此我们可以假设 $\theta > 8$。

第一个 Harder–Narasimhan 子层 $\mathcal{F} \subset T_Z$ 是饱和的，秩为一或二。它是一个 1-叶丛，也就是说，它在李括号和导子的 p 次幂作用下闭合。秩为一时，括号映射模 $\mathcal{F}$ 后为零，且 $F_Z^*\mathcal{F}$ 的斜率为 $p\theta v$，大于商的最大斜率。秩为二时，商的斜率为 $(1-2\theta)v < 0$。$\mathcal{F}$ 的行列式具有正斜率，而斜率偏差界给出 $L_{\min}(\mathcal{F}) \ge \theta v(1 - 2/(p-2)) > 0$。因此，从 $\bigwedge^2\mathcal{F}$到商的括号映射为零；由对合性，p 次幂所诱导的、来自 $F_Z^*\mathcal{F}$ 的映射也为零。

取一条一般的完全交曲线，它由 B的两个非常丰沛倍数截出，并且经过一个一般点，同时避开$\mathcal{F}$ 不是子丛的轨迹。叶丛弯折与断裂 [37, 定理 2.1] 给出了一个经过该点的有理曲线，其 B次数至多为

$$\frac{6pB^3}{((p-1)c_1(\mathcal{F}) - K_Z)B^2} \le \frac{6p}{(p-1)\theta + 1}\frac{w}{v} < \frac{8}{\theta}.$$

这些曲线的正规化出现在从 $\mathbb{P}^1$ 出发、相对于 B的某个固定非常丰沛倍数具有有限多个次数的态射之中。因此，一个不可约的态射族支配 Z。我们将范围限制在与 $Z \to Y \to X$的同构开集相交的态射上。A_Y 拉回到 $\mathbb{P}^1$ 所得线丛的次数 δ 在该族上是常数，并满足 $0 < \delta < 8/\theta < 1$。具有此次数的曲线必然经过 Y的某个非戈伦斯坦点，因为线丛在 $\mathbb{P}^1$ 上的次数是一个整数。由 $\mathbb{P}^1$的真性，与每个这样的点相交的态射轨迹都是闭的。该族不可约，而点的列表是有限的，因此有一个点 Q 位于 Y中每个像上。

对于充分可整除的 j，jA_Y 的一个截面由其模$\mathfrak{m}_Q^{\lfloor j\delta\rfloor+1}$ 的芽确定。事实上，核中的一个非零截面在某条覆盖曲线上限制为非零，并且在 Q 上方的阶会大于次数 $j\delta$。比较 jL 的希尔伯特多项式与 Q处的希尔伯特–塞缪尔多项式可得

$$V \le e_Q(Y)\delta^3 \le M\sigma\delta^3 < \frac{48M\,8^3}{\theta}V.$$

这给出了 θ的界，从而也给出了 d的界，且该界仅取决于 M。 □

我们计算命题 6.6 中所需的篮子。rK_X 的局部平凡化将典范层的前 r 个反身幂构成一个循环分次代数。该代数的谱就是<style id='3'>典范覆盖。它在正则轨迹上是一个 μ_r-挠子。即使该挠子不可分，这个分次结构仍然在给定的域上成立。

引理 6.7。 设 (X, Q) 是特征 $p > 5$代数闭域上的一个终端三维簇芽，并设 r 为其典范指标。对于 rK_X的适当局部平凡化，典范覆盖是正规的，在Q上方有唯一的点，并且在该点附近的其他地方均为正则。其补全要么是正则的，要么是四个变量中的一个超曲面，其方程的阶为二。可以选取关于 $\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$-分次齐次的变量，使得该方程是半不变的。

证明。 典范代数的分次部分是 Cohen–Macaulay $[5, \text{定理 3 和 } 19]$。非零次数的齐次元素的 r 次幂属于 Q 处的极大理想，因为齐次单位元会平凡化相应的典范幂，与 r 的极小性矛盾。因此， Q 上方的纤维只有一个点，其剩余域为 k。

对于 $p \nmid r$ ，覆盖在正则轨迹上是 étale 的。对于 $p \mid r$，先将平凡化乘以仿射嵌入的一个一般仿射线性函数 u ，使其在 Q 处非零。在正则轨迹上局部而言，新方程为 $T^r - au$ ，其中 a 是一个单位元。在一个固定的正则点处， $d(au) = 0$ 对 u 施加三个独立的线性条件，因为仿射线性函数生成一阶喷射。一般的 u 的临界轨迹至多是有限集。在 Q 附近缩小范围，以去除该临界轨迹及 u 的零点。Cohen–Macaulay 覆盖除其闭点外均正则，因此是正规的。

为得到超曲面表示，我们需要追踪定义域。考虑完整的典范代数

$$X^\sharp = \operatorname{Spec}_X \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{O}_X(jK_X).$$

所选的次数为 r 的齐次单位元 s 使其在 $X \times \mathbb{G}_m$ 上有限。由相同的分解可知，它是 Cohen–Macaulay 的。在正则轨迹上，它是一个环面挠子，因此也是正规的。令 $K_X = \operatorname{div}(\omega)$，并令 t 为次数为一的有理坐标。在环面挠子上，形式 $\Omega = \omega \wedge (dt/t)/t$ 平凡化了典范层。经反身延拓后， $X^\sharp$ 成为 Gorenstein。

在对数解消 $\pi\colon U \to X$ 上， $X^\sharp$ 拉回的主分支的正规化具有分次代数 $\bigoplus_j \mathcal{O}_U(\lfloor j\pi^* K_X \rfloor)t^j$。事实上，该代数在局部正规交坐标中是饱和的，而且每个齐次元素的 r 次幂都属于原始拉回代数。因此，正规化后的拉回在 $X^\sharp$ 上是 proper 的。在正规交参数 x_i 中，令 $d_i = \operatorname{ord}_{(x_i=0)}(\pi^* K_X)$。在正则环面细分上，一条射线对应非负整数 $v_i = \operatorname{ord}(x_i)$ 和 $\operatorname{ord}(t) = \sum_i d_i v_i$。在对数坐标中取 Ω 的阶，得到对数差异

$$\sum_i (k_i + 1 - d_i)v_i = \sum_i A_X((x_i = 0))v_i, \tag{6.5}$$

其中 k_i 是 U 上 ω 的阶。若 $\sum_i v_i \geq 2$ ，则该阶至少为二。具有 $\sum_i v_i = 1$ 的射线具有整数斜率 d_i ；若其为例外的，则来自 U 上一个差异大于一的例外除子。因此，正规交叉判据给出终端性。为了在 Q 上将约化轨迹的理想化为主理想，将一组有限齐次生成元的系数除子纳入正规交叉支集中，并细分该细分，以将所得单项式理想化为主理想。

态射 $s\colon X^\sharp \to \mathbb{G}_m$ 由关于 $k[s, s^{-1}]$的无挠性可知是平坦的。它在 $F = k(s)$上的一般纤维，由于对偶化层的局部化及不一致数公式，是 Gorenstein 且终端的。除可能位于

Q上方的奇点外，它是正则的；该奇点是 F-有理的，因为 Q 上的约化轨迹是 Spec $k[s,s^{-1}]$。前述主化给出了一个正则模型，将该有理点主化。

我们应用 [59, 定理 6.4]中的有理点论证。在 F 的纯超越扩张上，经过该点的一个一般超平面保持重数不变，并使嵌入维数降低一维。根据自由部分上的一般贝尔蒂尼定理 [59, 定理 6.1]，其严格变换在正则模型上是正则的，并且在正规化点爆破上是正规的。在下方，同一定理表明一般超平面 H 在标记点之外是正则的。作为戈伦斯坦 Cartier 截面，它满足 S_2，因此根据塞尔re判据它是正规的。

正则变换的伴随公式给出 $\mathfrak{m}_H\omega_H \subseteq g_*\omega_{\widetilde{H}} \subseteq \omega_H$。第一个包含关系使用了非负的三维亏格以及 [59, 引理 6.2]中的有理点推前。该戈伦斯坦曲面是典范的或椭圆的 [59,命题 5.26]。在典范情形下，根据平方为 -2 [39, §18]的基本循环的完全理想计算，它是一个有理双点，重数为二且嵌入维数为三。对于椭圆点，如果其基本循环的负平方至多为二 [59, 定理 5.23]，则同样的数值成立。

在剩余的椭圆情形中，曲面点爆破是正规典范模型，其相对典范除子是其点理想除子的负除子 [59,定理 5.19 和推论 5.20]。该爆破是三维簇点爆破中一般超平面的 Cartier 严格变换。事实上，在具有生成元x_j/x_i 的图表上，泛变换的方程为 $c_i + \sum_{j\neq i} c_j x_j/x_i = 0$。消去$c_i$ 后，可将其识别为该点以外变换的闭包，并且这种识别在一般系数域上仍然成立。Gorenstein 性质沿 Cartier 截面提升。根据塞尔re判据，沿该截面的正规性成立，因为与截面相交的余维一非正则轨迹也会在截面上表现为非正则。伴随公式表明，三维簇相对典范除子在曲面上的限制映射在线性意义下为平凡除子。由于终端性，它是有效且非零的，因为该截面与例外除子相交于一条曲线。这与曲面爆破的负性相矛盾。整个论证都在超平面的实际域上使用了有理点假设。

在将 s 的 r 次根添加到 F 后，按该根的相应次幂对每个齐次元素进行缩放。于是，一般纤维在域扩张后与所选的有限覆盖同构。在有理点处，嵌入维数和重数在标量扩张下保持不变。因此，非正则覆盖的嵌入维数为四，重数为二。余切基的齐次提升给出一个幂级数表示。在非正则情形中，其核的高度为一，并由一个二阶的半不变方程生成。□

我们给出不一致数的比较，这既用于确定分次方程，也用于处理非典范情形。考虑一个孤立典范覆盖的半不变量超曲面方程f。充分高阶的多项式截断给出相同的完备分次商。事实上，蒂朱里纳理想包含 $\mathfrak{m}^s$，其中某个s。一个 $N > 2s+2$ 阶的误差可表示为 f 及其偏导数的线性组合，其系数的阶至少为 $N-s$，并且具有相匹配的特征。通过齐次坐标变换以及乘以一个单位元，可以将其消除至阶至少为 $2(N-s)-1 > N$。迭代这一过程即可得到同构。我们可以利用公共的带标点 étale 邻域 [54,Tag 0CAV] 来比较这些代数芽。

设 w_i 为该多项式模 r 的坐标权重，c 为其特征。穿孔覆盖上的自由性对每一对不同的坐标都给出 $\gcd(w_i,\ w_j,\ r) = 1$

坐标：由非平凡子群固定的平面与超曲面的交至少是一条曲线。它还表明，在任何非单位元权重的坐标轴上的限制映射均非零。典范特征 $\sum_i w_i - c$ 模 r 是本原的。事实上，对于典范代数 $\bigoplus_i M_i$，有限对偶性将其对偶化模与 $\mathrm{Hom}(\bigoplus_i M_i,\ M_1)$ 等同。乘法以及到一次分次部分的投影给出分次平移，因为 $\mathrm{Hom}(M_i,\ M_1) = M_{1-i}$，这由反身延拓得到。超曲面伴随公式根据权重和方程计算出相同的特征，至多相差一个符号。

在 $\mathbb{C}$ 上取一个具有相同支集的一般多项式 f_0。由于每个面上的单项式在面环面上给出一个无基点线性系，它是牛顿非退化的。它在原点处具有一个孤立正规奇点。为证明孤立性，对原始 f 模 $\mathfrak{m}^N$ 使用长度小于 N 的图里纳商。在特征 p 中定义矩阵的一个非零秩子式，在特征零中也是系数的一个非零多项式。一般喷射商的长度小于 N，从而排除了正维情形。对与坐标轴的自由性检验仍然成立，因此复商是孤立的。伴随公式与本原特征将 $f_0 = 0$ 识别为其指标为 r 的典范覆盖。

在格 $\mathbb{Z}^4 + \mathbb{Z}(w_1,\ \ldots\ldots,\ w_4)/r$ 中，使用一个从属于牛顿面的正则细分。在特征零中，严格变换是光滑的，并且与托里克分层横截。其位于原点之上的例外素除子出现在开射线轨道上，这些轨道具有正坐标的本原向量 v，其最小面至少包含两项。它们的对数差异为 $\sum v_i - \nu_v(f_0)$，其中 ν_v 是各单项式权重的最小值。

原特征中的同一个面具有一个非单位劳朗方程，其零点集含有一个余维一分支。除以一个最小化单项式，便在开射线图上得到一个不变的 Cartier 方程。在下方，商超曲面 D 满足 $rD = \mathrm{div}(f')$，因为在环面上，按最小化单项式取比定义了约化方程，这归因于强分次以及零次分量的正合性。托里克伴随公式以及沿着位于该分支 E 上方的一个素除子的正规化给出

$$A_X(E) = 1 + m\big(\sum v_i - 1 - \nu_v(f)\big) - \mathrm{coeff}_E(\mathrm{Cond}), \tag{6.6}$$

其中，$m \geq 1$ 是射线除子限制映射的重数，而 Cond 是从严格~变换的对偶化除子中减去的有效导子除子。方括号是环境图上 $K_{\widetilde{Z}} + D - \pi^*(K_Z + D)$ 中该射线的系数。v 的所有坐标均为正，因此 E 在原点上方是例外的。这一比较允许特征 p 中存在奇异的或非约化的面。

引理 6.8。对于引理 *6.7* 中带有 $r > 1$ 的覆盖，正则情形的权重为 $(a, -a, 1)$，在改变生成元并置换后，且有 $(a, r) = 1$。在超曲面情形中，权重和方程特征标为 $(a, -a, 1, c;\ \ c)$，其中 $(a, r) = 1$，并且或者为 $c = 0$，或者为 $(r, c) = (4, 2)$。该方程非平凡地限制在最后一个坐标轴上。

证明。在正则情形中，环面亏格计算与域无关。在超曲面情形中，(6.6) 和终端性迫使 $\sum v_i - \nu_v(f) > 1$ 对每个在 $\mathbb{C}$ 上贡献的射线都成立。支集是固定的，因此根据其消解上的正规交叉判据，复商是终端的。Mori 分类[41, 定理 12、23 以及 25] 给出了复覆盖的余切权重和方程特征标，因而也给出了原覆盖的相应数据。由于自由性，轴上的限制非零。□

引理 6.9。 在特征为 $p>5$ 的 $\mathbb{Q}$-阶乘终端三维簇的每个非戈伦斯坦点 Q 处，（6.1）中的局部修正项是一个循环篮子的求和。该篮子包含局部指标，并且其 $r-r^{-1}$ 的和 σ_Q 满足 $e_Q \le 9\sigma_Q$。

证明。 正则覆盖给出了引理 6.4 中的唯一条目。在超曲面情形中，使用引理 6.8 的权重，并令 $n=\operatorname{ord}_t f(0,\ 0,\ 0,\ t)$，其中 t 是最后一个变量。我们比较两个具有相同加权次数的射影超曲面。其中一个具有给定的芽，另一个则将其替换为循环点。两者上的所有其他奇点都是循环点。

取权重 $(r,\ r,\ a,\ r-a,\ 1)$，其中满足 $0<a<r$，并取一个能被所有权重整除的大次数 D 。沿着两个权重为 r 的坐标轴，其限制映射是一个次数为 D/r 的普通二元形式。在特殊成员上，预先规定该轴上一点处分次方程的有限喷射。限制映射在该点有一个阶为 n 的根，并在其他位置有 $D/r-n$ 个单根。一般成员有 D/r 个单根。在每个单根处，权重为零的坐标在覆盖上消去，而商的权重为 $(a,\ -a,\ 1)$ 模 r。

对于 $(r,\ c)=(4,\ 2)$，取权重 $(4,\ 2,\ 1,\ 3,\ 1)$，并取一个足够大的次数 $D\equiv 2 \pmod 4$，使其能被三整除。在 $(4,\ 2)$ 轴上，以坐标 $(u,\ t)$ 表示，其限制映射为$tP(u,\ t^2)$，其中 P是次数为 $(D-2)/4$的二元形式。权重为四的点总是存在的。在一般成员上，该处一个非零线性 t 项给出指标为四的循环图表。其他根都是单根，并给出指标为二的循环点，因为其余三个坐标权重均为奇数。在特殊成员上，令权重为四的点处具有给定的喷射。这使得其他位置的单根减少 $(n-1)/2$ 个。

在这两种构造中，有限喷射是在权重层中指定的，并且可以用充分高次的非常丰沛 Cartier 幂扭曲其核。这样，在层可逆的地方，除指定点外的一阶喷射仍可自由取值，而轴上的限制映射是具有相应喷射的二元形式。因此，可以令根为单根，避开其他具有非平凡稳定子的孤立坐标点，并使轴外部分光滑。单根计算采用分次覆盖上的消元法，包括 $p\mid r$ 的情形。每个超曲面都是整的，因为不同的正次数因子相交时，其维数至少为二；而重因子在余维零处奇异。

加权伴随公式给出了次数为 $D-\sum w_i$ 的典范层。这在光滑轨迹上成立，并通过自反性延拓。每个超曲面上的加权层都是自反的。事实上，在仿射商图中，特征子层是 Cohen–Macaulay 的且为秩一。加权射影空间中的分次超曲面序列对两个成员的每个权都给出相同的欧拉示性数。特别地，所有典范幂都具有相同的欧拉示性数。两个典范除子的一个公共 Cartier 倍数通过其 Hilbert 多项式给出 K^3 的相等性。在一个正的 Cartier 倍数处计算 (6.1)，还给出 $c_2(T_Z)\cdot(-g^*K)$ 的相等性，因为每个局部项在该处都消失。

利用引理 6.4 之前的主理想比较，将给定的 $\mathbb{Q}$-阶乘芽上的消解传输到加权特殊成员，并在其他循环点处选取托里克解消。从 (6.1) 中减去已知的局部项，即得指定点的篮子。当 $c=0$ 时，它由 n 个指标为r 的循环项组成。当 $(r,\ c)=(4,\ 2)$ 时，它由一个四指标项和 $(n-1)/2$个二指标项组成。

对于 $c=0$，使用不变参数理想 $(x^r+y^r,\ z^r,\ t-\lambda xy)$。经过 $t=\lambda xy$和 $z=0$后，对于一般的 λ，在 $x^r+y^r=0$ 中的每条直线 $x=\xi y$ 上，方程的阶至多为 $2n$。事实上，来自t^n的 y^{2n} 系数含有一个在 λ 中次数为 n 的非零项。按重数计算直线，所得平面交的长度至多为 $2nr$。将 z 替换为 z^r 会使余长乘以 r，因为在施加 $z=0$之前，z 是一维完全交中的一个参数。因此覆盖上的余长至多为 $2nr^2$。参数理想的重数按有限覆盖次数 r缩放，得到 $e_Q\le 2nr\le(8/3)\sigma_Q$。对于指标 4，四个变量的四次幂所生成的不变理想扩张后成为覆盖上极大理想四次幂的约化。其上方的重数为 $2\cdot 4^3,$，因为覆盖的重数为二。同样除以次数，我们得到 $e_Q\le 32\le 9\sigma_Q$。□

6.3. **差异间隙与有界补边界**。在一个非典范 klt 三维簇上，某个例外除子的对数差异小于一。对于命题 5.7，我们需要这种差异与一保持一致的距离。我们将局部方程与一个复终端方程进行比较，并直接处理剩余的循环超曲面。

引理 6.10。在任意特征下，一个正规孤立商芽

$$(k[[x,y,z,t]]/(xy+g(z^r,t)))^{\mu_r(a,-a,1,0)},\qquad (a,r)=1,$$

当超曲面孤立且正规，并且 $g(0,\ t)\ne 0$ 时，是终端的。

证明。分次有限决定性允许对 g进行多项式截断，同时保持方程的形式。令 $U=z^r$, $G=xy=-g(U,\ t)$，并令 b 为 a 模 r 的逆元（若 $r=1$，则取 $b=0$）。在 x^r 可逆的商图上，使用坐标 $A=x^r$、$Z'=zx^{-b}$ 和 t。于是 $U=A^b(Z')^r$。有理 r-典范形式

$$\zeta=U\big(d\log A\wedge d\log Z'\wedge dt\big)^{\otimes r}$$

这是其中的一个可逆生成元，因为它等于 $A^{b-r}(dA\wedge dZ'\wedge dt)^{\otimes r}$。

在 y^r 可逆的图上，使用 $B=y^r$ 和 $Z''=zy^b$。于是 $AB=G^r$、$Z''=Z'G^b$ 和 $U=B^{-b}(Z'')^r$。模 dt 后，对于有理函数 λ，有 $d\log\ G=\lambda(b\,d\log\ A+r\,d\log\ Z')$。这两个对数微分的变换矩阵为

$$\begin{pmatrix}-1+rb\lambda & r^2\lambda\\ b^2\lambda & 1+rb\lambda\end{pmatrix}$$

其行列式为 -1。因此，局部生成元在交集上至多相差一个符号。补 $x=y=0$ 的余维至少为二，所以 ζ 在该芽上生成 $\omega_X^{[r]}$。所有这些微分形式都定义在商上。

对于原点上的正则模型中的一个素 E，A、Z'、t 的三个对数微分的楔积至多有一个简单极点，因为所有极部都是同一个一致化元微分的倍数。利用 $dt=t\,d\log\ t$ 得到

$$A_X(E)=1+\operatorname{ord}_E(\zeta)/r\ \ge\ \operatorname{ord}_E(t)+\operatorname{ord}_E(U)/r>1.$$

严格不等式利用了这两个函数在原点处都为零。在每个去心点处，根据 $g(0,t)\ne 0$，x、y、z 中至少有一个可逆。其权生成 $\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$，因此该处的覆盖是一个平坦扭子。覆盖的正则性通过忠实平坦性下降。□

命题 6.11。在特征 $p>5$ 下，如果一个 *klt* 三维簇具有小于 *1* 的例外对数差异，那么它具有至多为 $1-1/13$ 的例外对数差异。

证明。 由复数间隙定理 [40, 定理 14], 取 $\delta = 1/13$ 。假设所有对数差异都大于 $1-\delta$。在一个对数解消上，保正则迹的系数小于 $1/2$。在解消上余维至少为二的例外中心处，正规交叉下界是经过该中心的参数的对数差异之和，并且大于 1。因此，所有差异为 1 的例外赋值都出现在这个解消上。根据 [11, 引理 77], 在一个 $\mathbb{Q}$-阶乘模型上恰好提取这些赋值。该提取是保典范的，并且使每个差异小于 1 的赋值都保持为例外的。新模型上不存在余维二奇点。在这样的点处，实际的横截曲面要么是非典范的，根据命题 5.7 的曲面计算，其差异至多为 $2/3$ ；要么是典范但非正则的，并具有一个保正则形式的例外除子。

现在我们在抽取模型上的一个孤立点附近工作。其环面代数仍然是终端的。在 (6.5) 中，若 v_i 之和至少为二，则由于所有底空间差异都大于 $1/2$，差异便大于一。若该和为一，则底空间差异是整数；对于例外射线，它也不等于一。引理 6.7 的其余论证给出了实际域上的分次覆盖，且具有相同的自由穿孔作用。正则覆盖可直接得到托里比较。

对于奇异覆盖，进行相同的牛顿比较，同时保持二次部分的秩。由于 $p \neq 2$, 可以先配对互补特征空间，并将自互补块对角化。改变所得固定二次块的系数不会改变其秩。f_0 的一般性条件在此支集上仍然成立。在复托里解消上，令 $A_0 = \sum v_i - \nu_v(f_0)$，其中 f_0 是一个例外素除子。若 $A_0 < 1$，则 (6.6) 给出原亏格至多为 A_0，因此 $A_0 > 1-\delta$。若 $A_0 = 1$，则它给出的原亏格是一个至多为一的整数。正性迫使其取等号，而这与提取相矛盾。复解消上所有其余的例外赋值，根据正规交界限，其对数差异都大于一。复数间隙定理说明该商是典范的，而排除取等号则说明它是终端的。

现在考虑任意一个孤立点，在该点处差异小于一的某个赋值仍然存在。其局部指标满足 $r \geq 5$，因为对于 $r \leq 4$ ，这样的差异至多为$3/4$。这里的正则覆盖情形由特征无关的格计算可知是终端的。否则，Mori 分类给出权重 $(a,\ -a,\ 1,\ 0)$ 以及不变方程。其秩一二次情形的指标至多为四，因此原二次部分的秩至少为二。在不变二次部分中，只有权重为零的变量可以有平方项。因此，存在一个由相反单位特征构成的非退化交叉项。通过连续的分次坐标变换将这一部分分离出来，可将方程写成 $xy + g(z^r,\ t)$，其中 $g(0,\ t) \neq 0$，这是由自由性所致。引理 6.10 表明原图表是终端的，矛盾。□

定理 6.12 (具有零边界的例外 Fano 三维簇)。存在绝对正整数 P、N，使得在特征为 $p > P$ 的代数闭域上，每个具有零边界的例外 *Fano* 三维簇都有一个 *klt* N-补。该类在充分大的特征下算术有界。

证明。 对于非典范的 X，应用命题 6.11 和定理 5.15，并取 $\gamma = 1/13$。设 X 是典范的。若光滑射影消解存在非零正则二形式，则使用定理 6.2。否则，由引理 6.5 可得 $\chi(\mathcal{O}_X) = 1$。

按照命题 6.11 的证明，对亏格为一的位进行无挠提取，得到一个射影 $\mathbb{Q}$-因子终端化 X。在其

非 Gorenstein 点处，引理 6.9 给出循环篮子以及带有 $M = 9$ 的重数界。命题 6.6 现在给出了首个有效反典范次数的界。取这些次数与其他情形中的指标的一个公倍数，得到 N。次数为 N 的一个有效成员通过例外性给出一个 klt 补。推论 5.3 给出算术有界性。□

定理 *1.1* 的证明。 对于非例外对，应用定理 3.39。对于带有 $B \neq 0$ 的例外对，应用定理 5.15。这两个结果包含 L 非大的情形。

剩下需要处理带有 $B = 0$ 的例外对。由于 X 是 Fano 型且 $-K_X$ 是数值有效的，所以它是大的并且是半丰沛的。记 $f\colon X \to Y$ 为其丰沛收缩。于是 $-K_Y$ 是丰沛的，并且 $K_X = f^*K_Y$，其中典范除子取相容的选择。 Y 上的每个有效反典范补全都拉回为 X 上的一个补全，因此根据保典范性， Y 是例外的。从定理 6.12 中某个补的主对数除子拉回，得到 X 上具有相同指标的 klt 补。固定 R 后，取最大的特征阈值以及三个情形中指标的最小公倍数。某个倍数保持相同的边界并满足 (1.1)。□

7. 弱对数 Fano 三维簇的有界性

反典范环将每个 ϵ-lc 弱对数 Fano 对关联到一个 ϵ-lc Fano 模型。我们利用第 4.2 小节中的族构造恢复可能的弱模型，并利用第 5 节中的估计，为所有 ϵ 选取一个统一的特征界。

7.1. 从反典范模型恢复弱模型。 边界 C 可能具有实系数。由于即使 K_X 没有 Cartier 倍数， $K_X + C$ 仍可能是 $\mathbb{R}$-Cartier，因此我们使用 $-K_X$ 的整 Weil 倍数构造反典范截面环。

命题 7.1。 在特征 $p > 5$ 下，设 (X, C) 是定理 *1.2* 中的一个 *ϵ-lc 弱对数 Fano* 三维簇。其反典范环的一个可整除 *Veronese* 子环定义了一个双有理模型 Y，其中 $-K_Y$ 丰沛且为 *$\mathbb{Q}$-Cartier*。对于每个除子赋值 v,

$$A_{Y,0}(v) \geq A_{X,C}(v). \tag{7.1}$$

每个在 Y 上关于 X 例外的素除子，在 Y 上的对数差异至多为一。当$C = 0$时，映射 $X \to Y$ 是保正则形式态射。

证明。取 klt 对 $[11,$的一个小射影 $\mathbb{Q}$-阶乘化 $X' \to X$ ，见定理 1.6]。记 C' 为严格变换，并令 $L' = -(K_{X'} + C')$。小性给出 $K_{X'} + C' = f^*(K_X + C)$，其中 $f\colon X' \to X$。写作 $L' \sim_{\mathbb{R}} A + G$，其中 A 丰沛且 G 有效。当 $u > 0$ 充分小时，边界 $C' + uG$ 为 klt，且其负对数除子等价于 $(1 - u)L' + uA$，后者是丰沛的。在其固定支撑上作有理近似，可得 X' 上的有理对数 Fano 边界 Θ 。

令 $D = -K_{X'} = L' + C'$。这是一个大有理 Cartier 除子。对于足够小的正有理数 t，类 $tD - (K_{X'} + \Theta)$ 是丰沛的。选取其代表元，使得新的边界是 klt [58, 定理 1]。由此得到的对数极小模型纲领是一个 a D-极小模型纲领。经过最后一次半丰沛收缩后，通过推前，目标空间上的丰沛除子在有理线性等价意义下为 $-K_Y$。在映射为 $u\colon U \to X'$ 和 $v\colon U \to Y$的公共解消上，负性给出

$$u^*D = v^*(-K_Y) + F, \qquad F \geq 0, \quad F \text{ exceptional over } Y. \tag{7.2}$$

因此，可整除 Veronese 子环彼此相同。 $X' \to X$ 的小性表明， X' 上的环与 X上的 Weil 截面环相同。

每个有效代表元 $G' \sim_{\mathbb{R}} u^*D$ 都包含 F，因为 $G' = F + v^*v_*G'$。事实上，这可由(7.2)通过写出实主差并将其推至 Y而得出。有效 $\mathbb{R}$-Cartier除子的拉回是有效的，这也可由系数不等式所截出的有限有理锥中的有理近似看出。在每个赋值处， L'的有效代表元之阶的下确界为零。为看出这一点，对 $0 < h < 1$写出 $L' \sim_{\mathbb{R}} ((1-h)L' + hA) + hG$。第一项是丰沛的，并且有一个避开中心的有效代表元。在 $u^*(C' + L'_{\mathrm{eff}}) \geq F$中令$h$ 趋于零即得 $u^*C' \geq F$。恒等式

$$K_U - v^*K_Y = K_U - u^*(K_{X'} + C') + u^*C' - F$$

现在在每个更高模型上证明了(7.1)。对于 X' 的一个在 Y上被收缩的素除子，它关于$(Y, 0)$的对数差异等于一减去它在 F中的系数。最后，若 $C = 0$，则 $-K_X$ 的半丰性直接给出到 Y 的态射以及 $F = 0$。□

定理 7.2 （恢复原始弱模型）。 固定 $\epsilon > 0$。在充分大的特征下，具有零边界的 ϵ-对数典范 *Fano* 三维簇的算术有界性，蕴含在充分大的特征下、具有 ϵ-对数典范弱对数 *Fano* 见证的三维簇的算术有界性。水平构造可能会根据所选族和 ϵ 提高阈值。在任一固定特征中，只要该特征高于引理 *4.9* 的 *Cartier* 下降界限，同样的蕴含关系对该特征上的有界族成立。

证明。 命题 7.1将一个 X 与有界类中的一个反典范模型 Y相关联。对空边界使用引理 4.9。在每个带标记的消解上， Y 上方对数差异至多为一的例外素除子，由该消解上的素除子以及引理 4.10 中额外的层赋值组成。像的系数和维数保持不变，因此该列表可在几何泛纤维上获得，并延拓开来。

在带有 $\mathbb{Q}$-阶乘源 T_η 的几何泛纤维上，恰好提取这些素除子：在特征零中使用 [12, 推论 1.43] ，在正特征中使用 [11, 引理 7.7] 。保正则边界是有效的，系数至多为$1 - \epsilon$，其负对数除子是丰沛 $-K_{Y_\eta}$ 的拉回。Kodaira 扰动给出一个如命题 7.1 中所述的对数 Fano 见证。将该提取和一个公共解消与带标记的层的爆破一起延拓，同时保持指定素除子在源上仍为除子型。根据命题 7.1 中的不一致度比较， X 上的每个素除子随后都出现在 T_s上。对$T_s \dashrightarrow X$应用引理 4.11。这就给出了原弱模型的有界性，包括仅具有 Weil 正则除子的模型。对于闭余项，从其几何泛纤维的标记解消出发执行相同的构造。□

7.2. **绝对特征界**。

定理 7.3. 对于每个固定的 $\epsilon > 0$，非例外的 ϵ-对数典范 *Fano* 三维簇具有共同指标的 *klt* 补，并且在充分大的特征下是算术有界的。算术有界性也适用于具有这些丰模型的原始弱对数 *Fano* 模型。

证明。 使用定理 3.39 中的对数典范指标 N 及 $B = 0$，以及命题 5.17 中的构造（Y、B、 R）。记 d为 R的第一双有理次数，并且

$V_R = R^3$。应用定理 5.16 及 $v = 16$。如果 $d > Kl$，则可得到一个满足 $R^2S/V_R < l/8$ 的覆盖族。根据命题 5.8 中的 Picard 论证，该族中的除子在线性等价意义下为 Weil 除子，因为 Y 的光滑解消是有理链连通的 [23,定理 1.5 和 4.8]。两个不同的成员给出定理 5.19 中的铅笔，因此 $d \le C_N(1 + l/8)$。对 d 的任一界都给出

$$d^3V_R \le C'_N \max(1, V_R).$$

根据定理 5.18，右端有界，因为 $V_R = q^3(-K_X)^3$ 与$q = \lceil 1/\epsilon \rceil$。命题 5.17 给出了次数为 $b = Nqd$的双有理反典范系，且 $b^3(-K_X)^3 = N^3d^3V_R$有界。定理 4.17 给出了 klt 补和算术界，而定理 7.2 则恢复了原来的簇。□

这些数值估计在某个绝对特征界以上成立。对于固定的ϵ，从特征零铺展时可能会遗漏有限多个额外的素数。对于其中每个素数，我们都在垂直分层的几何泛点上构造缺失的簇族。

定理 *1.2* 的证明。取 P_*，使其包含 5、 [2, 推论 4.4], 中的绝对界，以及定理 6.12 中例外 Fano 三维簇的 klt 指数的特征界。此外，还要包含定理 3.39 中的空边界指标N 的界、定理 5.16(i) 中针对该 N的特征界，以及定理 5.19 所需的 max(5, N)。定理 5.18 的论证也使用相同的界。这些选择均与 ϵ无关。

固定 $0 < \epsilon \le 1$。根据命题 7.1， X 的丰模型 Y给出一个 ϵ-对数正则对（Y, 0）。在例外情形下，该模型的绝对 klt 指数和体积至多为 27。在非例外情形下，定理 7.3 的证明给出一个 lc$N$-补以及带有 $U = U(\epsilon)$ 的界（4.7），对任意 $p > P_*$ 均成立。特别地$q = \lceil 1/\epsilon \rceil$ 在该证明中改变了体积界和次数，而射流阈值与铅笔阈值只使用 N。

例外的丰模型由定理 6.12 给出有界性。定理 4.17 给出非例外丰模型的界。将定理 7.2 应用于二者的并，便可恢复原三维簇 X。对于水平构造中省略的每个素除子 $p > P_*$，在 $\mathbb{F}_p$上的参数空间中使用相同的数值界。标记解消构造于它们的几何泛三维簇上。Frobenius 估计在那里以及铺展后的光滑纤维上均适用。定理 4.12 中的 klt 指数是每个几何泛纤维上的实际主倍数，而有限下降和铺展保持这些关系。随后，包含固定特征下的 Picard 与收缩论证在内的引理 4.9 和 4.11，给出该素除子上的弱模型簇族。

对于这个固定的 ϵ，只有有限多个素除子需要这些额外的簇族。将底空间限制到该环之后，它们与水平族的不交并在一个有限型 $\mathbb{Z}[1/(P_*!)]$-概形上是射影的。当 $\epsilon > 1$ 时该类为空，因为 X 上任意素除子处的对数差异为 1 –系数 $_P\, C \le 1$。□

8. Kawamata–Viehweg 消失定理

8.1. **通过伴随极小模型纲领进行约化**。拉回整 Weil 除子可能引入分数系数。在公共解消上取整，可得到一个在两个双有理模型上计算上同调的单一线丛。

在双有理模型上，我们使用相同的函数 u 和相同的分母 m来书写有理主除子 $\mathrm{div}(u)/m$。

引理 8.1。 设 $v\colon U \to T$ 是三维 *klt* 对 (T, C)在特征 $p > 5$下的一个对数解消。设 A 是 T 上的有理 *Cartier* 除子，且 $C = \lceil A \rceil - A$。令 $D = K_T + \lceil A \rceil$。则

$$Rv_*\mathcal{O}_U(K_U + \lceil v^*A \rceil) = \mathcal{O}_T(D).$$

证明。 写作 $C_U = v^*(K_T + C) - K_U$，并令 $Q = \lceil v^*A \rceil - v^*A$。上方的除子相对 $\mathbb{Q}$-线性等价于 $K_U + Q$， Q 的所有系数都小于 1，且 $v_*Q = C$。由定义 1 和定理 3]，可应用通常的 Grauert–Riemenschneider 消失定理 [5,。与 v^*D 的差为 $Q - C_U$，它是例外的，且系数大于 -1。将主除子加到 v^*D后，$\mathcal{O}_T(D)$的一个截面拉回为有效有理除子。加上 $Q - C_U$ 后得到一个整除子，其系数大于 -1，因此是有效的。反向结论由推前得到。□

该公式有两种应用会反复出现。若 $D = K_T + C + \mathrm{div}(u)/m$ with D 为整，且 C 为有效 klt，则取 $A = \mathrm{div}(u)/m$。在另一个模型上，若相应的修正项为 klt，则一个公共解消可计算两者的上同调。可以将来自公共底空间的拉回加到 A 上。对于向下取整除子$J = \lfloor A \rfloor$，将公式应用于 $K_T - J$，其修正项为 $\{A\} = A - \lfloor A \rfloor$，其中 $(T, \{A\})$ 为 klt，且 T 是 $\mathbb{Q}$-阶乘的。适当对偶性给出了 $\mathcal{O}(J)$ 的类似比较，对公共底空间上的导出像也成立。事实上，这些 klt 三维簇上的除子层是 Cohen–Macaulay 的，见 [1, 推论 1.3]。对于非$\mathbb{Q}$-阶乘 klt 模型上的 $\mathbb{Q}$-Cartier 魏尔除子，局部结论由 [5, 定理3和定理19(2)]，得出，因为 Cartier 倍数局部为主除子。它们到对偶化复形中的对偶是其典范对偶层平移三次后的结果。在奇异底空间上，对偶公式中使用其对偶化复形即可。

引理 8.2. 设 $f\colon T \to Z$ 是从一个射影 $\mathbb{Q}$-阶乘 *Fano* 型三维簇到一个正维正规簇的收缩，并设 L 是一个整魏尔除子。那么，在以下任一情形下， $R^i f_*\mathcal{O}_T(L) = 0$ 对 $i > 0$ 成立。

(i) $L \equiv_Z 0$。(ii) $-L$ 和 $L - K_T$均为 f-丰沛。

若一般纤维具有正维数，则在情形(ii)下，通常的直像也消失。

证明。 在一个闭 $z \in Z$附近工作。在 (i) 中，由于相对无基点性， L 的某个倍数可从 Z 拉回。其半丰沛收缩在纤维上为常值，且其斯坦因分解在正规底空间上有限双有理。因此局部有$A = \mathrm{div}(u)/m = L$。为 f选取一个 klt 对数 Fano 见证。在 (ii) 中，取一个稀释后的一般有效$\Delta' \sim_{\mathbb{Q},\, z} -L$ 使其保持 klt 且避开 T_z的除子分量。此时–$(K_T + \Delta')$相对丰沛。缩小底空间后，可写作 $A = \mathrm{div}(u)/m = L + \Delta'$。在 (i) 中， A 的分数修正为零。

对所选的对数 Fano 对，使用命题 2.15] 中的纤维模型。在此模型上 $g\colon Y \to Z$， z 之上的约化纤维是一个素 S， $-S$ 是相对数值有效的，并且存在一个 plt 边界 Λ，其下取整为 S，且 $-(K_Y + \Lambda)$ 是相对丰沛的。构造的第 1 步压缩 T_z之外的例外素除子，后续步骤不提取任何除子，最终仅有 S 保留在 z之上。

在 (ii) 中，我们需要 $\Lambda - S$ 包含严格变换 $(\Delta')^s$。第 2 步结束时的有效和是相对平凡的，其支集位于 z之上，并且不包含 S。其主关系中的函数在一般纤维上为常数，因此该和是一个拉回。任何支集位于 z 之上的非零有效拉回都会包含 S。因此该和为零，并且第 3 步保留了一个相对平凡的 plt 对数除子 $K_Y + S + (\Delta')^s + P$。这里的 P 来自消解上的一个相对丰沛除子 P_V。对于一般的丰沛 Cartier 除子 H_Y，类 $P_V - \eta H_Y^s$ 在 $\eta > 0$足够小时仍然是相对丰沛的。将 P 与该类中一个经稀释成员的变换混合。这保留了 $(\Delta')^s$ 以及 plt 性，并使负对数除子相对丰沛。

记作 $Q = \{A_Y\}$， $b =$ 系数$_S Q$， $J = \lfloor A_Y \rfloor$。在 (i) 中为 $Q = bS$，而在 (ii) 中为 $Q = (\Delta')^s + bS$，其中意指远离 S 的严格迹。我们对 Δ' 的选择避免了以下情形：若其已经是 T上的除子，则为 S。因此 $(Y,\ Q)$ 是 klt 的，并且 $S \le \Lambda - Q + bS \le \Lambda$。我们有

$$J - (K_Y + \Lambda - Q + bS) \sim_{\mathbb{Q},Z} -(K_Y + \Lambda) - bS,$$

它是相对丰沛的。plt 消失定理 [3, 定理 1.1] 给出了 J所需的高阶直接像消失。对于公共解消上的单个有理主 A，对偶取整比较将其导出像与该邻域上 L 的导出像对应起来。最后一个断言由一般纤维上的负性以及直像的无挠性推出。□

为了对定理 1.3 中的除子运行极小模型纲领，记作 $A_0 = D - K_X - \Delta \sim_{\mathbb{Q}} H + E$，其中 H 丰沛且 $E \ge 0$。对于足够小的有理数 $t > 0$，将 tE 加入 Δ，并取丰沛类 $(1-t)A_0 + tH$ 的一个充分稀释的有效代表元。这给出一个有效的大 klt 边界 C，使得 $D \sim_{\mathbb{Q}} K_X + C$ [58, 定理 1]。取一个小的$\mathbb{Q}$-阶化并运行 klt 伴随极小模型纲领。通过推送一个大 klt Calabi–Yau 完备化，每个模型都是 Fano 型。 C 的严格变换保持 klt 且为大。将引理 8.1 应用于 $D - K_X - C$，可保持经过这些步骤的全部上同调，包括小修改。由对偶性，最高阶群在 X 上已经消失，因为大有效类 $D - K_X$ 的负类没有截面。

在映到正维底空间的负 Mori 压缩中， $D - K_X$ 是相对丰沛的，因为其大有效代表元与一条移动的纤维曲线相交次数为正，且相对 Picard 数为一。应用引理 8.2。在数值有效且大的输出上，相对无基点性给出一个映到丰模型的双有理映射。其推前是一个整的 $\mathbb{Q}$-Cartier 丰沛除子，其拉回为 D。对数除子 $K + C$ 在此处是保正则形式的，因此引理 8.1 再次保持上同调不变。丰沛目标空间本身不必是 $\mathbb{Q}$-阶乘的。

固定定理 1.1 中零边界补的指标 $n = n(\{1\})$。每个 Fano 型射影三维簇 X 都有一个有效对数典范边界 Σ，满足$n(K_X + \Sigma) \sim 0$。为说明这一点，先在一个小的 $\mathbb{Q}$-阶化上工作，并通过其极小模型纲领取大除子 $-K_X$ 的丰模型 Z。这是一个 Fano 型的 Fano 簇。在一个公共解消 u 上： $U \to X$， v： $U \to Z$，由负性可得

$$u^*(-K_X) = v^*(-K_Z) + E, \qquad E \ge 0. \tag{8.1}$$

若 $K_Z + \Sigma_Z = \mathrm{div}(s)/n$，则其在 X 上的保正则迹是 $v^*\Sigma_Z + E$ 的推前，因而是有效的。同一主关系证明了对数典范性，并且可从小修改下降。

引理 8.3。 固定 $e > 0$。在证明定理 *1.3* 时，对于关于 e 足够大的特征，在其裸反典范丰模型为 e-对数典范的三维簇上，任意丰沛的整 $\mathbb{Q}$-*Cartier* 魏尔除子都具有消失的高阶上同调。对于一个 e-对数典范的法诺

三维簇，若其皮卡数为一，则对于丰沛的整 $\mathbb{Q}$-*Cartier* 魏尔除子 J *with*$J - K_X$，同样成立。

证明。 我们可以在有限域的代数闭包上工作。定理 1.3 的一个反例可以铺展到 $\mathbb{F}_p$ 上的有限型整代数。在此过程中，可以将上文 Kodaira 分解中的 E 的一个小倍数加到边界上，使伴随除子差变为丰沛。将对数 Fano 见证、对数解消、有理 Cartier 倍数以及引理 8.1 中取整后的线丛，与扰动边界的 $A = D$ –$(K_X + \Delta)$ 一并铺展。经过缩小后，消解在纤维上保持双有理，且简单正规交叉分支及其系数不变。丰沛类仍然丰沛。该消解上的上同调上半连续性保证非消失性在几何闭纤维上得以保持。对于固定模型的断言，可以将反典范映射和 (8.1) 纳入铺展数据，同时保持 Z 的对数解消的保 crepant 系数以及例外像的维数。

由定理 1.2， e-对数典范 Fano 丰模型属于一个定义在 $\mathbb{Z}$ 上的有限型族。利用引理 4.9 对所选点的闭包进行分层，使每个水平层上的几何泛纤维均为 klt Fano。对这样的层作有限覆盖后，特征零对数 Fano 簇的约化定理表明，其闭点在稠密开集 $[53,$ Theorem 5.1] 上具有全局F-正则性。通过诺特归纳并排除有限多个垂直剩余特征，可得到一个仅依赖于 e 的界。这就是命题 3.2 和注 3.3] 中算术有界性的用途。分裂可扩张到有限域的代数闭包。对于沿一个定义在有限扩张上的除子作出的分裂，先用原域上的 Cartier 除子的拉回支配该除子，然后再扩张分裂。

对于每个有效 Cartier H，全局 F-正则性给出 $\mathcal{O} \to F_*^j\mathcal{O}(H)$ 的一个分裂，其中 $j > 0$。特别地， Z 是 Frobenius 分裂的。相应的有理迹映射在 1 处取值为 1。在正规簇上，当且仅当其相应的反典范除子有效时，该映射才是正则的 $[53,$§4]。由（8.1），该除子在X 的小模型上等于其从 Z 拉回的迹加上 E。因此，同一个映射分裂 X。在正则轨迹上作扭曲并自反地延拓，可得从 $H^i(X, \mathcal{O}_X(L))$ 到 $H^i(X, \mathcal{O}_X(p^{aj}L))$ 的单射。对于丰沛的 L，在有限多个 Cartier 剩余类中应用 Serre 消失定理，可知当 a充分大时这些目标消失。

在有界秩一模型上，负的 J 根据相同的嵌入以及反充足 Serre 消失，在次数一和二中消失；其中在每个剩余类中使用 Cohen–Macaulay 对偶性。若 $J \equiv 0$，则根据引理 3.8，某个倍数是主的。选取一个对模去该倍数后的所有有限多个层$\mathcal{O}(jJ)$都足够正的有效丰沛 Cartier H。沿着 H 的分裂将所需的群嵌入$\mathcal{O}(p^jJ + H)$的相应群中。最后， $H^3(\mathcal{O}(J))$根据所假设的正性，与 $H^0(\mathcal{O}(K_X - J)) = 0$ 对偶。□

在一般纤维上，一个整除子可能表示一个非平凡的挠类。下一个引理在计算直接像时处理这种可能性。

引理 8.4。 设 $g\colon T \to Z$ 是一个底空间维数为正的莫里纤维收缩， T是一个 $\mathbb{Q}$-阶乘 *Fano* 型三维簇，并假设 $n(K_T + \Sigma) \sim 0$ 且 (T, Σ)为对数典范。若 Z 是一条曲线，则假设其底层一般曲面是一个固定 $e > 0$ 下的 e-对数典范法诺曲面。设 L 为整的，且 $0 \le \Gamma \le \alpha\Sigma, 0 \le \alpha < 1$为垂直的。若

$L+\Gamma\sim_{\mathbb{Q}} g^{*}M$对于一个数值有效有理 *Cartier* 除子 M，则 $H^{>0}(T,\mathcal{O}_{T}(L))=0$ 在特征充分大时成立，其中特征的下界取决于 n,e。

证明。 每个垂直素除子 V 在 Z上数值平凡。事实上，它在一般纤维曲线上的次数为零，且 $\rho(T/Z)=1$。相对无基点性表明，它在有理线性等价意义下是一个拉回。选定一个垂直代表元后，通过在 Z上作主调整，便可使其成为实际的拉回，因为垂直除子为某个函数的函数在适当一般纤维上为常数，而该纤维的常数域为 $k(Z)$。特别地，没有素除子位于 Z的余维二子集之上，且 $\Gamma=g^{*}\Gamma_{Z}$。由引理 8.2，$\mathcal{O}_{T}(L)$的高阶直接像消失。其在一般纤维上的限制在Weil类群中是挠类。非平凡挠类没有截面，因为非零有效除子与充足完全交的交数为正。在这种情况下，其无挠直接像为零。否则，经过整的主调整，可使 $L=g^{*}N$ 成为有理除子，且 $N+\Gamma_{Z}\sim_{\mathbb{Q}} M$。一般纤维上的截面是常数，而有效性可通过素除子检验。因此，$g_{*}\mathcal{O}_{T}(L)=\mathcal{O}_{Z}(\lfloor N\rfloor)$。

首先，假设 Z 是一个曲面。根据 Σ 及其固定系数集应用 [31, 推论5.12(1)]，可知它是 Fano 型。取 Z 上的一个小丰沛 H，以及 T 上的一个 klt 有效 U，使得 $K_{T}+U\sim_{\mathbb{Q}}-g^{*}H$，这可通过补全一个对数 Fano 见证得到。使用带有有理 $0<t<$的 $\Xi=(1-t)\Sigma+tU\min\{1-\alpha,1/2\}$。一般曲线是在特征 $p>5$下的一条光滑亏格零曲线。 Σ 中的标记的几何次数（不计权）总和至多为 $2n$，因此对于 $p>2n$，它们在一个次数与p互素的 Galois 扩张中分裂。在这些可分标记处， Ξ 的 klt 系数小于一。剩余圈的几何加权次数至多为 $2t<1$。因此，几何一般对是 klt 的，而阈值丛公式 [31, 定理 5.9]给出

$$K_{Z}+B_{Z}+\mathbf{M}_{Z}\sim_{\mathbb{Q}}-tH$$

带有 b-数值有效 b-$\mathbb{Q}$-Cartier 模除子。由于在每个基模型上的每个素除子处阈值均为正，故广义对是 klt 的。对于 P 上的一个素除子，其上方的一个重数为 m 的不可约分支V 具有 $mN_{P}\in\mathbb{Z}$。在 V 处检验阈值可得

$$(B_{Z})_{P}\ \geq\ 1-\frac{1}{m}+\frac{\Xi_{V}}{m}\ \geq\ \{N_{P}\}+(\Gamma_{Z})_{P}.$$

从 B_{Z}中减去 $\{N\}+\Gamma_{Z}$。边界仍然有效，且由于底曲面是 $\mathbb{Q}$-阶乘的，广义对是 klt 的。利用 [31, 引理 5.10]，将剩余边界加上数值有效部分以及 $tH/2$ 近似为一个普通的有效 klt 边界。其伴随除子与 $\lfloor N\rfloor$ 之差与 $N+\Gamma_{Z}+tH/2$有理等价，而后者是丰沛的。曲面消灭定理 [1, 定理 1.1] 完成了这一情形。

如果 Z 是一条曲线，则它是 $\mathbb{P}^{1}$。将阈值公式应用于 Σ 本身 [31, 定理 5.11(ii)]。其假设使用固定的 e,n，并且 $\Sigma\sim_{\mathbb{Q}}-K_{T}$ 是大的。模部分的数值有效性给出 $\deg B_{Z}\leq 2$。以 Σ_{V} 替代 Ξ_{V}，同一个不等式给出 $B_{Z}\geq\{N\}+\Gamma_{Z}$，在 $\Gamma_{Z}>0$ 的任意点处均为严格不等式。因此 $\deg\lfloor N\rfloor\geq-2$；除非 $\Gamma_{Z}=0$，否则不等式严格，$\deg N=0$，并且每个不等式都是等式。

在最后这种情况下，给定点 z 上方的所有重数都等于 m_{z}，其中 $\{N_{z}\}=1-1/m_{z}$。后面的这些分数之和为二。因此，这些项为 (2，2，2，2)，(3，3，3)，(2，4，4) 或 (2，3，6)。若 q 表示它们的最小公倍数，则 qN 是主的。对其定义函数开 q 次方根，可得到 $\mathbb{P}^{1}$ 的一个连通温和覆盖；根据黎曼–赫尔维茨公式，该覆盖的亏格为一。由 q 的最小性可知其连通。到 T 的正规化基变换是连通的，因为 $k(Z)$ 在代数闭

域 $k(T)$ 中是闭的。它在每个余维一点处都是 étale 的，因为函数在 T 上的阶可被 q 整除，且 q 可逆。温和差异的拉回使该覆盖成为 Fano 型，因此它是有理链连通的 [23, 定理 4.8 和命题 4.11]。它到一条亏格一曲线的态射是不可能的。在所有情况下，$\deg\lfloor N\rfloor \geq -1$，正如所需。□

命题 8.5。 *在一致充分大的特征下，三维法诺型三维簇上数值维数至多为二的整 $\mathbb{Q}$-Cartier 魏尔除子具有零高阶上同调。在上述伴随极小模型纲领的每个负秩一端点处，两个中间群也都消失。*

证明。 首先取一个小的 $\mathbb{Q}$-阶化。对于数值有效的 D，其半丰性允许通过将 D 的一个稀释代表元加入一个大 klt Calabi–Yau 完备化中，得到一个 klt 伴随表示。因此，引理 8.1 可沿该小映射适用。记$D \sim_{\mathbb{Q}} f^*A$ 为半丰沛收缩 $f\colon X \to V$；当 V具有正维数时， A 为丰沛。对于数值维数为零的情形，取 V为一个点，并取 $A = 0$。在每种情形中，固定 u， m，其中 $D = f^*A + \operatorname{div}(u)/m$。

取（X， Σ）的一个保正则形式 dlt 修改。它是 Fano 型的。为此，将其保正则边界与来自 X 的大 klt Calabi–Yau 完备化的迹混合。对后者赋予一个小权重，可在抽取出的对数典范中心处得到有效的保 crepant 系数，并保留一个大可动部分。Kodaira 扰动给出一个对数 Fano 见证。

在此 dlt 模型上，将完整保正则边界写作 B。带边界$B/2$ 的对是 $1/(2n)$-对数典范的。事实上，对于 B ，正的对数差异至少为 $1/n$。在差异为零时，其中心与 dlt 对的简单正规交叉轨迹相交；在那里，裸代数簇的对数差异至少为一。

对一般纤维上 V的对数除子 $K + B/2 \sim_{\mathbb{Q}} -B/2$ 是反大的，因为$B \sim_{\mathbb{Q}} -K$ 是大除子。因此，其在 V 上的极小模型纲领以一个莫里纤维空间 $g\colon T \to Z$结束。完整边界现记为 Σ_T，保持保正则性，而半边界极小模型程序保持不一致数下界。特别地，$-K_T \sim_{\mathbb{Q}} \Sigma_T$ 是 g-丰沛的。若Z 是曲线，则一般曲面是法诺的，并且是 $1/(2n)$-对数典范的：在一般点处局部化保持差异不等式。

在所有这些模型上，使用同一个有理除子 $P = f^*A + \operatorname{div}(u)/m$，并在每个模型上使用到 V 的态射。它在 dlt 模型上的小数部分支集包含于新的取整分支中，且其每个系数都小于一。在 T 上，其迹 $\Gamma = \{P_T\}$ 满足 $\Gamma \leq \alpha\Sigma_T$，其中某个 $\alpha < 1$存在。该不等式在每个中间模型上都成立，并且由凸性与 klt 底层簇可知，使修正项为 klt。引理 8.1 的对偶取整比较将上同调识别为 $L = \lfloor P_T\rfloor$的上同调。这里， $L+\Gamma$与 Z上的一个数值有效除子的拉回有理等价。若 Z是一个点，则 $L - K_T \sim_{\mathbb{Q}} \Sigma_T - \Gamma$ 是丰沛的，因而引理 8.3 适用。若 Γ 在正维的 Z上有一个水平分量，则根据相对 Picard 数为一，$-L$ 和 $L - K_T$ 是g-丰沛的。应用引理 8.2。对于垂直的 Γ，使用引理 8.4。这就证明了第一个断言，包括 $H^{>0}(X, \mathcal{O}_X) = 0$。

在负秩一端点处写作 $D \sim_{\mathbb{Q}} d(-K_X)$。这里 $-1 < d < 0$，因为 $D - K_X$ 是大且 D 是反丰。有理线性等价由引理 3.8 得出。置 $c = 1 + d$。这次取 $P = \operatorname{div}(u)/m = D - K_X - c\Sigma$ ，并通过同一个点上的半边界极小模型程序传输 $K+\lceil P\rceil$ 。其修正项在初始模型上为 $c\Sigma$ 。在 dlt 模型上，唯一的新素除子位于下取整中，且它们的修正项小于一。因此在 T 上再次有 $\Gamma = \lceil P_T\rceil - P_T \leq \alpha\Sigma_T$，其中 $\alpha < 1$。对于 $J = K_T + \lceil P_T\rceil$ ，我们有 $-J \sim_{\mathbb{Q}} \Sigma_T - \Gamma$ 和 $J - K_T \sim_{\mathbb{Q}} \Gamma$。如果 Z 是一个

点且 $\Gamma \neq 0$，则使用引理 8.3。如果 Z 是一个点且 $\Gamma = 0$，则典范对偶是数值平凡的。如果 Z 具有正维数，则对水平Γ使用引理 8.2，并对垂直 Γ 在 $K_T - J$ 上使用引理 8.4，其中丰沛类为零。对偶性交换两个中间群。□

8.2. **通过限制映射到 plt 曲面的消失。**

引理 8.6. 固定 $n > 0$。设 (S, Θ) 为充分大的特征下的射影 *klt* 曲面对，且 $n(K_S + \Theta) \sim 0$。设 G 为整 *Weil* 除子，并设$0 \le C \le \Theta$ 为有理数。若 $G - (K_S + C)$ 数值有效且大，则 $H^i(S, \mathcal{O}_S(G)) = 0$ 对$i > 0$成立。

证明。 Θ 的系数位于 $\{0, 1/n, \dots, (n-1)/n\}$。Kawakami 的对数提升定理应用于 klt Calabi–Yau 曲面 [34, 命题 3.5] 给出一个对数解消，其例外轨迹与严格边界在 $W(k)$ 上提升。令 $A = G - K_S - C$。在此消解 π 上， π^*A 的分数支撑位于标记除子中。检验有理 Cartier 除子在拉回前后的有效性，得到$\pi_*\mathcal{O}(-\lceil \pi^*A \rceil) = \mathcal{O}_S(-\lceil A \rceil) = \mathcal{O}_S(K_S - G)$。关于 nef 且大的除子 π^*A、微分次数为零的对数消失定理，对$j = 0, 1$ [33, 定理 2.11] 消去 $H^j(\mathcal{O}(-\lceil \pi^*A \rceil))$。Leray 将 S 上相应的两个群单射到这些群中。曲面对偶性证明了该断言。□

令 $h\colon Y \to X$ 为从一个 Fano 型、 $\mathbb{Q}$-阶乘三维簇出发的射影双有理态射，并设 (Y, Ω) 为纯对数终端，具有素下取整 S，且 $K_Y + \Omega \sim_{\mathbb{Q}} 0$。假设 h 的每个例外素除子都等于 S。令 D 为 X 上的一个丰沛整 $\mathbb{Q}$-Cartier 魏尔除子，设 $H = h^*D$，并令 $d =$ 的系数为 $_S\{H\}$。我们首先将 D 的上同调与 $H - dS$ 的上同调对应起来。事实上，推前 $\Omega_X = h_*\Omega$ 是保正则形式的。取 X 上一个有效 klt 对数 Calabi–Yau 边界 C_0。当 $\lambda > 0$ 充分小时， $C = (1-\lambda)\Omega_X + \lambda C_0$ 的保 K 变换 C_Y 有效且为 klt，并且系数 $_S C_Y > d$。只有在例外的 S 处， C_0 的保 K 变换才可能有负系数。我们有

$$K_Y + \lceil h^*(D - (K_X + C)) \rceil = \lceil H - C_Y \rceil = H - dS.$$

引理 8.1 中用于共同取整比较的两个 klt 边界分别为 C 和 $C_Y - dS$。特别地，当只有 $K_X + C$ 是 $\mathbb{Q}$-Cartier 时，该比较也适用。

首先，在参数零处对 $-S$-极小模型纲领相对于 X 进行带丰性缩放的运行。它以双有理方式终止，并得到相对于 X数值有效的 $-S$。随后，多面体性表明，对于充分小的有理数 $\delta > 0$， $H - \delta S$ 数值有效且大。对于正参数，使用针对 $K_Y + \Omega - \epsilon S$的极小模型纲领，并在该输出上的 $(\epsilon/\delta)H$的稀释代表元上进行缩放。这里，对于充分小的 $\epsilon > 0$， $\Omega - \epsilon S$是有效 klt 且大，因为 $-K_Y$是大的。这些支集为 $H_r = H_i - rS_i$，在相邻参数之间以及每个墙 [13, 处均为数值有效，这正是定理 1.2、1.5 和 1.6]的内容。在墙 H_r 处，由相对无基点性，下降到收缩目标。每条所选射线的 S_i-次数均为正，因此 S 得以保留，且补充对仍为保正则形式纯对数终端。终止性给出一个莫里纤维空间 $g\colon$ 在参数 r_*处为 $W \to T$，其中 S_W 相对丰沛，而 $H_* = H_W - r_*S_W$ 是从 T拉回的 $\mathbb{Q}$-线性除子。这就是命题 3.26 的有序纲领，仅使用其墙的构造。

在带有 $0 < b \le 1$ 的双有理墙处，利用带边界 $\Omega_i - bS_i$ 的引理 8.1 传输整 $L_i = H_r - bS_i$。事实上，

$$L_i - (K_{X_i} + \Omega_i - bS_i) = H_r - (K_{X_i} + \Omega_i)$$

在两侧的共同主关系下，这是相同的有理拉回。对于 $b=0$，将 Ω 与 Y 上的 klt 卡拉比–丘边界混合，从而得到一个有效的保正合 klt 卡拉比–丘边界，然后进行严格变换。

令 $r_j = d+j$，并令这些值中第一个不小于 r_* 的值为 r_J。在 $r_j < r_*$ 处，使用 r_j 处所有步骤之前的模型。引理 3.6 的限制序列为

$$0 \to \mathcal{O}(H_{r_j} - S_i) \to \mathcal{O}(H_{r_j}) \to \mathcal{O}_{S_i}(G_j) \to 0,$$
$$G_j \sim_{\mathbb{Q}} H_{r_j}|_{S_i} - \delta_j, \qquad 0 \le \delta_j \le \mathrm{Diff}_{S_i}(0).$$

若 G_j 没有高阶上同调，则源项在第一和第二次数上满射到中间项。将其传输过每一道墙 $s \in [r_j, r_{j+1})$，并加上修正项 $r_{j+1} - s$；当 $s = r_j$ 时，该修正项等于 1。在最后一个区间内，计入 r_* 处的每一道墙。在 $r_0 = d$ 之前，使用修正项 $d - s$；若 $r_* \le d$，也包括终端墙。因此，$L_* = H_* - (r_J - r_*)S_W$ 的终端群满射到 X 上的两个群。记为 $a = r_J - r_* \in [0,1)$。

对于 $a=0$，命题 8.5 适用于数值有效非大除子 L_*。对于底空间为正维的 $a>0$，L_* 是相对反丰的，而 $L_* - K_W \sim_{\mathbb{Q},\,T} (1-a)S_W + (\Omega_W - S_W)$ 是相对丰沛的，因此引理 8.2 适用。底空间为一点时，L_* 和 $K_W - L_*$ 都是反丰的。若 $\Omega_W - S_W$ 是大除子，则定理 3.7 给出两个中间次数上的消失。对于固定指标的纯对数终端完备化，也可以改用引理 8.6。对于反丰的 J 以及沿 S_W 的商 G_j（对应于 $J - jS_W$），记为

$$G_j \sim_{\mathbb{Q}} (J - jS_W)|_{S_W} - \delta_j, \qquad 0 \le \delta_j \le \mathrm{Diff}_{S_W}(0).$$

对 $K_{S_W} - G_j$，取边界 δ_j。其差为 $-(J - jS_W)|_{S_W}$，这是丰沛的。曲面对偶性给出 $H^1(S_W, \mathcal{O}(G_j)) = 0$。从 S_W 的一个足够大的 Cartier 倍数开始，逐步向下应用限制正合列，得到 $H^1(W, \mathcal{O}(J)) = 0$；这里使用了对偶性以及 $j \gg 0$的 Serre 消失定理。对两个反丰除子都应用这一结论，并使用三维簇对偶。

命题 8.7。设 X 是定义在特征 p 充分大的代数闭域上的法诺型射影三维簇。若一个有效有理 P 满足$K_X + P \sim_{\mathbb{Q}} 0$，且 (X, P) 是非对数典范的，则对每个丰沛整$\mathbb{Q}$-*Cartier* 魏尔除子 D 及 $i>0$，都有 $H^i(X, \mathcal{O}_X(D)) = 0$。

证明。取一个小的 $\mathbb{Q}$-阶乘化，同时保留 D的拉回，它是数值有效且大的。将此模型记为 X_0。选取一个 klt 对数 Fano 边界 C，使得$A = -(K_{X_0} + C)$ 丰沛。分别将 P 的严格变换与一个 klt 对数 Calabi–Yau 边界混合，在 C上赋予相同的小权 $s>0$。所得的两个混合分别是非对数典范和 klt。取足够小的 $\mu > 0$，向两者都加上同一个经稀释的有效代表元 $J \sim_{\mathbb{Q}} sA - \mu D$，从而保持 klt 端点。再取足够小的 $v \ge 0$，从两者中减去 vJ，并在它们从 klt 端点出发的线段上，取第一个非 klt 参数处的边界 B_v。然后

$$-(K_{X_0} + B_v) \sim_{\mathbb{Q}} \mu D + vJ.$$

在某个对数解消上，对数典范不等式是关于 v 和线段参数的有限个线性不等式。因此，B_v 收敛于 B_0，并且对于充分小的 $v>0$，该解消上的每个系数为一的分量对于 B_0 都具有系数一。随后，利用对数光滑子对的对数典范中心描述，可得对所有对数典范中心也有相同的包含关系。

对 B_v with $v>0$使用命题 3.25 证明中的提取。在保正则形式 dlt 修改上，相对于 X_0，以约化例外边界运行典范极小模型纲领。正的不一致数和负性会收缩所有

例外素除子。其最后一次除子收缩提取一个素除子 S，使 (Y， S) 为纯对数终端，且 $-S$ 相对丰沛。若不存在例外素除子，则在 X_0 上取 $\lfloor B_v \rfloor$ 的一个不可约分支。将 B_v 的保正则边界稍微向 S 插值，可得到一个纯对数终端对数 Fano 边界 Γ，其下取整为 S，因为 $\mu D + vJ$ 在X_0 上丰沛，而在提取的情形下， –($K_Y + S$) 相对丰沛。B_0 的保 K 变换在 S 上的系数为一，且负对数除子 $\mathbb{Q}$-线性等价于 μH。

通过 –($K_Y + \Gamma$) 的稀释代表元，将 Complete Γ 补全为一个纯对数终端对数 Calabi–Yau 边界。对 $Y \to X_0 \to X$ 应用有序纲领，并采用命题 3.26 中的曲面控制，在零处按 –($K_Y + \Gamma$) 的稀释倍数进行缩放。该证明仅在正比例缩放意义下使用有理支撑除子 H。它在每个 S_i 上给出一个 klt 对数 Fano 边界 $\Xi_i \geq$Diff$_{S_i}$(0)，以及一个余项为大的保正则形式纯对数终端完备化。在 $r = d + j < r_*$ 处，引理 3.6 将商写为 $G \sim_{\mathbb{Q}} H_r|_{S_i} - \delta', 0 \leq \delta' \leq$ Diff$_{S_i}$(0)。差 G –($K_{S_i} + \Xi_i - \delta'$) 是丰沛的，因此根据定理 1.1]，该商在正次数上消失。终端计算证明了中间消失。对于最高次数，根据与 klt 对数 Fano 见证的比较， $K_X - D$ 对丰沛除子平方的交数为负。由对偶性可得结论。□

命题 8.8。 固定一个正整数 n。设 X 是在特征充分大（其大小取决于 n）的代数闭域上的法诺 型射影三维簇。假设有效对数典范边界 Σ 满足 n（$K_X + \Sigma$） ~ 0。若（X, Σ）恰有一个 ***lc*** 位，则对于每个丰沛的整 $\mathbb{Q}$-***Cartier*** 魏尔除子 D 和 $i > 0$，都有 H^i（$X, \mathcal{O}_X$（D） $= 0$。

证明。 取一个保正则形式 $\mathbb{Q}$-阶化的 dlt 修改 $h : Y \to X$。其完备边界 Ω $= S + B$ 是纯对数终端的，且具有唯一的素下取整 S。将其与一个 klt 对数 Fano 见证的保正则形式变换进行插值，得到 Y上的有效 klt 边界以及数值有效且大的负对数除子。经过 Kodaira 扰动可得法诺 型。对 S 及其后续变换应用伴随公式，可得到 klt 对数 Calabi–Yau 边界 $\Theta_i =$不同$_{S_i}(B_i)$，其系数属于$\{j/n\}$。

如果 $d = 0$ 且 S 是例外的，则第一次限制 $H|_S$ 来自 h(S)，不一定是大的。使用补的小数部分 B，先在 X上运行其极小模型纲领，使 B 相对数值有效且半丰沛。将 B的一个足够小的正倍数加到 klt Calabi–Yau 边界上，即可将其实现为 klt 伴随极小模型纲领。如果 C_X 是 X 上的 klt 对数 Fano 见证，且 $a = a(S, X, C_X) > 0$，那么 $B \sim_{\mathbb{Q},\, X} C_X^s - aS$，其中 C_X^s 是严格变换。因此，通过检验覆盖 S 的纤维中的曲线，收缩 S 的除子步不可能是 B-负的。不存在位于 X上的其他例外素除子。对于 Ω，该纲领仍然保正则形式，并且整 H 沿 X 传输，就像在具有 $b = 0$的墙处一样。

在这个模型上， $-S|_S$ 是相对大的。在 h(S)的一般点处的局部环上，将 S 的剩余域关于 $k(h(S))$ 的一个超越基提升为其除子赋值环中的单位元。将这些提升写成局部底空间上正则函数的比值，且分子和分母具有相同的 S-阶。清除分母；如有需要，将所有分子和公分母乘以一个具有正阶的函数；再取一个公幂，即可得到某个 Cartier $-mS$的截面，它们沿 S具有相同的阶。它们在 S 上的比值给出该基（至多相差取幂），从而证明了断言。

现在，根据$B \sim_{\mathbb{Q},\, X} C_X^s - aS$， $B|_S$ 是相对大的。由于 B 是相对半丰沛的，根据在X 上的诱导收缩以及 D的丰性，当 $t > 0$ 充分小时，$(H + tB)|_S$ 是数值有效且大的。对于第一个商，使用测试边界 $\Theta - \delta' - tB|_S$

在引理 8.6 中。如果 S 不是例外的，则 $H|_S$ 已经是数值有效且大的。在 $d=0$进行这次初始商之后，对 $-S$ 使用带偏移量 $H-S$的零参数步骤。如果$d>0$，则按照有序纲领从 $H-dS$ 开始。

对于 $0<r<r_*$，支撑除子 H_r 是大的。事实上， H_i 是大的。为证明 $H_i-r_*S_i$ 是伪有效的，注意在每个剩余的墙上， $s\le r_*$ 在收缩射线上的次数为 $(s-r_*)S_i\cdot R\le 0$。因此，利用负性，可通过在公共解消上添加有效例外除子，从数值有效终端支撑恢复该类。类 H_r 位于连接这两个类的开线段上。在非终端 $r>0$处执行步骤之前， $H_r+\eta S_i$ 的数值有效性意味着，在每条 H_r-平凡曲线上都有$S_i\cdot C\ge 0$ 。因此，根据负性， H_r的半丰沛双有理收缩不能收缩 S_i 。于是 $H_r|_{S_i}$ 数值有效且大。对于商 $G\sim_{\mathbb{Q}} H_r|_{S_i}-\delta'$，边界 $\Theta_i-\delta'$ 给出 G–$(K_{S_i}+\Theta_i-\delta')\sim_{\mathbb{Q}} H_r|_{S_i}$。因此，根据引理 8.6，该商的高阶上同调为零。

现在，最后一个参数给出了所需的中间消失。最高次数由对偶性得到，正如命题 8.7 中所述。□

8.3. **Frobenius 分裂与补的分层**。

引理 8.9。设 X 是正特征完美域上的正规射影簇。若 X 是拟-F-分裂的，且 L 是一个丰沛的整 $\mathbb{Q}$-*Cartier* 魏尔除子，则对于 $i>0$，有 $H^i(X,\mathcal{O}_X(L))=0$。

证明。记 $Q_{L,\,j}$ 和 $B_{L,\,j}$ 为 [35, 引理 3.8] 中的层。对于 j 至少为分裂高度 h 时，$\mathcal{O}_X(L)$ 和 $B_{L,\,j}$ 是 $Q_{L,\,j}$ 的直和项，这由 [35, 引理 3.11] 得出。取 $m>0$ 使其为 mL Cartier。对固定的 $j=h$，层 $Q_{p^rL,\,h}$ 由有限多个 $Q_{aL,\,h}$, $0\le a<m$ 与 mL 的递增倍数张量得到。根据 Serre 消失定理，当 r 足够大时，它们没有高阶上同调。从 $i=r$ 下降到 $i=0$，利用

$$0\longrightarrow F_*B_{p^{i+1}L,h+r-i-1}\longrightarrow Q_{p^iL,h+r-i}\longrightarrow F_*\mathcal{O}_X(p^{i+1}L)\longrightarrow 0.$$

两个端项都是前一步层的直和项的 Frobenius 推前。这就证明了 $Q_{L,h+r}$ 的消失，因而也证明了其直和项 $\mathcal{O}_X(L)$ 的消失。□

通过推前其 Witt 截面，准-F-分裂可沿正规簇之间的适当双有理收缩下降。事实上，Witt 函数是普通函数组成的元组，而结构层的直像仍是结构层。由正规性可知，截面也能延拓至余维至少为二的子集之外，对每个 Witt 坐标 [35, 逐一应用即可（见备注 3.12]）。因此，准-F-分裂会在伴随极小模型纲领的双有理步骤中以及在丰模型上持续存在。

现在考虑代数闭域 k上的一个 Fano 型射影三维簇 X，使得对每个满足 $K_X+P\sim_{\mathbb{Q}}0$的有效有理除子 P，(X,P) 都是对数典范的。固定这样一个边界 Σ，使得 (X,Σ) 是非 klt 的，且 $n(K_X+\Sigma)\sim 0$。我们取关于 n充分大的p，特别是 $p\nmid n$。根据引理 8.9，全局 F-分裂足以推出丰沛 Weil 消失定理。

引理 8.10。在一个保 *crepant* $\mathbb{Q}$-*factorial dlt* 修改 $(V,F+B)\to(X,\Sigma)$上，记 F 为约化下取整部分。存在一个双有理 B-极小模型纲领，将其变为一个法诺 型模型(W,F_W+B_W)，在该模型上 B_W 是半丰沛的，并且保持所有对数典范层的一般点不变。令 $b=\kappa(V,B)$。则 $0\le b\le 2$。若 $b=0$，则 $B_W=0$。若 $b>0$，记g： $W\to T$为 B_W 的收缩。则在 T 上存在一个有效丰沛有理 *Cartier* 除子 A，使得 $B_W=g^*A$。(W,F_W) 的每个对数典范层都支配 T。

证明。 根据命题 8.5 的证明中的保 crepant 边界扰动，该 dlt 修改是法诺 型的。通过推进一个大 klt Calabi–Yau 完备化，其双有理压缩仍然是法诺 型的。

对于较小的有理数 $\eta > 0$，对 $(V,\ F + (1+\eta)B)$ 是 dlt，这可从见证 $(V,\ F+B)$ 为 dlt 的对数解消中看出。其对数除子与ηB有理等价。将其极小模型纲领运行至一个数值有效模型，因为 $B \geq 0$。等价地，可以与一个大 klt 对数 Calabi–Yau 边界混合，运行相同的极小模型纲领，将其视为 klt 伴随极小模型纲领[13, 定理 1.6]。所得的增大边界后的对仍为 dlt，因此原边界对应的对也如此。所有收缩曲线都位于 B 的支集中，该支集避开每个 lc 层的泛点。收缩和翻转在这些泛点处都是同构。增大后的对的不一致数不会减少，因此新的 lc 层只能来自一个旧的 lc 位，且该位已处于这个同构区域。原来的 n-主对数除子在每一步都保正则形式地传递。若 $B_W \equiv 0$，则由有效性可得 $B_W = 0$。否则，根据 Fano 型模型上 Cartier 倍数的无基点性，数值有效终点是半丰沛的 [1,推论 1.5]。

在一组公共解消上，映射为 u 到 V 和 v 到 W，由负性可得 $u^*B = v^*B_W + E$，其中 $E \geq 0$ 在 W上例外。这也保持可整除倍数处的截面空间，因而保持饭高维数。对于每个与 B_W有理等价的 $B'_W \geq 0$，用 $u_*(v^*B'_W + E)$替换 B。这两次替换使对数除子发生相同的有理主除子变换。由此得到的 V上的对，其像在 X上给出一个有效反典范补全，并且与 W上的对保正则形式。因此 $(W,\ F_W + B'_W)$ 是对数典范的。特别地， B_W不是大除子；否则某个有效替代项会包含 F_W的某个不可约分支的正倍数。

若 $b > 0$，记 $B_W \sim_{\mathbb{Q}} g^*A_0$ 为 T上的丰沛有理 Cartier 除子 A_0。有效除子 B_W 不含水平素除子，因为它在适当正规一般纤维上的限制映射有理平凡。给出该等价关系的有理函数在该纤维上的除子为零，因此在其上为常数。一般纤维的常数域为 $k(T)$，因为 $g_*\mathcal{O}_W = \mathcal{O}_T$。将该函数并入 A_0，得到等式$B_W = g^*A$。考察 T 的每个素除子上方的素除子，可知其有效性蕴含 A 有效。若 $(W,\ F_W)$ 的某个对数典范中心在 T中的像不是整个 T，取 A 的一个有效有理代表元，使其包含经过该像的非常丰除子的正倍数。加上该代表元的拉回，会使中心上方某个 lc 位的差异为负，这与替换论证矛盾。□

若边界的小数部分的饭高维数为零，且最小层是曲线，则双曲线的 Witt 上同调给出准 Frobenius 分裂。

命题 8.11. 在充分大的特征下，设 (X, Σ) 是一个射影 *lc* 三维簇对，其中 X 为 *Fano* 型，且 $n(K_X + \Sigma) \sim 0$，其中 n是与 p互素的正整数。假设在一个保正则形式的 $\mathbb{Q}$-因子阶 *dlt* 修改 $(V, F+B)$ 上，下取整 F 有一个曲线层且没有点层，并且 $\kappa(B) = 0$。那么 X 是准-F分裂的。

证明。 按照引理 8.10 的构造运行 B-极小模型纲领，但只使用其半丰模型的构造。 B 的迹的饭高维数为零，因此它消失了。这个极小模型纲领对于对数除子是保典范的。由于每条 B-负曲线都包含在 Supp B 中，且 B 不包含任何分层，因此其各步骤在 lc 分层的泛点处均为同构。取 $W' \to W$的驯分歧循环指标覆盖 $K_W + F_W$，并令 G 为 的约化

逆像。由纯性，该覆盖是准 étale，且在 snc 轨迹上 étale。根据温和不一致公式，它保留 dlt 性质以及极小层的维数。我们有 $K_{W'}+G\sim 0$，而通过拉回一个 klt 对数 Fano 见证， W'是 Fano 型。

我们首先计算边界的 Witt 上同调。由命题 8.5，$H^{>0}(W',\ \mathcal{O}_{W'})=0$。正合列

$$0\longrightarrow \omega_{W'}\longrightarrow \mathcal{O}_{W'}\longrightarrow \mathcal{O}_G\longrightarrow 0$$

表明 G 由深度引理可知是 Cohen–Macaulay。对偶性进而表明 G 是连通的，$H^1(G,\ \mathcal{O}_G)=0$，且 $H^2(G,\ \mathcal{O}_G)=k$。 G 的分支是正规簇，且它们交于光滑曲线。不存在三重层。在每条双曲线 E 上，伴随公式给出 K_E+不同$_E\sim 0$。不同是整的，而任何系数为一的项都会给出一个点层。因此， E 是椭圆曲线。

在一个分支 G_i 上，双曲线之和是一个约化反典范除子。在其极小解消 T_i 上，这些曲线的严格变换仍然互不相交且为反典范。事实上，伴随除子是 Cartier，且在 G_i 上诱导的对是纯对数终端的。由极小解消上的交矩阵可知，例外系数非负；由纯对数终端性可知它们小于一，故由整性可知它们均为零。对于有理 T_i，反典范正合列和 $H^1(T_i,\ \omega_{T_i})=0$ 仅给出一条双曲线。否则， T_i 在一个正亏格曲线上可展。椭圆双曲线是水平的，且它们在一般直纹纤维上的次数之和为二。由黎曼–赫尔维茨公式可知底空间是椭圆曲线。在这种情况下，有两个截面。单个二截面通过次数为二的迹会在 $H^1(\mathcal{O})$ 上给出一个非零映射；而反典范正合列与对偶性使该限制映射为零。

因此，对偶图是一条路径或一个圈，每条边对应一条曲线；若为路径，则端点分支是有理的。正规化正合列

$$0\longrightarrow \mathcal{O}_G\longrightarrow \bigoplus_i \mathcal{O}_{G_i}\longrightarrow \bigoplus_E \mathcal{O}_E\longrightarrow 0$$

是正合的。差映射局部满射，因为每处仅有两个分支相交。其核为 S_2，并且在余维一处与$\mathcal{O}_G$ 一致。常数上的正合列以及$H^1(G,\ \mathcal{O}_G)=0$ 排除了圈的情形。对于加性层$W_j\mathcal{O}$，同一正合列仍成立，因为 Witt 向量保纤维积，且到交上的限制映射是满射。有理的端点分支在有限长度下的高阶 Witt 上同调为零。对于内部的分支，其两个截面各自都在$H^1(W_j\mathcal{O})$上诱导同构，而 $H^2(W_j\mathcal{O})$消失。这些断言首先对$\mathcal{O}$ 由消解和椭圆纤维化得到，然后对 $W_j\mathcal{O}$ 由截断得到。沿路径取分支到曲线差映射的余核，可将双曲线 E上的 $H^2(G,\ W_j\mathcal{O}_G)$与$H^1(E,\ W_j\mathcal{O}_E)$等同，并且与 Frobenius 和截断相容。在逆极限中 Frobenius 是单射；即使 E 是超奇异的，这一点仍由 [51,引理 6.9] 在零扭曲的情形下成立。

为将计算转移到 X，取 X、V、W 的光滑公共解消 Y，V，W。消解保正则边界 Σ_Y、例外轨迹以及使伴随除子平凡化的函数u 的除子。记

$$K_Y+\Sigma_Y=D_Y=\mathrm{div}_Y(u)/r,\qquad F_Y=\Sigma_Y^{=1},$$

其中 $r\mid n$ 是最小主指标。在 $z^r=u$ 中将 Y 正规化，得到 $a\colon\ U\to Y$。此扩张还定义了 W'，因此 U 映射到 W'。局部而言，在通过 étale 扩张去除一个单位元后，该覆盖是一个简单正规交叉单项式的温和根。取一个光滑

环面化消解 $b\colon\ Z \to U$。我们使用 $Z \to W$，来描述 Z上的边界，并使用$Z \to U \to Y$通过 D_Y恢复扭曲。

令 $F_U = (a^{-1}F_Y)_{\mathrm{red}}$ ，并令 F_Z 为保正则边界的系数为一部分。根据环面化不亏格公式，一条射线属于 F_Z ，当且仅当其所有正坐标都对应于 F_U的不可约分支。

我们断言， $Rb_*\mathcal{O}_Z(-F_Z) = \mathcal{O}_U(-F_U)$。对于零阶像，沿原始下取整除子的消失迫使其沿每个新的取整素理想消失，而这些素理想的中心位于该下取整除子中。为证明高阶消失，在环面化图中进行工作。记 P_U, P_Z为完整的环面化边界，并记 $C = P_U - F_U$。 U 上的锥是单纯的，因此 C是 $\mathbb{Q}$-Cartier。离开下取整除子的每条射线在 b^*C上都有正阶，而下取整除子的射线阶为零。对于充分小的 $t > 0$，因此除子 $P_Z - F_Z - tb^*C$ 的系数属于 $[0, 1)$，其推前为 $(1-t)C$，且其伴随除子相对等价于$-F_Z$。对 klt 对 $(U,(1-t)C)$ 应用 Grauert–Riemenschneider 消失定理 3]。由截断序列可得关于 $W_j\mathcal{I}_{F_Z}$ 的相同直接像恒等式。

态射 $Z \to W'$解析一个 klt 三维簇，因此由有理性和命题 8.5 可得 $H^{>0}(Z、\mathcal{O}_Z) = 0$。 Z 上的每个额外取整除子都支配 W'上的一条双曲线。在该曲线的一般点处，所诱导的正则曲面双有理态射可分解为点爆破。在两个取整分支的交点处吹起，会细分这条边，并在双曲线的剩余域上生成一条射影直线。其他吹起均不会生成取整素除子。因此，插入的曲面在双有理意义下是同一条椭圆曲线上的可展曲面，其双曲线均同构映射到该椭圆曲线上。点上没有额外的取整交，因为那里的简单正规交叉底边界分层会在 W'上给出一个零维对数典范中心。旧分支的严格变换保留了有理或可展上同调的计算。因此， F_Z 与 G具有相同的路径计算。

由于 $W_j\mathcal{O}_Z$ 没有高阶上同调，理想 F_Z 的 Witt正合序列给出

$$H^3(Z, W_j\mathcal{I}_{F_Z}) \simeq H^2(F_Z, W_j\mathcal{O}_{F_Z}).$$

这些同构与 Frobenius 和截断相容。有限长度的上同调模满足 Mittag–Leffler 条件 [51, 命题 2.32]。因此，在逆极限中，对双曲线的计算给出了 Frobenius 在 $H^3(Z,\ W\mathcal{I}_{FZ})$ 上的单射性。

乘以 $[z]$ 将 $W_j\mathcal{I}_{F_Y}(D_Y)$ 与 $a_*W_j\mathcal{I}_{F_U}$ 中覆盖变换 σ 以 $[\sigma(z)/z]$ 作用的直和项相对应。事实上，对于位于 P 上方的素除子 P' ，第 i 个坐标的阶为

$$\operatorname{ord}_{P'}(z^{p^i} f_i) = e(P'/P)\big(\operatorname{ord}_P f_i + p^i \operatorname{coeff}_P D_Y\big).$$

在取整素理想 D_Y处， e 是整的，且 $e(P'/P) = 1$，因此该坐标必须在此处消失。在其他地方，它所需的阶非负。这些条件恰好给出第 2.2 小节中的取整坐标界。正规性使这一对应在全局延拓，而温和平均则投影到该直和项。对于 pD_Y，使用 $[z^p]$。Frobenius 将第一个特征映到其 p 次幂。结合环面直像比较，这证明了.....的单射性

$$H^3(Y, W\mathcal{I}_{F_Y}(D_Y)) \xrightarrow{F} H^3(Y, W\mathcal{I}_{F_Y}(pD_Y)).$$

有限长度弗罗贝尼乌斯核构成一个 Mittag–Leffler 系统，且其逆极限为零。因此，在某个长度处，它在长度一中的像为零。 [51, 命题 3.9] 的证明中的推出计算只使用定义性正合行

和上同调，因此对于保对偶子边界，它也给出了所需的单射性。应用 [51, 命题 6.1(1)]，得到 (X, Σ) 的纯拟-F-分裂。底层的 X 通过收缩映射的限制而成为拟-F-分裂的，见 [51, 注 3.5]。□

对于正维底空间，下面的引理将一个分裂从一般有限覆盖底空间的某个层下降下来。

引理 8.12. 沿用引理 *8.10* 的记号，设 $b > 0$ *and* M 是一个维数为 b、支配 T 的正规 *dlt* 对数典范层。将 $M \to T$ 分解为 $\mu\colon M \to U$，再接有限映射 $\gamma\colon U \to T$。记 Θ_M^0 为沿一条 *lc* 层旗，从约化对 (W, F_W) 在 M 上得到的迭代不同子式，并令 $\Theta_U^0 = \mu_*\Theta_M^0$。若次数 γ 与 p 互素，且 (U, Θ_U^0) 是全局尖锐 *F*-分裂的，则 X 是全局 *F*-分裂的。

证明。取 $q = p^e$，使其对应于 $n \mid (q-1)$，并令 e 为沿 Θ_U^0 的某个分裂指数的倍数。沿边界的分裂在其指数的所有倍数处都可迭代。对数除子的主倍数定义了一个非零有理 p^{-e}-线性映射 φ，其在 W 上的附加除子为 $F_W + B_W$。特别地，该映射在 $F_*^e\mathcal{O}_W$ 上是正则的。在 T 的开子集上，将 φ 用于正则函数的拉回，并利用 $g_*\mathcal{O}_W = \mathcal{O}_T$，定义了 T 上的映射 φ_T。在旗标的每个系数为一的除子处，该映射保持该除子的理想，并在其上诱导一个非零有理映射。诱导映射的边界是普通不同子式 [18, 定理 5.3]。因此，通过取双有理 Stein 因子上该除子的迹，映射 φ_U 在 $k(U) = k(M)$ 上的边界为 $\Theta_U^0 + \gamma^* A$。在 $k(T)$ 的元素上，此映射与φ_T一致，这是由沿旗标的限制映射得到的。

对于有限可分扩张 L/K，将 $c \otimes a$映至 $F_*^e(c^q a)$ 的映射 $L \otimes_K F_*^e K \to F_*^e L$是同构。因此，$\varphi_T$非零，且 φ_U是它唯一的扩张。沿着 Θ_U^0、指数为 e 的分裂具有如下形式：$\varphi_U(f'\cdot)$，其中 $f' \in k(U)$，并且给出

$$\varphi_U(f') = 1, \qquad \operatorname{div}(f') + (q-1)\gamma^* A \geq 0.$$

令 $f = \mathrm{Tr}^{k(U)/k(T)}(f')/\deg\gamma$。迹与这些映射可交换，因为 $\mathrm{Tr}(c^q) = (\mathrm{Tr}\ c)^q$。因此 $\varphi_T(f) = 1$。通过在正规闭包中对共轭求和，赋值不等式可下降。它给出 $\operatorname{div}(f) + (q-1)A \geq 0$。这个有效有理 Cartier 除子在 W 上的每个素点处，包括点上方的素点处，均有效拉回。引理 8.10 中的负性比较也给出 $\operatorname{div}_V(f) + (q-1)B \geq 0$。由于保典范性，有理映射 φ 在 V 上相同。因此，$\varphi(f\cdot)$ 是 V 上的正则 Frobenius 截面，并推送至 X。□

首先，如果 V 上存在零维分层，则沿着一个旗标对其反复应用相同的除子伴随。完美域 k 上的非零 p^{-e}-线性映射在 1 上非零。因此，V 上的全局映射在 1 上取非零值，并可通过缩放化为分裂。推到 X。

接下来假设 $b = 2$。在 g 的适当正规一般曲线上，从底空间的一般点应用伴随公式可得 $K + F_W|_\eta \sim_{\mathbb{Q}} 0$。其常数域为 $k(T)$，且 F_W 的限制映射具有正次数，因为其所有分支都支配 T。亏格公式给出亏格为零且边界总次数为二。因此，任何取整曲面 S 的一般次数至多为二，且在 T 上可分。由引理 8.10，不同的取整分支彼此不相交，因此 $(W, F_W + B_W)$ 在 S 附近是纯对数终端。S 上的 klt 伴随边界为 $\Theta_S^0 + (g|_S)^* A$，其中 Θ_S^0 具有标准系数。

在斯坦因分解 U 上，我们有 $n(K_U+\Theta_U^0+\gamma^*A)\sim 0$，且对于这个完整对数除子，伴随公式与推前均保正则形式。完整边界是 klt 的，其对数差异至少为 $1/n$。去掉 γ^*A 后，这一下界仍然成立。由于 $-(K_U+\Theta_U^0)\sim_{\mathbb{Q}}\gamma^*A$ 是丰沛的，且上界为 $1-1/n$ 的标准系数组成有限集，根据命题 3.2 和注 3.3] ，当 p 足够大时，即可依据 n 得到全局 F-正则性。应用引理 8.12，其中 $M=S$。

现在假设 $b=1$，并记 $C=T$、 $K=k(C)$ 以及 $(P,\ G)=(W_\eta,\ F_W|_\eta)$。一般曲面 P 是底空间 K 上的德尔佩佐型。其约化 dlt 对满足$n(K_P+G)\sim 0$。对数挠类的连通温和循环覆盖是准 étale 的，因为 K_P+G 是整的。该覆盖也属于德尔佩佐型。在其自身的常数有限域上， [7, 定理 1.7] 给出其结构层的高阶上同调消失。因此，挠特征层给出 $H^1(P,\ \mathcal{O}_P(K_P+G))=0$。于是，正规曲面上的对偶性给出 $H^1(P,\ \mathcal{O}_P(-G))=0$。由于 G 非空，限制序列给出

$$H^0(G,\mathcal{O}_G)=K.$$

若存在曲线层，则一般约化边界 G 有一个节点。在K^{sep} 上，其分支是正规的，并在 SNC 节点处相交。事实上，正规性和 dlt 解消判据在可分域扩张下保持不变。对同一正规分支作基变换所得的分支彼此不交，因此不同分支之间不存在自环。由所示等式的基变换可知，该图是连通的。令 K_i 为一个分支的常数域，令 L 为与之相邻节点的剩余域。二者都是 K^{sep} 上的有限纯不可分扩张。由一般对数 Calabi–Yau 对的伴随公式可知，每个节点处的系数均为一。在 K_i 上计算的典范类与在 K^{sep} 上计算的典范类一致，因为有限扩张的对偶化模是一个一维 K_i-向量空间。取次数得 $[L:\ K_i]\le 2$ ，且价至多为二。因此，对于 $p>2$，有 $L=K_i$ 。各节点两侧的常数域相同。它们粘合成节点曲线上的全局函数，因而都等于 K^{sep}。特别地，每个原始节点都是 K 上的可分扩张。

图是路径或圈，也可以是由两条平行边构成的圈。其伽罗瓦作用在二面体群中的像有限 J 。边的稳定子不能交换其顶点，因为这些顶点来自不同的原始不可约分支。固定一条边及其两个顶点，就会固定整个图。因此，所选一般节点的闭包 C' 是一个正规 lc 层，且 $\gamma\colon C'\to C$ 是群为 J的伽罗瓦覆盖。两次应用伴随公式得到一个 klt 不同 $\Theta_{C'}^0+\gamma^*A$ ，其对数除子 n是主除子，其中 $\Theta_{C'}^0$是(W,F_W)的不同。 W上没有零维分层。裸不同 $\Theta_{C'}^0$ 具有标准系数。约化 lc 边界的不同具有标准系数，迭代在 lc 范围内保持标准集合。在通常的公式$(m-1+\sum l_ib_i)/m$中，至多为 1 的标准非零 b_i 之和，要么是单项，要么是两个二分之一系数。由于 $-(K_{C'}+\Theta_{C'}^0)\sim_{\mathbb{Q}}\gamma^*A$是丰沛的， $C'\simeq\mathbb{P}^1$，而根据吕罗特定理， $C\simeq\mathbb{P}^1$ 也如此。

引理 8.12 证明中映射的构造只使用了 $n\mid(p^e-1)$ 以及直到乘子步骤为止的可分性。从 $k(C)$ 扩张的唯一性表明， $\varphi_{C'}$，从而 $\Theta_{C'}^0$，是 J-不变的。若 $p\mid|J|$，则二面体子群的一个非平凡正规循环 p-Sylow 子群在 $\mathbb{P}^1$ 上有唯一不动点 x ，且该点由 J 全部固定。在 x 之外，其轨道大小至少为 p。由于不同的次数小于二，且非零系数至少为 $1/2$，它的支集应包含于 x。将 A 替换为 $(\deg A)\gamma(x)$。该

γ 的纤维中有 $|J|x$，因此替换后的迭代不同子式的系数

$$\operatorname{coeff}_x \Theta^0_{C'} + |J| \deg A = 2$$

在 x 处。这与引理 8.10 中所有替代项的对数典范性矛盾。因此 $p \nmid |J|$。标准 klt 对数 Fano 曲线的全局 F-正则性由[50,命题 5.5],推出，而引理 8.12 给出了 X的分裂。

剩下需要考虑的是 $b \leq 1$，即所有对数典范分层的维数均为二的情形；$b = 0$ 带有曲线层的情形已在命题 8.11 中处理。对于 $b = 1$，一般边界由 $H^0(\mathcal{O}_G) = K$连通，因此互不相交的下取整曲面只包含一个素除子。对于 $b = 0$，对数值平凡的整 Weil 除子$K_W + F_W$应用命题 8.5。对偶性给出 $H^1(W, \mathcal{O}_W(-F_W)) = 0$，而限制序列给出$H^0(F_W, \mathcal{O}_{F_W}) = k$。同样，这里只有一个素除子。所有取整素除子都在$B$-极小模型纲领中保留下来，因此在原始的 dlt 修改上，唯一的下取整除子是一个素除子 S，且该对为纯对数终端。因此 S 是唯一的对数典范位，这种情形下的丰沛 Weil 消失定理由命题 8.8 得出。

定理 *1.3* 的证明。 运行第 8.1 小节中的伴随极小模型纲领。在曲线或曲面上方的负 Mori 压缩处，应用引理 8.2。非大且秩一为负的输出由命题 8.5 涵盖。对于其余的丰沛除子，取第 8.1 小节中构造的固定指标零边界补充。若它是 klt，则反典范丰模型上的同一补全对也是 klt，且其指标整除 n。其所有对数差异都是 $1/n$ 的正整数倍。应用引理 8.3。非对数典范的有效反典范代表元给出命题 8.7。否则，每个有效反典范代表元都是对数典范的，并且前面对分层的分析适用于固定的非 klt 完备化。此处使用的特征界仅取决于 n、其所确定的有限系数集以及固定差异$1/(2n)$。零边界补充定理在选定 X之前固定 n， D， Δ。取最大值即可证明所断言的一致性。□

参考文献

[1] E. Arvidsson、F. Bernasconi 和 J. Lacini，正特征下对数 *del Pezzo* 曲面的 *Kawamata–Viehweg* 消失定理，组合数学 **158** (2022)，750–763。arXiv:2006.03571.[2] F. Bernasconi，大特征下 *klt* 三维簇的无基点定理，比萨高等师范学院科学年刊 (5) 22 (2021)，583–600。arXiv:1907.10396v2。[3] F. Bernasconi，特征 $p > 5$ 下三维簇的消失定理及其应用，arXiv:2007.01803v2。[4] F. Bernasconi 和 S. Filipazzi，有限域上反典范类数值有效的三维簇上的有理点，伦敦数学会会刊 **130** (2025)，e70014。[5] F. Bernasconi 和 J. Kollár，特征 $p > 5$下三维簇的消失定理，国际数学研究通知 2023，2846–2866。arXiv:2012.08343v3。[6] F. Bernasconi 和 G. Martin，几何整 *del Pezzo* 曲面的有界性，Forum Math. Sigma **12**(2024)，论文编号 e81。arXiv:2306.07000v2。[7] F. Bernasconi 和 H. Tanaka，正特征下的 *del Pezzo* 纤维化，arXiv:1903.10116v3。[8] B. Bhatt、L. Ma、Zs. Patakfalvi、K. Schwede、K. Tucker、J. Waldron 和 J. Witaszek，全局+-正则簇与混合特征下三维簇的极小模型纲领，arXiv:2012.15801。[9] C. Birkar，*Fano* 簇上的反多重典范线性系，数学年刊 **190**(2019)，345–463。arXiv:1603.05765v4。[10] C. Birkar，线性系的奇点与 *Fano* 簇的有界性，数学年刊 **193** (2021)，347–405。DOI 10.4007/annals.2021.193.2.1。

[11] C. Birkar，特征 p下三维簇的翻转与极小模型的存在性，高等师范学院科学年刊 49 (2016)，169–212。DOI 10.24033/asens.2279。[12] C. Birkar、P. Cascini、C. D. Hacon 和 J. McKernan，对数一般型簇的极小模型的存在性，美国数学会杂志 23 (2010)，405–468。arXiv:math/0610203v2。[13] C. Birkar 和 J. Waldron，特征 p下三维簇的莫里纤维空间的存在性，数学进展 313 (2017)，62–101。arXiv:1410.4511。[14] E. Bombieri 和 D. Mumford，特征 p下的Enriques曲面分类，II，载于《复分析与代数几何》，岩波书店，东京，1977，23–42。[15] L. Carbone、S. Chung、L. Cobbs、R. McRae、D. Nandi、Y. Naqvi 和 D. Penta，双曲型Dynkin图、根长与Weyl群轨道的分类，arXiv:1003.0564。[16] P. Cascini、H. Tanaka 和 J. Witaszek，大特征下的对数 del Pezzo 曲面，组合数学 153 (2017)，820–850。[17] S. D. Cutkosky，任意域上丰除子数值不等式的Teissier问题，arXiv:1304.1218。[18] O. Das，关于强 F-正则的伴随反演，代数杂志 434 (2015)，207–226。arXiv:1310.8252v4。[19] O. Das，正特征下对数一般型曲面的对数多重典范映射的有界性，大阪数学杂志 59 (2022)，65–74。arXiv:2003.13324v2。[20] O. Das，特征 $p>5$下奇异Fano三维簇反典范体积的有界性，国际数学研究通知 (2021)。arXiv:1808.02102v4。[21] O. Das 和 J. Waldron，特征 $p>5$下三维簇的丰盛性问题，大阪数学杂志 292 (2019)，937–946。arXiv:1610.03403v3。[22] S. Filipazzi 和 J. Waldron，特征 $p>5$ 下三维簇的连通性原理，密歇根数学杂志 74 (2024)，第 4 期，675–701。arXiv:2010.08414v4。[23] Y. Gongyo、Y. Nakamura 和 H. Tanaka，有限域上对数Fano三维簇的有理点，欧洲数学会杂志 21 (2019)，3759–3795。arXiv:1512.05003。[24] F. Gounelas 和 A. Javanpeykar，簇族中的Fano簇不变量，arXiv:1703.05735v2。[25] Y. Gu、X. Sun 和 M. Zhou，斜率不等式与Miyaoka–Yau型不等式，arXiv:1903.04158v2。[26] C. D. Hacon 和 J. Witaszek，正特征下 Kawamata 对数终端奇点的有理性，代数几何 6 (2019)，516–529。[27] C. D. Hacon 和 J. Witaszek，低特征下三维簇的相对极小模型纲领，arXiv:1909.12872v2。[28] R. Hartshorne，《代数几何》，数学研究生教材，第52卷，施普林格出版社，纽约，1977。DOI 10.1007/978-1-4757-3849-0。[29] K. Hashizume、Y. Nakamura 和 H. Tanaka，正特征下对数正则三维簇的极小模型纲领，arXiv:1711.10706v2。[30] F. Hu，任意特征下射影簇自同构群的Tits型定理，附录由T. Terasoma撰写。arXiv:1801.06555v3。[31] X. Jiang，正特征下纤维化Fano三维簇补子的有界性，arXiv:2506.00553 [32] T. Kawakami 和 H. Tanaka，正特征下三维簇的Mumford消失定理，arXiv:2604.13823v1。[33] T. Kawakami，正特征下曲面对的Bogomolov–Sommese消失定理与可提升性，数学进展 409 (2022)，108640。arXiv:2108.03768。[34] T. Kawakami，大特征下对数 Calabi–Yau 曲面的Kawamata–Viehweg 消失定理，傅里叶研究所年刊 75 (2025)，2657–2675。arXiv:2211.08751v2。[35] T. Kawakami、T. Takamatsu、H. Tanaka、J. Witaszek、F. Yobuko 和 S. Yoshikawa，双有理几何中的拟-F-分裂，arXiv:2208.08016v2。[36] J. Kollár，《极小模型纲领的奇点》，剑桥数学专著 200 (2013)。DOI 10.1017/CBO9781139547895。[37] A. Langer，正特征下的一般正性与叶状结构，数学进展 277 (2015)，1–23。DOI 10.1016/j.aim.2015.02.015。[38] A. Langer，正特征下的半稳定层，数学年刊 159 (2004)，251–276；补遗，ibid. 160 (2004)，1211–1213。DOI 10.4007/annals.2004.159.251。[39] J. Lipman，有理奇点及其在代数曲面和唯一分解中的应用，Publ. Math. IHÉS 36 (1969)，195–279。已发表文本。

[40] J. Liu 和 L. Xiao, 《三维非典范奇点的极小对数不一致数的最优间隙》, 纯粹与应用代数杂志 225 (2021年), 106674。arXiv:1909.08759. [41] S. Mori, 《关于三维终端奇点》, 名古屋数学杂志 98 (1985年), 43–66。DOI 10.1017/S0027763000021358. [42] M. Mustaţă 和 K. Schwede, 《Seshadri 常数的 Frobenius 变体》, 数学年刊 358 (2014年), 861–878。arXiv:1203.1081. [43] Y. Nakamura 和 H. Tanaka, 《三维簇的 Witt–Nadel 消失定理》, 组合数学 156 (2020年), 435–475。arXiv:1712.07358. [44] S. Okawa, 《关于 Mori 梦空间的像》, 数学年刊 364 (2016年), 1315–1342。arXiv:1104.1326v2.[45] Z. Patakfalvi 和 J. Waldron, 《一般纤维的奇点与对数极小模型纲领》, arXiv:1708.04268. [46] Q. Posva, 《任意域上的半对数典范曲面的丰性》, 代数几何电子期刊 7 (2023年), 文章 5。[47] Q. Posva, 《正特征下半对数典范曲面与三维簇的粘合理论》, 比萨高等师范学院科学年刊 25 (2024年), 811–886。arXiv:2110.09387. [48] M. Reid, 《典范奇点入门指南》, 纯粹数学研讨会论文集 46, 第 1 部分 (1987年), 345–414。DOI 10.1090/pspum/046.1/927963. [49] K. Sato, 《正特征下具有固定 Gorenstein 指数的弱 Fano 三维簇的有界性》, arXiv:2403.02596v1.[50] K. Sato 和 S. Takagi, 《正特征下三维簇的一般超平面截面》, 朱西厄数学研究所杂志 19 (2020年), 647–661。arXiv:1703.00770. [51] K. Sato、S. Takagi 和 S. Yoshikawa, 《准-F-分裂与对数典范性》, arXiv:2607.02218v2.[52] K. Schwede, 《特征 $p > 0$ 下与伴随除子相关联的典范线性系》, arXiv:1107.3833v4.[53] K. Schwede 和 K. E. Smith, 《整体 F-正则与对数 Fano 簇》, 数学进展 224 (2010年), 863–894.[54] Stacks 项目作者, 《Stacks 项目》, 代数化、极化真概形、零亏格曲线、公共 étale 邻域。[55] H. Tanaka, 《正特征下半对数典范曲面的丰性定理》, 大阪数学杂志 53 (2016年), 535–566。arXiv:1301.6889v3. [56] H. Tanaka, 《非完美域上的曲面的丰性定理》, arXiv:1502.01383. [57] H. Tanaka, 《优良曲面的极小模型纲领》, 傅里叶研究所年刊 68 (2018), 345–376。已发表版本。[58] H. Tanaka, 《含有无限完美域的 F-有限域上的对数典范簇的半丰扰动》, 国际数学杂志 28 (2017)。arXiv:1503.01264v4. [59] H. Tanaka, 《正特征下的椭圆奇点与三维翻转》, 爱丁堡数学学会论文集 68 (2025年), 1188–1244。arXiv:2308.08118. [60] J. Waldron, 《特征 $p > 5$ 下对数典范三维簇的对数极小模型纲领》, 名古屋数学杂志 230 (2018), 48–71。arXiv:1603.02967v3. [61] J. Waldron, 《非完美域上三维簇的莫里纤维空间》, arXiv:2303.00615v2. [62] J. Witaszek, 《正特征下的典范丛公式与对数丰性》, arXiv:1711.04380v2.[63] J. Witaszek, 《正特征下奇异曲面的有效界》, 密歇根数学杂志 66 (2017), 367–388。arXiv:1510.08885. [64] C. Xu 和 L. Zhang, 《特征 $p > 5$ 下三维簇的非消失》, 杜克数学杂志 168 (2019), 第 7 期, 1269–1301。arXiv:1801.03192. [65] Z. Zhu, 《正特征下的对数典范阈值》, 数学杂志 280 (2015), 1235–1252。arXiv:1308.5445。

清华大学电子邮件地址:
xt-jiang21@mails.tsinghua.edu.cn