arXiv:2611.32362v1 [math.CA] 24 Nov 2026

Walsh–Fourier部分和子序列几乎处处收敛性的刻画

Ferenc Weisz ELTE E¨otv¨os Lor´and University 数值分析系 H-1117 布达佩斯，P´az m´any P.s´et´any 1/C.，匈牙利 电子邮箱：weisz@inf.elte.hu

Guangheng Xie 数学与统计学院，HNP-LAMA 湖南省解析数学基础学科研究中心，中南大学 长沙 410083，中华人民共和国 电子邮箱：xieguangheng@csu.edu.cn

Dachun Yang（通讯作者）数学与复杂系统实验室（中国教育部）数学科学学院，北京师范大学 北京 100875，中华人民共和国 电子邮箱：dcyang@bnu.edu.cn

摘要

我们刻画正整数集合 $\mathbb{N}$ 中的递增序列 (ν_j)，沿着该序列，每个可积函数 f 的 Walsh–Fourier部分和 $s_{\nu_j}(f)$ 几乎处处收敛到 f。这解决了 Konyagin 在2006年 国际数学家大会的特邀报告中提出的问题 [20]。该判据涉及整数 ν_j 的二进制展开。将每个ν_j 除以 2^k。当且仅当存在某个 $K \in \mathbb{N}$，使得余数的二进制变差大于 K的不同正商的数量不依赖于尺度 k，收敛性成立。这也等价于关于 $\sup_{j\in\mathbb{N}} |s_{\nu_j}(f)|$ 的弱型 (1，1) 不等式；若该判据不成立，则存在某个可积函数，其部分和沿序列 (ν_j) 在每一点都无界。该判据包含有界变差条件以及 Konyagin 关于分离谱的条件；我们还给出了一些不在先前结果涵盖范围内的收敛与发散示例。

关键词与短语：Walsh–Fourier级数、几乎处处收敛、处处发散、部分和子序列、弱型 (1，1)、二进制变差、多频率分解、Riesz乘积。

*2020*年数学主题分类：主要分类 42C10；次要分类 42B25，60G46。

1 引言

Walsh–Paley 系统是三角系统的二进制类比 [42, 32,8, 37]。Billard [2] 证明了，每个 $f \in L_2[0,1$的Walsh–Fourier部分和都 f 几乎处处收敛。Sj¨olin [38] 将这一结果推广到了 $f \in L_p[0,1$，其中$p \in (1, \infty)$。这些结果是Carleson [4] 和Hunt[16] 关于三角Fourier级数定理的Walsh对应结果。Thiele [40]利用Walsh算子的时频分析给出了一种证明；另见 [5, 21]。在 L_1 端点，Stein [39] 和Schipp[35, 36] 给出了Kolmogorov发散例子的Walsh类比。他们的例子表明，一个可积函数的Walsh–Fourier部分和可能几乎处处发散，甚至处处发散。

另一方面，指标为 2^k 的部分和是函数关于二进制 σ-代数的条件期望，因此根据鞅收敛定理，对于每个可积函数，它们都几乎处处收敛。

这引出了一个三角级数中没有对应问题的问题：对于每个可积函数，沿哪些固定指标序列，其部分和几乎处处收敛？对于三角级数，不存在这样的序列。根据 Gosselin 的一个定理，[14], 每个递增序列都存在一个可积函数，使得沿该序列的部分和几乎处处无界。Totik [41] 证明，这种无界性可以在每一点实现；Konyagin [19] 则将 Totik 的定理推广到 Orlicz 类 $\varphi(L)$，其中 $\varphi(u) = ou$ log log u。对于 Walsh 级数，序列 $(2^k)_{k\in\mathbb{N}}$ 表明这样的序列确实存在。Konyagin 在 2006年国际数学家大会的特邀报告中提出了以下问题；另见 Do 和 Lacey [7, 第 253]页。

问题 1.1 (Konyagin [20, 问题 3.3，第 1398]页)。 求序列 $(\nu_j)_{j\in\mathbb{N}}$在 $\mathbb{N}$ 中的一个充要条件，使得对于定义在 $[0,1)$上的每个可积函数 f，*Walsh–Fourier*部分和 $s_{\nu_j}(f)$几乎处处收敛到 f。

问题 1.1 在 Gogi- nava 和 Mukhamedov 最近发表的论文 [12, 备注 1] 中也被作为一个未解决问题提出。迄今为止，已有三类序列得到了解决。经典的充分条件是有界变差。如果沿序列的二进制变差一致有界，那么对于每个可积函数 [8, 37]，沿该序列的部分和几乎处处收敛。Konyagin [18] 通过证明有界变差并非必要条件，回答了 Balashov 提出的问题。他的结果保证了：对于任意具有分离谱的序列，以及每个可积函数，沿该序列的部分和几乎处处收敛，而这类序列可能具有无界变差。反过来，Goginava 和 Oniani [13] 证明，如果谱是嵌套的且变差无界，那么存在一个可积函数

使得沿该序列的部分和处处无界。他们的构造可追溯至 Schipp [35, 36] 和 Konyagin [19]。对于二重 Walsh–Fourier级数的方形部分和，情况有所不同。在这种情况下，对于每个可积函数[18], ，有界变差是几乎处处收敛的必要条件，但并非充分条件 [26]。因此，只需考察具有有界变差的序列；在这些序列中，Lukomskij 找到了重级数 [26], 的充要条件，并将其推广到大于一的每个维数 [27]。在比L_1稍强的可积性假设下，Do 和 Lacey [7],Lie [22, 23, 24, 25],以及 Di Plinio [6]研究了沿稀疏序列的收敛性。对于算术平均，$N^{-1}\sum_{j=1}^{N} s_{\nu_j}(f)$，G´at 证明，对于每个可积函数 f，沿任意稀疏序列 [9]都几乎处处收敛。随后，该结果被推广到满足更弱增长条件的序列 [10, 11]。在否定方向上，Blahota 和 G´at [3] 证明，对于适当的序列和适当的可积函数，这类平均可以几乎处处发散。

本文解决了 Konyagin 提出的问题，即问题 1.1。我们的判据考察序列各项在每个二进尺度下的二进制展开。将某一项除以 2^k，得到一个商和一个余数，其中余数由该项最低的 k 个二进制位组成。我们证明，对于每个可积函数，沿该序列的部分和几乎处处收敛，当且仅当存在$K \in \mathbb{N}$，使得在每个尺度上，与二进制变差大于 K 的余数同时出现的不同正商数目始终有界。这个界可以依赖于序列，但不能依赖于尺度。精确表述见定理 3.2，而推论 3.3 给出了带有单一参数的等价形式。同一条件刻画了这样一类序列：所选部分和的极大算子属于弱型 (1,1)。经典条件是这一结果的特例：对于有界变差，根本不计入任何商；而对于分离谱，在每个尺度上至多计入一个商。

对于维连金系统，Areshidze、Persson 和 Tephnadze [1, 定理 1]根据变差给出了几乎处处收敛的一个充分条件。他们提出了当变差无界时如何刻画的开放问题 [1, Open Problem 3]。我们在 Walsh–Paley 情形下回答了这一问题。

如果判据不成立，那么发散会达到最强程度：存在一个可积函数，使其沿该序列的部分和在每一点都无界（定理 3.6）。因此，对于每个序列，以下两种情况必有且仅有一种成立：要么对每个可积函数，沿该序列的部分和几乎处处收敛；要么存在一个可积函数，使部分和处处发散。这将 Goginava 和 Oniani [13] 关于嵌套谱的定理推广到了任意序列。对于完整的部分和序列以及可积函数的齐次巴拿赫空间，Katznelson [17] 在三角情形下、Harris 和 Wade [15]在 Walsh 情形下证明了这类二择一结论，而 Oniani [30]则将其推广到了紧阿贝尔群上的特征标系统。

在第7节中，我们重新得到有界变差定理、关于分离谱和嵌套谱的定理。随后，我们构造一个序列，使得每个可积函数的部分和沿该序列几乎处处收敛，尽管该序列无法被有限个有界变差序列或具有分离谱的序列覆盖。我们还给出

一个使判据失效的序列，因此某个可积函数的部分和在每一点都无界，尽管它的任何子序列都与具有嵌套谱的序列不处于有界距离内，而且 [13] 的结果并不适用。

本文其余部分安排如下。第 2 节汇总证明中使用的二进制恒等式，并回顾极大原理。第 3 节给出主要结果，并根据定理 3.4 中的两个估计推导出收敛判据。在第 4 节中，我们利用 Nazarov、Oberlin 和 Thiele [28, 定理 1.1] 的多频 Calderón–Zygmund 分解的 Walsh 版本，证明弱型 (1，1) 常数的上界。在第 5 节中，我们利用 Walsh 多项式的乘积证明下界。在第 6 节中，我们证明推论 3.5 和定理 3.6，分别给出几乎处处和处处无界的部分和。最后，在第7节中，我们重新得到关于有界变差、分离谱和嵌套谱的早期结果，并给出两个说明收敛性和发散的例子。

我们以介绍一些记号约定结束引言。令 $\mathbb{N} := \{1, 2, \ldots\}$ 和 $\mathbb{Z}_+ := \{0, 1, 2, \ldots\}$ 分别表示正整数集合和非负整数集合。对于任意集合 A，用 $\#A$ 表示其基数；如果 A 是无限集，则 $\#A = \infty$ 。对于任意实数 u，令 $\lfloor u \rfloor$ 和 $\lceil u \rceil$ 分别表示不超过 u 的最大整数和不小于 u 的最小整数。如果 $X \le CY$，对于某个绝对常数 C，我们记为 $X \lesssim Y$。空和为零，空积为一。本文研究实值函数。通过分别对实部和虚部应用这些结果，可将收敛结果推广到复值函数。

2 预备知识

本节为主要结果中收敛判据的证明做准备。为此，我们汇集 Walsh–Fourier部分和的二进制恒等式，并利用 Stein 极大原理 [39]，将每个可积函数的几乎处处收敛归约为相关极大算子的弱型 (1，1) 估计。

2.1 Walsh–Paley 系统

我们研究 $[0, 1)$ [42, 32] 上的 Walsh–Paley 系统；例如参见 [8, 37, 44]。对于任意 Lebesgue 可测集 $A \subset [0, 1)$，令 $\lambda(A)$ 表示其 勒贝格测度。对于任意区间 I，令 $|I|$ 表示其 长度。对于任意 $x \in [0, 1)$，将其 二进制展开写作

$$x = \sum_{l=0}^{\infty} x_l 2^{-l-1} \qquad (x_l \in \{0, 1\}).$$

如果 x 是二进有理数，我们选择最终全为零的展开。

令 $G := \{0, 1\}^{\mathbb{Z}_+}$ 为二进群，这是一个紧群，其坐标按模二逐项相加，并配备乘积Haar概率测度。令 $G_0 \subset G$ 由那些不最终恒等于1的序列组成。其补集 $G \setminus G_0$ 是可数集。定义二进制数字映射 $\beta\colon [0, 1) \to G_0$，使得 $\beta(x) := (x_l)_{l \in \mathbb{Z}_+}$。关于

二进制展开的约定使 β 成为一个双射。该映射保持测度，因为由前 k 个数字指定的圆柱集的原像是一个具有相同测度 2^{-k}的二进区间。对于任意 $x,\ y \in [0,1)$，我们定义它们的二进和 为

$$x\dot{+}y := \begin{cases} \beta^{-1}\big(\beta(x)+\beta(y)\big), & \beta(x)+\beta(y) \in G_0, \\ 0, & \beta(x)+\beta(y) \notin G_0. \end{cases}$$

对于固定的 $y \in [0,1)$，第二种情况只对可数多个 x 发生。由于通过 $\beta(y)$ 的平移保持 Haar测度，映射 $x \mapsto x\dot{+}y$ 保持勒贝格测度。在第一种情况下，$(x\dot{+}y)\dot{+}y = x$ 且 $x\dot{+}y$ 的二进制位为 $|x_l - y_l|$。如果 y 是二进制有理数，那么 $\beta(y)$ 只有有限个非零数字，因此对每个 x，第一种情况都适用。

每个 $n \in \mathbb{Z}_+$ 都具有二进制展开 $n = \sum_{l=0}^{\infty} n_l 2^l$ $(n_l \in \{0,1\})$。对于任意$m,\ n \in \mathbb{Z}_+$，我们用 $m \oplus n$ 表示其二进制位为 $|m_l - n_l|$的整数。*Rademacher*函数 和 *Walsh–Paley*函数 为

$$r_l(x) := (-1)^{x_l} \quad (l \in \mathbb{Z}_+,\ x \in [0,1)), \qquad w_n := \prod_{l=0}^{\infty} r_l^{n_l} \quad (n \in \mathbb{Z}_+).$$

只有有限多个因子不同于 1，且 $w_0 = 1$。Walsh系统 $(w_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 是正交归一的，并且对于 $m,\ n \in \mathbb{Z}_+$，有 $w_m w_n = w_{m\oplus n}$。此外，如果固定 $y \in [0,1)$，那么对几乎处处的 $x \in [0,1)$，$w_n(x\dot{+}y) = w_n(x)w_n(y)$。函数 w_m 的有限线性组合称为 *Walsh* 多项式。这些多项式在 $L_1[0,1)$ [37, p 中稠密。 12]。对于任意 $f \in L_1[0,1)$，其 *Walsh–Fourier*系数 和 部分和 为

$$\widehat{f}(m) := \int_0^1 f w_m \, d\lambda \quad (m \in \mathbb{Z}_+), \qquad s_n(f) := \sum_{m=0}^{n-1} \widehat{f}(m) w_m \quad (n \in \mathbb{N}), \qquad s_0(f) := 0.$$

对于任意 $p \in [1,\infty)$，我们记作 $\|f\|_{L_p[0,1)} := \big(\int_0^1 |f|^p \, d\lambda\big)^{1/p}$，而 $\|f\|_{L_\infty[0,1)}$ 表示 $|f|$ 的本性上确界。

的二进制变差以及 $n \in \mathbb{Z}_+$ 的占用的二进制位置分别为

$$V(n) := n_0 + \sum_{l=1}^{\infty} |n_l - n_{l-1}|, \qquad \mathrm{Sp}(n) := \{l \in \mathbb{Z}_+ :\ n_l = 1\}.$$

因此 $V(0) = 0$，并且对于 $n \in \mathbb{N}$，数 $V(n)$ 计算的是序列 0、n_0、n_1、.....中相邻项之间的变化次数。由于该序列以 0 开始并以若干个零结束，$V(n)$ 为偶数；例如，$V(2^l) = 2$ 对于 $l \in \mathbb{Z}_+$。n 除以 2^k 所得的余数为

$$n \bmod 2^k := n - 2^k \lfloor n/2^k \rfloor = \sum_{l=0}^{k-1} n_l 2^l.$$

2.2 二进区间上的平均值

一个二进区间是形如 $[i2^{-k},(i+1)2^{-k})$ 的区间，其中 $k \in \mathbb{Z}_+$ 且 $i \in \{0,1,\dots,2^k-1\}$。对于 $k \in \mathbb{Z}_+$ 和 $x \in [0,1)$，包含 x 且长度为 2^{-k} 的二进区间为

$$I_k(x) := \{y \in [0,1) :\ y_l = x_l \ (0 \le l < k)\}, \qquad |I_k(x)| = 2^{-k}.$$

特别地，$I_0(x) = [0,1)$，并令 $I_k := I_k(0) = [0, 2^{-k})$。对于可积函数 h，关于由长度为 2^{-k} 的二进区间生成的 σ-代数的条件期望为

$$E_k(h)(x) := 2^k \int_{I_k(x)} h \, d\lambda \qquad (x \in [0,1)).$$

序列 $(E_k(h))_{k\in\mathbb{Z}_+}$ 是一个鞅。记

$$d_k(h) := E_k(h) - E_{k-1}(h) \quad (k \in \mathbb{N}), \qquad M(h) := \sup_{k\in\mathbb{Z}_+} E_k(|h|)$$

其鞅差为，并记 h 的二进极大函数为。对于区间I，我们还使用平均值

$$\langle h \rangle_I := \frac{1}{|I|} \int_I h \, d\lambda.$$

我们需要使用鞅论中的以下两个众所周知的结果（见 [43]）：

$$\lambda\{M(h) > \varrho\} \le \frac{\|h\|_{L_1[0,1)}}{\varrho} \quad (\varrho > 0), \quad \lim_{k\to\infty} E_k(h) = h \quad \text{almost everywhere.} \tag{2.1}$$

2.3 Walsh 乘积、核与二进系数

这些*Dirichlet* 核为 $D_n := \sum_{m=0}^{n-1} w_m$ $(n \in \mathbb{N})$ 以及 $D_0 := 0$。对于每个 $x \in [0,1)$，等式 $w_m(x\dot{+}t) = w_m(x)w_m(t)$ 对几乎处处的 t 成立。对 $m < n$ 求和并利用 $|D_n| \le n$，我们得到，对于任意 $h \in L_1[0,1)$，

$$s_n(h)(x) = \int_0^1 h(t) D_n(x\dot{+}t) \, dt \quad (x \in [0,1)), \qquad \|s_n(h)\|_{L_\infty[0,1)} \le n\|h\|_{L_1[0,1)}.$$

对于任意 $y \in [0,1)$，通过变量代换 $t \mapsto t\dot{+}y$，我们有

$$\widehat{h(\cdot\dot{+}y)}(m) = \int_0^1 h(t) w_m(t\dot{+}y) \, dt = w_m(y)\widehat{h}(m).$$

另见 [8, 定理 II，第 380] 页。将此恒等式代入有限 Walsh 和可得 s

$$s_n\big(h(\cdot\dot{+}y)\big)(x) = s_n(h)(x\dot{+}y) \quad \text{for almost every } x \in [0,1). \tag{2.2}$$

众所周知，[37, 44] 有

$$D_{2^k}(x) = \begin{cases} 2^k, & x \in [0, 2^{-k}), \\ 0, & x \in [2^{-k}, 1) \end{cases} \qquad (k \in \mathbb{Z}_+), \tag{2.3}$$

并且，对于任意 $k \in \mathbb{Z}_+$，$s_{2^k}(h) = E_k$（h）对任意 $h \in L_1[0,1)$ 。对于 q，$a \in \mathbb{Z}_+$ 且$a < 2^k$，

$$D_{2^k q+a} = D_{2^k q} + w_{2^k q} D_a, \qquad D_{2^k q} = D_{2^k} \sum_{j=0}^{q-1} w_{2^k j}. \tag{2.4}$$

特别地，由 (2.3) 可得，

$$D_{2^k q}(z) = 0 \quad \text{if } z \notin I_k. \tag{2.5}$$

对于任意 $k \in \mathbb{Z}_+$ 和 $x \in [0,1)$，数字 $2^k x - \lfloor 2^k x \rfloor$ 的二进制位为 x_k、x_{k+1}、.....，由此得到

$$w_{2^k q}(x) = w_q\big(2^k x - \lfloor 2^k x \rfloor\big) \qquad (q \in \mathbb{Z}_+). \tag{2.6}$$

对于任意 q、$q' \in \mathbb{Z}_+$，有 $w_{2^k q} w_{2^k q'} = w_{2^k\,(q \oplus q')}$。如果 $I = [i2^{-k}, (i+1)2^{-k})$ 是长度为 2^{-k} 的二进区间，那么对于 $x \in I$ 有 $2^k x - \lfloor 2^k x \rfloor = 2^k x - i$，且变量代换 $u = 2^k x - i$ 将 I 映射到 $[0,1)$ 上。因此，根据（2.6）以及 Walsh系统的正交归一性，

$$\frac{1}{|I|}\int_I w_{2^k q} w_{2^k q'}\, d\lambda = \int_0^1 w_{q \oplus q'}\, d\lambda = \begin{cases} 1, & q = q', \\ 0, & q \neq q' \end{cases} \qquad (q, q' \in \mathbb{Z}_+). \tag{2.7}$$

特别地，对于每个 $q \in \mathbb{N}$，有 $E_k(w_{2^k q}) = 0$。

下面两个核展开将分别使用：

$$w_n D_n = \sum_{l=0}^{\infty} n_l r_l D_{2^l} = \sum_{l=0}^{\infty} c_l(n) D_{2^l}, \tag{2.8}$$

其中，整数 $c_l(n)$ 分别为 $c_0(n) := -n_0$ 和 $c_l(n) := n_{l-1} - n_l$，对每个 $l \in \mathbb{N}$均成立。这两个展开式都是已知的。第一个见 [37, 定理 8（iii），第 28], 页；另见 [33,引理 1.6。5]第二个展开式由第一个通过 Abel 变换得到，因为根据（2.4），当 $q = 2$ 时有 $r_l D_{2^l} = D_{2^{l+1}} - D_{2^l}$；见 [37, 第（58）式，第 35] 页。

对于任意 $n \in \mathbb{Z}_+$ 和 $x \in [0,1)$，在 $x \dot{+} t$ 处应用 (2.8)，利用 $w_n(x \dot{+} t) = w_n(x) w_n(t)$ 和 $s_{2^l} = E_l$，我们可得

$$\begin{aligned} s_n(h)(x) &= \int_0^1 h(t) D_n(x \dot{+} t)\, dt = w_n(x) \sum_{l=0}^{\infty} c_l(n) \int_0^1 h(t) w_n(t) D_{2^l}(x \dot{+} t)\, dt \\ &= w_n(x) \sum_{l=0}^{\infty} c_l(n) s_{2^l}(h w_n)(x) = w_n(x) \sum_{l=0}^{\infty} c_l(n) E_l(h w_n)(x). \end{aligned}$$

同理，(2.8) 中的第一个展开式给出 $s_n(h) = w_n \sum_{l=0}^{\infty} n_l (s_{2^{l+1}} - s_{2^l})(h w_n)$，以及 $s_{2^{l+1}} - s_{2^l} = E_{l+1} - E_l = d_{l+1}$。因此，我们有

$$s_n(h) = w_n \sum_{l=0}^{\infty} c_l(n) E_l(h w_n), \qquad s_n(h) = w_n \sum_{l=0}^{\infty} n_l d_{l+1}(h w_n). \tag{2.9}$$

对于任意 $k \in \mathbb{N}$，余数 $n \bmod 2^k$ 在位置 $l < k$ 有数字 n_l，在位置 $l \geq k$上的数字均为零。其位置 $k-1$ 上的数字之后，位置 k上紧跟着一个零，因此根据 V 的定义可得

$$V(n \bmod 2^k) = n_0 + \sum_{l=1}^{k-1} |n_l - n_{l-1}| + n_{k-1},$$

and

$$\sum_{l=0}^{k-1}|c_l(n)| = V(n \bmod 2^k) - n_{k-1} \le V(n \bmod 2^k); \tag{2.10}$$

第二个公式由第一个公式推出，因为对于$l \in \mathbb{N}$， $|c_0(n)| = n_0$ 且 $|c_l(n)| = |n_l - n_{l-1}|$。此外，对于任意 $k \in \mathbb{N}$，将第一个公式分别应用于 $k+1$ 和 k，可得

$$\begin{aligned} V(n \bmod 2^{k+1}) - V(n \bmod 2^k) &= |n_k - n_{k-1}| + n_k - n_{k-1} \\ &= 2n_k\big(1 - n_{k-1}\big) \ge 0. \end{aligned} \tag{2.11}$$

最后一个表达式在 $n_k = 1$和 $n_{k-1} = 0$时等于 2，否则等于 0。对于 $k = 0$，令 $n_{-1} := 0$，则公式 (2.11) 成立，因为 n 模 $1 = 0$ 且 V（n 模 2） $= 2n_0$。因此， V（n 模 2^k）不会随着 k 增大而减小；又由于当 k足够大时，它等于 V（n），

$$V(n \bmod 2^k) \le V(n) \qquad (k \in \mathbb{Z}_+). \tag{2.12}$$

为了构造引理 5.2 中具有较大部分和的函数，我们使用以下沃尔什–狄利克雷核的下界。

引理 2.1。 对于 $d \in \mathbb{Z}_+$，令 $b_d := \sum_{\substack{0\le i<d \\ i\ even}} 2^i = \sum_{i=0}^{\lceil d/2\rceil-1} 4^i$. 则

$$\|D_{b_d}\|_{L_1[0,1)} \ge d/3.$$

证明。 对于 $d = 0$ ，两边均为零，因为 $b_0 = 0$ 且 $D_0 = 0$。令 $d \in \mathbb{N}$。将二的幂按降序排列，可得 $b_d = \sum_{p=1}^{\lceil d/2\rceil} 2^{2(\lceil d/2\rceil - p)}$. 因此，勒贝格常数的 Fine 公式$\|D_n\|_{L_1[0,1)}$ [8, 定理 IX(i)，第 391]页给出

$$\begin{aligned} \|D_{b_d}\|_{L_1[0,1)} &= \lceil d/2\rceil - \sum_{1\le p<r\le\lceil d/2\rceil} 2^{2(\lceil d/2\rceil - r)-2(\lceil d/2\rceil - p)} = \lceil d/2\rceil - \sum_{p=1}^{\lceil d/2\rceil-1}\sum_{r=p+1}^{\lceil d/2\rceil} 4^{p-r} \\ &\ge \lceil d/2\rceil - \sum_{p=1}^{\lceil d/2\rceil-1}\sum_{r=p+1}^{\infty} 4^{p-r} = \lceil d/2\rceil - \frac{\lceil d/2\rceil - 1}{3} = \frac{2\lceil d/2\rceil + 1}{3} \ge \frac{d}{3}. \end{aligned}$$

引理 2.1 的证明至此完成。 □

充分性方向所需的解析估计是 Billard [2]和 Sj¨olin [38]的定理。最大部分和算子 $s_*(h) := \sup_{n\in\mathbb{N}} |s_n(h)|$ 满足

$$\|s_*(h)\|_{L_2[0,1)} \le B\|h\|_{L_2[0,1)} \qquad (h \in L_2[0,1)), \tag{2.13}$$

其中 $B \ge 1$ 是一个绝对常数；另见 [40, 5]。

2.4 弱型常数与极大原理

对于定义在 $L_1[0,1)$ 上的算子 Φ，令

$$\|\Phi\|_{(1,1)} \coloneqq \sup_{\substack{h\in L_1[0,1),\ \|h\|_{L_1[0,1)}>0 \\ \varrho>0}} \frac{\varrho\,\lambda\{|\Phi(h)|>\varrho\}}{\|h\|_{L_1[0,1)}} \in [0,\infty], \tag{2.14}$$

Φ的弱型(1，1)常数。对于任意给定的集合 $F\subset\mathbb{Z}_+$，记作

$$s_*^F(f) \coloneqq \sup_{n\in F}|s_n(f)|, \tag{2.15}$$

以及 $s_*^{\varnothing}(f) \colon = 0$。

引理 2.2。设 $(\nu_j)_{j\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathbb{N}$ 中的一个序列，满足 $\nu_1<\nu_2<\cdots$，且 $F\colon=\{\nu_j\colon\ j\in\mathbb{N}\}$。以下条件等价。

(a) $\lim_{j\to\infty} s_{\nu_j}(f) = f$对每个 $f\in L_1[0,1)$几乎处处成立；

(b) $s_*^F(f)<\infty$ 对每个 $f\in L_1[0,1)$几乎处处成立；

(c) $\|s_*^F\|_{(1,1)}<\infty$。

证明。若（c）成立，则由通常的稠密性论证可得（a），因为 Walsh 多项式在 $L_1[0,1$ 中构成稠密子集，并且对于每个 Walsh 多项式P 以及所有充分大的 j，$s_{\nu_j}(P) = P$。蕴含关系（a）$\Rightarrow$（b）显然成立。算子 s_n 在 $L_1[0,1$ 上有界，并且根据（2.2），它们与二进平移可交换。因此，（b）$\Rightarrow$（c）是二进群上 Stein 的极大原理 [39, 推论 1，第 148] 页中的情形；另见 [34, 31]。 □

3 主要结果

本节中，我们陈述所选 Walsh–Fourier 部分和对每个 $f\in L_1[0,1)$ 几乎处处收敛到 f 的一个充要条件。相关极大算子的弱型（1，1）常数的上界和下界给出了这一判据。如果该判据不成立，则存在一个可积函数，使得其所选部分和在每一点都无界。

3.1 判据

设 $F\subset\mathbb{Z}_+$。对于 $n\in F$ 和 $k\in\mathbb{Z}_+$，我们记作

$$n = 2^k q + a, \qquad q \coloneqq \lfloor n/2^k\rfloor, \qquad a \coloneqq n \bmod 2^k \in \{0,1,\dots,2^k-1\}.$$

余数 a 包含 n 的前 k 个二进制位，而商 q 包含剩余的数字。下面的定义给出了在每个尺度下，与变差超过某个固定整数的余数相关联的不同的正商集合，并取其数量在所有尺度上的上确界。

定义 3.1。对于任意 $k \in \mathbb{Z}_+$ 和 $K \geq 1$，定义

$$\mathcal{H}_{k,K}(F) := \big\{q \in \mathbb{N} : \exists a \in \{1, \dots, 2^k - 1\}, \quad 2^k q + a \in F, \quad V(a) > K\big\},$$
$$\mathcal{W}_K(F) := \sup_{k \in \mathbb{Z}_+} \#\mathcal{H}_{k,K}(F).$$

值 $\mathcal{W}_K(F)$ 可能是无穷大。

如果 $K \leq K'$，那么对于每个 k，$\mathcal{H}_{k,K'}(F) \subset \mathcal{H}_{k,K}(F)$，因此 $\mathcal{W}_{K'}(F) \leq \mathcal{W}_K(F)$。例如，如果 $F = \{2^j : j \in \mathbb{N}\}$，那么对于所有 k 和 K，$\mathcal{H}_{k,K}(F) = \varnothing$。因此$\mathcal{W}_K(F) = 0$。

我们的主要结果如下定理。弱型常数 $\|s_*^F\|_{(1,1)}$ 定义于 (2.14) 和 (2.15) 中。

定理 3.2. 设 $(\nu_j)_{j\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathbb{N}$ 中的一个序列，满足 $\nu_1 < \nu_2 < \cdots$，并令 $F := \{\nu_j : j \in \mathbb{N}\}$。以下条件等价。

(i) $\lim_{j\to\infty} s_{\nu_j}(f) = f$对每个 $f \in L_1[0,1)$几乎处处成立；

(ii) $\|s_*^F\|_{(1,1)} < \infty$；

(iii) $\mathcal{W}_K(F) < \infty$ 对于某个 $K \in \mathbb{N}$。

定理 3.2 回答了 Konyagin 的问题 [20, 问题 3.3，第 1398] 页（见问题 1.1）。对于任意正整数序列 $(\nu_j)_{j\in\mathbb{N}}$，若要检验每个 w_m 上的收敛性，就必须有 $\nu_j \to \infty$，因为当 $\nu_j \leq m$ 且 $|w_m| = 1$ 时，$s_{\nu_j}(w_m) = 0$。如果 $\nu_j \to \infty$，那么沿 $(\nu_j)_{j\in\mathbb{N}}$ 的逐点收敛性等价于沿 F 的递增枚举的逐点收敛性：$= \{\nu_j : j \in \mathbb{N}\}$。因此，所需条件是 $\nu_j \to \infty$，且对于某个 $K \in \mathbb{N}$，$\mathcal{W}_K(F) < \infty$。

定理 3.2 的证明紧接在下文定理 3.4 的陈述之后，并由三部分组成。(i)⇔(ii) 的等价性是引理 2.2 的平移原理。定理的新内容是 (ii) 中的弱型估计与 (iii) 中的计数条件之间的等价性。(iii)⇒(ii) 的蕴含关系由下文定理 3.4（i）中的上界估计得出，该估计在第 4 节中证明；而 (ii)⇒(iii) 的蕴含关系则由定理 3.4（ii）中的下界估计得出，该估计在第 5 节中证明。

计数条件有一种只涉及一个整数的等价形式。对于$a \in \mathbb{Z}_+$ 集合 $a_{-1} := 0$ 并定义

$$\gamma(a) := \sum_{l=0}^{\infty} a_l\big(1 - a_{l-1}\big). \tag{3.1}$$

由于对于 $u, \ v \in \{0,1\}$，$|u - v| = 2u(1 - v) + v - u$，我们有

$$V(a) = \sum_{l=0}^{\infty} |a_l - a_{l-1}| = 2\gamma(a) + \sum_{l=0}^{\infty} (a_{l-1} - a_l) = 2\gamma(a).$$

最后一个和为零，因为对于所有充分大的 l，$a_{-1} = 0$ 和 $a_l = 0$。

推论 3.3。 设 $(\nu_j)_{j\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathbb{N}$ 中满足 $\nu_1<\nu_2<\cdots$ 的一个序列，并令 $F:=\{\nu_j:\ j\in\mathbb{N}\}$。则对于每个 $f\in L_1[0,1)$，$s_{\nu_j}(f)\to f$ 几乎处处成立，当且仅当存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得

$$\#\left\{\left\lfloor\frac{n}{2^k}\right\rfloor:\ n\in F,\ n\ge 2^k,\ \gamma(n \bmod 2^k)>N\right\}\le N \qquad \textit{for every } k\in\mathbb{Z}_+.$$

等价地，对于某个 $N\in\mathbb{N}$，有 $\mathcal{W}_{2N}(F)\le N$。

证明。 对于任意满足 $0\le a<2^k$ 的 $n=2^kq+a$，$n\ge 2^k$ 当且仅当 $q\ge 1$。由于 $V(a)=2\gamma(a)$，不等式 $\gamma(a)>N$ 等价于 $V(a)>2N$，并推出 $a\ne 0$。因此，$\mathcal{H}_{k,2N}(F)$ 恰由满足 $n\in F$ 且 $\gamma(n \bmod 2^k)>N$ 的正商 $\lfloor n/2^k\rfloor$ 构成。对于所有 $k\in\mathbb{Z}_+$，界 $\#\mathcal{H}_{k,2N}(F)\le N$ 等价于 $\mathcal{W}_{2N}(F)\le N$。

如果对于某个 $K\in\mathbb{N}$，有 $\mathcal{W}_K(F)<\infty$，则选取满足 $N\ge\max\{\lceil K/2\rceil,\mathcal{W}_K(F)\}$ 的 $N\in\mathbb{N}$。由于 $2N\ge K$，我们有

$$\mathcal{W}_{2N}(F)\le\mathcal{W}_K(F)\le N.$$

反之，如果 $\mathcal{W}_{2N}(F)\le N$对于某个 $N\in\mathbb{N}$成立，那么 $\mathcal{W}_K(F)<\infty$且 $K=2N$。由定理 3.2 可得所需结论。 □

3.2 弱型常数

在本小节中，我们给出 $\|s_*^F\|_{(1,1)}$ 的上界和下界。上界使用所有尺度 k 上 $\mathcal{W}_K(F)$（即 $\#\mathcal{H}_{k,\,K}(F)$ 的上确界）。下界使用单个尺度上 $\mathcal{H}_{k,\,K}(F)$ 的线性无关子集的大小。

令 $\mathbb{F}_2:=\{0,1\}$ 为模二运算的域。我们将每个非负整数与其在 $\mathbb{F}_2$ 上的二进制位向量对应起来。有限集合 $B\subseteq\mathbb{Z}_+$ 若线性无关，则

$$\bigoplus_{q\in C}q\ne 0 \qquad \text{for every nonempty } C\subseteq B,$$

其中 $\bigoplus$ 表示逐坐标模二加法。对于任意 $A\subseteq\mathbb{Z}_+$，定义其维数为

$$\dim_{\mathbb{F}_2}A:=\sup\{\#B:\ B\subseteq A,\ \ B\text{ 有限且线性无关}\}.$$

对于任意 $F\subseteq\mathbb{Z}_+$ 和 $K\ge 1$，令

$$\operatorname{rank}_K(F):=\sup_{k\in\mathbb{Z}_+}\dim_{\mathbb{F}_2}\mathcal{H}_{k,K}(F). \tag{3.2}$$

对于 $A:=\mathcal{H}_{k,\,K}(F)$，我们有 $\dim_{\mathbb{F}_2}A\le\#A$。如果 $r:=\dim_{\mathbb{F}_2}A<\infty$，取一个线性无关集合 $B\subseteq A$，使 $\#B=r$。对于任意 $q\in A\setminus B$，集合 $B\cup\{q\}$ 是线性相关的。由于 B 是线性无关的，和为零的非空子集必定包含 q。因此，对于某个 $C\subseteq B$，有 $q=\bigoplus_{p\in C}p$。由于 $q>0$，$C\ne\varnothing$。对于 $q\in B$，取 $C=\{q\}$。因此

$$A\subseteq\left\{\bigoplus_{q\in C}q:\ \varnothing\ne C\subseteq B\right\},\qquad \#A\le 2^r-1.$$

对 k 取上确界，得到

$$\operatorname{rank}_K(F) \le \mathcal{W}_K(F), \qquad \mathcal{W}_K(F) \le 2^{\operatorname{rank}_K(F)} - 1 \quad \text{if } \operatorname{rank}_K(F) < \infty. \tag{3.3}$$

定理 3.4。设 $F \subset \mathbb{Z}_+$。

(i) 对于所有满足 $\mathcal{W}_K(F) \le N$的 $K \in \mathbb{N}$ 和 $N \in \mathbb{Z}_+$，有

$$\|s_*^F\|_{(1,1)} \le C\big(K + \sqrt{N}\big), \tag{3.4}$$

其中，$C > 0$ 是一个绝对常数。

(ii) 如果 d、$L \in \mathbb{N}$ 和 维数$_{\mathbb{F}_2} \mathcal{H}_{k,\,d}(F) \ge L$ 在某个尺度 $k \in \mathbb{Z}_+$下成立，则

$$\|s_*^F\|_{(1,1)} \ge \frac{d}{12}\big(1 - e^{-L/2^d}\big). \tag{3.5}$$

定理 3.4 的第 (i) 部分在第 4 节中证明，第 (ii) 部分在第 5 节中证明。

现在，我们结合定理 3.4 中的估计与引理 2.2 中的极大原理，来证明定理 3.2。

定理 *3.2* 的证明。设 $(\nu_j)_{j\in\mathbb{N}}$ 和 $F = \{\nu_j : j \in \mathbb{N}\}$ 如定理 3.2 所述。(i) 与 (ii) 的等价性由引理 2.2 中 (a) 与 (c) 的等价性推出。

为证明 (iii)⇒(ii)，假设 $\mathcal{W}_K(F) < \infty$对某个 $K \in \mathbb{N}$成立。于是 $\mathcal{W}_K(F) \in \mathbb{Z}_+$，并由定理 3.4 (i) 取 $N = \mathcal{W}_K(F)$，得到

$$\|s_*^F\|_{(1,1)} \lesssim K + \sqrt{\mathcal{W}_K(F)} < \infty,$$

这就是 (ii)。

为证明 (ii)⇒(iii)，假设 $\|s_*^F\|_{(1,1)} < \infty$，并选择 $d \in \mathbb{N}$ 使得

$$d > 12\|s_*^F\|_{(1,1)}.$$

假设 $\operatorname{rank}_d(F) = \infty$。那么，由 (3.2)，对每个 $L \in \mathbb{N}$，都存在一个尺度 k，使得 $\dim_{\mathbb{F}_2} \mathcal{H}_{k,\,d}(F) \ge L$，由定理 3.4 (ii) 得到

$$\|s_*^F\|_{(1,1)} \ge \frac{d}{12}\big(1 - e^{-L/2^d}\big) \qquad (L \in \mathbb{N}).$$

令 $L \to \infty$，我们得到

$$\|s_*^F\|_{(1,1)} \ge \frac{d}{12} > \|s_*^F\|_{(1,1)},$$

矛盾。因此 $\operatorname{rank}_d(F) < \infty$，由 (3.3) 得到 $\mathcal{W}_d(F) \le 2^{\operatorname{rank}_d(F)} - 1 < \infty$。这就是带有 $K = d$ 的 (iii)。定理 3.2 的证明至此完成 □

3.3 发散

如果判据不成立，那么定理 3.2 给出一个可积函数，使得其沿 (ν_j) 的部分和不几乎处处收敛。接下来的两个结果表明，这种发散实际上要强得多。它们强化了定理 3.2，但其证明并未使用这两个结果，并且它们将在第 6 节中证明。第一个结果给出一个非负函数，其部分和几乎处处无界。

推论 3.5. 设 $(\nu_j)_{j\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathbb{N}$ 中的一个序列，满足 $\nu_1 < \nu_2 < \cdots$，且 $F := \{\nu_j : j \in \mathbb{N}\}$。若对每个 $K \in \mathbb{N}$，都有 $\mathcal{W}_K(F) = \infty$，则存在一个非负函数 $f \in L_1[0,1)$，满足 $\|f\|_{L_1[0,1)} = 1$，使得

$$\limsup_{j\to\infty} |s_{\nu_j}(f)(x)| = \infty \quad \textit{for almost every } x \in [0,1).$$

若不要求 f 非负，则推论 3.5 可由定理 3.2（它给出 $\|s_*^F\|_{(1,1)} = \infty$）以及 Stein 定理 [39, 推论 2，第 148] 页推出。第二个结果表明，该函数在每一点都无界。

定理 3.6. 设 $(\nu_j)_{j\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathbb{N}$ 中的一个序列，满足 $\nu_1 < \nu_2 < \cdots$，且 $F := \{\nu_j : j \in \mathbb{N}\}$。若对每个 $K \in \mathbb{N}$，都有 $\mathcal{W}_K(F) = \infty$，则存在一个函数 $f \in L_1[0,1)$，使得

$$\limsup_{j\to\infty} |s_{\nu_j}(f)(x)| = \infty \quad \textit{for every } x \in [0,1).$$

结合定理 3.2，定理 3.6 对每个递增序列 $(\nu_j)_{j\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{N}$ 给出了一个二择一结论：要么对于每个 $f \in L_1[0,1)$，$\lim_{j\to\infty} s_{\nu_j}(f) = f$ 几乎处处成立；要么存在一个函数 $f \in L_1[0,1)$，使得对于每个 $x \in [0,1)$，$\limsup_{j\to\infty} |s_{\nu_j}(f)(x)| = \infty$。

4 充分估计

本节证明定理 3.4 (i)。为此，固定 $K \in \mathbb{N}$ and $N \in \mathbb{Z}_+$ with $\mathcal{W}_K(F) \le N$、一个函数 $f \in L_1[0,1)$、一个层 $\varrho > 0$ 以及一个满足 $2\lfloor K/2\rfloor\tau < 1$ 的实参数 $\tau > 0$。我们首先证明

$$\lambda\{s_*^F(f) > \varrho\} \le \left\{\frac{1}{\tau} + \frac{2B^2(N+1)\tau}{(1-2\lfloor K/2\rfloor\tau)^2}\right\}\frac{\|f\|_{L_1[0,1)}}{\varrho}, \tag{4.1}$$

whe 其中 B 是 L_2 估计 (2.13) 中的绝对常数。如果 $\|f\|_{L_1[0,1)} > \tau\varrho$，则 n

$$\lambda\{s_*^F(f) > \varrho\} \le 1 < \frac{\|f\|_{L_1[0,1)}}{\tau\varrho},$$

且（4.1）成立。以下假设 $\|f\|_{L_1[0,1)} \le \tau\varrho$。

4.1 分解

令 $\mathcal{B}$ 为满足 $\langle|f|\rangle_I > \tau\varrho$ 的极大二进区间 I 所构成的集合，并令$k_I := -\log_2|I|$ ($I \in \mathcal{B}$)。两个相交的二进区间必定互相包含，且 $\mathcal{B}$ 中没有任何区间包含另一个区间。因此， $\mathcal{B}$ 由两两不相交的区间构成，它们的并集为集合

$$\Omega := \{M(f) > \tau\varrho\}.$$

若 I^+ 是包含 I 且长度为 2^{1-k_I} 的二进区间，则 $|I^+| = 2|I|$，并且根据 I 的极大性，$\langle|f|\rangle_{I^+} \leq \tau\varrho$ 。由此可得

$$\tau\varrho < \langle|f|\rangle_I \leq \frac{|I^+|}{|I|}\langle|f|\rangle_{I^+} \leq 2\tau\varrho \qquad (I \in \mathcal{B}). \tag{4.2}$$

根据 (2.1)， $|f| \leq M(f) \leq \tau\varrho$ 在 $[0,1)$ 上几乎处处成立， $\setminus\Omega$。

我们遵循 Nazarov、Ober-lin 和 Thiele 的多频 Calder´on–Zygmund 分解 [28, 定理 1.1]及其 Walsh 版本 [29, 第 3] 节和 [7, 引理 3.2]的证明。对于任意满足 $|I| = 2^{-k}$ 的 $I \in \mathcal{B}$，定义有限集合

$$Q_I := \{0\} \cup \mathcal{H}_{k,K}(F), \qquad \#Q_I \leq N+1.$$

定义系数 $\alpha_{I,q}$ 和函数 p_I 为

$$\alpha_{I,q} := \frac{1}{|I|}\int_I f(t)w_{2^kq}(t)\,dt, \qquad p_I := \mathbf{1}_I \sum_{q\in Q_I}\alpha_{I,q}w_{2^kq}.$$

对于每个 $q \in Q_I$，由 (2.7) 可得

$$|\alpha_{I,q}| \leq \langle|f|\rangle_I, \qquad \int_I p_I w_{2^kq}\,d\lambda = |I|\,\alpha_{I,q} = \int_I f w_{2^kq}\,d\lambda.$$

由正交性 (2.7) 和柯西–施瓦茨不等式可得

$$\|p_I\|_{L_2[0,1)}^2 = |I|\sum_{q\in Q_I}|\alpha_{I,q}|^2 \leq (N+1)|I|\,\langle|f|\rangle_I^2,$$

$$\|p_I\|_{L_1[0,1)} \leq |I|^{1/2}\|p_I\|_{L_2[0,1)} \leq \sqrt{N+1}\,|I|\,\langle|f|\rangle_I = \sqrt{N+1}\int_I |f|\,d\lambda.$$

Set

$$b_I := f\mathbf{1}_I - p_I \quad (I \in \mathcal{B}), \qquad g := f\mathbf{1}_{[0,1)\setminus\Omega} + \sum_{I\in\mathcal{B}} p_I.$$

这些和在 $L_1[0,1)$ 中收敛，因为

$$\sum_{I\in\mathcal{B}}\|p_I\|_{L_1[0,1)} \leq \sqrt{N+1}\,\|f\|_{L_1[0,1)},$$

$$\sum_{I\in\mathcal{B}}\|b_I\|_{L_1[0,1)} \leq \sum_{I\in\mathcal{B}}\left(\int_I |f|\,d\lambda + \|p_I\|_{L_1[0,1)}\right) \leq \left(1+\sqrt{N+1}\right)\|f\|_{L_1[0,1)}. \tag{4.3}$$

此外，

$$f = g + \sum_{I\in\mathcal{B}} b_I, \qquad \int_I b_I w_{2^{k_I}q}\,d\lambda = 0 \quad (q \in Q_I); \tag{4.4}$$

特别地 $\int_I b_I\,d\lambda = 0$。承载 g 不同项的集合互不相交。因此，根据 $|f| \le \tau\varrho$，几乎处处在 $[0,1)\setminus\Omega$ 上成立；由 (4.2)，

$$\begin{aligned}
\|g\|^2_{L_2[0,1)} &= \int_{[0,1)\setminus\Omega} |f|^2\,d\lambda + \sum_{I\in\mathcal{B}} \|p_I\|^2_{L_2[0,1)} \\
&\le \tau\varrho \int_{[0,1)\setminus\Omega} |f|\,d\lambda + (N+1)\sum_{I\in\mathcal{B}} \langle |f|\rangle_I \int_I |f|\,d\lambda \\
&\le \tau\varrho \int_{[0,1)\setminus\Omega} |f|\,d\lambda + 2(N+1)\tau\varrho \int_\Omega |f|\,d\lambda \\
&\le 2(N+1)\tau\varrho\,\|f\|_{L_1[0,1)}.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

4.2 误差界与极大估计

引理 4.1。对于每个 $x \in [0,1)\setminus\Omega$ 以及每个 $n \in F$，

$$\left| s_n\left(\sum_{I\in\mathcal{B}} b_I\right)(x)\right| \le 2\lfloor K/2\rfloor\, M(f\mathbf{1}_\Omega)(x). \tag{4.6}$$

证明。固定 $I \in \mathcal{B}$，写作 $k := k_I$ 和 $n = 2^k q + a$，其中 $0 \le a < 2^k$，并令 x_I 为 I的左端点。对于任何在 I之外为零的可积函数 h，

$$s_n(h)(x) = w_{2^k q}(x) D_a(x \dot{+} x_I) \int_I h(t) w_{2^k q}(t)\,dt \qquad (x \notin I). \tag{4.7}$$

事实上，令 $x \notin I$。对于几乎所有 $t \in I$，$x \dot{+} t$ 的前 k 个二进制位为 $|x_l - t_l| = |x_l - (x_I)_l|$，$0 \le l < k$，且它们不全为零，因为 x 和 t 在前k 个数字之一上不同；因此 $x \dot{+} t \notin I_k$，由 (2.5) 得 $D_{2^k q}(x \dot{+} t) = 0$。此外，$a < 2^k$，所以 D_a在长度为 2^{-k}的二进区间上为常数，且 $D_a(x \dot{+} t) = D_a(x \dot{+} x_I)$。由 (2.4)，

$$\begin{aligned}
s_n(h)(x) &= \int_I h(t)\left[D_{2^k q}(x \dot{+} t) + w_{2^k q}(x \dot{+} t) D_a(x \dot{+} t)\right] dt \\
&= w_{2^k q}(x) D_a(x \dot{+} x_I) \int_I h(t) w_{2^k q}(t)\,dt,
\end{aligned}$$

这就是（4.7）。如果 $a = 0$，那么 $D_a = 0$，该表达式为零。由（4.4）和（2.7），我们知道

$$\begin{cases} \int_I b_I w_{2^k q}\,d\lambda = 0, & q \in Q_I, \\ \int_I p_I w_{2^k q}\,d\lambda = 0, & q \notin Q_I. \end{cases}$$

因此，在第一种情况下令 $h=b_I$，在第二种情况下令 $h=p_I$，由（4.7）可得，对于任意 $x\notin I$,

$$\begin{cases} s_n(b_I)(x)=0, & \lfloor n/2^k\rfloor\in Q_I,\\ s_n(b_I)(x)=s_n(f\mathbf{1}_I)(x)-s_n(p_I)(x)=s_n(f\mathbf{1}_I)(x), & \lfloor n/2^k\rfloor\notin Q_I. \end{cases}$$

固定 $n\in F$，令

$$\mathcal{B}_n:=\{I\in\mathcal{B}:\ \lfloor n/2^{k_I}\rfloor\notin Q_I\}.$$

由于 $0\in Q_I$，每个 $I\in\mathcal{B}_n$ 都满足$2^{k_I}\le n$。$\mathcal{B}_n$ 中的区间互不相交，因此 $\#\mathcal{B}_n\le n$。

界 $|s_n(h)(x)|\le n\|h\|_{L_1[0,1)}$ 以及（4.3）允许对 s_n逐项应用。上述两种情况给出

$$s_n\left(\sum_{I\in\mathcal{B}}b_I\right)(x)=\sum_{I\in\mathcal{B}_n}s_n(f\mathbf{1}_I)(x)\qquad(x\notin\Omega).\tag{4.8}$$

如果 $\mathcal{B}_n=\varnothing$，则（4.6）成立。否则令 $k_*:=\max\{k_I:\ I\in\mathcal{B}_n\}$。对于 $x\notin\Omega$和 $l\ge k_I$，区间 $I_l(x)$与 I不相交，因此 $E_l(f\mathbf{1}_I w_n)(x)=0$。于是，由（4.8）、（2.9）中的第一个恒等式、不等式 $|E_l(f\mathbf{1}_I w_n)|\le E_l(|f|\mathbf{1}_I)$、$E_l$的线性性以及 $\sum_{I\in\mathcal{B}_n}\mathbf{1}_I\le\mathbf{1}_\Omega$，得到

$$\begin{aligned}\left|s_n\left(\sum_{I\in\mathcal{B}}b_I\right)(x)\right|&=\left|w_n(x)\sum_{l=0}^{k_*-1}c_l(n)\sum_{\substack{I\in\mathcal{B}_n\\ k_I>l}}E_l(f\mathbf{1}_I w_n)(x)\right|\\&\le\sum_{l=0}^{k_*-1}|c_l(n)|\,E_l\left(|f|\sum_{\substack{I\in\mathcal{B}_n\\ k_I>l}}\mathbf{1}_I\right)(x)\\&\le M(f\mathbf{1}_\Omega)(x)\sum_{l=0}^{k_*-1}|c_l(n)|.\end{aligned}$$

在尺度 k_*下，正商 $\lfloor n/2^{k_*}\rfloor$不属于 $\mathcal{H}_{k_*,\,\kappa}(F)$，因为某个 $I\in\mathcal{B}_n$满足$k_I=k_*$。若有 $V(n\bmod 2^{k_*})>K$，那么 $n\bmod 2^{k_*}\ne 0$，因为 $V(0)=0$，而$n=2^{k_*}\lfloor n/2^{k_*}\rfloor+n\bmod 2^{k_*}\in F$会根据定义 3.1 得到$\lfloor n/2^{k_*}\rfloor\in\mathcal{H}_{k_*,\,\kappa}(F)$。因此 $V(n\bmod 2^{k_*})\le K$。这个变差是偶数，因此由 (2.10) 可得

$$\sum_{l=0}^{k_*-1}|c_l(n)|\le V(n\bmod 2^{k_*})\le 2\lfloor K/2\rfloor.$$

这就证明了 (4.6)。 □

证明 (4.1)。 由于 $\Omega=\{M(f)>\tau\varrho\}$，我们有 $M(f\mathbf{1}_\Omega)(x)\le M(f)(x)\le\tau\varrho$对于 $x\in[0,1)\setminus\Omega$。根据 (4.4) 和 (4.6),

$$|s_n(f)(x)|\le|s_n(g)(x)|+2\lfloor K/2\rfloor\tau\varrho\qquad(n\in F)$$

对于几乎处处的 $x \notin \Omega$。由于 $2\lfloor K/2\rfloor\tau < 1$，这意味着除去一个零测集外，

$$\{s_*^F(f) > \varrho\} \setminus \Omega \subset \big\{s_*^F(g) > (1 - 2\lfloor K/2\rfloor\tau)\varrho\big\}.$$

根据 (2.1)， $\lambda(\Omega) \le \|f\|_{L_1[0,1)}/(\tau\varrho)$。现在我们使用这一点、(2.13)、(4.5)、切比雪夫不等式以及逐点界 $s_*^F(g) \le s_*(g)$。于是得到

$$\begin{aligned}\lambda\big\{s_*^F(f) > \varrho\big\} &\le \lambda(\Omega) + \lambda\big\{s_*^F(g) > (1 - 2\lfloor K/2\rfloor\tau)\varrho\big\} \\ &\le \frac{\|f\|_{L_1[0,1)}}{\tau\varrho} + \frac{B^2\|g\|_{L_2[0,1)}^2}{(1 - 2\lfloor K/2\rfloor\tau)^2\varrho^2} \\ &\le \left\{\frac{1}{\tau} + \frac{2B^2(N+1)\tau}{(1 - 2\lfloor K/2\rfloor\tau)^2}\right\}\frac{\|f\|_{L_1[0,1)}}{\varrho},\end{aligned}$$

这就是 (4.1)。 □

定理 *3.4 (i)* 的证明。为证明 (3.4)，取

$$\tau = \frac{1}{2\lfloor K/2\rfloor + \sqrt{2}B\sqrt{N+1}}.$$

于是 $1 - 2\lfloor K/2\rfloor\tau = \sqrt{2}B\sqrt{N+1}\,\tau$，从而

$$\frac{1}{\tau} = 2\lfloor K/2\rfloor + \sqrt{2}B\sqrt{N+1} = \frac{2B^2(N+1)\tau}{(1 - 2\lfloor K/2\rfloor\tau)^2},$$

因此 (4.1) 中的系数等于

$$4\lfloor K/2\rfloor + 2\sqrt{2}B\sqrt{N+1} \le 2K + 2\sqrt{2}B\big(1 + \sqrt{N}\big) \lesssim K + \sqrt{N},$$

因为 $K \ge 1$。这就证明了 (3.4)。 □

5 必要估计

本节证明定理 3.4（ii）。

5.1 与完整块的比较

对于 $Q \subset \mathbb{Z}_+$ 和 $k \in \mathbb{Z}_+$，我们记作 $2^kQ := \{2^kq\colon\ q \in Q\}$ 和 $Q+1 := \{q+1\colon\ q \in Q\}$。

引理 5.1。对于 $Q \subset \mathbb{Z}_+$ 和 $k \in \mathbb{Z}_+$，

$$\left\|s_*^{2^kQ}\right\|_{(1,1)} = \left\|s_*^Q\right\|_{(1,1)}. \tag{5.1}$$

设 $F \subset \mathbb{Z}_+$，并令 T 为有限或可数指标集。对每个 $t \in T$，令 $q_t \in \mathbb{Z}_+$ 和 $a_t \in \{1, \dots, 2^k - 1\}$。若 $\{2^kq_t + a_t\colon\ t \in T\} \subset F$ 且 $Q = \{q_t\colon\ t \in T\}$，则

$$\left\|s_*^{Q+1}\right\|_{(1,1)} \le \left\|s_*^F\right\|_{(1,1)}, \qquad \left\|s_*^{2^kQ}\right\|_{(1,1)} \le \left\|s_*^F\right\|_{(1,1)}. \tag{5.2}$$

证明。令 $\pi_k(x) := 2^k x - \lfloor 2^k x \rfloor$，其中 $x \in [0,1)$。对于 $f \in L_1[0,1)$ 和 $0 \le i < 2^k$，令

$$I_i := [i2^{-k}, (i+1)2^{-k}), \qquad f_i(v) := f\big(2^{-k}(i+v)\big) \quad (v \in [0,1)).$$

根据 (2.3) 和 (2.4)，当 $x \in I_i$ 时，对于几乎处处的 $t \notin I_i$，核 $D_{2^k q}(x \dot{+} t)$ 为零。在 I_i 上，我们使用 (2.6) 并作变量代换 $v = 2^k t - i$，得到

$$s_{2^k q}(f)(x) = 2^k \sum_{j=0}^{q-1} w_j(\pi_k(x)) \int_{I_i} f(t) w_j(\pi_k(t))\, dt = s_q(f_i)(\pi_k(x)). \tag{5.3}$$

对于 $\varrho > 0$，这给出

$$\begin{aligned}\lambda\{s_*^{2^k Q}(f) > \varrho\} &= \sum_{i=0}^{2^k-1} 2^{-k} \lambda\{s_*^Q(f_i) > \varrho\} \\ &\le \frac{\|s_*^Q\|_{(1,1)}}{\varrho} \sum_{i=0}^{2^k-1} 2^{-k} \|f_i\|_{L_1[0,1)} = \frac{\|s_*^Q\|_{(1,1)}}{\varrho} \|f\|_{L_1[0,1)}\end{aligned}$$

当 $\|s_*^Q\|_{(1,1)} < \infty$ 时。因此 $\|s_*^{2^k Q}\|_{(1,1)} \le \|s_*^Q\|_{(1,1)}$，即使右端为无穷大时也成立。

对于 $h \in L_1[0,1)$ 和 $0 \le r < 2^k$，令 $h_{k,\,r} := w_r(h \circ \pi_k)$。对于 $j \in \mathbb{Z}_+$ 和 $0 \le m < 2^k$，乘积 $w_r w_m$ 在每个 I_i 上都是常数。利用 (2.6)，先在每个 I_i 上积分，我们得到

$$\widehat{h_{k,r}}(2^k j + m) = \widehat{h}(j) \sum_{i=0}^{2^k-1} 2^{-k} w_r(i2^{-k}) w_m(i2^{-k}) = \widehat{h}(j) \mathbf{1}_{\{r=m\}}.$$

因此，对于 $q \in \mathbb{Z}_+$ 和 $0 \le a < 2^k$，

$$s_{2^k q + a}(h_{k,r}) = w_r\big(s_{q + \mathbf{1}_{\{r<a\}}}(h) \circ \pi_k\big).$$

映射 π_k 保持勒贝格测度，且 $\|h_{k,\,r}\|_{L_1[0,1)} = \|h\|_{L_1[0,1)}$。令 $a = r = 0$ 得到 $\|s_*^Q\|_{(1,1)} \le \|s_*^{2^k Q}\|_{(1,1)}$，从而完成 (5.1)。对于 (5.2) 中的指标，令 $r = 0$可得

$$s_*^{Q+1}(h) \circ \pi_k \le s_*^F(h_{k,0}),$$

而令 $r = 2^k - 1$ 可得

$$s_*^Q(h) \circ \pi_k \le s_*^F(h_{k,2^k-1}).$$

(5.2) 中的弱型估计由测度保持性和 (5.1) 得出 . □

5.2 低阶余项的函数

Goginava 和 Oniani 证明了，$|s_a(\operatorname{sgn} D_a)|$ 在长度与 $1/a$ [13, 相当的二进区间上很大，这是引理 3.1]的证明。在下面的引理中，我们利用 D_{b_d} 和 d 个选定的二进制位的符号来构造一个有界函数，使其 a阶部分和的绝对值为 $\|D_{b_d}\|_{L_1[0,1)}$ 在测度为 2^{-d}的集合上成立。

引理 5.2。设 k、$d \in \mathbb{N}$ 满足 $d \le k$，并令 $a \in \mathbb{Z}_+$ 满足 $a < 2^k$ 和 $V(a) > d$。则存在整数 $0 \le j_0 < \cdots < j_{d-1} < k$，使得映射

$$\vartheta_a(x) \coloneqq \sum_{i=0}^{d-1} x_{j_i} 2^{-i-1} \qquad (x \in [0,1)),$$

满足 $\lambda(\vartheta_a^{-1}(J)) = 2^{-d}$ 对每个长度为 2^{-d} 的二进区间 J 均成立。此外，对于任意这样的 J，存在一个实值函数 $p_{a,\,J}$ 定义在 $[0,1)$ 上，在每个长度为 2^{-k} 的二进区间上为常数，并且 $|p_{a,\,J}| \le 1$ 且

$$|s_a(p_{a,J})(x)| = \|D_{b_d}\|_{L_1[0,1)} \ge d/3 \qquad \big(x \in \vartheta_a^{-1}(J)\big). \tag{5.4}$$

证明。由 (3.1) 和 $V(a) = 2\gamma(a)$，a 的前 k 个二进制位中包含 $V(a)/2$ 段连续的 1。每一段中选取一个数字，并在相邻两段之间的每个间隔中也选取一个数字。按索引递增排列，这些 $V(a)-1$ 个数字交替出现，且以 1 开始。由于 $V(a) - 1 \ge d$，令 $j_0 < \cdots < j_{d-1}$ 表示所选前 d 个数字的索引。根据引理 2.1 中 b_d 的定义，

$$a_{j_i} = (b_d)_i \qquad (0 \le i < d).$$

对于每个长度为 2^{-d} 的二进区间 J，固定所选数字后，前 k 个数字中还剩下 $k-d$ 个自由数字。因此

$$\lambda(\vartheta_a^{-1}(J)) = 2^{k-d}2^{-k} = 2^{-d}. \tag{5.5}$$

对于 $0 \le m < 2^d$，令 $\iota(m) \coloneqq \sum_{i=0}^{d-1} m_i 2^{j_i}$，并设 $a^\perp \coloneqq a - \iota(b_d)$。$a^\perp$ 的选定位均为零。根据 ϑ_a 的定义及 Walsh 乘积法则，

$$w_{a^\perp}(w_m \circ \vartheta_a) = w_{a^\perp + \iota(m)} \qquad (0 \le m < 2^d). \tag{5.6}$$

映射 ι 严格递增，因为两个整数不同的最高位会映射到其像中不同的最高选定位。因此，$a^\perp + \iota(m) < a$ 当且仅当 $m < b_d$。将任意一个在长度为 2^{-d} 的二进区间上为常数的 h 按 Walsh 基展开，并保留小于 a的频率，可得

$$s_a\big(w_{a^\perp}(h \circ \vartheta_a)\big) = w_{a^\perp}\big(s_{b_d}(h) \circ \vartheta_a\big). \tag{5.7}$$

设 y_J 为 J的左端点，并令 $\operatorname{sgn}(0) = 0$。定义

$$h_J(z) \coloneqq \operatorname{sgn}\big(D_{b_d}(z \dot{+} y_J)\big), \qquad p_{a,J} \coloneqq w_{a^\perp}(h_J \circ \vartheta_a). \tag{5.8}$$

函数 h_J 在长度为 2^{-d} 的二进区间上为常数，因为 $b_d < 2^d$，且 y_J是二进的。因此，$p_{a,\,J}$ 是实值函数，在长度为 2^{-k}的二进区间上为常数，且其绝对值不超过一。由于 $s_{b_d}(h_J)$在 J上为常数，由 (5.7) 和核公式可得，对 $x \in \vartheta_a^{-1}(J)$,

$$|s_a(p_{a,J})(x)| = |s_{b_d}(h_J)(y_J)| = \int_0^1 |D_{b_d}(t \dot{+} y_J)|\,dt = \|D_{b_d}\|_{L_1[0,1)} \ge d/3.$$

这里，最后一个等式由 $t \mapsto t \dot{+} y_J$ 的测度保持性质得出，而下界则由引理 2.1 得出。

□

5.3 乘积构造与下界估计

对于定义在 $L_1[0,1)$ 上的任意有限族线性算子 $\mathcal{R}_1$、……、$\mathcal{R}_L$，以及任意 $h \in L_1[0,1)$，令

$$\mathcal{R}^*(h) := \max_{1\le t\le L} |\mathcal{R}_t(h)|.$$

关于相关的发散构造，参见 Schipp [35, 36] 和 Konyagin [19]。Gogi- nava 和 Oniani 在引理 3.1]的证明中处理了具有嵌套谱 [13, 的序列。在下述引理中，我们使用引理 5.2 中的函数，为一族在 $\mathbb{F}_2$上线性无关的商 $q_1,\dots,q_L$ 构造乘积。每个因子都使用为其自身余数 a_t选取的二进制位。这给出了以 d和 L表示的下界 (5.9)。

引理 5.3。设 $k, d, L \in \mathbb{N}$ 满足 $d \le k$，并设 $q_1, \dots, q_L \in \mathbb{N}$ 作为二进制向量在 $\mathbb{F}_2$上线性无关。假设对于 $1 \le t \le L$，$a_t \in \mathbb{Z}_+$, $a_t < 2^k$ 和 $V(a_t) > d$。那么这些算子

$$\mathcal{R}_t := s_{2^k q_t + a_t} - s_{2^k q_t} \qquad (1 \le t \le L)$$

满足

$$\|\mathcal{R}^*\|_{(1,1)} \ge \|D_{b_d}\|_{L_1[0,1)} \big[1 - (1 - 2^{-d})^L\big]. \tag{5.9}$$

证明。对于每个 t，应用引理 5.2，并取 $a = a_t$；这是允许的，因为 $d \le k$ 和$V(a_t) > d$。令 $\mathcal{J}$为所有 L元组 $(J_1, \dots, J_L)$ 构成的集合，其中每个 J_t 都是长度为 2^{-d} 的2^d 个二进区间之一；区间 $J_1, \dots, J_L$ 不必互不相同。因此 $\#\mathcal{J} = (2^d)^L = 2^{dL}$。对于 $(J_1, \dots, J_L) \in \mathcal{J}$，令

$$U(J_1, \dots, J_L) := \bigcup_{t=1}^{L} \{x \in [0,1) : \ \vartheta_{a_t}(x) \in J_t\}.$$

固定 $x \in [0,1)$。对于每个 t，恰有一个 2^d 区间包含 $\vartheta_{a_t}(x)$，因此 J_t 有 $2^d - 1$ 种取法，使得 $\vartheta_{a_t}(x) \notin J_t$。因此，$\mathcal{J}$ 中恰有 $(2^d - 1)^L$ 个元组满足$x \notin U(J_1, \dots, J_L)$。交换求和与积分的次序，得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{\#\mathcal{J}} \sum_{(J_1,\dots,J_L)\in\mathcal{J}} \lambda\big(U(J_1,\dots,J_L)\big) &= \int_0^1 \frac{\#\{(J_1,\dots,J_L)\in\mathcal{J} : \ x \in U(J_1,\dots,J_L)\}}{\#\mathcal{J}}\, dx \\ &= \frac{2^{dL} - (2^d-1)^L}{2^{dL}} = 1 - (1-2^{-d})^L.\end{aligned}$$

固定一个元组（J_1，……，J_L），使得 $U := U(J_1$，……，$J_L)$ 的测度至少等于该平均值，并令 $p_t := p_{a_t,\ J_t}$。于是，由（5.4）可得，

$$\lambda(U) \ge 1 - (1-2^{-d})^L, \quad |p_t| \le 1, \quad |s_{a_t}(p_t)(x)| = \|D_{b_d}\|_{L_1[0,1)} \quad (\vartheta_{a_t}(x) \in J_t). \tag{5.10}$$

Let

$$\mathcal{P} := \prod_{t=1}^{L} \big(1 + w_{2^k q_t} p_t\big).$$

由（5.10）可知，$1 + w_{2^k q_t} p_t \ge 1 - |p_t| \ge 0$ 对任意 t 均成立。展开乘积并利用 $w_m w_n = w_{m\oplus n}$，我们得到

$$\begin{aligned}\mathcal{P} &= \sum_{\Theta\subseteq\{1,\dots,L\}} \prod_{\theta\in\Theta} \bigl(p_\theta w_{2^k q_\theta}\bigr) \\ &= \sum_{\Theta\subseteq\{1,\dots,L\}} \left(\prod_{\theta\in\Theta} p_\theta\right) w_{2^k \bigoplus_{\theta\in\Theta} q_\theta}.\end{aligned}$$

按照约定，含有 $\Theta = \varnothing$ 的项为 1，$\bigoplus_{\theta\in\varnothing} q_\theta := 0$。二进线性无关性恰好表明，对于 $1 \le t \le L$,

$$\bigoplus_{\theta\in\Theta} q_\theta = 0 \iff \Theta = \varnothing, \qquad \bigoplus_{\theta\in\Theta} q_\theta = q_t \iff \Theta = \{t\}.$$

函数 p_t 在长度为 2^{-k} 的二进区间上为常数，而根据 (2.7)，当 $q \in \mathbb{N}$ 时，$E_k(w_{2^k q}) = 0$。此外，$w_{2^k \bigoplus_{\theta\in\Theta} q_\theta} w_{2^k q_t} = w_{2^k((\bigoplus_{\theta\in\Theta} q_\theta)\oplus q_t)}$。因此，第一个等价性只剩下 $E_k(\mathcal{P})$ 中的项 $\Theta = \varnothing$，而第二个只剩下 $E_k(\mathcal{P} w_{2^k q_t})$ 中的项 $\Theta = \{t\}$：

$$\mathcal{P} \ge 0, \qquad E_k(\mathcal{P}) = 1, \qquad E_k\bigl(\mathcal{P} w_{2^k q_t}\bigr) = p_t \qquad (1 \le t \le L). \tag{5.11}$$

特别地，$\|\mathcal{P}\|_{L_1[0,1)} = \int_0^1 E_k(\mathcal{P})\, d\lambda = 1$。

对于任意 $1 \le t \le L$ 和 $0 \le m < 2^k$，都有 $2^k q_t + m = (2^k q_t) \oplus m$。由于 w_m 在长度为 2^{-k} 的二进区间上为常数，利用 (5.11)，得到

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{P}}(2^k q_t + m) &= \int_0^1 \mathcal{P} w_{2^k q_t} w_m \, d\lambda = \int_0^1 E_k\bigl(\mathcal{P} w_{2^k q_t}\bigr) w_m \, d\lambda \\ &= \int_0^1 p_t w_m \, d\lambda = \widehat{p_t}(m).\end{aligned}$$

根据 $\mathcal{R}_t$ 和 $a_t < 2^k$的定义，可得

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_t(\mathcal{P}) &= \sum_{m=0}^{a_t-1} \widehat{\mathcal{P}}(2^k q_t + m) w_{2^k q_t} w_m \\ &= w_{2^k q_t} \sum_{m=0}^{a_t-1} \widehat{p_t}(m) w_m = w_{2^k q_t} s_{a_t}(p_t).\end{aligned}$$

对于任意 $x \in U$，选取 t 使得 $\vartheta_{a_t}(x) \in J_t$。由 (5.10)，可得

$$\mathcal{R}^*(\mathcal{P})(x) \ge |\mathcal{R}_t(\mathcal{P})(x)| = |s_{a_t}(p_t)(x)| = \|D_{b_d}\|_{L_1[0,1)}.$$

因此，对于每个层 $0 < \eta < \|D_{b_d}\|_{L_1[0,1)}$,

$$\lambda\{\mathcal{R}^*(\mathcal{P}) > \eta\} \ge \lambda(U) \ge 1 - (1 - 2^{-d})^L, \qquad \|\mathcal{P}\|_{L_1[0,1)} = 1,$$

而定义 (2.14) 给出

$$\|\mathcal{R}^*\|_{(1,1)} \ge \frac{\eta\, \lambda\{\mathcal{R}^*(\mathcal{P}) > \eta\}}{\|\mathcal{P}\|_{L_1[0,1)}} \ge \eta\bigl[1 - (1 - 2^{-d})^L\bigr] \qquad (0 < \eta < \|D_{b_d}\|_{L_1[0,1)}).$$

令 η 增加到 $\|D_{b_d}\|_{L_1[0,1)}$ 即可证明（5.9）。 □

定理 *3.4*（*ii*）的证明。假设 $\dim_{\mathbb{F}_2}\mathcal{H}_{k,\,d}(F)\ \geq\ L$ 对某个 k 成立。选择线性无关的 q_1, ……, $q_L \in \mathcal{H}_{k,\,d}(F)$ 以及满足以下条件的余项 a_t

$$1 \leq a_t < 2^k, \qquad V(a_t) > d, \qquad 2^k q_t + a_t \in F \qquad (1 \leq t \leq L).$$

由于 $d < V(a_t) \leq k+1$，我们有 $d \leq k$。设 $Q = \{q_1, \dots, q_L\}$。对于引理 5.3 的算子 $\mathcal{R}_t$,

$$\mathcal{R}^*(h) \leq s_*^F(h) + s_*^{2^k Q}(h).$$

若 $\|s_*^F\|_{(1,1)} = \infty$，则所述界显然成立。否则，根据引理 5.1，对每个 $\eta > 0$,

$$\begin{aligned}\lambda\{\mathcal{R}^*(h) > \eta\} &\leq \lambda\{s_*^F(h) > \eta/2\} + \lambda\{s_*^{2^k Q}(h) > \eta/2\}\\ &\leq 4\|s_*^F\|_{(1,1)}\frac{\|h\|_{L_1[0,1)}}{\eta}.\end{aligned}$$

将 $\|\mathcal{R}^*\|_{(1,1)} \leq 4\|s_*^F\|_{(1,1)}$ 与引理 5.3 结合，可得

$$\|s_*^F\|_{(1,1)} \geq \tfrac{1}{4}\|D_{b_d}\|_{L_1[0,1)}\big[1-(1-2^{-d})^L\big] \geq \frac{d}{12}\big(1-e^{-L/2^d}\big).$$

最后一个不等式用到了引理 2.1 和 $(1-2^{-d})^L \leq e^{-L/2^d}$。 □

6 发散

在本节中，我们证明推论 3.5 和定理 3.6。在全文中，$(\nu_j)_{j\in\mathbb{N}}$ 和$F = \{\nu_j :\ j \in \mathbb{N}\}$ 均与这些结果中的相同。

6.1 几乎处处发散

推论 *3.5* 的证明。根据定理 3.2，$\|s_*^F\|_{(1,1)} = \infty$，以及引理 2.2 可得到一个可积函数，其极大函数 s_*^F在一个具有正测度的集合上为无穷大。一个和的极大函数至多等于各加数的极大函数之和。因此，取正部和负部，我们得到一个非负函数 $g \in L_1[0,1)$，使得

$$A := \{x \in [0,1) :\ s_*^F(g)(x) = \infty\}, \qquad \lambda(A) > 0;$$

事实上，如果这两部分的极大函数都几乎处处有限，那么原函数的极大函数也几乎处处有限。

由于 $\sum_{\ell=1}^{\infty}\lambda(A) = \infty$，Stein 的引理 [39, 引理 1，第 146], 页 [39, 应用于二进群上的集合 A, A、……，给出了点 t_1, t_2, $\ldots \in [0,1)$，使得

$$\lambda\Big(\bigcup_{\ell=1}^{\infty}(A\dot{+}t_\ell)\Big) = 1, \qquad A\dot{+}t := \{x\dot{+}t : x \in A\}. \tag{6.1}$$

令 $\mathcal{X} := \prod_{\ell=1}^{\infty}[0,2^{-\ell}]$，并令 μ 为区间 $[0,2^{-\ell}]$上的归一化 Lebesgue 测度 $2^{\ell}\,d\xi_{\ell}$ 的乘积。对于 $\xi=(\xi_{\ell})_{\ell\in\mathbb{N}}\in\mathcal{X}$，置

$$f_{\xi} := \sum_{\ell=1}^{\infty} \xi_{\ell}\, g(\cdot \dot{+} t_{\ell}).$$

级数对每个 $\xi\in\mathcal{X}$ 都在 $L_1[0,1)$ 中收敛，并定义了一个非负函数，因为

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \|\xi_{\ell}\, g(\cdot \dot{+} t_{\ell})\|_{L_1[0,1)} = \|g\|_{L_1[0,1)} \sum_{\ell=1}^{\infty} \xi_{\ell} \le \|g\|_{L_1[0,1)}.$$

对于每个固定的 n，界 $\|s_n(h)\|_{L_\infty[0,1)} \le n\|h\|_{L_1[0,1)}$ 允许逐项应用 s_n，且所得级数一致收敛。由 (2.2)，对于几乎处处的 x，有

$$s_{\nu_j}(f_{\xi})(x) = \xi_{\ell}\, s_{\nu_j}(g)(x\dot{+}t_{\ell}) + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq\ell}}^{\infty} \xi_i\, s_{\nu_j}(g)(x\dot{+}t_i) \qquad (j,\ell\in\mathbb{N}). \tag{6.2}$$

固定 ℓ 和一个满足 (6.2) 及 $x\dot{+}t_{\ell}\in A$ 的点 $x\in A\dot{+}t_{\ell}$，并固定 ξ 的除 ξ_{ℓ} 外的所有坐标。于是 $\sup_{j\in\mathbb{N}}|s_{\nu_j}(g)(x\dot{+}t_{\ell})| = s_*^F(g)(x\dot{+}t_{\ell}) = \infty$。至多存在一个实数 u，使得序列

$$\Big(u\, s_{\nu_j}(g)(x\dot{+}t_{\ell}) + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq\ell}}^{\infty} \xi_i\, s_{\nu_j}(g)(x\dot{+}t_i)\Big)_{j\in\mathbb{N}}$$

有界。事实上，如果两个不同的数 u 和 u' 具有这一性质，那么两个序列 $\big((u-u')s_{\nu_j}(g)(x\dot{+}t_{\ell})\big)_{j\in\mathbb{N}}$ 之差将是有界的，这与 $\sup_{j\in\mathbb{N}}|s_{\nu_j}(g)(x\dot{+}t_{\ell})|=\infty$ 矛盾。由 (6.2)，对于 $u=\xi_{\ell}$，该序列为 $\big(s_{\nu_j}(f_{\xi})(x)\big)_{j\in\mathbb{N}}$。因此，$s_*^F(f_{\xi})(x)<\infty$ 至多对一个 $\xi_{\ell}\in[0,2^{-\ell}]$ 成立，而单点相对于 $2^{\ell}\,d\xi_{\ell}$ 的测度为零。根据 $\mathcal{X}$ 上的 Fubini定理，可得

$$\mu\big\{\xi\in\mathcal{X}:\ s_*^F(f_{\xi})(x)<\infty\big\}=0 \qquad \text{for almost every } x\in A\dot{+}t_{\ell}. \tag{6.3}$$

对于每个固定的 n，函数 $(x,\ \xi)\mapsto s_n(f_{\xi})(x)$ 是关于 $(x,\ \xi)$ 的可测函数级数之和，并且该级数一致收敛，因此它是联合可测的；$(x,\ \xi)\mapsto s_*^F(f_{\xi})(x)$ 也同样如此，因为 F 是可数的。由（6.1）可知，（6.3）中的等式对几乎处处的 $x\in[0,1)$ 成立。因此，对 $[0,1)\times\mathcal{X}$ 应用 Fubini定理可得

$$\int_{\mathcal{X}} \lambda\{x\in[0,1):\ s_*^F(f_{\xi})(x)<\infty\}\,d\mu(\xi) = \int_0^1 \mu\big\{\xi\in\mathcal{X}:\ s_*^F(f_{\xi})(x)<\infty\big\}\,dx = 0.$$

选择使得 $s_*^F(f_{\xi})$ 几乎处处成立的 $\xi\in\mathcal{X}$。于是 $\|f_{\xi}\|_{L_1[0,1)}>0$。每个固定的部分和都是有限的，因此无界性意味着

$$\limsup_{j\to\infty}|s_{\nu_j}(f_{\xi})(x)|=\infty \quad \text{for almost every } x\in[0,1).$$

函数 $f := f_{\xi}/\|f_{\xi}\|_{L_1[0,1)}$ 具备所有所需性质。 □

6.2 处处发散

在本小节中，我们通过调整 Goginava 和 Oniani 关于嵌套谱的构造 [13, 第 4] 节以及 Oniani 将几乎处处发散推广为处处发散的论证 [30, 引理 1 和 2]，证明定理 3.6。在每个阶段，使 Walsh 多项式的所有选定部分和较小的集合，都是由等长二进区间组成的并，因此其示性函数是一个 Walsh 多项式。我们将该示性函数乘以一个 Walsh 函数和一个标量，从而在该集合上得到较大的部分和之差。

对于任意 Walsh 多项式 P 和任意 $Z \subseteq \mathbb{Z}_+$，我们称 的频率$\widehat{\ }$属于 Z，如果 $P(m) = 0$ 对每个 $m \in \mathbb{Z}_+ \setminus Z$都成立。根据 s_n的定义，对于任意 n，$n' \in \mathbb{Z}_+$，

$$\begin{aligned} &s_n(P) = P && \text{if } n \geq n' \text{ and the frequencies of } P \text{ are below } n', \\ &s_n(P) = 0 && \text{if } n \leq n' \text{ and the frequencies of } P \text{ are at least } n'. \end{aligned}$$

下面的引理利用推论 3.5 中的函数，为任意$j_0 \in \mathbb{Z}_+$构造一个 Walsh 多项式 P，其频率至少为 2^{j_0}。在有限多个指标 $n \in F$ 上，$|s_n(P)|$ 的最大值在一个小测度集合之外很大。

引理 6.1。设 $(\nu_j)_{j\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathbb{N}$ 中的一个序列，满足 $\nu_1 < \nu_2 < \cdots$，令 $F := \{\nu_j : \ j \in \mathbb{N}\}$，并假设对每个 $K \in \mathbb{N}$都有 $\mathcal{W}_K(F) = \infty$。对于所有 $\ell \in \mathbb{N}$和 $j_0 \in \mathbb{Z}_+$，存在一个有限非空集合 $F' \subset \{n \in F : \ n > 2^{j_0}\}$ 以及一个 *Walsh* 多项式 P，使得

$$\begin{aligned} &\|P\|_{L_1[0,1)} \leq 4, \qquad \widehat{P}(m) = 0 \quad (0 \leq m < 2^{j_0}), \\ &\lambda\Big\{x \in [0,1) : \ \max_{n\in F'} |s_n(P)(x)| \leq 4^{\ell}\Big\} \leq 2^{1-\ell}. \end{aligned} \tag{6.4}$$

证明。令 f_0 为推论 3.5 中的非负函数。对于几乎处处的 x，序列 $(s_{\nu_j}(f_0)(x))_{j\in\mathbb{N}}$ 无界，因此

$$\sup_{n\in F,\ n>2^{j_0}} |s_n(f_0)(x)| = \infty \quad \text{for almost every } x \in [0,1).$$

考虑满足 $F \cap (2^{j_0}, N] \neq \varnothing$ 的 $N \in \mathbb{N}$。

集合 $\{x \in [0,1) : \max_{n\in F,\ 2^{j_0}<n\leq N} |s_n(f_0)(x)| \leq 2 \cdot 4^{\ell} + 1\}$ 随着 N 增大而递减，且它们的交集是零测集。根据测度的连续性，存在$N \in \mathbb{N}$，满足 $N > 2^{j_0}$，并且

$$\lambda\Big\{x \in [0,1) : \max_{n\in F,\ 2^{j_0}<n\leq N} |s_n(f_0)(x)| \leq 2 \cdot 4^{\ell} + 1\Big\} \leq 2^{-\ell}. \tag{6.5}$$

令 $F' := \{n \in F : \ 2^{j_0} < n \leq N\}$。根据稠密性，取一个 Walsh 多项式 h，满足 $\|f_0 - h\|_{L_1[0,1)} \leq 1/N$。由于 $\|f_0\|_{L_1[0,1)} = 1$，我们有 $\|h\|_{L_1[0,1)} \leq 2$，并且

$$|s_n(f_0 - h)| \leq n\|f_0 - h\|_{L_1[0,1)} \leq 1 \qquad (n \in F').$$

令 $P := h - E_{j_0}(h)$。由于 $E_{j_0}(h) = s_{2^{j_0}}(h)$，且 E_{j_0} 在 $L_1[0,1)$ 上是压缩的，我们得到

$$\widehat{P}(m) = 0 \quad (0 \leq m < 2^{j_0}), \qquad \|P\|_{L_1[0,1)} \leq 2\|h\|_{L_1[0,1)} \leq 4.$$

对于任意 $n \in F'$，我们有 $n > 2^{j_0}$，从而 $s_n(P) = s_n(h) - E_{j_0}(h)$。利用 $|E_{j_0}(h)| \le M(h)$ 以及关于 $s_n(f_0 - h)$ 的界，我们得到

$$\max_{n\in F'} |s_n(f_0)| \le \max_{n\in F'} |s_n(P)| + 1 + M(h).$$

因此，由 (6.5) 和 (2.1)，

$$\begin{aligned}\lambda\Big\{\max_{n\in F'} |s_n(P)| \le 4^\ell\Big\} &\le \lambda\Big\{\max_{n\in F'} |s_n(f_0)| \le 2\cdot 4^\ell + 1\Big\} + \lambda\{M(h) > 4^\ell\} \\ &\le 2^{-\ell} + \frac{\|h\|_{L_1[0,1)}}{4^\ell} \le 2^{-\ell} + 2\cdot 4^{-\ell} \le 2^{1-\ell}.\end{aligned}$$

这就证明了 (6.4)。 □

定理 *3.6* 的证明。令 $m_0'' := 0$。在第 $\ell \in \mathbb{N}$ 阶段，选取 $m_\ell \in F$，使得 $m_\ell > m_{\ell-1}''$，并选取 $j_\ell \in \mathbb{Z}_+$，使得 $m_\ell \le 2^{j_\ell}$。应用引理 6.1，其中 ℓ 和 $j_0 = j_\ell$，得到 F_ℓ' 和 P_ℓ，并令

$$Y_\ell := \Big\{x \in [0,1) : \max_{n\in F_\ell'} |s_n(P_\ell)(x)| \le 4^\ell\Big\}, \qquad \lambda(Y_\ell) \le 2^{1-\ell}.$$

选取 $k_\ell \in \mathbb{N}$，使得 $k_\ell > j_\ell$，从而 $\max F_\ell'$，且 P_ℓ 的所有频率都小于 2^{k_ℓ}。由于 F 无界，我们可以选取 m_ℓ'，$m_\ell'' \in F$，使得该构造满足

$$\begin{gathered} m_{\ell-1}'' < m_\ell \le 2^{j_\ell} < \min F_\ell', \qquad \max F_\ell' < 2^{k_\ell} \le m_\ell' < m_\ell'', \\ \widehat{P_\ell}(m) = 0 \quad (m \notin [2^{j_\ell}, 2^{k_\ell})), \qquad m_\ell'' - m_\ell' \ge 2^{k_\ell+1}. \end{gathered} \tag{6.6}$$

对于任意 $n \in F_\ell'$，都有 $n < 2^{k_\ell}$，因此 $s_n(P_\ell)$ 在每个长度为 2^{-k_ℓ} 的二进区间上都是常数。因此，Y_ℓ 是此类区间的并，且

$$\mathbf{1}_{Y_\ell} = E_{k_\ell}(\mathbf{1}_{Y_\ell}) = s_{2^{k_\ell}}(\mathbf{1}_{Y_\ell}).$$

Let

$$u_\ell := 2^{k_\ell}\left\lceil m_\ell'/2^{k_\ell}\right\rceil, \qquad G_\ell := 2^{\ell/2} w_{u_\ell}\mathbf{1}_{Y_\ell}.$$

由于 u_ℓ 是 2^{k_ℓ} 的倍数，Walsh 乘积法则给出

$$w_{u_\ell} w_m = w_{u_\ell \oplus m} = w_{u_\ell + m} \qquad (0 \le m < 2^{k_\ell}).$$

根据 u_ℓ 和（6.6）的定义，我们有

$$m_\ell' \le u_\ell, \qquad u_\ell + 2^{k_\ell} < m_\ell' + 2^{k_\ell+1} \le m_\ell''.$$

因此，G_ℓ 的频率位于 $[u_\ell, u_\ell + 2^{k_\ell}) \subseteq [m_\ell', m_\ell'')$ 中。利用 $|w_{u_\ell}| = 1$ 和 $\lambda(Y_\ell) \le 2^{1-\ell}$，我们得到

$$|G_\ell| = 2^{\ell/2}\mathbf{1}_{Y_\ell}, \qquad \|G_\ell\|_{L_1[0,1)} = 2^{\ell/2}\lambda(Y_\ell) \le 2^{1-\ell/2}.$$

该级数

$$f := \sum_{\ell=1}^{\infty} (2^{-\ell} P_\ell + G_\ell)$$

在 $L_1[0,1)$ 中收敛，因为 $\|P_\ell\|_{L_1[0,1)} \le 4$ 且 $\sum_{\ell=1}^{\infty} 2^{1-\ell/2} < \infty$。

对于每个 n，我们都可以逐项应用 s_n，由 $|s_n(h)(x)| \le n\|h\|_{L_1[0,1)}$。由 (6.6) 可知，$\ell$ 之前各阶段的频率都小于 m_ℓ，而 ℓ 之后各阶段的频率都至少为 m''_ℓ。在阶段 ℓ内，P_ℓ 的频率都小于 m'_ℓ，而 G_ℓ 的频率则位于$[m'_\ell, m''_\ell)$。因此

$$s_n(f) - s_{m_\ell}(f) = 2^{-\ell} s_n(P_\ell) \qquad (n \in F'_\ell), \tag{6.7}$$

$$s_{m''_\ell}(f) - s_{m'_\ell}(f) = G_\ell. \tag{6.8}$$

利用 (6.7)、(6.8) 以及 Y_ℓ 的定义，对于任意 $x \in [0,1)$，我们得到

$$\max_{n\in F'_\ell} \big|s_n(f)(x) - s_{m_\ell}(f)(x)\big| > 2^\ell \qquad \text{if } x \notin Y_\ell,$$

$$\big|s_{m''_\ell}(f)(x) - s_{m'_\ell}(f)(x)\big| = |G_\ell(x)| = 2^{\ell/2} \qquad \text{if } x \in Y_\ell.$$

由三角不等式可得,

$$\max_{n\in F'_\ell \cup \{m_\ell, m'_\ell, m''_\ell\}} |s_n(f)(x)| \ge 2^{\ell/2-1} \qquad (x \in [0,1)).$$

由 (6.6) 可得,

$$F'_\ell \cup \{m_\ell, m'_\ell, m''_\ell\} \subseteq F \cap [m_\ell, \infty), \qquad m_\ell \to \infty.$$

令 $\ell \to \infty$，可得 $\limsup_{j\to\infty} |s_{\nu_j}(f)(x)| = \infty$，对每个 $x \in [0,1)$ 都成立。至此，定理 3.6 的证明完成。 □

7 推论与例子

在本节中，我们应用定理 3.2 和 3.6 来恢复早期结果，并给出两个例子。在例 7.6 中，我们沿着一个指标集获得对 f 的几乎处处收敛（对每个 $f \in L_1[0,1)$），该指标集无法被有限多个具有有界变差或分离谱的集合覆盖。在例 7.7 中，我们沿着一个不存在与具有嵌套谱的序列保持有界距离的子序列的序列，得到某些 $f \in L_1[0,1$ 的处处无界部分和。

7.1 早期结果的恢复

在本小节中，我们将定理 3.2 应用于具有有界变差 [8, 37]的序列以及具有分离谱 [18] 的序列。随后，我们将推论 3.5 和定理 3.6 应用于具有嵌套谱和无界变差的序列，这些序列由 Goginava 和 Oniani [13] 研究。我们首先回顾序列的三个条件。

定义 7.1。设 $(\nu_j)_{j\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathbb{N}$ 中的一个序列，满足 $\nu_1 < \nu_2 < \cdots$。若 $\sup_{j\in\mathbb{N}} V(\nu_j) < \infty$，则称其具有有界变差；若具有分离谱，则

$$\max \mathrm{Sp}(\nu_j) < \min \mathrm{Sp}(\nu_{j+1}) \qquad (j \in \mathbb{N}), \tag{7.1}$$

若具有嵌套谱，则

$$\mathrm{Sp}(\nu_{j+1}) \cap [0, \max \mathrm{Sp}(\nu_j)] = \mathrm{Sp}(\nu_j) \qquad (j \in \mathbb{N}). \tag{7.2}$$

如果 $\mathbb{N}$ 的递增枚举具有某种性质，那么该集合也具有这种性质。

具有分离谱的序列与具有嵌套谱的序列属于互不相交的类别，并且这两个类别都与具有有界变差的序列类别相交，但二者均不包含后者，后者也不包含二者。事实上，根据 (7.1)，(7.2) 的左端为空，而 $\operatorname{Sp}(\nu_j) \neq \varnothing$，因为 $\nu_j \in \mathbb{N}$。序列 $(2^j)_{j\in\mathbb{N}}$ 和 $(2^j-1)_{j\in\mathbb{N}}$ 具有有界变差；前者具有分离谱但没有嵌套谱，后者具有嵌套谱但没有分离谱。另一方面，具有分离谱的序列可能具有无界变差：序列 $\nu_j := \sum_{i=0}^{j-1} 2^{j^2+2i}$ $(j \in \mathbb{N})$ 满足 $V(\nu_j) = 2j$，且 $\max \operatorname{Sp}(\nu_j) = j^2+2j-2 < (j+1)^2 = \min \operatorname{Sp}(\nu_{j+1})$。类似地，序列 $\nu_j := \sum_{i=0}^{j} 4^i$ $(j \in \mathbb{N})$ 具有嵌套谱，且 $V(\nu_j) = 2j+2$。

推论 7.2 ([8, 37])。 设 $(\nu_j)_{j\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathbb{N}$ 中一个有界变差的递增序列。那么，对每个 $f \in L_1[0,1)$，$\lim_{j\to\infty} s_{\nu_j}(f) = f$ 几乎处处成立。

证明。 令 $F := \{\nu_j : j \in \mathbb{N}\}$，并选取满足 $V(\nu_j) \le K$ 的 $K \in \mathbb{N}$，使其对所有 $j \in \mathbb{N}$ 都成立。由 (2.12)，

$$V(\nu_j \bmod 2^k) \le V(\nu_j) \le K \qquad (j \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{Z}_+).$$

因此，根据定义 3.1，$\mathcal{H}_{k,\,K}(F) = \varnothing$ 对每个 $k \in \mathbb{Z}_+$ 都成立，所以 $\mathcal{W}_K(F) = 0$，而定理 3.2 给出了收敛性。 □

推论 7.3 ([18])。 设 $(\nu_j)_{j\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathbb{N}$ 中一个具有分离谱的递增序列。那么，对每个 $f \in L_1[0,1)$，$\lim_{j\to\infty} s_{\nu_j}(f) = f$ 几乎处处成立。

证明。 对于 $n \in \mathbb{N}$ 和 $k \in \mathbb{Z}_+$，商 $\lfloor n/2^k \rfloor$ 包含 n 中位置不小于 k 处的二进制位，而余数 $n \bmod 2^k$ 包含位置小于 k 处的二进制位。因此

$$\lfloor n/2^k \rfloor \in \mathbb{N} \iff \max \operatorname{Sp}(n) \ge k, \qquad n \bmod 2^k \in \mathbb{N} \iff \min \operatorname{Sp}(n) < k. \tag{7.3}$$

令 $F := \{\nu_j : j \in \mathbb{N}\}$，并固定 $k \in \mathbb{Z}_+$。根据定义 3.1，$\mathcal{H}_{k,1}(F)$ 的每个元素都是某个满足 $\nu_j \bmod 2^k \in \mathbb{N}$ 的项 ν_j 的商 $\lfloor \nu_j/2^k \rfloor \in \mathbb{N}$；对于这个 j，(7.3) 给出

$$\min \operatorname{Sp}(\nu_j) < k \le \max \operatorname{Sp}(\nu_j).$$

由 (7.1)，区间 $[\min \operatorname{Sp}(\nu_j), \max \operatorname{Sp}(\nu_j)]$，$j \in \mathbb{N}$ 两两不相交。因此至多有一个 j 满足这些不等式，并且 $\#\mathcal{H}_{k,1}(F) \le 1$。于是 $\mathcal{W}_1(F) \le 1$，定理 3.2 给出收敛性。 □

引理 7.4。 设 $(\nu_j)_{j\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathbb{N}$ 中具有嵌套谱的递增序列。则

$$\nu_{j'} \bmod 2^{1+\max \operatorname{Sp}(\nu_j)} = \nu_j \qquad (1 \le j \le j'). \tag{7.4}$$

特别地，$(\nu_j)_{j\in\mathbb{N}}$ 的每个子序列都具有嵌套谱。

证明。 由（7.2），对于 $i \in \mathbb{N}$，$\operatorname{Sp}(\nu_i) \subset \operatorname{Sp}(\nu_{i+1})$，因此

$$\max \operatorname{Sp}(\nu_j) \le \max \operatorname{Sp}(\nu_i) \qquad (1 \le j \le i).$$

令 $1 \le j \le i$。则 $[0, \max \operatorname{Sp}(\nu_j)] \subset [0, \max \operatorname{Sp}(\nu_i)]$，，并将（7.2）两边分别与 i（代替 j）以及 $[0, \max \operatorname{Sp}(\nu_j)]$ 取交集，得到

$$\operatorname{Sp}(\nu_{i+1}) \cap [0, \max \operatorname{Sp}(\nu_j)] = \operatorname{Sp}(\nu_i) \cap [0, \max \operatorname{Sp}(\nu_j)] \qquad (1 \le j \le i). \tag{7.5}$$

将（7.5）应用于 $i=j,\ j+1,\ \ldots\ldots,\ j'-1$，得到

$$\mathrm{Sp}(\nu_{j'})\cap[0,\max\mathrm{Sp}(\nu_j)]=\mathrm{Sp}(\nu_j)\cap[0,\max\mathrm{Sp}(\nu_j)]=\mathrm{Sp}(\nu_j)\qquad(1\le j\le j').$$

由于对于 $n,k\in\mathbb{Z}_+$，有 $\mathrm{Sp}(n \bmod 2^k)=\mathrm{Sp}(n)\cap[0,k-1]$，故这就是 (7.4)。若 $j_1<j_2<\cdots$，则取 $j=j_l$ 和 $j'=j_{l+1}$，由 (7.4) 可得子序列 $(\nu_{j_l})_{l\in\mathbb{N}}$ 满足 (7.2)。 □

推论 7.5. 设 $(\nu_j)^{j\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathbb{N}$ 中一个具有嵌套谱的递增序列，并且满足$\sup_{j\in\mathbb{N}}V(\nu_j)=\infty$。那么存在一个函数 $f\in L_1[0,1)$，使得

$$\limsup_{j\to\infty}|s_{\nu_j}(f)(x)|=\infty\quad \textit{for every } x\in[0,1),$$

并且存在一个具有相同性质的非负函数，几乎处处成立。

去掉非负函数这一条件后，推论 7.5 归功于 Goginava 和 Oniani[13,定理 2.1]。

证明。令 $F:=\{\nu_j:\ j\in\mathbb{N}\}$。设 $K\in\mathbb{N}$，并取满足 $V(\nu_{j_0})>K$ 的 j_0。令 $j>j_0$。将 (7.4) 中的 j 和 j' 分别替换为 j_0 和 j，则差 $\nu_j-\nu_{j_0}$ 能被 $2^{1+\max\mathrm{Sp}(\nu_{j_0})}$ 整除，且为正。此外，$1\le\nu_{j_0}<2^{1+\max\mathrm{Sp}(\nu_{j_0})}$ 且 $V(\nu_{j_0})>K$。根据定义 3.1，取商 $q:=(\nu_j-\nu_{j_0})/2^{1+\max\mathrm{Sp}(\nu_{j_0})}$ 和余数 $a:=\nu_{j_0}$，

$$\frac{\nu_j-\nu_{j_0}}{2^{1+\max\mathrm{Sp}(\nu_{j_0})}}\in\mathcal{H}_{1+\max\mathrm{Sp}(\nu_{j_0}),K}(F)\qquad(j>j_0).$$

这些商随 j 严格递增，因此 $\mathcal{W}_K(F)\ge\#_{\mathrm{Sp}(\nu_{j_0})\ K}(F)=\infty$。由于 K 是任意的，定理 3.6 和推论 3.5 给出了这两个函数。 □

7.2 收敛示例

如果去掉一个整数中若干个最低的非零位，那么在余数非零的尺度上，它的商不会改变。下例中的集合是有限集的并，这些有限集占据互不相交的位置区间，并且每个有限集中的元素都可以由其最大元素以这种方式得到。在这个并集上，部分和几乎处处收敛，但该并集无法被有限多个满足推论 7.2 或推论 7.3 条件的集合覆盖。

例 7.6。 对于 $j\in\mathbb{N}$ 和 $l\in\mathbb{Z}_+$，其中 $l<j$，定义

$$m_{j,l}:=\sum_{i=l}^{j-1}2^{2j^2+2i},\qquad F_j:=\{m_{j,l}:\ 0\le l<j\},\qquad F:=\bigcup_{j=1}^{\infty}F_j.$$

Then

$$\mathcal{W}_1(F)\le 1,\qquad \|s_*^F\|_{(1,1)}\lesssim 1,\qquad \sup_{n\in F}V(n)=\infty.$$

沿着 F 的递增枚举得到的部分和对每个 $f\in L_1[0,1)$ 几乎处处收敛于 f。然而，F 无法被有限个各自具有有界变差或分离谱的集合所覆盖。

证明。对于任意 $j \in \mathbb{N}$ 和 $0 \le l < j$，有

$$\mathrm{Sp}(m_{j,l}) = \{2j^2 + 2i : \ l \le i < j\} \subseteq [2j^2, 2j^2 + 2j - 2].$$

由于 $2j^2 + 2j - 2 < 2(j+1)^2$,，区间 $[2j^2, 2j^2 + 2j - 2]$ 两两不交。每个 F_j 都有 j 个不同元素，因此 F 是无限的。$j - l$ 在 $m_{j,\,l}$ 的二进制展开中的数字 1 之间由零隔开。因此

$$V(m_{j,l}) = 2(j-l), \qquad V(m_{j,0}) = 2j \longrightarrow \infty.$$

设 $k \in \mathbb{Z}_+$。根据 (7.3)，商 $\lfloor m_{j,\,l}/2^k \rfloor$ 和余数 $m_{j,\,l}$ 除以 2^k，二者均为正，当且仅当

$$\min \mathrm{Sp}(m_{j,l}) = 2j^2 + 2l < k \le 2j^2 + 2j - 2 = \max \mathrm{Sp}(m_{j,l}).$$

由于区间 $[2j^2, 2j^2 + 2j - 2]$的不交性，至多有一个 F_j 包含这样一个元素：它在尺度 k 下的商和余数均为正。对于这个 j，差 $m_{j,\,0} - m_{j,\,l}$ 是位置严格低于 $2j^2 + 2l < k$处的若干个二的幂之和。因此，所有这些元素在位置不低于 k处的数字都相同，并且

$$\left\lfloor m_{j,l}/2^k \right\rfloor = \left\lfloor m_{j,0}/2^k \right\rfloor.$$

因此，对于每个 k，$\#\mathcal{H}_{k,\,1}(F) \le 1$。定理 3.2 和 3.4 给出了最大界和收敛性；结合 $K = 1$ 和 $N = 1$，(3.4) 得出 $\|s_*^F\|_{(1,1)} \lesssim 1$。

最后，假设 F 被有限多个集合覆盖，每个集合都有有界变差或分离谱。具有有界变差的集合只有有限多个，因此存在 $K \in \mathbb{Z}_+$，使得对于这些集合中的每个元素 n，$V(n) \le K$。令$m \ge 0$ 为具有分离谱的集合的数量。满足$V(n) > K$ 的元素 $n \in F$ 不属于任何具有有界变差的集合，因此必属于m 个具有分离谱的集合中的一个。由 (7.1)，当 n遍历具有分离谱的集合时，区间 $[\min \mathrm{Sp}(n),\ \max \mathrm{Sp}(n)]$, 两两不相交。$F_j$ 中的所有元素的最高占据位置都是 $2j^2 + 2j - 2$，因此每个具有分离谱的集合至多包含 F_j中的一个元素。另一方面，对于 $0 \le l < j$,

$$V(m_{j,l}) = 2(j-l) > K \iff l \le j - \lfloor K/2 \rfloor - 1,$$

因此

$$\#\{n \in F_j : \ V(n) > K\} = j - \lfloor K/2 \rfloor \qquad (j > \lfloor K/2 \rfloor).$$

这些元素属于具有分离谱的 m 集合，每个集合至多包含一个元素。取 $j = m + \lfloor K/2 \rfloor + 1$，我们得到

$$m + 1 = \#\{n \in F_j : \ V(n) > K\} \le m,$$

矛盾。 □

7.3 一个发散例子

例 7.6 中的递增枚举 $(\nu_j)_{j\in\mathbb{N}}$ 满足 $\min \mathrm{Sp}(\nu_j) \to \infty$。对于每个具有分离谱的序列，同样的极限也成立。在下面的例子中，我们构造一个具有该极限且对于每个$K \in \mathbb{N}$ 都满足 $\mathcal{W}_K(\{\nu_j : j \in \mathbb{N}\}) = \infty$ 的序列。

对于任意 $f \in L_1[0,1)$ 和 $m,n \in \mathbb{N}$，系数界 $|\widehat{f}(r)| \le \|f\|_{L_1[0,1)}$ 给出

$$|s_n(f)(x) - s_m(f)(x)| \le |n-m|\|f\|_{L_1[0,1)} \qquad (x \in [0,1)).$$

因此，正如 Goginava 和 Oniani 在 [13, 注 2.2], 中所指出的，某一点处部分和的无界性会传递到任何包含给定序列作为子序列或与之相距有界的序列。因此，推论 7.5 的两个结论都适用于这样的每个序列：它含有一个子序列，该子序列与一个具有嵌套谱和无界变差的序列相距有界。下一个例子中的序列不含有任何与具有嵌套谱的序列相距有界的子序列，因此，它的发散不能以这种方式由推论 7.5 得出。

例 7.7. 由以下方式定义的序列$(\nu_j)_{j\in\mathbb{N}}$

$$\nu_j := \sum_{i=j}^{2j} 4^i \qquad (j \in \mathbb{N})$$

满足 $\min \mathrm{Sp}(\nu_j) = 2j \to \infty$，但存在一个函数 $f \in L_1[0,1)$ 使得

$$\limsup_{j\to\infty} |s_{\nu_j}(f)(x)| = \infty \quad \textit{for every } x \in [0,1),$$

以及一个几乎处处具有相同性质的非负函数。不存在递增序列 $(m_l)_{l\in\mathbb{N}}$，其中 $\mathbb{N}$具有嵌套谱，也不存在子序列 $(\nu_{j_l})_{l\in\mathbb{N}}$使得

$$\sup_{l\in\mathbb{N}} |m_l - \nu_{j_l}| < \infty.$$

特别地，$(\nu_j)_{j\in\mathbb{N}}$ 的任何无限子序列都不具有嵌套谱。

证明。令 $F := \{\nu_j : j \in \mathbb{N}\}$。该序列是严格递增的，因为

$$\nu_{j+1} - \nu_j = 4^{2j+1} + 4^{2j+2} - 4^j > 0.$$

固定 $N \in \mathbb{N}$ 并取 $N \le j \le \lfloor 3N/2 \rfloor$。除以 $2^{4N} = 4^{2N}$ 所得的余数和商为

$$\nu_j \bmod 4^{2N} = \sum_{i=j}^{2N-1} 4^i, \qquad \lfloor \nu_j / 4^{2N} \rfloor = \sum_{i=0}^{2j-2N} 4^i.$$

余数有 $2N-j$ 个孤立的二进制 1，因此

$$V\big(\nu_j \bmod 4^{2N}\big) = 2(2N-j) \ge N.$$

这些商均为正数且彼此不同，因为它们最高的占用二进制位置是 $4j-4N$。对于固定的 $K\in\mathbb{N}$，取 $N>K$。那么所有这些商都属于 $\mathcal{H}_{4N,\,K}(F)$，并且

$$\#\mathcal{H}_{4N,K}(F)\geq\lfloor 3N/2\rfloor-N+1=\lfloor N/2\rfloor+1\longrightarrow\infty\qquad(N\to\infty).$$

因此，对每个 K，$\mathcal{W}_K(F)=\infty$，而定理 3.6 和推论 3.5 给出了所声称的函数。

最后，假设严格递增序列 $(m_l)_{l\in\mathbb{N}}$ 在 $\mathbb{N}$ 中具有嵌套谱，并且对所有 l，$|m_l-\nu_{j_l}|\leq C$，其中 $C\in\mathbb{Z}_+$ 固定。差值只取有限个整数值。取一个子序列后，存在一个固定整数 δ，使得

$$m_l=\nu_{j_l}+\delta\qquad(l\in\mathbb{N}).$$

由引理 7.4，新的序列 $(m_l)_{l\in\mathbb{N}}$ 仍具有嵌套谱。选取一个足够大的指标 l_0，使得 $2^{1+\max\mathrm{Sp}(m_{l_0})}>|\delta|$；这是可能的，因为 $m_l\to\infty$。由 (7.4)，

$$m_l\bmod 2^{1+\max\mathrm{Sp}(m_{l_0})}=m_{l_0}\qquad(l\geq l_0).\tag{7.6}$$

对所有充分大的 l，整数 ν_{j_l} 可被 $2^{1+\max\mathrm{Sp}(m_{l_0})}$ 整除，因为其最低占据位置是 $2j_l\to\infty$。固定这样一个 $l\geq l_0$。由于 $m_l=\nu_{j_l}+\delta$，我们有

$$m_{l_0}-\delta=\nu_{j_l}-(m_l-m_{l_0}),$$

右侧的两项都能被 $2^{1+\max\mathrm{Sp}(m_{l_0})}$ 整除：第一项依据 l，第二项依据（7.6）。此外，$m_{l_0}-\delta=\nu_{j_{l_0}}$、$m_{l_0}<2^{1+\max\mathrm{Sp}(m_{l_0})}$ 和 $|\delta|<2^{1+\max\mathrm{Sp}(m_{l_0})}$，因此

$$0<\nu_{j_{l_0}}=m_{l_0}-\delta<2\cdot 2^{1+\max\mathrm{Sp}(m_{l_0})}.$$

因此，$\nu_{j_{l_0}}$ 是 $2^{1+\max\mathrm{Sp}(m_{l_0})}$ 的正整数倍，且小于该幂的两倍，所以 $\nu_{j_{l_0}}=2^{1+\max\mathrm{Sp}(m_{l_0})}$。这是不可能的，因为每个 ν_j 都有 $j+1\geq 2$ 个占用的二进制位置。断言得证。

□

声明

伦理审批 不适用。

利益冲突作者声明不存在任何利益冲突。

资助 本项目获得了中国国家自然科学基金（项目批准号：12671164、W2411005、12431006 和 12371093）以及湖南省自然科学基金（项目批准号：2025JJ40007）的部分资助。

数据和材料的可用性 本文不适用数据共享，因为本研究期间未生成或分析任何数据集。

参考文献

[1] *N. Areshidze*、*L.-E. Persson* 和 *G. Tephnadze*，*Vilenkin–Fourier*级数部分和及*F´ejer*平均的几乎处处收敛性，《*Mediterr. J. Math.*》*22*（*2025*年），第*15*篇，*17*页。[2] *P. Billard*，关于*(0,1)*空间中函数的*Fourier–Walsh*级数几乎处处收敛，《*Studia Math.*》*28*（*1967*年），*363–388*。[3] *I. Blahota* 和 *G. G´at*，*Walsh–Paley Fourier*部分和子序列的*Ces`aro*平均几乎处处发散，预印本（*2026*年），*arXiv:2606.13879*。[4] *L. Carleson*，关于*Fourier*级数部分和的收敛性与增长，《*Acta Math.*》*116*（*1966*年），*135–157*。[5] *C. Demeter*，*Carleson*定理指南，《*Rocky Mountain J. Math.*》*45*（*2015*年），*169–212*。[6] *F. Di Plinio*，L^1附近的稀疏*Fourier*级数与*Walsh–Fourier*级数，《*Collect. Math.*》*65*（*2014*年），*219–232*。[7] *Y. Q. Do* 和 *M. T. Lacey*，关于稀疏*Walsh–Fourier*级数的收敛性，《*Bull. Lond. Math. Soc.*》*44*（*2012*年），*241–254*。[8] *N. J. Fine*，关于*Walsh*函数，《*Trans. Amer. Math. Soc.*》*65*（*1949*年），*372–414*。[9] *G. G´at*，*Walsh–Fourier*级数可积函数的部分和子序列的*Fej´er*平均与对数平均的几乎处处收敛，《*J. Approx. Theory*》*162*（*2010*年），*687–708*。[10] *G. G´at*，关于*Walsh–Fourier*级数某些部分和子序列的*Fej´er*平均的收敛性，《*Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Comput.*》*49*（*2019*年），*187–198*。[11]*U. Goginava*，沿子序列取*Walsh– Fourier*部分和的算术平均的几乎处处收敛，预印本（*2026*年），*arXiv:2605.05146*。[12] *U. Goginava* 和 *F. Mukhamedov*，二进制鞅变换与加权*Walsh–Carleson*算子，预印本（*2026*年），*arXiv:2605.07667*。[13] *U. Goginava* 和 *G. G. Oniani*，关于*Walsh– Fourier*部分和子序列的发散，《*J. Math. Anal. Appl.*》*497*（*2021*年），第*124900*篇。[14] *R. P. Gosselin*，关于*Fourier*级数的发散，《*Proc. Amer. Math. Soc.*》*9*（*1958*年），*278–282*。[15] *D. C. Harris* 和 *W. R. Wade*，群 2^ω上的发散集，《*Trans. Amer. Math. Soc.*》*240*（*1978*年），*385–392*。

[16] *R. A. Hunt*，《傅里叶级数的收敛性》，载于《正交展开及其连续类比》（会议论文集，爱德华兹维尔，伊利诺伊州，*1967*年），南伊利诺伊大学出版社，卡本代尔，伊利诺伊州，*1968*年，第*235–255*页。[17] *Y. Katznelson*，《关于三角级数发散集合》，*Studia Math. 26*（*1966*年），*301–304*。[18] *S. V. Konyagin*，《傅里叶–沃尔什部分和子序列》，数学札记*54*（*1993*年），*1026–1030*。[19] *S. V. Konyagin*，《三角傅里叶级数部分和子序列处处发散》，*Steklov*数学研究所论文集（*2005*年），增刊*2*，*S167–S175*。[20] *S. V. Konyagin*，《傅里叶级数的几乎处处收敛与发散》，载于《国际数学家大会论文集》，马德里，*2006*年，第*II*卷，欧洲数学学会，苏黎世，*2006*年，第*1393–1403*页。[21] *M. T. Lacey*和*C. Thiele*，《*Carleson*算子有界性的证明》，*Math. Res. Lett. 7*（*2000*年），*361–370*。[22] *V. Lie*，《沿稀疏子序列的傅里叶部分和序列的逐点收敛性》，*J. Funct. Anal. 263*（*2012*年），*3391–3411*。[23] *V. Lie*，《关于*Carleson*算子在 L^1附近的有界性》，*Rev. Mat. Iberoam. 29*（*2013*年），*1239–1262*。[24] *V. Lie*，《傅里叶级数的逐点收敛（*I*）：关于*Konyagin*猜想》，*J. Eur. Math. Soc. 19*（*2017*年），*1655–1728*。[25] *V. Lie*，《傅里叶级数的逐点收敛（*II*）：稀疏*Carleson*算子的强 L^1 情形》，*Adv. Math. 357*（*2019*年），论文编号*106831*。[26] *S. F. Lukomskij*，《可积函数的傅里叶–沃尔什平方部分和几乎处处收敛的判据》，数学文集*186*（*1995*年），*1057–1070*。[27] *S. F. Lukomskij*，《多重沃尔什级数：依测度收敛与几乎处处收敛》，*Dokl. Math. 57*（*1998*年），*81–82*。[28] *F. Nazarov*、*R. Oberlin*和*C. Thiele*，《多重频率的*Calderón–Zygmund*分解及其在*Bourgain*引理推广中的应用》，*Math. Res. Lett. 17*（*2010*年），*529–545*。[29] *R. Oberlin*和*C. Thiele*，《双线性希尔伯特变换的沃尔什模型的新一致界》，*Indiana Univ. Math. J. 60*（*2011*年），*1693–1712*。[30] *G. G. Oniani*，《紧阿贝尔群的特征标系统中傅里叶级数的发散集合》，数学札记*112*（*2022*年），*100–108*。

[31] *G. G. Oniani*，《算子网的几乎处处收敛与弱型极大不等式》，*Fund. Math. 262*（*2023*年），*287–304*。[32] *R. E. A. C. Paley*，《一组非凡的正交函数级数（*I*）》，*Proc. London Math. Soc.*（*2*）*34*（*1932*年），*241–264*。[33] *L.-E. Persson*、*G. Tephnadze*和*F. Weisz*，《鞅*Hardy*空间与一维*Vilenkin–Fourier*级数的求和性》，*Birkhäuser*，沙姆，*2022*年。[34] *S. Sawyer*，《弱型极大不等式》，*Ann. of Math.*（*2*）*84*（*1966*年），*157–174*。.[35] *F. Schipp*，《可积函数按*W*系统展开的部分和的数量级》，*Acta Sci. Math.*（*Szeged*）*28*（*1967*年），*123–134*。.[36] *F. Schipp*，《沃尔什–傅里叶级数的发散》，*Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math. 12*（*1969*年），*49–62*。[37] *F. Schipp*、*W. R. Wade*和*P. Simon*，在*J. Pál*协助下，《*Walsh*级数：二进调和分析导论》，*Adam Hilger*，布里斯托尔和纽约，*1990*年。[38] *P. Sjölin*，《*Paley*不等式与*Walsh–Fourier*级数的几乎处处收敛》，*Ark. Mat. 7*（*1969*年），*551–570*。[39] *E. M. Stein*，《关于算子序列的极限》，*Ann. of Math.*（*2*）*74*（*1961*年），*140–170*。[40] *C. Thiele*，《四分位算子与*Walsh*级数的逐点收敛》，*Trans. Amer. Math. Soc. 352*（*2000*年），*5745–5766*。[41] *V. Totik*，《关于傅里叶级数的发散》，*Publ. Math. Debrecen 29*（*1982*年），*251–264*。[42] *J. L. Walsh*，《一组闭的规范正交函数》，*Amer. J. Math. 45*（*1923*年），*5–24*。[43] *F. Weisz*，《鞅*Hardy*空间及其在*Fourier*分析中的应用》，数学讲义*1568*，*Springer*，柏林，*1994*年。[44] *F. Weisz*，《多维*Fourier*级数的求和性与*Hardy*空间》，*Mathematics and Its Applications 541*，*Kluwer Academic Publishers*，多德雷赫特、波士顿、伦敦，*2002*年。