arXiv:2611.32363v1 [math.OA] 24 Nov 2026

复数域-代数上的非交换可测空间的单子性

Fosco Loregian 与 Antonio Lorenzin

摘要。近期，Tobias Fritz 与第二作者将 σC^*-代数视为可测空间的一种暂定的非交换类比。我们通过确立 σC^*-代数在 C^*-代数之上的单子性，推进了这一类比，并证明了若干对范畴论和算子代数领域都很有意义的结果。具体而言，我们证明：

- 相应的概率态射，即 σ-完全正保序映射，可以通过一个与 Giry 单子密切相关的余单子来描述。等价地， σ-完全正保序映射可由一个泛性质刻画。
- σC^*-代数与 σ-同态所构成的范畴是局部 $\aleph_1$-可表的。
- σC^*-代数具有一种张量积，该张量积由 C^*-代数的最大张量积诱导，并满足类似的泛性质。
- CP-仪器的概念被定义为从一个 σ-代数到完全正映射空间的 σ-可加赋值，可以通过将目标取为 σC^*-代数之间的 σ-正规完全正映射集合，调整到这一情形。这将与从前一项的张量积出发的 σ-完全正保序映射建立双射对应。

目录

1. 引言 1 2. σC^*-代数的预备知识与初步内容 4 3. σC^*-代数在 C^*-代数上的单子性 6 4. 非交换的抽象 Giry（余）单子 10 5. $\aleph_1$- σC^*-代数的局部可呈示性 14 6. σC^*-代数的张量积 16 7. σCP-仪器与张量积 22 参考文献 27

1. 引言

Gelfand 对偶 [Joh82, §IV.4] 是算子代数中的一个著名结果，它确立了带有 $*$-同态的（含幺）交换的 C^*-代数范畴，与带有连续映射的紧 Hausdorff 空间范畴之间的逆变等价性。结合 Riesz–Markov–Kakutani 表示定理 [Rud87, Theorem 2.14] ——该定理保证紧 Hausdorff 空间上的正则 Borel 概率测度与 $C(X)$ 上的态（即完全正且含幺（cpu）泛函）之间存在双射对应——这一观点促使人们采用 C^*-代数作为非交换概率的自然框架。近年来，Furber 和 Jacobs [FJ15] 通过确立一种概率的 Gelfand 对偶，进一步支持了这一做法：在（含幺）交换的 C^*-代数之间的完全正保序映射，与紧 Hausdorff 空间之间的连续的 马尔可夫核相对应。

然而，至关重要的是，尽管测度分解（或者更通俗地说，“广义贝叶斯法则”）能够产生马尔可夫核，但它很少产生连续核。

为克服这一局限，人们通常转而采用冯·诺伊曼代数，并常将其描述为“非交换可测空间”。尽管这一说法有充分的动机，但它掩盖了一个重要区别：交换冯·诺伊曼代数“对零测集视而不见”，因为其元素是

随机变量的等价类（关于几乎处处相等）。[1] 形式上，交换冯·诺伊曼代数对应于测度代数，即通过将 σ-代数按零测集取商而得到的完备布尔代数。

这起初或许看起来只是无伤大雅的技术细节，但却会带来不理想的后果。例如，人们可能希望同时处理 $\mathbb{R}$ 上的勒贝格测度与狄拉克测度。然而，单点集对于勒贝格测度都是零测集，因此对零测集取商会抹去单个点所承载的信息。

Tobias Fritz 与第二作者在[FL26]中提出了一种针对可测空间的方法。在该文中，可测空间的一种暂定非交换类比是 σC^*- 代数，即单调 σ-完备 C^*-代数 [SW15]。[2] 这一方案得到 Gelfand 型对偶性的支持：将每个可测空间 X 映射到其有界可测函数构成的交换 σC^*-代数 $\mathscr{L}^\infty(X)$，即可得到一个伴随。尽管一般而言这并非等价，但在标准博雷尔空间上，以及在超出第二可数性范围的贝尔可测空间 [FL26, §4.2]上，它确实构成等价。此外，相应的概率态射，即 σ-正规完全正保序映射，与正算子值测度（POVM）密切相关。[3]

本研究建立在这些进展之上。本文的主定理支撑着论文其余部分（见图1），证明遗忘函子 $U\colon \sigma\mathbf{C^*代数}_\sigma \to \mathbf{C^*代数}$ 从由σC^*-代数及 σ-正规 $*$-同态构成的范畴到由 C^*-代数及 $*$-同态构成的范畴是单子性的 （第3节）。粗略地说，这意味着 σC^*-代数可以看作“ C^*-代数上的代数”，而论文其余部分将利用这一描述，确立若干同样值得不太熟悉范畴论的读者关注的推论。尽管我们将在下文详述这些发现，这里先简要提及：我们将能够通过泛性质描述 σ-cpu 映射，并为 σC^*-代数赋予张量积。所采用的范畴论方法揭示了这些结果背后的概念统一性；若不采用这些方法，就需要分别以泛函分析论证来加以证明。

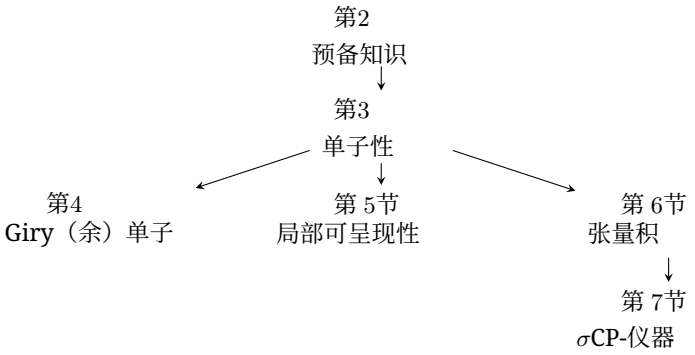


图1. 各节之间的依赖关系，省略了传递箭头。

冯·诺伊曼代数相应的单子性结果由 Furber [Fur] 建立。一个重要区别在于，Furber 仅证明了对于正规 $*$-同态的单子性，而我们在此证明了该结果对于 σ-正规 $*$-同态以及对于 σ-正规完全正保序映射均成立（注 3.5）。事实上，当前结果可以视为一种深化。正如注记 3.10 中所述，Furber 的定理与定理 3.3 一起推出 $\mathbf{W^*Alg} \to \sigma\mathbf{C^*Alg}_\sigma$ 同样具有单子性，其中 $\mathbf{W^*Alg}$ 表示具有正规 $*$-同态的冯·诺伊曼代数范畴。特别地，我们得到一个单子函子的塔

$$\mathbf{W^*Alg} \longrightarrow \sigma\mathrm{C^*}\mathbf{Alg}_\sigma \longrightarrow \mathrm{C^*}\mathbf{Alg}$$

[1]冯·诺伊曼代数的真正 Gelfand 型对偶性要求对可测空间这一概念进行重大修订；参见 [Pav22].[2]第 2 节介绍了关于 σC^*-代数的预备知识。目前只需回顾， σC^*-代数之间的标准态射是 σ-正规 映射。[3]这种联系也将在本文中再次出现；参见第7节。

本文为其中间的一步。

鉴于本文具有范畴论和算子代数的性质，我们现在从这两个视角描述研究结果，以便为来自任一领域的读者提供概念上的理解。

从范畴论的视角来看。

- 利用复数域***Alg** （及其交换 C^*-代数子范畴）具有一个将 cpu 映射描述为余代数的余单子这一事实，我们证明了σ复数域***Alg**$_\sigma$上存在一个类似的余单子，将 σ-正规 cpu 映射描述为余代数（第 4 节）。此外，交换代数上的余单子在限制到贝尔可测空间 [FL26, §4.2], 时扩展了 [Gir 82] 的*Giry* 单子，而这些空间将标准博雷尔空间推广到了超越第二可数性的情形。

- σ复数域***Alg**$_\sigma$ 是局部 $\aleph_1$-可呈现的，且遗忘函子 $U\colon$ σ复数域***Alg**$_\sigma \to$ 复数域***Alg** 是可达的（第 5 节）。
- σC***代数**$_\sigma$ 是一个对称幺半范畴；扩展到 σ-正规 cpu 映射时，情况也相同（第 6 节）。

- 该幺半范畴不是闭的，但当一个对象是交换的时，存在一种类似幺半闭性的性质（第7节）。

从算子代数的观点来看。

- 状态空间上的连续函数的 C^*-代数以及泛 C^*-代数 [KW98，命题 8] 确保了具有类似泛性质的 σC^*- 代数的存在（第 4 节）。

  展开来说，对于任意 σC^*-代数 A，存在唯一的 σC^*-代数 $\mathcal{P}(A)$，使得每个 σ-正规 cpu 映射 $A \to B$ 都可分解为

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \downarrow & \nearrow & \\ \mathcal{P}(A) & & \end{array}$$

  其中 $\mathcal{P}(A) \to B$ 是一个 σ-正规 $*$-同态。类似地，当只在交换的 B上检验泛性质时，存在一个交换的 σC^*-代数$\mathcal{S}(A)$。
- 粗略地说，每个 σC^*-代数都可以通过取直和与商，由一小类“$\aleph_1$-紧” σC^*-代数构造而成（第 5 节）。
- σC^*-代数具有一种张量积 $\boxtimes$，它是通过将最大张量积$\otimes$ 从 C^*-代数扩展而得到的（第 6 节）。特别地，类型为 $A \boxtimes B \to C$ 的态射与类型为 $A \otimes B \to C$ 且双-σ-正规的态射之间存在双射对应；也就是说，它们在每个变量上分别是 σ-正规的（定义 6.14）。这类似于冯·诺伊曼代数的双正规张量积的泛性质（比较 [OO15，命题 2.1] 与定理 6.10），其中“双正规”恰好意味着“在每个张量因子上都是正规的”。

- 关于冯·诺伊曼代数背景下*CP*-仪器 的 [OO15] 讨论，可以改写为针对 σC^*-代数的讨论（第7节）。下文我们将阐述对这一概念的一些见解，以及我们在这方面的贡献。

  CP-仪器由 Davies 和 Lewis [DL70], 提出，用于在不作交换假设的情况下处理对连续可观测量的重复测量。Ozawa [Oza84]在希尔伯特空间的框架下确立了 CP-仪器与测量过程之间的对应关系。其基本直觉是：每个抽象仪器都具有具体的动力学实现，这与 GNS构造将 C^*-代数上的抽象态实现为希尔伯特空间表示中的具体向量态的方式大致相同。

  在 [OO15], 中，相关结果被推广到任意冯·诺伊曼代数，但动力学实现并不总能得到保证。为说明困难所在，我们指出，这种实现需要两个步骤：首先，利用张量积重写 CP-仪器；其次，验证该张量积能否扩展到冯·诺伊曼代数。尽管

th前者可以在完全一般的情形下证明（[OO15，命题 3.3]），后者则需要一个 n
ad一种称为“正规扩张性质”的附加性质。

在本文中，定理 7.6 通过将正规性°（适用于冯·诺伊曼代数）弱化为 σ-正规性（适用于 σC^*-代数），确立了上述强调的两个步骤。关键的是，无需任何附加性质。

致谢。 我们感谢塔林理工大学和 Pawel Sobocinski 邀请第二作者访问该校，从而促成两位作者开展合作，并最终完成本文。感谢 Tobias Fritz 对本文草稿提出的意见和见解。我们还要感谢 Robert Booth，他的兴趣促成了第7节相关工作的开展。第一作者衷心感谢塔林理工大学以及爱沙尼亚研究委员会项目 PRG3215 的支持。我们使用了人工智能工具（尤其是 Claude 和 Gemini Notebook）来润色文字和构思；这些工具在技术方面的贡献有限，且始终经过作者核实。作者对稿件中的任何错误承担全部责任。[4]

2. 预　备知识与关于 σC^*-代数的预备内容　　数

本文中的证明技巧依赖于范畴论的工具，尤其是单子和对称幺半范畴（以及幺半单子）。我们假设读者熟悉范畴论的基础知识，包括函子、自然变换、极限和伴随。读者无需预先了解单子，但对其有大致认识会有所帮助；有关单子的更多背景知识，请参阅 [Bor94 第 4.1 节和第 4.2] 节。对于对称幺半范畴，通常对“张量积”的直观理解就足够了。[5]

该技术用于（交换的） C^*-代数范畴以及（交换的） σC^*-代数的子类。

约定 2.1. 本文中，除非另有说明（例如，在引理 3.6 附近的讨论中）， C^*-代数和 σC^*-代数始终含单位，且 $*$-同态保持单位。

虽然读者不必对这一理论有全面了解，但可能会用到一些关于 C^*-代数的基础知识，而不再另作解释：例如正性的概念，以及正幺映射（因此也包括 $*$-同态）是压缩的这一事实，即其范数≤ 1 [Pau02，命题 2.1]。

相反，本书不要求读者预先了解 σC^*-代数。不过，读者可以参阅著作 [SW15、Ped18], ，以及文章 [FL26], ；该文从概率论的角度阐述了选择 σC^*-代数的动机。

σC^*-代数。回忆一下， C^*-代数的自伴部分带有一个典范偏序，其中 $a \leq b$意味着 $b-a$具有 c^*c 的形式。 σC^*-代数（也称为单调 σ-完备C^*-代数）是一个 C^*-代数 A ，其中每个范数有界单调递增序列（a_n），即满足 $a_n \leq a_{n+1}$ 且 $\|a_n\| \leq \lambda$的序列，都有一个上确界 $\sup_n^A a_n$。[6] 上确界 $\sup_n^A$ 中的上标 A 是为便于辨识而加的；在上下文足够明确时可以省略。

请记住这样一个要点：从 C^*-代数转向 σC^*-代数，是从拓扑结构转向可测结构的算子代数对应物：正如交换的 C^*-代数对应于紧 Hausdorff 空间，交换的 σC^*-代数对应于抽象可测空间，正如我们将在本节末尾看到的那样。直观地说，我们允许一种比一致范数更弱的极限过程

---

[4]这类错误几乎肯定也会带有人的痕迹。[5]关于幺半范畴的综述数不胜数： [Sel10] 侧重于应用，主要是逻辑方面；而 [EGNO15] 则为对表示论感兴趣的数学家提供了基础性介绍； [Del90、Bor94、ML98] 构成了很好的入门材料，不会过多纠缠于更细致的技术问题。[6]当且仅当将这一要求限制在由自伴 元素组成的序列上时，该要求才成立。“仅当”方向是显然的，而“当”方向则可由以下观察得到： $a \leq b$意味着 $a-b$是自伴的，因此 a和 b具有相同的虚部；所以，在单调递增序列中，所有项都具有相同的虚部，从而减去该虚部后，一般情形便归结为自伴情形。下文将交替使用这两个条件。

，这类似于可测函数在逐点极限下自然保持闭合。

在 σC^*-代数之间，通常考虑 **σ-正规** 映射，即保持这类上确界的正映射。具体而言，正映射 $\phi\colon A \to B$ 称为 **σ-正规映射**，当且仅当对于 A 中任意范数有界单调递增序列 (a_n)，其像序列 $(\phi(a_n))$ 仍是范数有界单调递增序列[7] 并且

$$\phi\Big(\sup_n^A a_n\Big) = \sup_n^B \phi(a_n).$$

称 σ-正规的 $*$-同态（分别为 cpu[8] 映射）为 **σ-同态**（分别为 ***σ-cpu*** 映射）。本文考虑表1中定义的范畴。

范畴	对象	态射
复数域*代数	C^*-代数	$*$-同态
复数域*代数 cpu	C^*-代数	cpu 映射
σ复数域*Alg σ	σC^*-代数	σ-同态
σ复数域* Alg σcpu	σC^*-代数	σ-完全正保序映射

表1。 本文所考虑的范畴（回顾约定 2.1）。读者应想象一张平行的表格，在每个范畴名称前添加 **c** ，以限制为交换代数。例如，**cC*Alg** 是具有 C^*-同态的交换 $*$-代数范畴，而**cσC*Alg**$_{\sigma\mathrm{cpu}}$ 是具有 σ-完全正保序映射的交换 σC^*-代数范畴。

A **σ-子空间** 在一个 σC^*-代数 A 中是一个 $*$-子空间 V，它具有所有范数有界单调递增序列的上确界：$(a_n) \subseteq V$ 蕴含 $\sup_n^A a_n \in V$。类似地， **σ-理想** 是那些恰好为 σ-子空间的范数闭双边理想，而 **σ-闭包** 是包含 W的最小σ-子空间。

对于第6节和第7节的技术性论述，我们还引入了序极限。简而言之，如果存在四个由自伴元素组成的范数有界单调递增序列 $(b_{n,k})_n$，使得对于 $k \in \{1,2,3,4\}$ 有$a_n = (b_{n,1} - b_{n,2}) + i(b_{n,3} - b_{n,4})$，则称序列 (a_n) 在 σC^*-代数 A 中**序收敛**，其中 i 是虚数单位。在这种情况下，序极限为

$$\operatorname{ordlim}_n^A a_n \coloneqq \sup_n^A b_{n,1} - \sup_n^A b_{n,2} + i\left(\sup_n^A b_{n,3} - \sup_n^A b_{n,4}\right).$$

这些极限的若干关键性质包含于 [SW15, 第 2 节1]。

特别地，它们具有以下性质：

- 定义良好，因此序极限不依赖于 $b_{n,k}$'s 的选择：每当我们考虑自伴元素的范数有界单调递增序列时 $(b_{n,k})_n$ 并且 $(b'_{n,k})_n$ 对于 $k = \{1,2,3,4\}$ 使得

$$a_n = (b_{n,1} - b_{n,2}) + i(b_{n,3} - b_{n,4}) = (b'_{n,1} - b'_{n,2}) + i(b'_{n,3} - b'_{n,4}),$$

then

$$\sup_n^A b_{n,1} - \sup_n^A b_{n,2} + i\left(\sup_n^A b_{n,3} - \sup_n^A b_{n,4}\right) = \sup_n^A b'_{n,1} - \sup_n^A b'_{n,2} + i\left(\sup_n^A b'_{n,3} - \sup_n^A b'_{n,4}\right). \quad (2.1)$$

- 线性：$\operatorname{ordlim}_n^A(a_n + a'_n) = \operatorname{ordlim}_n^A(a_n) + \operatorname{ordlim}_n^A(a'_n)$ 以及 $\operatorname{ordlim}_n^A(\lambda a_n) = \lambda \operatorname{ordlim}_n^A a_n$ for 所有 $\lambda \in \mathbb{C}$;
- $*$-保持：序极限$_n^A(a_n^*) =$序极限$_n^A(a_n)^*$;
- 与乘法相容：对于所有 z， $w \in A$，序极限$_n^A(za_nw) = z$(序极限$_n^A a_n)w$。

[7]对于单位 C^*-代数之间的正映射，这一点显而易见，参见 [Pau02，命题 2.1].[8]这个缩写表示完全正的单位。

注意，上确界并不满足这些性质：例如，$-$上确界$\bigvee_n^A a_n$变成了下确界$\inf_n^A(-a_n)$。更值得注意的是，将两个单调递增序列相乘，所得序列未必仍是单调递增序列，因为即使两个正元素的乘积也未必是正元素。相反，

$$\operatorname{ordlim}_n^A(a_n \operatorname{ordlim}_m^A b_m) = \operatorname{ordlim}_m^A(\operatorname{ordlim}_n^A a_n b_m) = \operatorname{ordlim}_n^A(a_n) \operatorname{ordlim}_m^A(b_m).$$

容易验证，σ-cpu 映射恰好是那些保持序极限的 cpu 映射。相比之下，目前尚不清楚 σ-子空间是否必然对序极限封闭（参见 [FL26，第 3.5] 节）。

布尔 σ代数。 σC^*-代数的另一个关键方面，是它们与抽象可测空间（更广为人知的名称是布尔 σ-代数）之间的关系。简言之，这类代数是具有可数并与交的布尔代数，因此仿效了 σ-代数。感兴趣的读者可参阅 [Sik69] ，了解更多细节。不过，本文并不使用布尔代数这一理论工具，必要时会提供相关参考文献。以下材料主要用于第 4 节和第 7 节，其他情况下可以略过。

记号 2.2。我们用 Σ 表示布尔 σ-代数，并用 U，V，U_n，.....表示其元素，以提醒读者注意可测空间的情形。不过，对于运算，我们采用布尔代数的记号：$\vee$ 表示并，$\wedge$ 表示交，$\neg$ 表示否定，$\bot$表示底元素，$\top$ 表示顶元素。

在 [FL26, 定理 4.1.34] 中证明了，$\mathbf{c}\sigma$复数域$^*\mathbf{Alg}_\sigma$ 等价于布尔σ-代数及 σ-同态所构成的范畴（此处指保持可数并与交的布尔代数同态）。与布尔 σ-代数 Σ 相关联的 σC^*-代数记作 $\mathscr{L}^\infty_{\mathrm{abs}}(\Sigma)$。$\mathscr{L}^\infty_{\mathrm{abs}}(\Sigma)$（“抽象 $\mathscr{L}^\infty$”）这一记号意在表明，$\mathscr{L}^\infty{}_{\mathrm{abs}}(\Sigma)$ 是与可测空间 $(X,\ \Sigma_X)$ 相关联的“具体” σC^*-代数的一种抽象，其定义为

$$\mathscr{L}^\infty(X) \coloneqq \{f\colon X \to \mathbb{C} \text{ bounded measurable}\}$$

并配备逐点运算。事实上，$\mathscr{L}^\infty{}_{\mathrm{abs}}(\Sigma_X) \cong \mathscr{L}^\infty(X)$（[FL26，引理 4.1.14]）。更明确地说，$\mathscr{L}^\infty_{\mathrm{abs}}(\Sigma)$ 的元素借鉴有界可测函数的逆像映射进行编码：

$$\mathscr{L}^\infty_{\mathrm{abs}}(\Sigma) \coloneqq \{f\colon B(\mathbb{C}) \to \Sigma \mid f(U) = \top \text{ for some bounded } U \in B(\mathbb{C})\},$$

其中，$B(\mathbb{C})$表示 $\mathbb{C}$的 Borel σ-代数。对于一个交换的 σC^*-代数 A，可以证明$A \cong \mathscr{L}^\infty_{\mathrm{abs}}(\Sigma)$，其中 Σ 其投影构成一个布尔 σ-代数。更多细节请参阅 [FL26，第 4 节1] 。

从概率的角度来看，可测空间与马尔可夫核的范畴**Stoch** 全忠实地（逆变地）嵌入到 $\mathbf{c}\sigma\mathbf{C}^*\mathbf{Alg}_{\sigma\mathrm{cpu}}$ 中（见 [FL26，命题 4.36]）。相应地，σ-完全正保序映射 $\mathscr{L}^\infty{}_{\mathrm{abs}}(\Sigma) \to \mathscr{L}^\infty_{\mathrm{abs}}(\Sigma')$ 可以被视为抽象马尔可夫核。尽管这与主要讨论并无直接关系，但对于有兴趣了解其与经典概率之间联系的读者而言，这一视角仍值得纳入。

3. Monadicity of σC^*-algebras over C^*-algebras

本节证明本文的核心结果：遗忘函子

$$U\colon \sigma\mathrm{C}^*\mathbf{Alg}_\sigma \to \mathrm{C}^*\mathbf{Alg}$$

是单子性的（定理 3.3），且相应的单子构造一个 C^*-代数的*Pedersen–Baire* 包络 。随后我们记录下面反复使用的两个推论：$\sigma\mathbf{C}^*\mathbf{Alg}_\sigma$ 是完备的，其极限由 U 创建（推论 3.4）；并且 T 保持自反余等化子，因此 $\sigma\mathbf{C}^*\mathbf{Alg}_\sigma$ 是余完备的（命题 3.8）。

我们回顾以下伴随，该伴随首次发表于 [Wri76]。本文采用的表述取自[FL26 的公式 (3.3.4)]。

定理 3.1。 存在一个伴随

$$F : \mathrm{C}^*\mathbf{Alg} \rightleftarrows \sigma\mathrm{C}^*\mathbf{Alg}_\sigma : U$$

其中 U 遗忘 σ-正规性，而 F 将一个 C^*-代数 A 映射到其 *Pedersen–Baire* 包络 $e.$

明确地说，一个 C^*-代数 A 的***Pedersen–Baire*** 包络 A^∞ 是其包络 W^*-代数 A^{**} [FL26，定义 3.3. 中 A 的 σ-闭包1] ，或者等价地，是在泛表示 $(H_u,\ \pi_u)$ [SW15，定义 2.2.23]下 $B(H_u)$ 中 A 的 σ-闭包。用图表表示，

$$A \hookrightarrow A^\infty \overset{(\star)}{\hookrightarrow} A^{**} ,$$

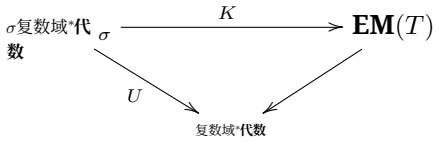
其中右侧包含映射 $(\star)$ 是 σ-正规的。定理 3.1 的伴随的内容恰好是 A^∞的泛性质：从 A 到一个 σC^*-代数的每个 $*$-同态都能沿着 $A \hookrightarrow A^\infty$唯一地且以 σ-正规的方式延拓。尽管文献中已经使用了 A^∞ 这一记号，本文仍改用 UFA和 FA，以体现相关伴随。

记号 3.2。 下文中， F 和 U 始终表示前述陈述中的两个函子；为简便起见，相关的单子 UF记作 T；$\epsilon\colon FU \to \mathrm{id}_{\sigma\mathrm{C}^*\mathbf{Alg}_\sigma}$和 $\eta\colon \mathrm{id}_{\mathrm{C}^*\mathbf{Alg}} \to UF$分别表示余单位和单位，而 $\mu := U\epsilon F$ 表示单子乘法。

现在我们希望证明 U 是单子性的。说 U 是单子性的，就是说一个 σC^*-代数不过是一个 C^*-代数，并配备了由 Pedersen–Baire 包络所强制要求的可数上确界的一种相容选择：这种附加结构是复数域 $\mathrm{C}^*\mathbf{Alg}$上的代数结构，由运算和方程赋予，而非由某种性质定义。这正是它在后续各节中带来的益处：由 U创建的极限、自由对象、代数的张量积（第 6 节）以及可呈示性定理（第 5 节）；这些都无法从 σC^*-代数的定义中看出。

关于术语的一个说明或许能省去读者查阅文献的工夫：许多关于单子性的文献，包括下文引用的 [BW05] 和 [Lin69] ，在我们使用单子和单子性的地方使用“三元组”和“可三元组化”； [BW05] 甚至完全没有使用“单子”一词。

可以直接论证 U 的单子性：由 [MS03, p. 222] 推得的唯一比较函子 $K\colon \sigma\mathrm{C}^*\mathbf{代数}_\sigma \to \mathbf{EM}(T)$是全忠实且本质满的（即下文定理 3.3 证明的两个部分），因此是范畴等价。函子 K 是使下图成为交换图的唯一函子，



其中未标记的箭头是一个遗忘函子。具体而言， K 将一个 σC^*-代数 A 映射为由 UA给出的载体，并赋予其由余单位 $U\epsilon_A\colon TUA \to UA$给出的代数结构。

定理 3.3. U 是单子性的。

证明。 我们将证明分为两个步骤。
K 是全忠实的： 根据 Beck 的一个命题（例如参见 [MS03，第 226] 页），当且仅当 ϵ_B 是正则满态射时， K 才是全忠实的。我们要证明这一条件总是成立。

首先，我们回顾一下， $\epsilon_B\colon FUB \to B$ 在 σ复数域*$\mathbf{Alg}_\sigma$ 中是一个满射。此结论已在 [SW15，定理 5.4 中证明。5] （明确表述见 [FL26，定理 3.3。6] ）与代数中的标准情形一样，每个满射实际上都通过其核将像与商等同，即 $B \cong FUB/\ker(\epsilon_B)$ 。

因此，我们只需证明这使得 ϵ_B 可以写成一个余等化子。为此，我们分两种情况讨论。如果 $\ker(\epsilon_B)$ 没有单位，我们考虑 $\ker(\epsilon_B)_1$ 的单位化 $\ker(\epsilon_B)$，如 [SW15, Proposition 2.2.10] 所示，它是一个 σC^*-代数。存在两个显然的映射 $\ker(\epsilon_B)_1 \to FUB$。第一个映射记为 i，将 $\lambda 1 + x$（其中 $\lambda \in \mathbb{C}$ 和 $x \in \ker(\epsilon_B)$）通过包含映射 $\ker(\epsilon_B) \subset FUB$ 映到其自身，因为 FUB 是含单位的。第二个映射，

记为 ℓ，忘掉 x：换言之，它将 $\lambda 1 + x$ 映到 $\lambda 1$。这是良定义的，因为 $\ker(\epsilon_B)$ 是其单位化 $\ker(\epsilon_B)_1$ 的一个（极大）理想。现在很容易验证， ϵ_B 是

$$\ker(\epsilon_B)_1 \underset{\ell}{\overset{i}{\rightrightarrows}} FUB$$

因为它们之差的像 $i - \ell$ 恰好对应于 $\ker(\epsilon_B)$。若 $\ker(\epsilon_B)$ 有单位，则我们考虑 $\ker(\epsilon_B) \oplus \mathbb{C}$。在这种情况下，我们取 $i\colon \ker(\epsilon_B) \oplus \mathbb{C} \to FUB$，将 $(x,\ \lambda)$ 映至 $x + \lambda(1 - e)$，其中 e 表示 $\ker(\epsilon_B)$ 的单位，而 ℓ 表示复合 $\ker(\epsilon_B) \oplus \mathbb{C} \to \mathbb{C} \to FUB$；第一个映射仅将 $(x,\ \lambda)$ 映至 λ。

K 是本质满的：考虑 $\mathbf{EM}(T)$ 中的一个代数。根据定义，它由一个 C^*-代数 A 以及一个态射 $\phi\colon TA \to A$ 构成，并且该态射与单子乘法和单位相容。具体而言，

$$\phi\eta_A = \mathrm{id}_A \qquad \text{and} \qquad \phi T(\phi) = \phi\mu_A, \tag{3.1}$$

其中 $\eta_A\colon A \to TA$ 表示标准嵌入，而 $\mu_A = U(\epsilon_{FA})\colon TTA \to TA$ 是 σ-正规映射，使得 $\mu_A\eta_{TA} = \mathrm{id}_{TA}$。

我们来证明，满足 (3.1) 的 A 是一个 σC^*-代数，并且 ϕ 是 σ-正规。换言之，$A = UA$ 且 $\phi = U\phi$。设 (a_n) 是 A 中的一个范数有界单调递增序列。由于 η_A 保持正序，序列 $(\eta_A(a_n))$ 的像是 TA 中的一个范数有界单调递增序列，而 TA 是一个 σC^*-代数。因此，我们可以考虑 $\phi(\sup_n^{TA}(\eta_A(a_n))) \in A$。现在，任取一个 $b \geq a_n$，对所有 n，$\eta_A(b) \geq \sup_n^{TA}(\eta_A(a_n))$，于是

$$b = \phi(\eta_A(b)) \geq \phi\left(\sup_n^{TA}(\eta_A(a_n))\right)$$

最后，$\sup_n^A a_n$ 存在，且由 $\phi(\sup_n^{TA}(\eta_A(a_n)))$ 给出。为证明 ϕ 是 σ-正规，我们使用代数乘法给出的恒等式：对于范数有界单调递增序列 $(x_n) \subseteq TA$，考虑 $\sup_n^{TTA} \eta_{TA}(x_n) \in TTA$。于是

$$\begin{aligned}
\phi\left(\sup_n^{TA} \eta_A\phi(x_n)\right) &= \phi T(\phi)\left(\sup_n^{TTA} \eta_{TA}(x_n)\right) && \text{(definition of } T(\phi)) \\
&= \phi\mu_A\left(\sup_n^{TTA} \eta_{TA}(x_n)\right) && (3.1) \\
&= \phi\left(\sup_n^{TA} x_n\right) && (\sigma\text{-normality of } \mu, \text{ and } \mu \circ \eta T = \mathrm{id}_{TA})
\end{aligned}$$

由于我们刚刚证明了 $\sup_n^A a_n = \phi(\sup_n^{TA}(\eta_A(a_n)))$，左侧等于 $\sup_n^A(\phi(x_n))$。最后，$\sup_n^A(\phi(x_n)) = \phi(\sup_n^{TA} x_n)$，正如所需。

现在我们声称，ϕ 实际上是 ϵ_A，由此可得 K 的本质满射性。为此，考虑集合

$$M \coloneqq \{a \in TA \mid \phi(a) = \epsilon_A(a)\},$$

根据方程 $\phi\eta_A = \mathrm{id}_A$ 和 $U(\epsilon_A)\eta_A = \mathrm{id}_A$，它显然包含 $\eta_A(A)$。由于 ϕ 和 ϵ_A 都保上确界，M 在上确界运算下也闭。因此，同理可证 M 是一个 $*$-子空间，因而它是一个 σ-子空间。由于 $\eta_A(A)$ 在 TA 中的 σ-闭包就是整个 TA（参见定理 3.1 后的讨论），我们得到 $M = TA$，从而完成证明。□

根据 [Bor94，命题 4.3.1], ，由于复数域*$\mathbf{Alg}$ 具有所有极限 [KT02，第 2], 节的定理 3.3 得出如下结论。

推论 3.4。 σ复数域*$\mathbf{代数}_\sigma$ 是完备的，并且依照 [ML98, §V1], 的意义，极限由 U 创建。

注 3.5（cpu 映射的单子性与交换代数）。 根据 *Stinespring* 膨胀定理，定理 3.1 的伴随可扩展到 cpu 映射，如 [FL26，推论 3.3 所示8]。具体而言，我们有

$$\bar{F} : \mathrm{C}^*\mathbf{Alg}_{\mathrm{cpu}} \underset{\bar{U}}{\overset{\bot}{\rightrightarrows}} \sigma\mathrm{C}^*\mathbf{Alg}_{\sigma\mathrm{cpu}} : \bar{U}$$

扩展定理 3.1 中的伴随。现在可以逐字复制定理 3.3 的论证，以确保扩展后的 U 同样具有单子性：特别要注意，证明 K的本质满射性只要求 ϕ 保持序关系。

此外，将整个讨论限制在交换情形下，由于 FA 只要[是， A 就总是交换的（[SW15，注 5.3.4(iii)]），同样的论证证明了遗忘函子 $\mathbf{c}\sigma\mathbf{C}^*\mathbf{Alg}_\sigma \to \mathbf{c}\mathbf{C}^*\mathbf{Alg}$ 和 $\mathbf{c}\sigma\mathbf{C}^*\mathbf{Alg}^{\sigma\mathrm{cpu}} \to \mathbf{c}\mathbf{C}^*\mathbf{Alg}^{\mathrm{cpu}}$ 的单子性。

现在我们寻求证明 $\sigma\mathbf{C}^*\mathbf{Alg}_\sigma$ 也是余完备的。为此，我们先证明两个准备性引理，其中需要考虑非幺设置。回顾 [SW15，§2.2]，$\boldsymbol{nonunital\sigma C^*\text{-}algebra}$ 是一种非幺 C^*-代数[9]，其中所有范数有界单调递增序列都存在上确界。这不同于要求所有被某个元素有界的单调递增序列都存在上确界：第二种选择产生了伪单调 σ-完备（非幺）C^*-代数，并允许将可分希尔伯特空间上的紧算子作为一个例子；而我们在此采用的定义则不允许这样做（详见 [SW15，例 2.2.11]）。

引理 3.6。设 B 是一个 σC^*-代数，且 I 是 B 中的一个闭理想，也是一个非单位 σC^*-代数。那么 I 是一个 σ- 理想。

证明。给定一个范数有界单调递增序列 $(a_n) \subseteq I$，我们有 $\sup_n^I a_n \geq \sup_n^B a_n \geq a_n$，因为 $I \subseteq B$ 且二者都是 σC^*-代数（I 非单位）。由于闭理想是遗传的 [Mur90，定理 3.2。1], 也就是说，若 $0 \leq b \leq a$，且 $a \in I$ 和 $b \in B$，则必有 $b \in I$，由此我们推出 $\sup_n^B a_n$ 也必包含于 I 中，因此 $\sup_n^B a_n = \sup_n^I a_n$。□

引理 3.7。考虑 σC^*-代数 A 和 B。考虑图表

$$A \underset{g}{\overset{f}{\underset{\longleftarrow s \longrightarrow}{\rightrightarrows}}} B$$

其中 f 和 g 是 σ-同态，s 是任意完全正保序映射，且 $fs = gs = \mathrm{id}_B$。上述图表在复数域 $\mathbf{C}^*$**代数** ^{cpu} 中的自反余等化子C 是一个 σC^*-代数，此外，所诱导的 $B \to C$ 是一个满射σ-同态。

换句话说，遗忘函子 $\sigma\mathbf{C}^*\mathbf{Alg}_\sigma \to \mathbf{C}^*\mathbf{Alg}^{\mathrm{cpu}}$ 保留在应用该函子后成为自反的余等化子。因此，对于遗忘函子 $\sigma\mathbf{C}^*\mathbf{Alg}_\sigma \to \mathbf{C}^*\mathbf{Alg}$ 和 $\sigma\mathbf{C}^*\mathbf{Alg}_\sigma \to \sigma\mathbf{C}^*\mathbf{Alg}^{\sigma\mathrm{cpu}}$，同样的结论也成立。

这一论述与 [Fur, 命题 4.4] 相似。特别地，这一结果可用于通过 [BW05, 定理 3.14] 中所述的 Beck 定理，重新证明 U 的单子性。

证明。整个证明的关键在于证明 $*$-子空间 $I := \mathrm{Im}(f - g)$ 是一个 σ-理想。事实上，若确实如此，则该余等化子由商映射 $B \to B/I$ 给出，而所需的单调性质可由 [SW15, 命题 2.2.21] 立即得出。

首先，我们注意到 I 是一个双边理想。事实上，给定 $a \in A$ 和 $b \in B$，则

$$b(f(a) - g(a)) = f(s(b))f(a) - g(s(b))g(a) = f(s(b)a) - g(s(b)a),$$

另一侧也类似。

为了证明它既是闭的又是 σ-闭的，我们考虑（非单位） σ-同态

$$f' \colon \ker(g) \hookrightarrow A \xrightarrow{f} B$$

并断言其像恰好是 I。事实上，给定 $k \in \ker(g)$，$f'(k) = f(k) - g(k) \in I$。反之，若$b \in I$，则存在 $a \in A$使得 $b = f(a) - g(a)$。现在，通过选取 $a' = a - sg(a)$，可直接验证方程 $g(a') = 0$以及 $f(a') = b$。最后，$I = \mathrm{Im}(f')$。因此，根据 [Mur90, 定理 3.1，I 是闭的6]。此外，利用 C^*-代数的第一同构定理，$I = \mathrm{Im}(f') \cong \ker(g)/\ker(f')$，即它是（非幺） σC^*-代数的一个商，因而根据 [SW15, 命题 2.2，σC^*是非幺21]-代数。我们已经证明，$I \subseteq B$ 满足引理 3.6 的假设，因此它是 σ-闭的。□

[9]这里，“非 单位”意为“不一定是单位”；因此，单位 C^*-代数是非单位 C^*-代数的特例 .

命题 3.8。 T 保持自反余等化子。特别地， $\sigma\mathbf{C^*Alg}_\sigma$ 是余完备的。

证明。 设有 $f,g\colon A\to B$和 $s\colon B\to A$，其中 $gs=fs=\mathrm{id}_B$属于 $\mathbf{C^*Alg}$。我们称 C和 D分别为这两对态射 (f,g) 和 (Tf,Tg) 的自反余等化子。由引理 3.7， D是一个 σC^*-代数，而且余锥映射 $TB\to D$是一个 σ-同态。通过与 $\eta_B\colon B\to TB$ 复合，我们得到一个映射 $B\to D$，它使 f 和 g余等化。因此存在唯一映射 $C\to D$，由于 D 是一个 σC^*-代数，它可提升为映射 $TC\to D$。由于所需的交换关系可直接推出， TC 也必定是余等化子。

第二个句子由 Linton 定理（[Lin69，推论 2 和 3]）得出，因为 T 是余完备范畴上的一个单子（[KT02，第 2] 节）。□

注记 3.9。 $\sigma\mathbf{C^*Alg}_\sigma$ 的余完备性还可通过第二种、较不初等的证明得到：根据定理 5.3，该范畴是局部 $\aleph_1$-可呈示的，因此是余完备的 [AR94，定义 1.17]。我们给出上述论证，是因为它独立于第 5 节的可达性理论工具，并且其第一个断言，即 T 保持自反余等化子，在后文中是必需的（它是定理 6.8 的假设，而定理 6.8 又用于定理 6.10 的证明），且不能由可呈示性推出。这里不存在循环论证：定理 5.3 的证明依赖于定理 3.3 和引理 5.1，而不依赖于命题 3.8。

注记 3.10 （（交换的） W^*-代数的单子性）。 考虑由 W^*-代数以及正规（保单位） $*$-同态构成的范畴 $\mathbf{W^*Alg}$ 。遗忘函子 $\mathbf{W^*Alg}\ \to\mathbf{C^*Alg}$ 已在 [Fur，定理 4.6] 中被证明是单子的。此外， [Fur，命题 4.4] 还保证该函子保持自反余等化子。特别地，$\mathbf{W^*Alg}$ 根据命题 3.8 证明中的同样推理是余完备的。

将此结果与定理 3.3 及 [Bor94, 推论 4.5.7], 结合，我们立即得到$\mathbf{W^*Alg}\ \to\sigma\mathbf{C^*Alg}_\sigma$ 同样具有单子性。

将范围限制到交换代数时，也成立类似的结果。

最后我们给出一个简单的注记，它将在定理 6.13 的证明中使用。

注记 3.11。 T 保持满射。事实上，给定 $\mathbf{C^*Alg}$ 中的满射 $\phi\colon A\to B$，映射 $T\phi\colon TA\to TB$将 $\eta_A(a)$ 发送到 $\eta_B\phi(a)$。由于 ϕ 是满射，$\mathrm{Im}(T\phi)\supseteq\eta_B(B)$。由于 $T\phi$ 是 σ- 正规，其像必为 σ- 闭的，因此它必与整个 TB 重合，因为 TB 是 σ关于$\eta_B(B)$的闭包。

4. Noncommutative and abstract Giry (co)monads

作为单子性的结果，根据伴随提升定理 [Bor94,定理 4.5.6]，我们可以推断出关于 $\sigma\mathbf{C^*Alg}^{\sigma\mathrm{cpu}}$ 和 $\mathbf{c}\sigma\mathbf{C^*Alg}^{\sigma\mathrm{cpu}}$ 的余 Kleisli 性质的重要结果。

我们从一个预备结果开始，该结果此前曾在预-C^*-代数的语境中出现过，见 [FL23，命题 4.18]。为确保透明性，我们给出完整的论证。

回顾一下，给定一个 C^*-代数 A，其 状态空间 $S(A)$ 是态的集合 $\phi\colon A\to\mathbb{C}$ 赋予使得以下评价映射

$$\begin{aligned}\mathrm{ev}_a\colon\ S(A)&\longrightarrow\mathbb{C}\\ \phi&\longmapsto\phi(a)\end{aligned}$$

对所有 $a\in A$ 都连续的最弱拓扑。众所周知， $S(A)$ 是一个紧 Hausdorff 空间：例如，这可由 [Ped18, 3.2.1], 中的讨论推出，该讨论表明 $S(A)$ 是赋予弱-$*$ 拓扑的 A^* 的紧子空间。

命题 4.1. 遗忘函子 R_c: $\mathbf{cC^*}$**代数** $\to\mathbf{C^*}$**代数**^{cpu} 有一个左伴随，由[10]给出

$$\begin{aligned}L_c\colon\ \mathrm{C^*Alg}_{\mathrm{cpu}}&\longrightarrow\mathbf{c}\mathrm{C^*Alg}\\ A&\longmapsto C(S(A))\end{aligned}$$

[10]以下证明策略由 Tobias Fritz 提供给我们。

证明。 令 **CHaus** 为由紧 Hausdorff 空间及其连续映射构成的范畴。为简洁起见，若 A 是一个 C^*-代数，且 X 是一个紧 Hausdorff 空间，则称映射 $\phi\colon A \times X \to \mathbb{C}$ 为**态连续映射**，如果对于所有 $x \in X$， $\phi(-, x)\colon A \to \mathbb{C}$ 都是态，并且对于所有 $a \in A$， $\phi(a, -)\colon X \to \mathbb{C}$ 都是连续映射（参见第 13 页回顾的马尔可夫核定义）；这些映射的集合记为$\mathbf{SCM}(A \times X, \mathbb{C})$。

该结论可由以下一系列同构得到（其关于 A 和 X 的自然性可直接验证）：

$$\begin{aligned} \mathbf{c}\mathrm{C}^*\mathbf{Alg}(C(S(A)), C(X)) &\cong \mathbf{CHaus}(X, S(A)) \\ &\cong \mathbf{SCM}(A \times X, \mathbb{C}) && (\spadesuit) \\ &\cong \mathrm{C}^*\mathbf{Alg}_{\mathrm{cpu}}(A, C(X)) && (\heartsuit) \end{aligned}$$

虽然第一个同构是 Gelfand 对偶的直接结果，但剩下的两个还需要进一步说明。为此，我们构造互为逆的映射。

- 对于（♠），我们定义

$$\begin{aligned} \mathbf{CHaus}(X, S(A)) &\longrightarrow \mathbf{SCM}(A \times X, \mathbb{C}) \\ \phi &\longmapsto \bar{\phi}(a, x) \coloneqq \phi(x)(a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{SCM}(A \times X, \mathbb{C}) &\longrightarrow \mathbf{CHaus}(X, S(A)) \\ \psi &\longmapsto \bar{\psi}(x) \coloneqq \psi(-, x) \end{aligned}$$

  这些映射定义良好： ϕ 是态连续的，因为根据 $S(A)$ 的定义， $\phi(x)$ 是一个态；而 $\phi(-)(a) = \mathrm{ev}_a \circ \phi$ 是连续的，因为它是连续映射的复合。对于第二个映射，根据 $S(A)$ 的定义， ψ 的连续性可通过与 ev_a，以及 $\mathrm{ev}_a \circ \psi = \psi(a, -)$ 进行后复合来检验，而后者根据假设是连续的。它们互为逆映射可直接验证。

- 对于（♡），我们考虑

$$\begin{aligned} \mathbf{SCM}(A \times X, \mathbb{C}) &\longrightarrow \mathrm{C}^*\mathbf{Alg}_{\mathrm{cpu}}(A, C(X)) \\ \psi &\longmapsto \widetilde{\psi}(a) \coloneqq \psi(a, -) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{C}^*\mathbf{Alg}_{\mathrm{cpu}}(A, C(X)) &\longrightarrow \mathbf{SCM}(A \times X, \mathbb{C}) \\ \phi &\longmapsto \widetilde{\phi}(a, x) \coloneqq \phi(a)(x) \end{aligned}$$

  关于 ψ定义良好性的问题，根据定义，$\psi(a, -)$是连续的，因此 $\psi(a)$确实属于 $C(X)$。为证明 ψ 是完全正保序映射，任取正元素 $a \in A$：由于$\psi(-, x)$是一个态， $\psi(a, x)$是非负的。由于这对所有 x都成立， $\psi(a, -)$是 $C(X)$中的正元素。类似的推理可确保 $\psi(1) = 1$，因此 ψ 是完全正保序映射，因为其值域是交换的（[Pau02，定理3.9]）。最后， ϕ是一个态连续映射，因为根据定义 $\phi(a, -)$是连续的，并且 $\phi(-, x)$是 A的一个态，因为它是 ϕ 与态 $C(X) \ni f \mapsto f(x) \in \mathbb{C}$的复合。如上所述，直接检验可知这些映射互为逆映射。□

定理 4.2 （非交换与抽象 Giry（余）单子）。 以下断言成立。

(i) 遗忘函子 $R'\colon \sigma\mathrm{C}^*\mathrm{Alg}_\sigma \to \sigma\mathrm{C}^*\mathrm{Alg}_{\sigma\mathrm{cpu}}$ 有左伴随 L'，且其诱导的余单子 $L'R'$ 在 $\sigma\mathrm{C}^*\mathrm{Alg}_\sigma$ 上的余 Kleisli 范畴为 $\sigma\mathrm{C}^*\mathrm{Alg}_{\sigma\mathrm{cpu}}$。限制到 Pedersen–Baire 包络时，该结论同样成立。(ii) 类似地，遗忘函子 $R'_{cc}\colon \mathrm{c}\sigma\mathrm{C}^*\mathrm{Alg}_\sigma \to \mathrm{c}\sigma\mathrm{C}^*\mathrm{Alg}_{\sigma\mathrm{cpu}}$ 有左伴随 L'_{cc}，且其诱导的余单子 $L'_{cc}R'_{cc}$ 在 $\mathrm{c}\sigma\mathrm{C}^*\mathrm{Alg}_\sigma$ 上的余 Kleisli 范畴为 $\mathrm{c}\sigma\mathrm{C}^*\mathrm{Alg}_{\sigma\mathrm{cpu}}$。限制到交换 Pedersen–Baire 包络时，该结论同样成立。(iii) 遗忘函子 $R'_c\colon \mathrm{c}\sigma\mathrm{C}^*\mathrm{Alg}_\sigma \to \sigma\mathrm{C}^*\mathrm{Alg}_{\sigma\mathrm{cpu}}$ 有左伴随。该结论同样可限制到 Pedersen–Baire 包络。

证明。 我们聚焦于条目 (i)。根据定理 3.3 和注 3.5，遗忘函子 $U\colon \sigma\mathrm{C}^*\mathbf{Alg}_\sigma \to \mathrm{C}^*\mathbf{Alg}$ 和 $U\colon \sigma\mathrm{C}^*\mathbf{Alg}_{\sigma\mathrm{cpu}} \to \mathrm{C}^*\mathbf{Alg}_{\mathrm{cpu}}$ 是单子性的。此外，

- 遗忘函子 $R\colon \mathrm{C}^*\mathbf{Alg} \to \mathrm{C}^*\mathbf{Alg}_{\mathrm{cpu}}$ 具有左伴随 $L\colon \mathrm{C}^*\mathbf{Alg}_{\mathrm{cpu}} \to \mathrm{C}^*\mathbf{Alg}$，这是由[KW98，命题 8]。_得到的。
- 遗忘函子 $R'\colon \sigma\mathrm{C}^*\mathbf{Alg}_\sigma \to \sigma\mathrm{C}^*\mathbf{Alg}_{\sigma\mathrm{cpu}}$ 满足 $U \circ R' = R \circ U$，这可由直接检验得到（该复合函子就是显然的遗忘函子）。

将上述结果汇总，我们得到如下图表

$$\begin{array}{ccc} \sigma\mathrm{C}^*\mathbf{Alg}_\sigma & \xrightarrow{R'} & \sigma\mathrm{C}^*\mathbf{Alg}_{\sigma\mathrm{cpu}} \\ \downarrow{\scriptstyle U} & & \downarrow{\scriptstyle \bar{U}} \\ \mathrm{C}^*\mathbf{Alg} & \underset{L}{\overset{R}{\rightleftarrows}} & \mathrm{C}^*\mathbf{Alg}_{\mathrm{cpu}} \end{array} \quad (\top)$$

其垂直箭头均为单子性的。根据伴随提升定理 [Bor94，定理 4.5。6]，由于$\sigma\mathrm{C}^*\mathbf{Alg}_\sigma$ 依据命题 3.8 是余完备的，我们得出 R' 具有左伴随 L'。余单子 $L' \circ R'$ 的余 Kleisli 范畴同构于 $\sigma\mathrm{C}^*\mathbf{Alg}_{\sigma\mathrm{cpu}}$ 这一事实，源于 R' 在对象上是双射：对于所有 σC^*-代数 A 和 B，

$$\begin{aligned} \mathbf{coKl}(L'R')(A,B) &\cong \sigma\mathrm{C}^*\mathbf{Alg}_\sigma(L'R'(A),B) \cong \sigma\mathrm{C}^*\mathbf{Alg}_{\sigma\mathrm{cpu}}(R'(A),R'(B)) \\ &\cong \sigma\mathrm{C}^*\mathbf{Alg}_{\sigma\mathrm{cpu}}(A,B). \end{aligned}$$

限制到 Pedersen–Baire 包络的情形是显而易见的，因为右伴随的图表交换，所以左伴随函子的图表也交换：对于所有 A 和 B，其中 $\sigma\mathrm{C}^*\mathbf{Alg}_\sigma$，

$$\begin{aligned} \sigma\mathrm{C}^*\mathbf{Alg}_\sigma(L'\bar{F}A,B) &\cong \sigma\mathrm{C}^*\mathbf{Alg}_{\sigma\mathrm{cpu}}(\bar{F}A,R'B) \cong \mathrm{C}^*\mathbf{Alg}_{\mathrm{cpu}}(A,\bar{U}R'B) \\ &\cong \mathrm{C}^*\mathbf{Alg}_{\mathrm{cpu}}(A,RUB) \cong \mathrm{C}^*\mathbf{Alg}(LA,UB) \cong \sigma\mathrm{C}^*\mathbf{Alg}_\sigma(FLA,B), \end{aligned}$$

因此由 Yoneda 引理可得 $L'FA \cong FLA$。

条目（ii）和（iii）的证明类似。它们可由以下交换图表得到

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{c}\sigma\mathrm{C}^*\mathbf{Alg}_\sigma & \underset{L'_{cc}}{\overset{R'_{cc}}{\rightleftarrows}} & \mathbf{c}\sigma\mathrm{C}^*\mathbf{Alg}_{\sigma\mathrm{cpu}} \\ \downarrow{\scriptstyle U} & & \downarrow{\scriptstyle \bar{U}} \\ \mathbf{c}\mathrm{C}^*\mathbf{Alg} & \underset{L_{cc}}{\overset{R_{cc}}{\rightleftarrows}} & \mathbf{c}\mathrm{C}^*\mathbf{Alg}_{\mathrm{cpu}} \end{array} \quad (\top) \qquad \begin{array}{ccc} \mathbf{c}\sigma\mathrm{C}^*\mathbf{Alg}_\sigma & \underset{L'_{c}}{\overset{R'_{c}}{\rightleftarrows}} & \sigma\mathrm{C}^*\mathbf{Alg}_{\sigma\mathrm{cpu}} \\ \downarrow{\scriptstyle U} & & \downarrow{\scriptstyle \bar{U}} \\ \mathbf{c}\mathrm{C}^*\mathbf{Alg} & \underset{L_{c}}{\overset{R_{c}}{\rightleftarrows}} & \mathrm{C}^*\mathbf{Alg}_{\mathrm{cpu}} \end{array} \quad (\top)$$

其中，根据注 3.5 的观察，两个图表中的 U 和 U 都具有单子性； R_{cc} 和 R_c 的左伴随由状态空间给出（见命题 4.1），因此 L'_{cc} 和 L'_c 也可由伴随提升定理得到。[11] 值得强调的是，虽然 R'_{cc} 在对象上是双射， R'_c 却不是：因此，$\mathbf{c}\sigma\mathrm{C}^*\mathbf{Alg}_{\sigma\mathrm{cpu}}$ 是一个位于$\mathbf{c}\sigma\mathrm{C}^*\mathbf{Alg}_\sigma$之上的余 Kleisli 范畴，而对于$\sigma\mathrm{C}^*\mathbf{Alg}_{\sigma\mathrm{cpu}}$，情况则并非如此。与之前一样，限制到（交换的）Pedersen–Baire 包络的情形仍然成立。□

前一个结果的名称并非只是暗示性的。我们将在定理 4.3 中证明，在 Baire 可测空间与交换 Pedersen–Baire 包络之间的等价下，定理 4.2 的余单子就是Giry 单子。本节余下部分将对此作出精确说明；若读者愿意相信这个名称的由来，也可以跳过这一部分。

Giry 单子最早出现在 [Gir82]，中，是一个作用于**Meas**上的单子；Meas 是由可测空间及其上的可测函数构成的范畴。给定一个可测空间 X， $\mathcal{G}(X)$ 定义为其上概率

[11]通过对上述命题 3.8 作相应调整，可以得到$\mathbf{c}\sigma\mathrm{C}^*\mathbf{Alg}_\sigma$ 的余完备性。或者，也可以由$\mathbf{c}\sigma\mathrm{C}^*\mathbf{Alg}_\sigma$ 等价于布尔 σ-代数及 σ-同态所成的范畴这一事实推出；众所周知，该范畴是完备且余完备的（[FL26，注 2.1.12]）。

测度的集合，并配备使其成为可测的最小 σ-代数

$$\begin{aligned} \mathrm{ev}_U \colon \mathcal{G}(X) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ p &\longmapsto p(U) \end{aligned}$$

对所有可测子集 $U \subseteq X$ 均可测（参见 C^*-代数的状态空间）。

与 $\mathcal{G}$ 相关联的 Kleisli 范畴是 $\mathbf{Stoch}$，即带有马尔可夫核的可测空间范畴（[Gir82，第 I.4] 节）。如第 2 节所述，交换的 σC^*-代数之间的 σ-完全正保序映射可以视为“抽象马尔可夫核”；类似地，也可以将 σC^*-代数之间的 σ-完全正保序映射视为“非交换马尔可夫核”，从而与前述论断建立联系。为方便起见，我们回顾一下，从 (X, Σ_X) 到 (Y, Σ_Y) 的 马尔可夫核 是一个映射 $\phi\colon\ \Sigma_Y \times X \to [0,1]$，满足：对所有 ϕ，$U, -)\colon\ X \to [0,1]$ 对所有 $U \in \Sigma_Y$ 和 $\phi(-, x)\colon\ \Sigma_Y \to [0,1]$ 都是概率测度。

正如 [JT23], 所论证的，与标准博雷尔空间不同，***Baire*** 可测空间为测度论提供了一个避免第二可数性约束的自然框架。它们是可测空间（X，Σ_X），其中 Σ_X 是 X 上某个紧 Hausdorff 拓扑的贝尔 σ-代数。现在我们希望证明，将 Giry 单子限制在 Baire 可测空间上时，它实际上与定理 4.2 中得到的余单子结构一致。

定理 4.3。考虑以下对象：

- 由 Baire 可测空间及其可测函数构成的范畴$\mathbf{BaireMeas}$ 。
- 由交换 Pedersen–Baire 包络及 σ-同态构成的范畴$\mathbf{cPedBaireC}^*_\sigma$ 态射。

那么，Giry 单子限制在$\mathbf{BaireMeas}$上；也就是说，$\mathcal{G}(X)$ 在 X 为 Baire 可测时也是 Baire 可测的，并且下图在自然同构意义下交换

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{BaireMeas}^{\mathrm{op}} & \xrightarrow{\mathcal{G}} & \mathbf{BaireMeas}^{\mathrm{op}} \\ \downarrow{\scriptstyle \mathscr{L}^\infty} & & \downarrow{\scriptstyle \mathscr{L}^\infty} \\ \mathbf{cPedBaireC}^*_\sigma & \xrightarrow{\mathcal{S}'} & \mathbf{cPedBaireC}^*_\sigma \end{array}$$

其中，$\mathcal{S}'$ 表示由遗忘函子 R'_{cc}及其伴随得到的（受限）余单子：$\mathbf{c}\sigma\mathbf{C}^*\mathbf{Alg}_\sigma \to \mathbf{c}\sigma\mathbf{C}^*\mathbf{Alg}^{\sigma\mathrm{cpu}}$ 。

陈述中的竖直箭头是等价 [FL26，推论 4.2.9]。

证明。根据 [Shi26，推论 A.4]，只要 X 成立，$\mathcal{G}(X)$ 就是贝尔可测的。为证明所需的交换性，我们分别利用 Kleisli 范畴与余 Kleisli 范畴的刻画进行论证。

- 限制到 $\mathbf{BaireMeas}$ 时，Giry 单子的 Kleisli 范畴是 $\mathbf{BaireStoch}$，即由贝尔可测空间及马尔可夫核构成的范畴。这是因为在 $\mathbf{Meas}$ 上的 Giry 单子的 Kleisli 范畴是 $\mathbf{Stoch}$ ([Gir82，第 I.4] 节)。
- 根据定理 4.2，$\mathcal{S}'$ 的余 Kleisli 范畴是 $\mathbf{cPedBaireC}^*_{\sigma\mathrm{cpu}}$，即由交换 Pedersen–Baire 包络及 σ-cpu 映射构成的范畴。

我们声称，该图表

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{BaireMeas}^{\mathrm{op}} & \longrightarrow & \mathbf{BaireStoch}^{\mathrm{op}} \\ \downarrow{\scriptstyle \mathscr{L}^\infty} & & \downarrow{\scriptstyle \mathscr{L}^\infty} \\ \mathbf{cPedBaireC}^*_\sigma & \longrightarrow & \mathbf{cPedBaireC}^*_{\sigma\mathrm{cpu}} \end{array} \tag{4.1}$$

其中，水平箭头是遗忘函子，垂直箭头是等价 [FL26，推论 4.2.9 和 4.3.8], 是交换的。这一点在明确给出所有细节后很容易看出。

设 $\phi\colon\ X \to Y$ 是 **BaireMeas** 中任意一个可测函数。通过遗忘函子 **BaireMeas** $\to$ **BaireStoch**，ϕ 被映射为

$$\begin{aligned}\bar{\phi}\colon\ \Sigma_Y \times X &\longrightarrow [0,1]\\ (U,x) &\longmapsto \delta_{\phi(x)}(U),\end{aligned}$$

其中 Σ_Y 是由 Y 构成的 σ-代数，而 δ_p 是集中于 p 的狄拉克测度（Giry 单子 $X \to \mathcal{G}(X)$的单位由将每个点映射到其狄拉克测度给出）。(4.1)的交换性¯等价于证明 $\mathscr{L}^\infty(\phi) = \mathscr{L}^\infty(\phi)$，这意味着对于每个 $f\colon\ Y \to \mathbb{C}$ 和 $x \in X$，$f(\phi(x)) = \int_Y f(y)\,\bar{\phi}(\mathrm{d}y,\ x)$。

¯但根据 ϕ的定义，这一点成立：

$$\int_Y f(y)\bar{\phi}(\mathrm{d}y, x) = \int_Y f(y)\delta_{\phi(x)}(\mathrm{d}y) = f(\phi(x)),$$

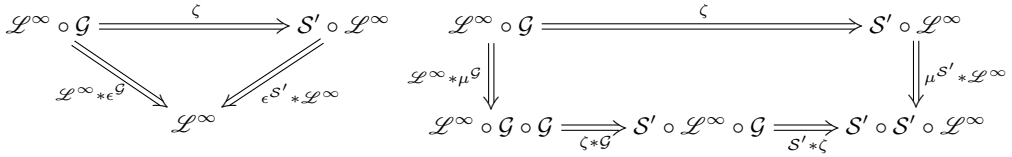
因此，(4.1)的交换性最终得以保证。

由于当相应的右伴随构成的方形交换时，左伴随构成的方形也交换（正如定理 4.2的证明中所述），又由于 $\mathscr{L}^\infty$ 是一个等价，我们得到交换图

$$\begin{array}{ccc}\mathbf{BaireStoch}^{\mathrm{op}} & \longrightarrow & \mathbf{BaireMeas}^{\mathrm{op}}\\ \downarrow{\scriptstyle \mathscr{L}^\infty} & & \downarrow{\scriptstyle \mathscr{L}^\infty}\\ \mathbf{cPedBaireC}^*{}_{\sigma\mathrm{cpu}} & \xrightarrow{\ \geq\ } & \mathbf{cPedBaire复数域}^*{}_{\sigma}\end{array}$$

其中，水平箭头分别将 X 映射到 $\mathcal{G}(X)$，并将 A 映射到 $\mathcal{S}'(A)$。现在，我们可以将这两个交换图沿水平方向复合，从而得出该命题的证明。□

注记 4.4. 对范畴论感兴趣的读者可能会注意到，上述证明利用左伴随的唯一性，直接蕴含了 $\zeta\colon$ $\mathscr{L}^\infty\mathcal{G} \Rightarrow \mathcal{S}'\mathscr{L}^\infty$ 与余单位和余乘法结构相容。等价地，以下复合函子之间的自然变换图表是交换的：



其中 ϵ^- 且 μ^- 分别表示余单子 $\mathcal{G}$ （在**BaireMeas**^{op}上）和 $\mathcal{S}$的余单位与余乘法 $'$.

5. 局部 $\aleph_1$-可呈示性： σC^*-代数

本节将证明 σ**C*****Alg**$_\sigma$ 的局部 $\aleph_1$-可呈示性，以及遗忘函子U的可达性。建议读者具备一些关于可呈示范畴和可达范畴的背景知识（例如参见[AR94 第 1 节，以及 2] 中下文将用到的一些定义）。为便于阅读，我们回顾一下：若偏序集 P 中的每个可数子集都有上界，则称其为 $\aleph_1$-有向 的。

我们先给出一个技术性结果。

引理 5.1。考虑一个 $\aleph_1$-有向图表 $D\colon\ P \to \mathbf{C}^*\mathbf{Alg}$，这里指其定义域 P是一个 $\aleph_1$-有向偏序集。记 $A := \operatorname{colim} D$，并将 $\phi_{\alpha',\alpha}\colon\ D(\alpha') \to D(\alpha)$ 称为过渡态射，将 $\phi_\alpha\colon\ D(\alpha) \to A$ 称为初始余锥的映射。那么，

(i) 等距表示。对于每个 $a \in A$，都存在 $\alpha \in P$ 和 $a_\alpha \in D(\alpha)$，使得$a = \phi_\alpha(a_\alpha)$。此外，可以选择 a_α 使得 $\|a_\alpha\|_{D(\alpha)} = \|a\|_A$。(ii) 正表示。对于每个正 $a \in A$，都存在 $\alpha \in P$和一个正 $a_\alpha \in D(\alpha)$，使得 $a = \phi_\alpha(a_\alpha)$。

证明。

（i）考虑商 $B = \bigcup_{\alpha\in P} D(\alpha)/\sim$，即范畴 $*$-代数中的图表 D 的余极限。正如 [Bun21、《推论》7.22 和 7.23] 中所述， A 对应于 B 的范数完备化。

我们断言，对于 $a \in B$，可以找到 α 和 $a_\alpha \in D(\alpha)$，使得 $\phi_\alpha(a_\alpha) = a$ 且 $\|a_\alpha\|_{D(\alpha)} = \|a\|_B$。回忆一下，范数定义为

$$\|a\|_B \coloneqq \inf \|a_\alpha\|_{D(\alpha)},$$

其中，下确界是在所有满足 $\phi_\alpha(a_\alpha) = a$ 的 $\alpha \in P$ 和 $a_\alpha \in D(\alpha)$ 上取的。特别地，对每个 n，我们都可以找到 α_n 和 $a_n \in D(\alpha_n)$，使得 $\phi_{\alpha_n}(a_n) = a$ 且 $\|a_n\|_{D(\alpha_n)} \leq \|a\|_B + \frac{1}{n}$。根据 B 的定义，对所有 n，都有 $a_n \sim a_m$。由于 P 是有向的，这意味着存在某个 $\alpha > \alpha_n, \alpha_m$ 使得 $\phi_{\alpha_n,\ \alpha}(a_n) = \phi_{\alpha_m,\ \alpha}(a_m)$。让 m 变化；由于 P 的每个可数子集都有上界，因此可以选取这样的 α 来确定所有元素 a_n，即对所有 m，同时有 $\phi_{\alpha_n,\ \alpha}(a_n) = \phi_{\alpha_m,\ \alpha}(a_m)$。现在我们定义 $a_\alpha \coloneqq \phi_{\alpha_n,\ \alpha}(a_n) \in D(\alpha)$；根据上述论证，它不依赖于 n。由于 $\phi_{\alpha_n,\ \alpha}$ 是一个 $*$- 同态，因此它是压缩的，故

$$\|a_\alpha\|_{D(\alpha)} \leq \|a_n\|_{D(\alpha_n)} \leq \|a\|_B + \frac{1}{n}$$

由此，根据 n 的任意性可得 $\|a_\alpha\|_{D(\alpha)} = \|a\|_B$。最后，命题得证。

现在我们要证明 $B = A$。由于 A 对应于 B 的范数完备化（如证明开头所述），因此只需取 B 中的任意一个柯西序列（a_n），并证明它在 B 中有极限即可。

如有必要，取一个子序列后，我们可以假设对所有 $n \geq 2$ 都有 $\|a_n - a_{n-1}\| \leq \frac{1}{2^n}$。对于每个差 $d_n \coloneqq a_n - a_{n-1}$，当 $n \geq 1$ 时（令 $a_0 \coloneqq 0$），可以找到 α_n 和 d'_n，使得 $\phi_{\alpha_n}(d'_n) = d_n$ 且 $\|d'_n\| = \|d_n\|$，从而 $\|d'_n\| \leq \frac{1}{2^n}$。令所有 α_n 的上确界为 α，我们可以假设（d'_n）$\subseteq D$（α）。换言之，我们将 d'_n 与其在 D（α）中的像等同起来。注意到这一假设不会增大范数，因为所有过渡态射 $\phi_{\alpha_n,\ \alpha}$ 都是压缩的。然后，通过直接验证，序列 $s_n \coloneqq \sum_{i=1}^n d'_i$ 是 D（α）中的柯西序列：对于 $m > n \geq 1$，

$$\|s_m - s_n\| = \left\| \sum_{i=n+1}^{m} d_i \right\| \leq \sum_{i=n+1}^{m} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^n} \left(\sum_{i=1}^{m-n} \frac{1}{2^i} \right) \leq \frac{1}{2^n} \xrightarrow{n,m\to\infty} 0.$$

此外，其在 $D(\alpha)$ 中的极限 a_α 给出了 (a_n) 的一个极限，因为 ϕ_α 有界：

$$\phi_\alpha(a_\alpha) = \lim_n \phi_\alpha(s_n) = \lim_n \left(\sum_{i=1}^{n} d_i \right) = \lim_n a_n.$$

最后， $B = A$，因此由我们上面证明的断言可得结论。

(ii) 令 $a \in A$ 为一个正元素。由条目 (i)，存在某个 α 和 a'_α，满足 $\phi_\alpha(a'_\alpha) = a$。现在取 $a_\alpha \coloneqq \max(a'_\alpha, 0) \geq 0$，这里的记号是连续函数演算的标准应用（例如参见 [Tak79，命题 4.6]）。由函数演算的函子性 [Tak79，推论 8.4]，

$$\phi_\alpha(a_\alpha) = \phi_\alpha(\max(a'_\alpha, 0)) = \max(\phi_\alpha(a'_\alpha), 0) = \max(a, 0) = a$$

其中最后一个等式由 $a \geq 0$ 得出。 □

备注 5.2。我们回顾一下，$\mathbf{C^*Alg}$ 是一个局部 $\aleph_1$-可呈现范畴（结合 [PR89，定理 2.4] 和 [AR94，定理 3.28]）。此处引用的 Pelletier 和 Rosický 的结果，是当前纲领最为接近的先例：该结果表明， C^*-代数是某个方程理论的模型。我们为 σC^*-代数建立了一个较弱的类似结果，即它们是一个 $\aleph_1$-元本质代数理论的模型（推论 5.4）。它们是否也能成为某个方程理论的模型，仍是一个开放问题。

定理 5.3。函子 $U\colon \sigma\mathbf{C^*Alg}_\sigma \to \mathbf{C^*Alg}$ 是 $\aleph_1$-可达的，并且 $\sigma\mathbf{C^*Alg}_\sigma$ 是局部 $\aleph_1$-可表的。

证明。考虑一个 $\aleph_1$-有向图表 D: $P \to \sigma\mathbf{C^*Alg}_\sigma$，其中 P是一个 $\aleph_1$-有向偏序集。我们将证明 U(余极限 D) $\cong$ 余极限 UD。根据 [AR94、定理 1.5 以及注记 1.21]，这足以确保对所有在 $\aleph_1$-滤范畴上的余极限也有类似结果，而这些范畴不一定是偏序集。

具体而言，由于 U只是忘却 σ-正规性，因此只需确保 $A := $ 余极限 UD 是一个 σC^*-代数，且余锥态射是 σ-正规的。一旦这一点得到确立，由于左伴随总是保持余极限，显然 $UF = T\colon \mathbf{C^*Alg} \to \mathbf{C^*Alg}$ 是一个在局部$\aleph_1$-可表示范畴上的 $\aleph_1$-可达单子（见备注 5.2），因此结合定理 3.3 以及 [AR94、定理和备注 2.78]， $\sigma\mathbf{C^*Alg}_\sigma$ 也是局部 $\aleph_1$-可表示的。最后， U 确实如所声称的是 $\aleph_1$-可达的。

根据引理 5.1(i)，所有元素 $a \in A := $ 余极限 UD 都可表示为某个 $a_\alpha \in D(\alpha)$，其中 α是任意的。以下设 (a_n) 是 A 中的一个范数有界单调递增序列。下文中，我们分别使用 $\phi_{\alpha',\alpha}$ 和ϕ_α 表示过渡态射和余锥态射，正如引理 5.1 的陈述中所述。

我们首先证明，存在 $\gamma \in P$ 以及一个范数有界单调递增序列 $(b_n) \subseteq D(\gamma)$，满足 $\phi_\gamma(b_n) = a_n$。取 $\alpha_1 \in P$，使得 a_1 具有一个代表元 $d_1 \in D(\alpha_1)$。接下来，对于 $n > 1$，注意到根据假设有 $a_n - a_{n-1} \geq 0$。于是，根据引理 5.1(ii)，存在 $\alpha_n \in P$ 以及 $a_n - a_{n-1}$ 的一个正代表元$d_n \in D(\alpha_n)$。

取 $(\alpha_n)_n$ 的上确界 $\alpha_{\mathbb{N}}$ 后， a_n 在 $D(\alpha_{\mathbb{N}})$ 中具有由 $b_n := \sum_{j=1}^{n} d_n$ 给出的代表元 b_n。根据定义，$b_n \leq b_{n+1}$。此外，根据引理 5.1(i)，对于每个 a_n，都可以找到 β_n 和 $c_n \in D(\beta_n)$，使得 $\phi_{\beta_n}(c_n) = a_n$ 且 $\|c_n\| = a_n$。由于 $c_n \sim b_n$，我们可以找到某个 $\gamma_n > \alpha_{\mathbb{N}}$、$\beta_n$，使得$\phi_{\alpha_{\mathbb{N}},\,\gamma_n}(b_n) = \phi_{\beta_n,\,\gamma_n}(c_n)$；特别地，由于过渡态射是压缩的，有$\|\phi_{\alpha_{\mathbb{N}},\,\gamma_n}(b_n)\| = \|a_n\|$。现在取所有 γ_n 的上界 γ，并滥用记号，将 $\phi_{\alpha_n,\,\gamma}(b_n) \in D(\gamma)$ 中的元素称为 b_n，这样最终可以确保 $(b_n) \subseteq D(\gamma)$ 是一个范数有界单调递增序列。

接下来，给定 $x \geq a_n$ 以及一个范数有界单调递增序列 $(b_n) \subseteq D(\gamma)$，满足$\phi_\gamma(b_n) = a_n$，我们断言存在 $\alpha > \gamma$ 和 x 的一个代表元 $y \in D(\alpha)$，使得$\phi_{\gamma,\,\alpha}(\sup_n b_n) \leq y$。这立即保证 $\phi_\gamma(\sup_n b_n)$ 确实是 a_n 在 A中的上确界，因此A 是一个 σC^*-代数；此外，由于 (b_n) 是任意的，余锥态射是σ-正规的。因此，只需证明这一断言即可完成该命题的证明。

现在我们只需证明上一段中的断言。根据引理 5.1(ii)， $x - a_n \geq 0$在某个 $D(\delta_n)$ 中有一个正表示。取 $(\delta_n)_n$ 与 γ 的上界 δ 后，对于所有 n，我们都有 $x - a_n$ 在 $D(\delta)$ 中的一个代表元 $y_n \geq 0$。由于它们都经由余锥态射映到 x，因此 $\delta \geq \gamma$、 $y_n + \phi_{\gamma,\,\delta}(b_n) \sim y_m + \phi_{\gamma,\,\delta}(b_m)$。令 m 变化，我们可以找到某个 $\alpha \geq \delta$，使得对于所有 n、m， $y := \phi_{\delta,\alpha}(y_n + \phi_{\gamma,\delta}(b_n)) = \phi_{\delta,\alpha}(y_m + \phi_{\gamma,\delta}(b_m))$。于是，对于所有 n，$y \geq \phi_{\gamma,\alpha}(b_n)$，因为 $\phi_{\delta,\alpha}(y_n) \geq 0$，从而 $y \geq \sup_n \phi_{\gamma,\alpha}(b_n) = \phi_{\gamma,\alpha}(\sup_n b_n)$，这是因为过渡态射是$\sigma$-正规的。□

推论 5.4. σ复数域$^*\mathbf{Alg}_\sigma$ 是一个本质代数理论的模型范畴，该理论是 $\aleph_1$-元的。

证明。 </style}一个范畴当且仅当它是某个 λ-元本质代数理论的模型范畴时，才是局部 λ-可呈现的 [AR94，定理 3.36]；因此只需应用定理 5.3。□

注 5.5. 定理 5.3 还有更多推论。例如， σ复数域$^*\mathbf{Alg}_\sigma$ 是良幂且余良幂的。此外， $\aleph_1$-可呈现 C^*-代数 A 的 Pedersen–Baire 包络 FA 所成的族是 σ复数域$^*\mathbf{Alg}_\sigma$的一个强生成元，并且每个 σC^*-代数都是$\aleph_1$-可呈现 σC^*-代数的一个 $\aleph_1$-有向余极限。后一断言是引言中非正式陈述的精确形式：每个 σC^*-代数都由一个小族的 $\aleph_1$-紧对象构成。

6. σ复数域-代数的张量积

Our 接下来的目标是确保 σ复数域***代数**$_\sigma$ 和 σ复数域***代数**$_{\sigma\mathrm{cpu}}$ 具有张量积。从现在起 ，

$$\otimes\colon \mathbf{C^*Alg} \times \mathbf{C^*Alg} \to \mathbf{C^*Alg}$$

表示最大张量积，它满足以下泛性质：对于每个 ϕ： $A \to C$和 ψ： $B \to C$，若它们的像交换，则存在唯一的 (ϕ, ψ)： $A \otimes B \to C$，使得 $(\phi, \psi)(a \otimes b) =$

$\phi(a)\psi(b)$。由此得到的三元组 $(\mathbf{C^*代数}\ \otimes, \mathbb{C})$ 是一个对称幺半范畴。本文将始终只使用这一幺半结构。[12]

已知该张量可扩展到具有相同泛性质的完全正保序映射，因此特别地，$(\mathbf{C^*代数}^{\mathrm{cpu}},\ \otimes,\ \mathbb{C})$ 也是一个对称幺半范畴。有关更多细节，读者可参阅 [BO08]，尤其是第3.3节和习题3.5.1。

为了给 $\sigma\mathbf{C^*代数}_\sigma$ 赋予张量积，我们利用其关于 $\mathbf{C^*代数}$ 的单子性（定理 3.3）。该构造遵循关于幺半单子上的代数的张量积的著名描述，这一描述最早由 Kock 于20世纪70年代初研究 [Koc70]。我们采用了 [Sea13], 中的结果，其中将这一理论推广到了不一定是闭的幺半范畴，而 $(\mathbf{C^*代数}\ \otimes,\ \mathbb{C})$ 正属于这种情形。

由于单子的幺半性是必要条件，我们首先关注这一点。为了证明它，我们只依赖于公认的结果，因此读者无需了解其精确定义。

命题6.1。 由定理 3.1的伴随得到的单子 $T = UF$，按照 [Koc70]的定义，是一个对称幺半单子。

证明。 T 的Kleisli 范畴由带有 σ-同态的Pedersen–Baire 包络构成，这一点可直接验证。 [FL26中的命题 5.32], 证明了该范畴是对称幺半的，因此根据 [Sea13中的命题1.22], T 是一个对称幺半单子。□

T 的幺半性由以下映射体现：

$$\theta_{A,B} \colon TA \otimes TB \to T(A \otimes B),$$

这些映射由最大张量积的泛性质唯一确定，应用于 σ-同态 $T(A) \to T(A \otimes B)$和 $T(B) \to T(A \otimes B)$；而这些同态又唯一地由以下方式得到：

$$A \ni a \mapsto \eta_{A\otimes B}(a \otimes 1) \in T(A \otimes B) \qquad \text{and} \qquad B \ni b \mapsto \eta_{A\otimes B}(1 \otimes b) \in T(A \otimes B).$$

注6.2。 扩张 $T = UF\colon \mathbf{C^*Alg}^{\mathrm{cpu}} \to \mathbf{C^*Alg}^{\mathrm{cpu}}$ 同样是一个对称幺半单子，理由与命题 6.1相同，因为 T 的Kleisli 范畴由带有 σ-完全正保序映射的Pedersen–Baire 包络构成，并且 [FL26 中的注5.33]已证明它是一个对称幺半范畴。

为使论述足够自洽，我们现在对后文用于确保 $\sigma\mathbf{C^*Alg}_\sigma$ 和 $\sigma\mathbf{C^*Alg}_\sigma^{\mathrm{cpu}}$ 是对称幺半范畴的范畴论结果作一些说明。尽管主要参考文献 [Sea13] 讨论了幺半单子和幺半范畴，但在此我们将范围限定于 对称幺半结构，因为额外的一般性在我们的研究中并未体现出来。

记号 6.3。 我们采用以下记号。

- 单子 T 的 Eilenberg–Moore 代数范畴记为 $\mathbf{EM}(T)$，其对象记为对 (A, a)，其中 $A \in \mathcal{K}$ 且 $a\colon TA \to A$ 表示代数结构。
- 对称幺半范畴是一个三元组 $(\mathcal{K}, \otimes, I)$，其中 $\mathcal{K}$ 是一个范畴，$\otimes\colon \mathcal{K} \times \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ 表示张量（幺半）积，而 I 表示单位：$A \otimes I \cong A$ 对所有 $A \in \mathcal{K}$。
- 对称幺半单子是一个二元组 (T, θ)，其中 T 是对称幺半范畴 $(\mathcal{K}, \otimes, I)$ 上的单子，而 θ是由 $\theta_{A,B}\colon TA \otimes TB \to T(A \otimes B)$ 给出的自然变换。

定义 6.4。 设 (T, θ) 是对称幺半范畴 $(\mathcal{K}, \otimes, I)$ 上的对称幺半单子。Eilenberg–Moore 代数 (A, a) 和 (B, b) 的张量积 由以下余等化子图给出

$$T(TA \otimes TB) \underset{T(a\otimes b)}{\overset{\mu T\theta}{\rightrightarrows}} T(A \otimes B) \xrightarrow{q_{(A,a),(B,b)}} (A, a) \boxtimes (B, b)$$

在 $\mathbf{EM}(T)$ 中。当代数态射可从上下文中明确看出（或无关紧要）时，我们简记为 $A \boxtimes B$和 $q_{A,B}$。

我们说使得 $\mathbf{EM}(T)$具有所有张量，若对于 $\mathbf{EM}(T)$ 中的 $(A,\ a)$ 和 $(B,\ b)$，$q_{A,\ B}$ 以及 $A \boxtimes B$ 均存在。

[12]特别地，这里不讨论最小张量积。

注记 6.5。• 定义中的余等化子是自反的，其公共截面为 $T(\eta_A \otimes \eta_B)$。

• 尽管还需要满足其他条件才能确保得到对称幺半范畴（例如，$\otimes$ 应当是结合的），但上述定义已足以确保态射 $\phi\colon (A,a) \to (C,c)$ 和 $\psi\colon (B,b) \to (D,d)$ 的 $\phi \boxtimes \psi$ 存在，这是由余等化子的性质所致：

$$\begin{array}{ccc} T(A\otimes B) & \xrightarrow{q_{A,B}} & A \boxtimes B \\ {\scriptstyle T(\phi\otimes\psi)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \phi\boxtimes\psi} \\ T(C\otimes D) & \xrightarrow{q_{C,D}} & C \boxtimes D \end{array}$$

命题 6.6 ([Sea13，引理 2.3.3])。 设 (T,θ) 是对称幺半范畴 $(\mathcal{K},\otimes,I)$ 上的对称幺半单子，且 $\mathbf{EM}(T)$ 具有所有张量。考虑 Eilenberg–Moore 代数 (A,a)、(B,b) 和 (C,c)。态射

$$A \otimes B \xrightarrow{\eta_{A\otimes B}} T(A\otimes B) \xrightarrow{q_{A,B}} A \boxtimes B$$

通过前复合，在以下两者之间诱导出一个双射：

• 类型为 $A \boxtimes B \to C$ 的态射。

• $\mathbf{EM}(T)$ 中的双态射，即满足以下条件的态射 $\omega\colon A\otimes B \to C$ 属于 $\mathcal{K}$

$$\begin{array}{ccccc} TA\otimes TB & \xrightarrow{\theta_{A,B}} & T(A\otimes B) & \xrightarrow{T\omega} & TC \\ {\scriptstyle a\otimes b}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle c} \\ A\otimes B & & \xrightarrow[\omega]{} & & C \end{array}$$

定理 6.7 ([Sea13，定理 2.5.5])。 设 (T,θ) 是对称幺半范畴 $(\mathcal{K},\otimes,I)$ 上的对称幺半单子，且 $\mathbf{EM}(T)$ 具有所有张量。若对于所有 Eilenberg–Moore 代数 (A,a)、(B,b)、(C,c) 和 (D,d)，

(i) 形如以下的图表

$$T(TA\otimes TB)\boxtimes TTC \underset{T(a\otimes b)\boxtimes Tc}{\overset{\mu T\theta\boxtimes\mu}{\rightrightarrows}} T(A\otimes B)\boxtimes TC \xrightarrow{q\boxtimes c} (A\boxtimes B)\boxtimes C$$

$$TTA\boxtimes T(TB\otimes TC) \underset{Ta\boxtimes T(b\otimes c)}{\overset{\mu\boxtimes\mu T\theta}{\rightrightarrows}} TA\boxtimes T(B\otimes C) \xrightarrow{a\boxtimes q} A\boxtimes(B\boxtimes C)$$

是 $\mathbf{EM}(T)$ 中的余等化子；

(ii) $q_{A,B}\boxtimes q_{C,D}$ 是 $\mathbf{EM}(T)$ 中的满态射；

则 $(\mathbf{EM}(T)\ \boxtimes, TI)$ 是一个对称幺半范畴。

定理 6.8 ([Sea13，定理 2.6.4])。 设 (T,θ) 是对称幺半范畴 $(\mathcal{K},\otimes,I)$ 上的对称幺半单子，且 $\mathbf{EM}(T)$ 具有所有张量。若对于所有 $A\in\mathcal{K}$，$T(A\otimes -)$ 保持 $\mathcal{K}$ 中的自反余等化子，则 $(\mathbf{EM}(T)\ \boxtimes, TI)$ 是一个对称幺半范畴。

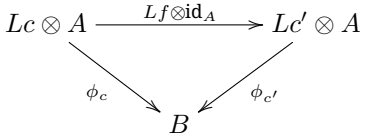
由于这对定理 6.13 的证明很重要，我们指出，定理 6.8 的证明在于证明定理 6.7 的假设均得到满足。

命题 6.9 ([KT02，定理 3.3])。 设 $A\in$ 复数域*$\mathbf{代数}$。最大张量化 $A\otimes -\colon$ 复数域*$\mathbf{代数}$ $\to$ 复数域*$\mathbf{代数}$ 保连通余极限。

为求完备，我们利用最大张量积的泛性质给出一个直接论证。

证明。 考虑一个连通范畴 $\mathcal{C}$ 以及一个函子 $L\colon \mathcal{C}\to$ 复数域*$\mathbf{代数}$，它存在余极限 $\operatorname{colim} L$。现在考虑某个 $B\in$ 复数域*$\mathbf{代数}$的余锥 $\phi_c\colon Lc\otimes A\to B$ of $L(-)\otimes A$。我们要证明存在一个相容映射 $\operatorname{colim} L\otimes A\to B$，从而确保 $\operatorname{colim}(L(-)\otimes A)\cong(\operatorname{colim} L)\otimes A$。

由于 $\mathcal{C}$ 是连通的，因此任意一个 c到 c'之间都存在一条态射之字形链。为简单起见，我们考虑情形 $f\colon c \to c'$。交换图



保证 $\phi_c(1 \otimes a) = \phi_{c'}(1 \otimes a)$。由于 $\mathcal{C}$ 是连通的，我们得到一个唯一的映射 $\psi\colon A \to B$，它对任意选取的 c 都将 a 映射到 $\phi_c(1 \otimes a)$。考察另一侧的边缘化，$\phi_c(- \otimes 1)\colon Lc \to B$为 L诱导出一个余锥。因此，得到 $\phi\colon \operatorname{colim} L \to B$。

现在我们旨在证明 ϕ 与 ψ 的像彼此交换。一旦确立这一点，最大张量积的泛性质便立即推出 $\operatorname{colim} L \otimes A \to B$，从而完成证明。

考虑 $x \in \operatorname{colim} L$。如果 x 属于某个 Lc的像，那么根据构造，$\phi(x)$与ψ 的像交换。否则，由于 **C*代数** 中的余极限由 $\mathbb{C}$ 上 $*$-代数余极限的完备化给出（见[Bun21，推论 7.22 和 7.23]），x 是一列与 ψ的像交换的元素的一致极限。[13] 在这种情况下，注意到 $\phi(x)\psi(a)$ 和 $\psi(a)\phi(x)$ 都是 $\phi(x_n)\psi(a) = \psi(a)\phi(x_n)$ 的极限，因此二者相等。最后，ϕ 与 ψ 交换，结论得证。□

定理 6.10. σ复数域***代数**$_\sigma$ 是一个对称幺半范畴，其幺半单位为 $\mathbb{C}$，其张量积 $\boxtimes$ 满足：

(i) $F(A) \boxtimes F(B) \cong F(A \otimes B)$; (ii) 以下泛性质：对于每个 $\phi\colon A \to C$ 和 $\psi\colon B \to C$，若它们属于 σ复数域***代数**$_\sigma$ 且具有交换像，则存在唯一的 $(\phi, \psi)\colon A \boxtimes B \to C$，满足 $(\phi, \psi)(a \boxtimes b) = \phi(a)\psi(b)$。此外，所有类型为 $A \boxtimes B \to C$ 的 σ-同态都以这种方式得到。

证明。 由命题 3.8 和 6.9，$T(A \otimes -)$ 保持自反余等化子，而且 σ复数域***代数**$_\sigma$具有张量，因为它是余完备的。根据定理 6.8，σ复数域***代数**$_\sigma$ 是一个对称幺半范畴（回顾一下，由命题6.1，T 是一个对称幺半单子）。幺半单位为 $\mathbb{C}$，因为它与 $T(\mathbb{C})$ 同构（对于每个有限维 C^*-代数 A，$T(A) \cong A$，见 [FL26，例 3.3.16]）。条目 (i) 由 [Sea13，2.5.3] 得出。

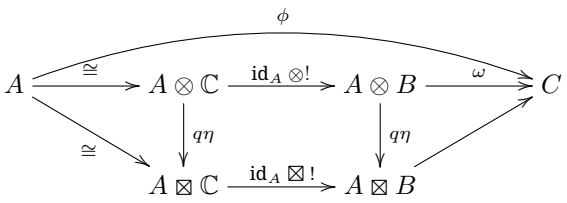
因此，我们只需证明条目（ii）。根据命题 6.6，$A \boxtimes B \to C$ 态射与$\mathbf{EM}(T)$ 的 $A \otimes B \to C$双态射通过与 $q_{A,B}\eta_{A\otimes B}$ 预合成而构成双射对应。我们声称，这类态射恰好对应于如条目（ii）所述对 ϕ 和 ψ 的选择，从而完成证明。

从一个双态射 $\omega\colon A \otimes B \to C$, ω 出发，根据最大张量积的泛性质，它由其边缘映射 $\phi = \omega(- \otimes 1)$ 和 $\psi = \omega(1 \otimes -)$ 唯一确定。此外，直接验证可知，ϕ 和 ψ 的像彼此交换：

$$\begin{aligned}\phi(a)\psi(b) &= \omega(a \otimes 1)\omega(1 \otimes b) = \omega(a \otimes b)\\ &= \omega((1 \otimes b)(a \otimes 1)) = \omega(1 \otimes b)\omega(a \otimes 1)\\ &= \psi(b)\phi(a).\end{aligned}$$

[13]这一事实在引理 5.1 中已经用到。

因此，只需确保如此定义的 ϕ 和 ψ 必定是 σ-正规态射。对于 ϕ，这可由交换图得出：



因为下方路径中的映射是 σ-同态（其中 ! 表示从 $\mathbb{C}$到单位的唯一含幺线性映射）。同样， ψ 也是一个 σ-同态。

反过来，考虑陈述中所述的两个 σ-同态 ϕ 和 ψ。通过最大张量积的泛性质，它们给出一个映射ω: $A \otimes B \to C$，其定义为 $\omega(a \otimes b) = \phi(a)\psi(b)$。我们声称，这样的 ω 按照命题 6.6 的意义是一个双态射。再次利用最大张量积的泛性质，可以通过它们的分解 $TA \to C$ 和 $TB \to C$来检验这两个复合 $TA \otimes TB \to C$。由于它们都是 σ-同态，且 C 是一个σC^*-代数，因此二者均由 $*$-同态 $A \to C$ 和 $B \to C$ 唯一确定，而这两个同态是通过与单位 η 复合得到的。现在可以直接验证， ϕ 分别对应于二者

$$A \to T(A \otimes B) \to TC \to C \qquad \text{and} \qquad A \to A \otimes B \to C$$

对 ψ 也同理，因此所需的交换关系成立。 □

命题 6.11. 给定 A, B 个交换的 σC^*-代数，它们的张量积 $A \boxtimes B$ 仍然是交换的。此外， $A \boxtimes B$ 是 $\mathbf{c}\sigma\mathbf{C}^*\mathbf{Alg}_\sigma$ 中的余积。

证明。只要 A 和 B 是交换的， $A \otimes B$ 就是交换的（例如参见 [WO93，引理 T.6.16]）。此外， T 保持交换性 [SW15，注 5.3.4(iii)], ，因此 $T(A \otimes B)$ 也是交换的。由于商保持交换性，且 $A \boxtimes B$ 是 $T(A \otimes B)$ 的一个商（根据张量积的定义及引理 3.7），我们得到 $A \boxtimes B$ 是交换的。该命题的第二部分直接由张量积的泛性质（定理 6.10(ii)）得出。□

注 6.12. 回忆一下，$\mathbf{c}\sigma\mathbf{C}^*\mathbf{Alg}_\sigma$ 等价于布尔 σ代数及其 σ-同态所构成的范畴，正如第 2 节所述。将这一等价与命题 6.11 结合， $\boxtimes$即可得到布尔 σ-代数的泛张量积 [FL26, 命题 2.5.1]。

特别地，给定两个可测空间 X和 Y， $\mathscr{L}^\infty(X) \boxtimes \mathscr{L}^\infty(Y) \cong \mathscr{L}^\infty(X \times Y)$并非总是成立（参见 [FL26, 例 2.5.6], 或历史文献 [Sik69, 例 37.A]）。然而，若 X 和 Y 是贝尔可测空间（这一概念在定理 4.3 之前已作回顾），则有$\mathscr{L}^\infty(X) \cong F(C(X))$，因此

$$\begin{aligned} \mathscr{L}^\infty(X) \boxtimes \mathscr{L}^\infty(Y) &\cong F(C(X)) \boxtimes F(C(Y)) \\ &\cong F(C(X) \otimes C(Y)) \\ &\cong F(C(X \times Y)) \\ &\cong \mathscr{L}^\infty(X \times Y) \end{aligned}$$

其中 $C(X) \otimes C(Y) \cong C(X \times Y)$是众所周知的（例如参见 [WO93, 引理 T.6.16]）。

现在我们将张量积扩展到 $\sigma\mathbf{C}^*\mathbf{代数}_{\sigma\mathrm{cpu}}$。正如我们将看到的，证明归结为注意到所需的余等化子是自反的，且存在于 $\sigma\mathbf{C}^*\mathbf{代数}_\sigma$ 中，因此引理 3.7 适用。

定理 6.13. $\sigma\mathbf{C}^*\mathbf{代数}_{\sigma\mathrm{cpu}}$ 通过扩展 $\boxtimes$ $\mathbf{C}^*\mathbf{代数}_\sigma$ 的张量积，成为一个对称幺半范畴。

¯证明。 我们验证定理 6.7 的假设均得到满足。回忆一下， T 是一个对称幺半单子（注6.2）。

我们注意到，代数结构由 $a = U\epsilon_A$, $b = U\epsilon_B$ and$c = U\epsilon_C$ 唯一确定，正如定理 3.3 证明末尾所述。特别是，这些代数结构是

σ-同态，也就是说，它们属于遗忘函子 $\sigma\mathbf{C}^*\mathbf{Alg}_\sigma \to \sigma\mathbf{C}^*\mathbf{Alg}^{\sigma\mathrm{cpu}}$ 的像。由于根据引理 3.7，该函子保持自反余等化子，因此我们得到 $\sigma\mathbf{C}^*\mathbf{Alg}^{\sigma\mathrm{cpu}}$ 具有张量（注记 6.5 中已指出，张量是自反余等化子）。

为确保定理 6.7 的条目 (i) 中的图表是余等化子，我们首先注意到，它们在 $\sigma\mathbf{C}^*\mathbf{Alg}_\sigma$ 中已经是余等化子，因为定理 6.10 应用了定理 6.8，而该结果的证明就是检验定理 6.7 的假设是否成立。此外，这些余等化子图是自反的：相应的公共截面分别为 $T(\eta_A \otimes \eta_B) \boxtimes T(\eta_C)$ 和 $T(\eta_A) \boxtimes T(\eta_B \otimes \eta_C)$。对于条目 (i) 中的第一个余等化子，利用 T 和 $\boxtimes$ 的函子性，我们有

$$\begin{aligned}(\mu T\theta \boxtimes \mu)(T(\eta_A \otimes \eta_B) \boxtimes T(\eta_C)) &= \mu T(\theta(\eta_A \otimes \eta_B)) \boxtimes \mu T(\eta_C)\\ &= \mu T(\eta_{A\otimes B}) \boxtimes \mathrm{id}_{TC}\\ &= \mathrm{id}_{T(A\otimes B)} \boxtimes \mathrm{id}_{TC}\\ &= \mathrm{id}_{T(A\otimes B)\boxtimes TC}\\ (T(a \otimes b) \boxtimes Tc)(T(\eta_A \otimes \eta_B) \boxtimes T(\eta_C)) &= T(a\eta_A \otimes b\eta_B) \boxtimes T(c\eta_C)\\ &= T(\mathrm{id}_{A\otimes B}) \boxtimes T(\mathrm{id}_C)\\ &= \mathrm{id}_{T(A\otimes B)\boxtimes TC}\,.\end{aligned}$$

对条目 (i) 中的第二个余等化子，也可作类似推理。由于 $\sigma\mathbf{C}^*\mathbf{Alg}_\sigma \to \sigma\mathbf{C}^*\mathbf{Alg}^{\sigma\mathrm{cpu}}$ 保持自反余等化子（引理 3.7），条目 (i) 得证。

现在讨论定理 6.7 的条目（ii）。我们声称，$q_{A、B} \boxtimes q_{C、D}$ 实际上都是满射。首先注意到，根据引理 3.7，$q_{A、B}$ 都是满射，此外还存在一个交换图

$$\begin{array}{ccc} T(T(A\otimes B)\otimes T(C\otimes D)) & \xrightarrow{T(q\otimes q)} & T(A\boxtimes B\otimes C\boxtimes D)\\ \Big\downarrow{\scriptstyle q} & & \Big\downarrow{\scriptstyle q}\\ T(A\otimes B)\boxtimes T(C\otimes D) & \xrightarrow[q\boxtimes q]{} & (A\boxtimes B)\boxtimes(C\boxtimes D)\end{array}$$

特别地，竖直箭头如前所述都是满射。最后，我们只需证明$T(q \otimes q)$也是满射。这是因为最大张量积是正合的 [BO08，第 3.7 号命题1] ，并且 T 保持满射性（注记 3.11）。□

我们现在旨在描述所有类型为 $A \boxtimes B \to C$ 的 σ-完全正保序映射。为此，我们给出如下结果。

定义 6.14。考虑三个 σC^*-代数 A、B 和 C。若完全正保序映射 ω：$A \otimes B \to C$ 是双σ-正规 的，则

$$\omega\left(\mathrm{ordlim}_n^A a_n \otimes \mathrm{ordlim}_m^B b_m\right) = \mathrm{ordlim}_n^C \mathrm{ordlim}_m^C \omega(a_n \otimes b_m)$$

对于所有序收敛序列 $(a_n) \subseteq A$ 和 $(b_m) \subseteq B$。

引理 6.15. 映射 θ: $TA \otimes TB \to T(A \otimes B)$ 是双-σ-正规态射。

证明. 根据构造，θ 是一个 $*$-同态，因此 $\theta(a \otimes b) = \theta(a \otimes 1)\theta(1 \otimes b)$，并且 $\theta(- \otimes 1)$: $TA \to T(A \otimes B)$ 是一个 σ- 同态，因此 $\theta($ 序极限 $_n\, a_n \otimes 1) =$ 序极限 $_n\, \theta(a_n \otimes 1)$，第二个变量的情形类似。

因此，根据序极限与乘法的相容性，该陈述成立：

$$\begin{aligned}\theta\left(\mathrm{ordlim}_n^{TA} a_n \otimes \mathrm{ordlim}_m^{TB} b_m\right) &= \theta\left(\mathrm{ordlim}_n^{TA} a_n \otimes 1\right)\theta\left(1 \otimes \mathrm{ordlim}_m^{TB} b_m\right)\\ &= \mathrm{ordlim}_n^{T(A\otimes B)} \theta(a_n \otimes 1)\,\mathrm{ordlim}_m^{T(A\otimes B)} \theta(1 \otimes b_m)\\ &= \mathrm{ordlim}_n^{T(A\otimes B)} \mathrm{ordlim}_m^{T(A\otimes B)} \theta(a_n \otimes 1)\theta(1 \otimes b_m)\\ &= \mathrm{ordlim}_n^{T(A\otimes B)} \mathrm{ordlim}_m^{T(A\otimes B)} \theta(a_n \otimes b_m).\end{aligned}$$

□

命题 6.16 （ ⊠的泛性质）。 $\sigma\mathbf{C}^*\mathbf{Alg}_{\sigma\mathrm{cpu}}$ 中的态射 $A \boxtimes B \to C$ 与满足双σ-正规条件的 ω: $A \otimes B \to C \in \mathbf{C}^*\mathbf{Alg}_{\mathrm{cpu}}$ 之间存在双射对应。

证明。 只需证明 ω: $A \otimes B \to C$ 是双 σ-正规态射，当且仅当它是命题 6.6 意义下的双态射。正如定理 6.13 的证明中已经提到的，代数结构由定理 3.3 证明的末尾所示唯一确定。因此，我们可以假设命题 6.6 的双态射图表中的 $a = U\epsilon_A$、 $b = U\epsilon_B$ 和 $c = U\epsilon_C$。

若 ω 是双态射，我们取序收敛序列 $(a_n) \subseteq A$ 和 $(b_m) \subseteq B$。我们希望展开描述双态射的交换图表在元素 $\operatorname{ordlim}_n \eta_A(a_n) \otimes \operatorname{ordlim}_m \eta_B(b_m)$ 上的具体形式。

关于上方路径，我们有

$$U\epsilon_C T\omega\theta_{A,\,B}(\text{序极限}_n\, \eta_A(a_n) \otimes \text{序极限}_m\, \eta_B(b_m)) = U\epsilon_C T\omega(\text{序极限}_n \text{序极限}_m\, \theta_{A,\,B}(\eta_A(a_n) \otimes \eta_B(b_m)))$$
$$= \text{序极限}_n \text{序极限}_m\, U\epsilon_C T\omega\theta_{A,\,B}(\eta_A(a_n) \otimes \eta_B(b_m))$$

其中我们使用了引理 6.15 以及 $T\omega$ 的 σ-正规性。此外，根据 θ 的单位相容性和 η 的自然性，下面的图表交换:

$$\begin{array}{ccccccc} A\otimes B & & \xrightarrow{\omega} & & C & & \\ & {\scriptstyle \eta_A\otimes\eta_B}\searrow & \downarrow{\scriptstyle \eta_{A\otimes B}} & & \downarrow{\scriptstyle \eta_C} & \swarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_C} & \\ TA\otimes TB & \xrightarrow{\theta_{A,B}} & T(A\otimes B) & \xrightarrow{T\omega} & TC & \xrightarrow{U\epsilon_C} & C \end{array} \tag{6.1}$$

将二者结合起来，上路径给出 $\operatorname{ordlim}_n \operatorname{ordlim}_m \omega(a_n \otimes b_m)$。

对于下路径，

$$\omega(U(\epsilon_A) \otimes U(\epsilon_B)(\operatorname{ordlim}_n \eta_A(a_n) \otimes \operatorname{ordlim}_m \eta_B(b_m)) = \omega(\operatorname{ordlim}_n a_n \otimes \operatorname{ordlim}_m b_m)$$

由 $U(\epsilon_A)$ 和 $U(\epsilon_B)$ 的 σ-正规性可得。最后，由命题 6.6 中双态射图表的交换性，

$$\omega(\operatorname{ordlim}_n a_n \otimes \operatorname{ordlim}_m b_m) = \operatorname{ordlim}_n \operatorname{ordlim}_m \omega(a_n \otimes b_m),$$

即 ω 是双 σ-正规的。

现在我们寻求证明逆命题，即任意双 σ-正规 ω 都是一个双态射。这通过两个 π-λ 论证完成。对于第一个论证，令

$$M_B \coloneqq \{a \in TA \mid \omega(U\epsilon_A \otimes U\epsilon_B)(a \otimes \eta_B(b)) = U\epsilon_C T\omega\theta_{A,B}(a \otimes \eta_B(b)) \text{ for all } b \in B\} \subseteq TA$$

这包含 $\eta_A(A)$，因为由 (6.1) 的交换性，预合成 $\eta_A \otimes \mathrm{id}_B$ 后，定义等式两边都得到 ω。此外， M_B 是一个 $*$ 子空间，因为涉及的所有映射都保持 $*$ 且是线性的。接下来，若 $(a_n) \subseteq TA$ 是包含于 M_B 中的有界单调递增序列，那么由 ω 和 θ 的双边 σ- 正规性（已在引理 6.15 中证明），$\sup_n^{TA}(a_n)$ 属于 M_B。由于 TA 是 A 的σ闭包，我们得出 $M_B = TA$。

对于第二个 π-λ 论证，考虑这个 $*$ 子空间

$$M_{TA} \coloneqq \{b \in TB \mid \omega(U\epsilon_A \otimes U\epsilon_B)(a \otimes b) = U\epsilon_C T\omega\theta_{A,B}(a \otimes b) \text{ for all } a \in TA\} \subseteq TB$$

根据前面的讨论， $\eta_B(B) \subseteq M_{TA}$。此外，可以对上述论证稍作调整，以证明 M_{TA} 也是一个 σ 子空间，因此 $M_{TA} = TB$。最后，集合

$$M \coloneqq \{z \in TA \otimes TB \mid \omega(U\epsilon_A \otimes U\epsilon_B)(z) = U\epsilon_C T\omega\theta_{A,B}(z)\} \subseteq TA \otimes TB$$

包含所有简单张量 $z = a \otimes b$。 M 是一个范数闭的 $*$ 子空间，其中范数闭性源于所有映射都是压缩的这一事实。因此， M 包含简单张量的线性组合的所有范数极限，故 $M = TA \otimes TB$。□

7. σCP-仪器与张量积

遵循冯·诺伊曼代数的标准形式， [OO15] 探讨了 CP-仪器的概念（[DL70、Oza84]）以及它们与冯·诺伊曼代数张量积之间的关系。在此，我们为 σC^*-代数提供其研究结果的一个类比版本。

为明确所处的背景，回顾一下：CP-仪器将可测空间（X，Σ_X）的每个可测子集赋予所选空间上的一个完全正自映射，并要求其满足归一化条件以及适当形式的 σ-可加性。在 [OO15], 中，所选空间可以取为冯·诺伊曼代数 N，且这些自映射还可以进一步要求是正规的。[14]

在此，我们将这一思想推广到 σC^*-代数和 σ-完全正保序映射，并得到定理 7.6。特别地，我们证明 σ CP-仪器 $\Sigma_X \to \sigma\,\mathrm{CP}(A,\ A)$ 与 σ-完全正保序映射 $\mathscr{L}^\infty(X) \boxtimes A \to A$ 之间存在双射对应。我们强调，所考虑的映射不仅是完全正的，而且还是σ-正规映射；此外，其定义域 $\mathscr{L}^\infty(X) \boxtimes A$ 本身也是一个 σC^*-代数。

乍看之下，我们的定理是 σC^*-代数版本的 [OO15，命题 3.3], ，该命题指出，每个 CP-仪器都唯一对应于一个从张量积出发的完全正映射。然而，两者并不完全平行。由于参考文献中涉及的代数是冯·诺伊曼代数，人们可能会期待该映射是正规的，且张量积也是冯·诺伊曼代数，这与定理 7.6 类似。但实际结果给出的是定义在 C^*-张量积上的非正规映射，因此我们的结论更强。

这些额外的正规性不仅从我们当前的视角来看很重要。一般而言，[OO15，命题 3.3] 中的完全正映射不一定能扩张到冯·诺依曼张量积（[OO15，§V]）上的正规扩张，而这阻碍了相关测量过程的构造（即仪器的具体动力学实现）。为克服这一问题，作者为仪器引入了正规扩张性质，其确切要求就是这样的扩张存在。在此性质下，[OO15，定理 3.4] 建立了 CP-仪器与从相关（冯·诺依曼）张量积出发的正规完全正映射之间的双射对应。

因此，定理 7.6 体现了 [OO15，定理 3.4] 的思想。值得注意的是，在我们的设定中，无需像正规扩张性质那样附加任何假设：每个 σCP-仪器都对应于一个 σ-完全正保序映射。不过，我们并未对测量过程作出任何断言。据我们所知，要将我们的结果与测量过程联系起来，需要一个 σC^*-代数版本的斯廷斯普林扩张定理 [Pau02，定理 4.1], ，而这一版本目前在文献中尚未出现。

我们预计，本节的研究结果将受到量子测量理论和仪器单子当前发展的关注，因为它们与近期的预印本[BLRW26、Fri26]密切相关。在 [BLRW26], 中，CP-仪器的复合依赖于正规扩张性质；相比之下，[Fri26] 通过限制于具有可分前对偶的 I 型冯·诺伊曼代数，避开了这些扩张问题。尽管全面的比较超出了本文的范围，但定理 7.6（连同命题 7.7）提示了一条替代路径：无需这些限制，但代价是使用 σC^*-代数和 σ-正规映射。

值得注意的是，尽管上述参考文献只讨论可测空间，但本文的讨论适用于任意 Boolean σ-代数。

定义 7.1。设 Σ 为一个 Boolean σ-代数，且设 A 和 B 为 σC^*-代数。我们将$\sigma\,\mathrm{CP}(A, B)$记作 σ-正规完全正映射 $A \to B$。

一个 σ***CP*-测度** 是映射 $p\colon \Sigma \to \sigma\,\mathrm{CP}(A, B)$，满足：

- 对于任意两两不交元素序列 $(U_n)_n \subseteq \Sigma$（$U_n \wedge U_m = \bot$ 对所有 $n \neq m$）以及任意$a \in A$，序列 $(\sum_{n=1}^m p(U_n)(a))_m$ 在 B 中序收敛，并且

$$p\left(\bigvee_n U_n\right)(a) = \sum_n p(U_n)(a) \coloneqq \mathrm{ordlim}_m^B \left(\sum_{n=1}^m p(U_n)(a)\right)$$

一个 σCP-仪器 是满足 $p(\top)(1) = 1$的 σCP-测度。

或者，也可以通过假设 $a \geq 0$，并用 $\sup_n$ 替代 ordlim_n，来改述上述性质。

我们不我们重点介绍本节主定理（定理 7.6）的证明所需的预备材料 .

[14]在参考文献中，这一点的形式化方式略有不同：所选空间是前对偶，在其中完全正性仍然有意义。然而，由于这些映射与冯·诺伊曼代数上的正规完全正映射一一对应，本文的表述与之完全类似。

定义 7.2。设 Σ 为一个布尔 σ代数， B 为一个 σC^*代数。有界 B值测度 是一个映射 $q\colon \Sigma \to B$，满足

- $q(U) \geq 0$ 对所有 $U \in \Sigma$ 和 $q(\bot) = 0$;
- 对于由两两不交元素组成的所有序列 $(U_n)_n \subseteq \Sigma$，序列 $(\sum_{n=1}^m q(U_n))_m$ 在 B中序收敛[15]

$$q\left(\bigvee_n U_n\right) = \sum_n q(U_n) \coloneqq \sup_m^B \left(\sum_{n=1}^m q(U_n)\right)$$

该定义是 [Wri72，定义 2.1] 在布尔 σ-代数背景下的推广。通过进一步要求 $q(\top) = 1$，可得更广义的正算子值测度概念（参见[FL26，例 3.2.8 和定义 4.1.27]）。

一个关键的说明是，对于每个布尔 σ-代数 Σ，都存在一个值测度 $\Sigma \mapsto \mathscr{L}^\infty_{\mathrm{abs}}(\Sigma)$，记作 χ_-，它将 $U \in \Sigma$ 映射为其抽象的“特征函数”。具体而言， $\chi_U\colon\ B(\mathbb{C}) \to \Sigma$由 $\chi_U(\{1\}) = U$ 给出，而 $\chi_U(\{0\}) = \neg U$ （回顾第 2 节中的描述）。

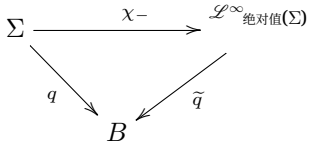
特别地，对于任意序列 (U_n),

$$\chi_{\bigvee_n U_n} = \sup_m \chi_{\bigvee_{n=1}^m U_n} \qquad \text{and} \qquad \chi_{\bigwedge_n U_n} = \inf_m \chi_{\bigwedge_{n=1}^m U_n}$$

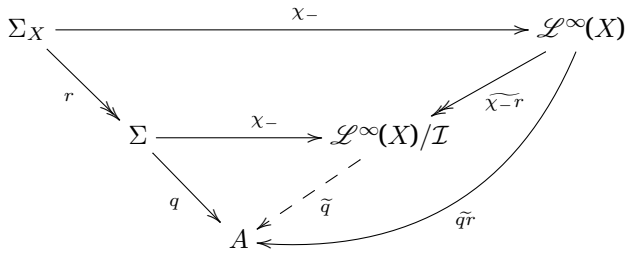
而对于底元素和顶元素，我们有 $\chi_\bot = 0$ 和 $\chi_\top = 1$。

对于熟悉范畴论的读者， χ_- 是$\mathbf{c\sigma C^*Alg}_\sigma$ 与由 σ-同态构成的布尔 σ-代数范畴之间伴随等价的单位。

定理 7.3. 设 Σ 是布尔 σ-代数， B 是一个 σC^*-代数。那么，每个 B值测度 q都唯一延拓为一个 σ-正规完全正映射 $\tilde{q}\colon \mathscr{L}^\infty{}_{\mathrm{abs}}(\Sigma) \to B$，其意义由下列交换图表给出:



证明概要。论证只需简单改写 [FL26, Theorem 4.1.30] 的证明。为清楚起见，我们给出一些细节。若 Σ 是一个通常的 σ-代数，即存在一个可测空间 (X, Σ_X)，满足 $\Sigma_X \cong \Sigma$，那么这一结果已在 [Wri72, Section 2] 中证明，基本上只需改写勒贝格积分的构造。对于一般的布尔 σ-代数 Σ，根据 Loomis–Sikorski 表示定理 [Sik69, Theorem 29.1],，存在一个可测空间 (X, Σ_X)，使得$\Sigma \cong \Sigma_X/I$，其中 I是一个 σ-理想。特别地， $\mathscr{L}^\infty{}_{\mathrm{abs}}(\Sigma) \cong \mathscr{L}^\infty(X)/\mathcal{I}$，其中 $\mathcal{I}$是支撑包含于 I 中的有界可测函数集合（[FL26, Proposition 4.1.22]）。现在我们考虑



其中， $\tilde{q}r$ 是由上一步得到的。我们断言，虚线映射由商的泛性质而存在。事实上，对于任意自伴的 $g \in \mathcal{I}$，有

$$-\|g\|\chi_{\mathrm{supp}(g)} \leq g \leq \|g\|\chi_{\mathrm{supp}(g)}$$

其中 $\mathrm{supp}(g) \in I$ g 的支撑（将标准不等式 $-\|g\| \leq g \leq \|g\|$ 乘以 $\chi_{\mathrm{supp}(g)}$）。结合 $\tilde{q}r(\chi_{\mathrm{supp}(g)}) = qr(\mathrm{supp}(g)) = 0$，可得

$$0 = -\|g\| \cdot 0 = \tilde{q}r(-\|g\|\chi_{\mathrm{supp}(g)}) \leq \tilde{q}r(g) \leq \tilde{q}r(\|g\|\chi_{\mathrm{supp}(g)}) = \|g\| \cdot 0 = 0,$$

[15] q U_n B σ $\lambda > 0$ $\|\sum_{n=1}^m q\ U_n\| \leq$ 由于 ( ) 是正的，且是 -闭的，我们也可以 λ m 要求存在这样的，使得对所有 都有 ( )。

因此 $\widetilde{qr}(g) = 0$。 □

对于下一个预备结果，我们先回顾如下内容。

定义 7.4. 在 C^*-代数 A 中，投影 p 是满足 $p^* = p = p^2$ 的 A 中的一个元素。简单元素 s 是投影的线性组合：$s = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k p_k$。

在 $\mathscr{L}^\infty(X)$ 中，简单元素由简单函数给出，因为投影是可测子集的特征函数。类似地，在 $\mathscr{L}^\infty_{\mathrm{abs}}(\Sigma)$ 中，投影与 Σ 的元素一一对应，对应关系为 $\chi_-\colon \Sigma \to \mathscr{L}^\infty{}_{\text{绝对值}}(\Sigma)$（[FL26，引理 4.1.26]）。

引理 7.5. 设 Σ 是布尔 σ-代数，且 A 是一个 σC^*-代数。

(i) 元素 $s \otimes a$ 的线性张成是 $\mathscr{L}^\infty_{\mathrm{abs}}(\Sigma) \otimes A$ 中的稠密子集，其中 $a \in A$，且 s 是 $\mathscr{L}^\infty{}_{\text{绝对值}}(\Sigma)$ 中的简单元素。此外，该张成空间中的自伴元素在 $\mathscr{L}^\infty_{\mathrm{abs}}(\Sigma) \otimes A$ 的自伴元素集合中稠密。(ii) $\sum_{k=1}^{m} s_k \otimes a_k$ 为正，当且仅当存在某个 n 和某个 $t_\ell \geq 0$，且对每个 $\ell \in \{1, \dots, n\}$ 都有 $b_\ell \geq 0$，使得

$$\sum_{k=1}^{m} s_k \otimes a_k = \sum_{\ell=1}^{n} t_\ell \otimes b_\ell.$$

此外，t_ℓ 可以取为互不相交的投影：$t_\ell \cdot t_{\ell'} = 0$ 对所有互不相同的 ℓ，ℓ'。

证明。 条目 (i) 由以下事实得出：根据张量积的定义，$f \otimes a$ 的线性组合是稠密的（因为它是代数张量积的范数闭包）；此外，根据 [FL26，推论 3.4.4]，简单元素在 $\mathscr{L}^\infty_{\mathrm{abs}}(\Sigma)$中稠密。对自伴元素的限制情形类似。

关于条目（ii），假设 $\sum_{k=1}^{m} s_k \otimes a_k \geq 0$。令$s_k = \sum_j \lambda_{j,\ k} p_{j,\ k}$ 满足$\lambda_{j,\ k} \in \mathbb{C}$ 且$p_{j,\ k}$ 为投影。根据代数张量积的标准性质，

$$\textstyle\sum_k s_k \otimes a_k = \sum_k \left(\sum_j \lambda_{j,k} p_{j,k} \right) \otimes a_k = \sum_{j,k} p_{j,k} \otimes (\lambda_{j,k} a_k)$$

因此，不失一般性，我们可以假设该元素写作 $\sum_{k=1}^{m} p_k \otimes a_k$，其中 p_k为投影。接下来，我们引入一些辅助记号。令 $p_k^\top := p_k$ 且 $p_k^\perp := 1 - p_k$。现在，对任意布尔序列 $I = (i_1,\ \dots,\ i_m) \in \{\perp, \top\}^m$，定义

$$p^I := (p_1)^{i_1} \cdot (p_2)^{i_2} \cdots (p_m)^{i_m}, \qquad \text{and} \qquad a^I := \sum_{j \mid i_j = \top} a_j$$

通过简单的归纳推理，

$$\sum_{k=1}^{m} p_k \otimes a_k = \sum_{I \in \{\perp, \top\}^m} p^I \otimes a^I,$$

此外，$p^I \cdot p^J = 0$ 对于任意不同的 I、J，因为 $p_k^\top p_k^\perp = 0$ 对于任意 k。将范围限制在满足 $p^I \neq 0$ 的那些 $I \in \{\perp, \top\}^m$ 上，我们可以令 $t_\ell = p^I$ 和 $a^I = b^\ell$，从而得到陈述中所述的公式。然而，我们尚未证明 a^I 是正的（而 p^I 的正性是显然的，因为它是一个投影）。为此，我们回顾一个众所周知的事实：对于任意紧 Hausdorff 空间Y，$C(Y) \otimes A \cong C(Y, A)$，其中 $C(Y, A)$ 是由连续映射 $Y \to A$ 给出的 C^*-代数，其运算按点定义（参见例如 [WO93，推论 T.6.17]）。从这一描述可以看出，当且仅当对于任意 $y \in Y$，$f \in C(Y, A)$ 为正，$f(y) \geq 0$。取 Y $\mathscr{L}^\infty$abs(Σ) 的盖尔范德谱，并取 U_I满足 $p^I = \chi_{U_I}$ 的 Y 的子集，[16]对于任意元素 $u \in U^I$，

$$p^J(u) = p^J(u) p^I(u) = 0$$

对于任意 $J \neq I$，因为 $p^J p^I = 0$。此外，U^I非空，因为我们将范围限制为满足$p^I \neq 0$的那些 I。由此可知，a^I恰好是 u在连续映射 $\sum_{I \in \{\perp, \top\}^m} a^I \cdot p^I(-)\colon Y \to A$下的像，按假设该映射为正。最后，$a^I$ 为正，命题得证。□

[16] p^I 解释为函数 $Y \to \mathbb{C}$ 时，其像包含于 $\{0, 1\}$，因为它是一个投影。

定理 7.6。 设 Σ 是一个布尔 σ-代数，且 A 和 B 是 σC^*-代数。两者之间存在一个双射对应

(i) σ CP-仪器 $\Sigma \to \sigma\,\mathsf{CP}(A,\ B)$;
(ii) σ-cpu 映射 $\mathscr{L}^\infty_{\mathrm{abs}}(\Sigma) \boxtimes A \to B$。

证明。 我们通过将一个 σ-cpu 映射 $\phi\colon\ \mathscr{L}^\infty{}_{\mathrm{abs}}(\Sigma) \boxtimes A \to B$ 映射到 σ CP-仪器 $p_\phi\colon\ U \mapsto (a \mapsto \phi(\chi_U \otimes a))$，定义一个从条目 (ii) 到条目 (i) 的映射 p_-。这确实是一个 σ CP-测度：对于每个由两两不交元素组成的序列 $(U_n) \subseteq \Sigma$，

$$\begin{aligned} p_\phi\left(\textstyle\bigvee_n U_n\right)(a) &= \phi(\chi_{\bigvee_n U_n} \otimes a) \\ &= \phi\left(\left(\sup_m \textstyle\sum_{n=1}^m \chi_{U_n}\right) \otimes a\right) && \left(\chi_{\bigvee_n U_n} = \sup_m \textstyle\sum_{n=1}^m \chi_{U_n}\right) \\ &= \mathrm{ordlim}_m\, \phi\left(\left(\textstyle\sum_{n=1}^m \chi_{U_n}\right) \otimes a\right) && \text{(Proposition 6.16)} \\ &= \mathrm{ordlim}_m \textstyle\sum_{n=1}^m \phi(\chi_{U_n} \otimes a) && \text{(linearity)} \\ &= \textstyle\sum_n p_\phi(U_n)(a) \end{aligned}$$

归一化显然成立：$p_\phi(\top)(1) = \phi(\chi_\top \otimes 1) = \phi(1 \otimes 1) = 1$。

p_- 的单射性同样是直接的。如果 $p_\phi = p_\psi$，那么对于所有 $a \in A$和所有 $U \in \Sigma$，$\phi(\chi_U \otimes a) = \psi(\chi_U \otimes a)$。由于对于每个 $f \in \mathscr{L}^\infty_{\mathrm{abs}}(\Sigma)$，都有 $f = \mathsf{ordlim}_n\, s_n$，其中 s_n 是简单元素（[FL26，推论 3.4.4]），根据双-σ-正规性（命题 6.16），这足以推出 ϕ 和 ψ 在所有简单张量上相等，因此它们必定一致。

我们还需证明 p_- 的满射性。首先注意，对于任意正的 $a \in A$，一个 σCP-仪器p给出一个 B-值测度 $q_a(U) := p(U)(a)$。q_a的 σ-可加性由 p 的可加性立即得到，因此我们只需验证 $q_a(U) \geq 0$ 以及 $q_a(\bot) = 0$。前者由 a 为正且 $p(U)$ 完全正这一事实推出。后者则是 $q_a(U \vee \bot) = q_a(U) + q_a(\bot)$ 对所有 $U \in \Sigma$ 成立的结果，这由 q_a 的 σ-可加性得到：事实上，这意味着 $q_a(\bot) = 2q_a(\bot)$，从而 $q_a(\bot) = 0$。由定理 7.3，我们得到一个 σ- 正规 cp 映射 $\mathscr{L}^\infty_{\mathrm{abs}}(\Sigma) \to B$，它扩展了 q_a。此外，只要 $f = \mathsf{ordlim}_n\, s_n$ 且 $s_n = \sum_\ell \lambda_\ell \cdot {}_n\chi_{U_\ell} \cdot {}_n$ 为简单元素，就有 $\widetilde{q_a}(f) = \mathsf{ordlim}_n \sum_\ell \lambda_\ell \cdot {}_n p(U_{\ell,n})(a)$，这是由 $\widetilde{q_a}$ 的 σ-正规性得到的。总之，我们得到了一个映射

$$\begin{aligned} \phi\colon\ \mathscr{L}^\infty_{\mathrm{abs}}(\Sigma) \times A_+ &\longrightarrow B \\ (f, a) &\longmapsto \widetilde{q_a}(f) \end{aligned}$$

其中 A_+ 表示 A的正元素。由线性性，我们可以将整个讨论推广到 A的所有元素。具体而言，给定 $a = \sum_i \mu_i a_i = \sum_j \nu_j a'_j$ 有限和，满足 $a_i,\ a'_j \geq 0$ 且 $\mu_i,\ \nu_j \in \mathbb{C}$，我们有

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_i \mu_i \phi(f, a_i) &= \textstyle\sum_i \mu_i \left(\mathrm{ordlim}_n \sum_\ell \lambda_{\ell,n} p(U_{\ell,n})(a_i)\right) \\ &= \mathrm{ordlim}_n \textstyle\sum_\ell \lambda_{\ell,n} p(U_{\ell,n}) \left(\sum_i \mu_i a_i\right) && (\dagger) \\ &= \mathrm{ordlim}_n \textstyle\sum_\ell \lambda_{\ell,n} p(U_{\ell,n}) \left(\sum_j \nu_j a'_j\right) \\ &= \textstyle\sum_j \nu_j\, \mathrm{ordlim}_n \sum_\ell \lambda_{\ell,n} p(U_{\ell,n})(a'_j) && (\ddagger) \\ &= \textstyle\sum_j \nu_j \phi(f, a'_j) \end{aligned}$$

其中，两个等式(†)，(‡)由序极限的线性性以及 $p(U)$成立，对所有 $U \in \Sigma$均成立。最后，我们得到一个线性映射 $\mathscr{L}^\infty{}_{\mathrm{abs}}(\Sigma) \odot A \to B$。为简便起见，我们仍将其记作 ϕ，其中 $\odot$ 表示代数张量积。

由引理 7.5(ii)，我们看到，将该映射限制在元素 $\sum_{k=1}^m s_k \otimes a_k$ 上是正的，因此，根据 [Pau02，命题 2.1] 及其证明，它是有界的，并且对所有自伴 b满足 $\|\phi(b)\| \leq \|b\|$。最后，ϕ 可以唯一延拓到其定义域的范数完备化，而根据引理 7.5(i)，该范数完备化与 $\mathscr{L}^\infty_{\mathrm{abs}}(\Sigma) \otimes A$ 重合。此外，根据引理 7.5(i) 的第二句话，这样的延拓必为自伴的，并且在自伴元素上是压缩的。现在我们可以应用 [FL23，推论 3.25]，从而得出该映射是正的。

将相同的策略重新应用于 σ CP-仪器 $\Sigma \to \sigma\,\mathrm{CP}(A \otimes M_n, B \otimes M_n)$，其将 U映射到 $p(U) \otimes \mathrm{id}_{M_n}$，我们得到 $\mathscr{L}^{\infty}_{\mathrm{abs}}(\Sigma) \otimes A \otimes M_n \to B \otimes M_n$的正性。 n 的任意性保证了完全正性。

现在我们检验 ϕ 的双-σ-正规性： $\mathscr{L}^{\infty}_{\mathrm{abs}}(\Sigma) \otimes A \to B$。在 $\mathscr{L}^{\infty}_{\mathrm{abs}}(\Sigma)$ 上， σ-正规性由构造可得：给定 $a \in A$ 和 $a = \sum_i \mu_i a_i$ ，满足 $a_i \geq 0$ 和 $\mu_i \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}\phi(\mathrm{ordlim}_k\, f_k \otimes a) &= \sum_i \mu_i \phi(\mathrm{ordlim}_k\, f_k \otimes a_i) = \sum_i \mu_i q_{a_i}(\mathrm{ordlim}_k\, f_k) \\ &= \sum_i \mu_i\, \mathrm{ordlim}_k\, q_{a_i}(f_k) = \mathrm{ordlim}_k \sum_i \mu_i \phi(f_k \otimes a_i) \\ &= \mathrm{ordlim}_k\, \phi(f_k \otimes a)\end{aligned}$$

（另见 [FL26，定理 4.1.7]）。

另一侧更为微妙。我们将情形限制为 $f \in \mathscr{L}^{\infty}_{\mathrm{abs}}(\Sigma)$ 为正，并令 $(a_n) \subseteq A$为一个单调递减序列，使得 $\inf_n a_n = 0$；特别地，对所有 n都有 $a_n \geq 0$ 。于是，$\phi(f \otimes a_n) \leq \phi(f \otimes a_{n-1})$，我们希望证明 $\inf_n \phi(f \otimes a_n) = 0$。为此，注意到根据 ϕ 的正性以及标准不等式 $0 \leq f \leq \|f\|$，$0 \leq \phi(f \otimes a_n) \leq \phi(\|f\| \otimes a_n)$。因此，

$$0 \leq \inf_n \phi(f \otimes a_n) \leq \inf_n \phi(\|f\| \otimes a_n) \overset{(\dagger)}{=} \inf_n \|f\| p(\top)(a_n) = \|f\| p(\top)(\inf_n a_n) = 0$$

其中等式（†）由 ϕ的定义得出，而下一个等式则由 σ-正规性得出$p(\top)$。因此，$\inf_n \phi(f \otimes a_n) = 0 = \phi(f \otimes \inf_n a_n)$，如所要求。由线性性可知， $\phi(f \otimes -)$ 同样保持范数有界单调递增序列的任意上确界（参见 [FL26，备注3.2.5]），因此也保持任意序极限（如第 2 节所述）。由于 C^*-代数中的每个元素都是正元素的线性组合，对于所有 $f \in \mathscr{L}^{\infty}_{\mathrm{abs}}(\Sigma)$， $\phi(f \otimes \mathrm{ordlim}_m\, a_m) = \mathrm{ordlim}_m\, \phi(f \otimes a_m)$ 成立。

最后， ϕ 的双σ-正规性得以保证，而根据命题 6.16， p_- 的满射性现已随之得到。□

我们以如下 σCP-仪器的复合作为结尾，这是朝向将量子仪器单子 [BLRW26，Fri26]的方案推广到σC^*-代数变体的第一步。

命题 7.7. 设 Σ 和 Σ' 是布尔 σ-代数， A、 B、 C 是 σC^*-代数。 σCP-仪器 $p\colon \Sigma \to \sigma\,\mathrm{CP}(A, B)$ 和 $p'\colon \Sigma' \to \sigma\,\mathrm{CP}(B, C)$ 复合后得到一个 CP-仪器

$$p' \circ p\colon \Sigma \otimes \Sigma' \longrightarrow \sigma\,\mathrm{CP}(A, C)$$

其结果由布尔 σ-代数的泛张量积编索引。

证明. 由定理 7.6， p和 p'分别对应于 σ-cpu 映射 $\phi\colon \mathscr{L}^{\infty}_{\mathrm{abs}}(\Sigma) \boxtimes A \to B$和 $\phi'\colon \mathscr{L}^{\infty}_{\mathrm{abs}}(\Sigma') \boxtimes B \to C$。由于 $\sigma\mathbf{C}^*\mathbf{Alg}_{\sigma\mathrm{cpu}}$ 是对称幺半的（定理 6.13），复合映射

$$\mathscr{L}^{\infty}_{\mathrm{abs}}(\Sigma') \boxtimes \mathscr{L}^{\infty}_{\mathrm{abs}}(\Sigma) \boxtimes A \xrightarrow{\mathrm{id} \boxtimes \phi} \mathscr{L}^{\infty}_{\mathrm{abs}}(\Sigma') \boxtimes B \xrightarrow{\phi'} C$$

仍然是一个 σ-cpu 映射。由命题 6.11 和注 6.12， $\mathscr{L}^{\infty}_{\mathrm{abs}}(\Sigma') \boxtimes \mathscr{L}^{\infty}_{\mathrm{abs}}(\Sigma) \cong \mathscr{L}^{\infty}_{\mathrm{abs}}(\Sigma \otimes \Sigma')$，其中 $\otimes$ 表示布尔 σ-代数 [FL26 的泛张量积，命题 2.5.1]。反向应用定理 7.6 即得所需的仪器。□

参考文献

[AR94] J. Adamek 和 J. Rosicky，《局部可呈示且可达范畴》，伦敦数学学会讲义系列，剑桥大学出版社，1994年。↑10，14，15，16[BLRW26] Robert I. Booth、Dominik Leichtle、Alex Rice 和 Kim Worrall，《量子仪器的复合》，2026年，arXiv:2606.28291。↑23，27[BO08] Nathanial P. Brown 和 Narutaka Ozawa， c^*C*-代数与有限维逼近，数学研究生教材，第88卷，罗得岛州普罗维登斯：美国数学会（AMS），2008年（英文）。↑17，21[Bor94] Francis Borceux，《范畴代数手册》第2卷，《数学及其应用百科全书》，第51卷，剑桥大学出版社，剑桥，1994年，范畴与结构。MR 1313497 ↑4，8，10，12[Bun21] Ulrich Bunke，《关于C^*C*-代数和C^*C*-范畴的课程讲义》，2021年，bunke.app.uni-regensburg.de/VorlesungCastcats-1.pdf。↑15，19[BW05] Michael Barr 和 Charles Wells，《拓扑斯、三元组与理论》，表示论与范畴应用2005(2005)，第12期，1–288页（英文）。↑7，9

[Del90] P. Deligne，《坦纳范畴》，《格罗滕迪克纪念文集》第II卷，数学进展丛书，第87卷，Birkhäuser Boston，波士顿，马萨诸塞州，1990年，第111–195页。MR 1106898 ↑4[DL70] E. Brian Davies 和 John T. Lewis，量子概率的操作方法，《数学物理通讯》17（1970），第3期，239–260页。↑3，22[EGNO15] P. Etingof、S. Gelaki、D. Nikshych 和 V. Ostrik，《张量范畴》，数学调查与专著，第205卷，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2015年。MR 3242743 ↑4[FJ15] Robert W. J. Furber 和 Bart P. F. Jacobs，从 Kleisli 范畴到交换 C*-代数：概率 Gelfand 对偶，《计算机科学中的逻辑方法》11（2015），arXiv:1303.1115。↑1[FL23] Tobias Fritz 和 Antonio Lorenzin，对合 Markov 范畴与量子 de Finetti 定理，2023年，arXiv:2312.09666。↑10，26[FL26] , 抽象与非交换可测空间范畴，《数学进展》488（2026），110793。↑2，3，4，6，7，8，12，13，17，19，20，24，25，26，27[Fri26] Tobias Fritz，量子仪器单子，2026年，arXiv:2606.27805。↑23，27[Fur] Robert Furber，测度空间上的概率单子，robertfurber.com/preprints/cemonad-preprint.pdf。↑2，9，10[Gir82] Michèle Giry，概率论的范畴论方法，《拓扑与分析的范畴论方面》（柏林、海德堡）（B. Banaschewski 编），Springer Berlin Heidelberg，1982年，第68–85页。↑3，12，13[Joh82] Peter T. Johnstone，《Stone 空间》，剑桥高等数学研究，第3卷，剑桥大学出版社，剑桥，1982年。MR 698074 ↑1[JT23] Asgar Jamneshan 和 Terence Tao，不可数测度论的基础方面：Gelfand 对偶、Riesz 表示、典范模型与典范分解，《基础数学》261（2023），第1期，1–98页（英文），arXiv:2010.00681。↑13[Koc70] Anders Kock，对称幺半闭范畴上的单子，《数学档案》21（1970），第1期，1–10页。↑17[KT02] M. Khoshkam 和 J. Tavakoli，C*-代数理论中的范畴构造，《澳大利亚数学会杂志》73（2002），第1期，97–114页。↑8，10，18[KW98] Eberhard Kirchberg 和 Simon Wassermann，由算子系统生成的 C^*C*-代数，《纯粹与应用数学杂志》155（1998），第2期，324–351页（英文）。↑3，12[Lin69] F. E. J. Linton，代数范畴中的余等化子，《三元组与范畴同调理论研讨会》（柏林、海德堡）（B. Eckmann 编），Springer Berlin Heidelberg，1969年，第75–90页。↑7，10[ML98] S. Mac Lane，《工作数学家的范畴论》，第二版，研究生数学教材，第5卷，Springer-Verlag，纽约，1998年。MR 1712872 ↑4，8[MS03] John MacDonald 和 Manuela Sobral，单子的若干方面，《数学及其应用百科全书》，第213–268页，剑桥大学出版社，2003年。↑7[Mur90] Gerard J. Murphy，C*-代数与算子理论，学术出版社，1990年。↑9[OO15] Kazuya Okamura 和 Masanao Ozawa，局域量子物理中的测量理论，《数学物理学杂志》57（2015），第1期，015209。↑3，4，22，23[Oza84] Masanao Ozawa，连续可观测量的量子测量过程，《数学物理学杂志》25（1984），第1期，79–87页。↑3，22[Pau02] Vern Paulsen，完全有界映射与算子代数，剑桥高等数学研究，第78卷，剑桥：剑桥大学出版社，2002年（英文）。↑4，5，11，23，26[Pav22] Dmitri Pavlov，交换冯·诺伊曼代数的 Gelfand 型对偶，《纯粹与应用代数杂志》226（2022），第4期，106884，arXiv:2005.05284。↑2[Ped18] Gert K. Pedersen，C^*C*-代数及其自同构群，第二版，《纯粹与应用数学》（阿姆斯特丹），学术出版社，伦敦，2018年，由 Søren Eilers 和 Dorte Olesen 编辑并作序。↑4，10[PR89] Joan Wick Pelletier 和 Jiří Rosický，生成 C^*C*-代数及相关范畴的方程理论，《范畴拓扑及其与分析、代数和组合学的关系》（布拉格，1988年），World Sci. Publ.，蒂内克，新泽西州，1989年，第163–180页。MR 1047899 ↑15[Rud87] Walter Rudin，《实分析与复分析》，第三版，麦格劳-希尔图书公司，纽约，1987年。MR 924157 ↑1[Sea13] Gavin J. Seal，张量、单子与作用，《范畴论及其应用》28（2013），403–434页（英文）。↑17，18，19[Sel10] P. Selinger，幺半范畴图形语言综述，《物理学的新结构》（Bob Coecke 编），第813卷，Springer，2010年，第289–355页。↑4[Shi26] Zev Shirazi，概率测度余密度单子的交换性与 Kleisli 定律，《范畴论及其应用》45（2026），461–500页（英文）。↑13[Sik69] Roman Sikorski，《布尔代数》，第三版，《数学及其相关领域成果》 [数学与相关领域研究成果], 第25卷，Springer-Verlag New York, Inc.，纽约，1969年。↑6，20，24[SW15] Kazuyuki Saitô 和 J. D. Maitland Wright，单调完备 c^*C*-代数与泛型动力系统，Springer 数学专著，Springer London，2015年。↑2，4，5，7，9，20

[Tak79] Masamichi Takesaki, 《算子代数理论。I》，Springer-Verlag，纽约-海德堡，1979年。MR 548728↑15[WO93] Niels Erik Wegge-Olsen， K-理论与 C^*-代数：一种通俗易懂的方法，牛津：牛津大学出版社，1993年（英文）。↑20, 25[Wri72] J. D. Maitland Wright, 《取值于偏序向量空间的测度》，《伦敦数学学会会刊》**s3-25** （1972），第4期，675–688页。↑24[Wri76] , 正则 σ-C^*-代数完备化，《伦敦数学学会杂志》**s2-12** （1976），第3期，299–309页。↑6

电子邮箱：fosco.loregian@taltech.ee 塔林理工大学，爱沙尼亚塔林电子邮箱：a.lorenzin.95@gmail.com 意大利特伦托