arXiv:2611.32364v1 [math.OA] 24 Nov 2026

# 局部嵌入 $C^*(\mathbb{F}_\infty)$

JEAN ROYDOR

摘要。我们研究将 $C^*$-代数局部嵌入到 $C^*(\mathbb{F}_\infty)$ 中的问题，作为 LLP/WEP 框架下 QWEP 的一种类似概念。我们通过一种类似 CP 稳定性的性质来刻画这一性质；CP 稳定性是有限维算子系统的一种逼近性质。我们证明，局部可嵌入性与可和迹结合，可推出迹局部提升性质。结合 Ioana、Spaas 和 Wiersma 的上同调障碍，我们证明，群 $C^*$ 的全群代数 $C^*(\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z}))$ 无法局部嵌入到 $C^*(\mathbb{F}_\infty)$ 中。对于 Thom 构造的两个超线性群的全 $C^*$-代数，我们也得到了相同结论。据我们所知，此前已知的唯一一个关于局部嵌入到 $C^*(\mathbb{F}_\infty)$ 中的障碍，是 Junge 和 Pisier 提出的。

## 1. 引言

Kirchberg 的工作 [Kir93] 揭示了局部提升性质（LLP）与弱期望性质（WEP）之间紧密的对偶关系，这种关系通过 $C^*$-代数的张量积来体现。商弱期望性质（QWEP）拓展了这一图景中的 WEP 一侧。本文研究作为 LLP 一侧对应概念的嵌入 $C^*(\mathbb{F}_\infty)$ 中的局部可嵌入性。

我们首先回顾用于量化局部可嵌入性的算子空间不变量。

对于算子空间 $E$，若线性映射 $T\colon E \to F$ 满足 $\|T\|_{\mathrm{cb}} = \sup_{r\geq 1} \|\mathrm{id}_{M_r} \otimes T\| < \infty$，则称其为完全有界。有限维算子空间之间的完全有界 Banach–Mazur距离为

$$d_{\mathrm{cb}}(E,F) = \inf_T \|T\|_{\mathrm{cb}} \|T^{-1}\|_{\mathrm{cb}},$$

其中 $T$ 遍历从 $E$ 到 $F$的线性完全有界同构。

对于有限维算子空间 $E$，

$$d_f(E) = \inf\{d_{\mathrm{cb}}(E,F) : F \subset C^*(\mathbb{F}_\infty),\ \dim F = \dim E\}.$$

对于一个算子空间 $X$，定义

$$d_f(X) = \sup\{d_f(E) : E \subset X,\ \dim E < \infty\}.$$

特别地，对于一个 $C^*$-$代数 $A$，这定义了 $d_f(A)$，并赋予其典范算子空间结构。

如果 $A$ 局部嵌入 $C^*(\mathbb{F}_\infty)$，则称 $d_f(A) = 1$。等价地，对于每个有限维 $E \subset A$ 以及任意 $\varepsilon > 0$，都存在一个单射线性映射 $T\colon E \to C^*(\mathbb{F}_\infty)$，使得

$$\|T\|_{\mathrm{cb}} \|T^{-1} : T(E) \to E\|_{\mathrm{cb}} < 1 + \varepsilon. \tag{1.1}$$

恰当的 $C^*$-代数局部嵌入 $C^*(\mathbb{F}_\infty)$。此外，每个可分的核 $C^*$-代数都存在一个完全等距的线性嵌入到 $C^*(\mathbb{F}_\infty)$。详情请参见[Pis20]中的第20节；另见 [Har98]。

每个具有局部提升性质（局部提升性质）的 $C^*$-代数都局部嵌入 $C^*(\mathbb{F}_\infty)$。反之则不成立：约化群代数 $C^*_r(\mathbb{F}_2)$ 是恰当的，因此局部嵌入$C^*(\mathbb{F}_\infty)$，但它不具有局部提升性质 [Kir93]。

据我们所知，此前已知的唯一一个局部可嵌入$C^*$（$\mathbb{F}_\infty$）的障碍来自 Junge 和 Pisier。他们在 1995年证明了 $\mathbb{B}(\ell_2)$ 不能局部嵌入 $C^*$（$\mathbb{F}_\infty$） [JP95]。他们的工作还给出了局部可嵌入性的张量范数刻画，见命题1.1。这表明，不变量 $d_f$（$A$）对于一个1或 $\infty$ 的 $C^*$-代数 $A$只能取这些值。

在第2节中，我们回顾局部可嵌入 $C^*$（$\mathbb{F}_\infty$）的刻画：通过与 WEP代数作张量积，以及通过 WEP映射的局部可提升性（定理2.1）。与 Pisier 的 QWEP刻画（定理2.2）进行比较，可以更加明确地看出二者之间的平行关系。我们还建立了保持性质（命题2.4）。第3 节给出了单位 $C^*$-代数关于环境CP稳定性(ACP 稳定性)的一个等价表述。该逼近条件允许所涉及的有限维算子系统位于一个环境 $\mathbb{B}$（$H$）中。

在第4节中，我们获得了关于完全群 $C^*$-代数的新障碍。我们证明，$C^*(\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z}))$ 和 $C^*(\mathbb{Z}^2 \rtimes \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ 不能局部可嵌入到 $C^*(\mathbb{F}_\infty)$ 中（定理 4.3）。关键观察是，局部可嵌入性与可和迹相结合，会迫使保迹表示映射到有限冯·诺依曼代数中具有局部提升性质（命题 4.2）。这让人想起一个众所周知的事实：局部可嵌入性与 WEP 相结合会推出局部提升性质。我们还可以将这一关键观察纳入 Ioana、Spaas 和 Wiersma [ISW20] 的射影表示障碍中。我们还在推论4.7和第5节中处理了 Thom 的两个不具备分解性质的超线性群例子 [Tho10], 。对于第一个例子，论证使用了一个不同于典范群迹的可和迹。

我们回顾一下用于检测局部可嵌入 $C^*(\mathbb{F}_\infty)$的张量范数，详见 [Pis20]。如果 $E \subset \mathbb{B}(H)$ 和 $F \subset \mathbb{B}(K)$ 是完全等距嵌入，则 $M$ 在 $E \odot F$ 上的 Junge–Pisier 范数是由 $\mathbb{B}(H) \otimes_{\max} \mathbb{B}(K)$诱导的范数。它与嵌入的选择无关，对于完全等距映射具有内射性，并且满足

$$\|T \otimes S : E \otimes_M F \longrightarrow E' \otimes_M F'\|_{\mathrm{cb}} \leq \|T\|_{\mathrm{cb}} \|S\|_{\mathrm{cb}}. \tag{1.2}$$

对于 $C^*$-代数， $M$ 是一个 $C^*$-张量范数，因此 $\|\cdot\|_{\min} \leq \|\cdot\|_M \leq \|\cdot\|_{\max}$。下一个命题或许对专家而言是众所周知的，但我们希望回顾这一二分性

**命题 1.1**。 对于 $C^*$-代数 $A$，以下断言等价。

(i) $d_f(A) < \infty$。(ii) $d_f(A) = 1$、 $i.e.$、 $A$ 局部嵌入 $C^*(\mathbb{F}_\infty)$。(iii) $A \otimes_M \mathbb{B}(\ell_2) = A \otimes_{\min} \mathbb{B}(\ell_2)$ 通过 $A \odot \mathbb{B}(\ell_2)$上的恒等映射等距地实现。

证明。 假设 (i)，并令 $c = d_f(A)$。根据 [JP95，定理 4。5]， $\|x\|_M \leq c\|x\|_{\min}$ 对每个$x \in A \odot \mathbb{B}(\ell_2)$。对于 $z \in A \odot \mathbb{B}(\ell_2)$ 和 $n \geq 1$，将此估计应用于 $(z^*z)^n$。由于两个范数都是 $C^*$-范数，

$$\|z\|_M^{2n} = \|(z^*z)^n\|_M \leq c\,\|(z^*z)^n\|_{\min} = c\,\|z\|_{\min}^{2n}.$$

取 $2n$ 次方根并令 $n \to \infty$，得到 $\|z\|_M \leq \|z\|_{\min}$。反向不等式总是成立，因此得证 (iii)。

反过来，由同一结果取 $c = 1$ 可知 (iii) 蕴含 (ii)。最后，(ii) 蕴含 (i)。 □

注 1.2（QWEP 的张量刻画）。 一个含幺 $C^*$-代数 $Q$ 是 QWEP，当且仅当

$$Q \otimes_L C^*(\mathbb{F}_\infty) = Q \otimes_{\max} C^*(\mathbb{F}_\infty)$$

在 $Q \odot C^*(\mathbb{F}_\infty)$ 上等距地。对于商代数 $A = C^*(\mathbb{F}_\alpha)/I$ 和 $B = C^*(\mathbb{F}_\beta)/J$，其中 $\mathbb{F}_\alpha$和 $\mathbb{F}_\beta$ 分别是由 $\alpha$ 个和 $\beta$ 个生成元生成的自由群，并且 $I$， $J$ 是闭理想， $A \odot B$ 上的张量范数 $L$ 由商映射诱导

$$\frac{C^*(\mathbb{F}_\alpha) \otimes_{\min} C^*(\mathbb{F}_\beta)}{I \otimes_{\min} C^*(\mathbb{F}_\beta) + C^*(\mathbb{F}_\alpha) \otimes_{\min} J}.$$

该范数与自由表示无关。这里 $L$ 是 Pisier 对以下张量范数所采用的记号：lr 见于 [Kir93]。另见 [Pis20，§7.6 及定理 9。67]。

## 2. 刻画与保持性质

我们首先用 WEP 和局部提升性质映射来给出局部可嵌入性和 QWEP 的刻画。

令 $i_B: B \to B^{**}$ 表示一个 $C^*$-代数的典范嵌入，并以 $\|\cdot\|_{\mathrm{dec}}$表示可分解范数。对于来自算子空间的线性映射 $u: X \to B$，以下术语沿用 [Pis20，定义 9.55 和 9.58]。若 $u$ 是*WEP* 映射，则当且仅当 $\mathrm{id}_{C^*(\mathbb{F}_\infty)} \otimes u: C^*(\mathbb{F}_\infty) \otimes_{\min} X \to C^*(\mathbb{F}_\infty) \otimes_{\max} B$ 是压缩映射；若是 *LLP* 映射，则当且仅当 $\mathrm{id}_{\mathbb{B}(\ell_2)} \otimes u: \mathbb{B}(\ell_2) \otimes_{\min} X \to \mathbb{B}(\ell_2) \otimes_{\max} B$ 是压缩映射。

给定商映射 $q: D \twoheadrightarrow D/I$，若来自算子空间的线性映射 $u: X \to D/I$ 局部 1可经由 $q$ 提升，则对于每个有限维子空间 $E \subset X$，都存在完全压缩映射 $s_E: E \to D$，使得 $qs_E = u|_E$。

**定理 2.1**（局部可嵌入 $C^*(\mathbb{F}_\infty)$ 的刻画）。设 $A$ 是一个含幺$C^*$-代数。以下各项等价。

（*i*） $A$局部嵌入到 $C^*(\mathbb{F}_\infty)$ 中。（*ii*）对于所有具有 *WEP* 的含幺 $C^*$-代数 $W_1$、$W_2$，每个含幺完全正映射 $u: A \to W_1$ 都诱导一个压缩映射（*ii′*）。同样，对 $W_1 = W_2 = \mathbb{B}(\ell_2)$ 也成立。（*iii*）存在一个希尔伯特空间 $H$ 以及一个忠实的含幺 $*$-表示 $i: A, \to \mathbb{B}(H)$，使得 $i$ 是一个 *LLP* 映射。（*iv*）对于每个 $C^*$-代数的商映射 $q: D \twoheadrightarrow D/I$，每个 *WEP* 映射 $u: A \to D/I$ 都能通过 $q$ 局部 *1*-可提升。

$$\mathrm{id}_{W_2} \otimes u: W_2 \otimes_{\min} A \to W_2 \otimes_{\max} W_1$$

现在，为了说明局部可嵌入 $C^*(\mathbb{F}_\infty)$ 在 LLP/WEP 图景中发挥着类似于 QWEP 的作用，我们回顾 Pisier 的 QWEP 判据 [Pis20，定理 9。67] 的含幺完全正表述，并且还在（iv）中加入延拓性质，以便使这两个定理彼此对称。

**定理 2.2**（QWEP 的刻画）。设 $Q$ 是一个含幺 $C^*$-代数。以下条件等价。

（i） $Q$具有 *QWEP*。（ii）对于所有具有局部提升性质的含幺 $C^*$-代数 $L_1, L_2$，每个单位完全正映射 $u: L_1 \to Q$ 都会诱导一个压缩映射（ii′）。对于 $L_1 = L_2 = C^*(\mathbb{F}_\infty)$，结论相同。（iii）存在一个自由群 $\mathbb{F}$ 以及一个含幺满射 $*$-同态 $q: C^*(\mathbb{F}) \to Q$，它是一个 *WEP* 映射。（iv）对于每个算子空间的包含 $X \subset Y$ 以及每个 *LLP* 映射 $u: X \to Q$，都存在一个完全压缩映射 $\widetilde{u}: Y \to Q^{**}$，使得

$$\mathrm{id}_{L_2} \otimes u: L_2 \otimes_{\min} L_1 \to L_2 \otimes_{\max} Q.$$

$$\widetilde{u}|_X = i_Q \circ u.$$

比较上述两个定理中的断言（$iv$），我们看到，局部可提升性是可提升性的一种弱形式，正如以二重对偶为值的延拓是延拓性质的一种弱形式。

**引理 2.3**。设 $W$ 是一个具有 *WEP* 的 $C^*$-代数，且 $u: X \to B$ 是一个 *WEP* 映射。那么$\mathrm{id}_W \otimes u: W \otimes_M X \longrightarrow W \otimes_{\max} B$ 是压缩的。

证明。根据 [Pis20，推论 9.56]，，映射 $i_B u: X \to B^{**}$ 可分解为 $wv$，其中 $v: X \to \mathbb{B}(K)$ 是完全有界的，$w: \mathbb{B}(K) \to B^{**}$ 是可分解的，且 $\|v\|_{\mathrm{cb}}\|w\|_{\mathrm{dec}} \le 1$。在忠实表示 $W \subset \mathbb{B}(H)$ 中，WEP 意味着该包含映射与任意 $C^*$-代数进行最大张量化后仍为等距映射 [Pis20，定理 9.22]。因此 $W \otimes_M \mathbb{B}(K) = W \otimes_{\max} \mathbb{B}(K)$。典范的

包含映射 $B \to B^{**}$ 与 [Pis20，推论 727]。因此，对于 $z \in W \odot X$，

$$\begin{aligned}\|(\mathrm{id}_W \otimes u)z\|_{W \otimes_{\max} B} &= \|(\mathrm{id}_W \otimes w)(\mathrm{id}_W \otimes v)z\|_{W \otimes_{\max} B^{**}} \\ &\le \|w\|_{\mathrm{dec}} \, \|(\mathrm{id}_W \otimes v)z\|_{W \otimes_M \mathbb{B}(K)} \le \|z\|_{W \otimes_M X},\end{aligned}$$

通过对可分解映射进行极大张量化以及（1.2）。 □

定理 2.1 的证明。假设 (i) 成立。由 [JP95，定理 4.5], $W \otimes_M A = W \otimes_{\min} A$，对每个$C^*$-代数 $W$均成立。在 (ii) 中， $u$ 是一个 WEP 映射：它是完全压缩的，并且由于 $W_1$具有 WEP， $C^*(\mathbb{F}_\infty) \otimes_{\min} W_1 = C^*(\mathbb{F}_\infty) \otimes_{\max} W_1$。应用引理 2.3 并取 $W = W_2$，得到 (ii)。取$W_1 = W_2 = \mathbb{B}(\ell_2)$，得到 (ii′)。

假设 (ii′) 成立，并固定 $z = \sum_{j=1}^m b_j \otimes a_j \in (\mathbb{B}(\ell_2) \odot A) \setminus \{0\}$。含幺代数 $A_0 = C^*(1, a_1, \dots, a_m)$ 是可分的。取一个忠实单位表示 $\pi\colon A_0 \to \mathbb{B}(\ell_2)$，并由 Arveson 定理将其扩张为含幺完全正映射 $u\colon A \to \mathbb{B}(\ell_2)$。由于 $u|_{A_0} = \pi$ 是完全等距的，利用 $M$ 的内射性以及恒等式 $\mathbb{B}(\ell_2) \otimes_M \mathbb{B}(\ell_2) = \mathbb{B}(\ell_2) \otimes_{\max} \mathbb{B}(\ell_2)$，得到

$$\|z\|_{\mathbb{B}(\ell_2) \otimes_M A} = \|(\mathrm{id}_{\mathbb{B}(\ell_2)} \otimes u)z\|_{\mathbb{B}(\ell_2) \otimes_{\max} \mathbb{B}(\ell_2)} \le \|z\|_{\mathbb{B}(\ell_2) \otimes_{\min} A}.$$

该不等式就是 (ii′)。命题 1.1现在给出 (i)。

对于任意忠实单位表示 $i\colon A, \to \mathbb{B}(H)$，根据 $M$ 的定义可得

$$\|(\mathrm{id}_{\mathbb{B}(\ell_2)} \otimes i)z\|_{\mathbb{B}(\ell_2) \otimes_{\max} \mathbb{B}(H)} = \|z\|_{\mathbb{B}(\ell_2) \otimes_M A} \qquad (z \in \mathbb{B}(\ell_2) \odot A).$$

因此， $i$ 恰当为 LLP 映射，当且仅当 $\|z\|_{\mathbb{B}(\ell_2) \otimes_M A} \le \|z\|_{\min}$ 对所有此类 $z$成立。由命题 1.1，这等价于 (i)。这证明了 (i)⇔(iii)，并表明只要一个忠实单位表示可行，所有忠实单位表示都可行。

为证明 (i) 蕴含 (iv)，令 $B = D/I$。引理2.3 结合 $W = \mathbb{B}(\ell_2)$ 和 [JP95 定理 4.5]，给出一个压缩映射 $\mathrm{id}_{\mathbb{B}(\ell_2)} \otimes u\colon \mathbb{B}(\ell_2) \otimes_{\min} A \to \mathbb{B}(\ell_2) \otimes_{\max} B$。最大张量化保持商，因此初等张量上的恒等映射诱导出一个压缩映射

$$\mathbb{B}(\ell_2) \otimes_{\max} B \longrightarrow (\mathbb{B}(\ell_2) \otimes_{\min} D)/(\mathbb{B}(\ell_2) \otimes_{\min} I).$$

将这两个压缩映射复合，恰好得到 1-可提升性 $q$在 [Pis20命题 7.48]中的局部判据。

最后，假设 (iv) 成立，并固定一个含幺完全正映射 $u\colon A \to \mathbb{B}(\ell_2)$。由于 $\mathbb{B}(\ell_2)$ 具有 WEP， $u$是一个 WEP 映射。取一个自由群 $\mathbb{F}$ 以及一个单位商映射 $q\colon C^*(\mathbb{F}) \twoheadrightarrow \mathbb{B}(\ell_2)$。给定 $z \in \mathbb{B}(\ell_2) \odot A$，取一个包含其系数的有限维 $E \subset A$，以及一个完全压缩映射 $s_E\colon E \to C^*(\mathbb{F})$，使其提升 $u|_E$。完全自由群代数具有局部提升性质，因此$\mathbb{B}(\ell_2) \otimes_{\max} C^*(\mathbb{F}) = \mathbb{B}(\ell_2) \otimes_{\min} C^*(\mathbb{F})$。将 $\mathrm{id}_{\mathbb{B}(\ell_2)} \otimes q$ 应用于 $(\mathrm{id}_{\mathbb{B}(\ell_2)} \otimes s_E)z$，得到

$$\|(\mathrm{id}_{\mathbb{B}(\ell_2)} \otimes u)z\|_{\mathbb{B}(\ell_2) \otimes_{\max} \mathbb{B}(\ell_2)} \le \|(\mathrm{id}_{\mathbb{B}(\ell_2)} \otimes s_E)z\|_{\mathbb{B}(\ell_2) \otimes_{\max} C^*(\mathbb{F})} = \|(\mathrm{id}_{\mathbb{B}(\ell_2)} \otimes s_E)z\|_{\min} \le \|z\|_{\min}.$$

这证明了（ii′）。 □

定理 *2.2* 的证明。 根据 [Pis20，定理 9。67]，（i）蕴含（ii），因为每个单位完全正映射都是可分解压缩。取 $L_1 = L_2 = C^*$（$\mathbb{F}_\infty$） 即可得到（ii′）。

假设（ii′）。取一个无限集 $I$ 和一个单位商映射 $q\colon C^*(\mathbb{F}_I) \twoheadrightarrow Q$，其中$\mathbb{F}_I$ 在 $I$上自由。对于每个 $z \in C^*(\mathbb{F}_\infty) \odot C^*(\mathbb{F}_I)$，用群多项式逼近其右侧系数，得到一个可数无限的 $J \subset I$，使得 $z \in C^*(\mathbb{F}_\infty) \odot C^*(\mathbb{F}_J)$。由于 $C^*(\mathbb{F}_J) \cong C^*(\mathbb{F}_\infty)$，我们可以将（ii′）应用于单位完全正映射 $q|_{C^*(\mathbb{F}_J)}$。由最小张量积的内射性可得

$$\|(\mathrm{id}_{C^*(\mathbb{F}_\infty)} \otimes q)z\|_{\max} \le \|z\|_{\min}.$$

因此 $q$ is一个 WEP 映射，从而证明了 (iii)。蕴含关系 (iii)⇒(i) 是 [Pis20，定理 9.67]。假设 (i)，并将 $Q = W/I$ 写为具有 WEP 的 $W$。令 $p\colon W \to Q$ 为商映射。固定如 (iv) 中的 $X \subset Y$ 和 $u$。对于每个有限维子空间 $E \subset X$，局部提升性质条件

给出一个完全压缩映射 $v\colon\ E \to W$，其中 $pv = u|_E$。事实上，最大张量积保持商结构，因此初等张量上的恒等映射诱导出一个压缩映射

$$\mathbb{B}(\ell_2) \otimes_{\max} Q \longrightarrow (\mathbb{B}(\ell_2) \otimes_{\min} W)/(\mathbb{B}(\ell_2) \otimes_{\min} I).$$

与 $\mathrm{id}_{\mathbb{B}(\ell_2)} \otimes u$ 复合，得到 [Pis20命题 7 中的局部提升判据。48]。由 WEP，$i_W v$可扩张为完全压缩映射 $V\colon Y \to W^{**}$，其中 $i_W\colon W \to W^{**}$是典范嵌入 [Pis20推论 9。24]。因此 $T_E = p^{**}V\colon\ Y \to Q^{**}$ 是一个完全压缩映射，并且在 $i_Q u$上与 $E$一致。

$\mathrm{CB}(Y, Q^{**})$ 的单位球在逐点弱$^*$ 收敛拓扑下是紧的。事实上，它是紧乘积 $\prod_{y\in Y} \|y\| B_{Q^{**}}$ 的闭子集，因为线性性以及每个矩阵层级上的压缩不等式在逐点弱$^*$ 极限下均保持成立。将有限维子空间 $E \subset X$ 按包含关系排序，并取 $(T_E)$ 的一个收敛子网，其极限为该单位球中的 $\widetilde{u}$。对于每个 $x \in X$，只要 $E$ 包含 $x$，网 $T_E(x)$ 就等于 $i_Q u(x)$。因此 $\widetilde{u}|_X = i_Q u$。

反过来，假设 (iv) 成立。取一个自由群 $\mathbb{F}$ 和一个单位商映射 $q\colon\ D = C^*(\mathbb{F}) \twoheadrightarrow Q$。由于 $D$ 具有 LLP，$\mathbb{B}(\ell_2) \otimes_{\min} D = \mathbb{B}(\ell_2) \otimes_{\max} D$，因此 $q$ 是一个 LLP 映射。将 $D$忠实且含幺地表示在 $\mathbb{B}(K)$ 中。(iv) 给出一个完全压缩映射 $T\colon\ \mathbb{B}(K) \to Q^{**}$ with$T|_D = i_Q q$。特别地，$T$ 是含幺的，因此是完全正的。分解$D$，$\to \mathbb{B}(K) \xrightarrow{T} Q^{**}$ of $i_Q q$ 依据 [Pis20, Theorem 9.57], 使 $q$ 成为一个 WEP 映射，从而证明 (iii)。□

我们通过证明局部可嵌入性到 $C^*(\mathbb{F}_\infty)$ 的保持性质来结束本节。

**命题2.4 (** $d_f = 1$的保持性质)。 条件 $d_f = 1$ 具有以下保持性质。

(i) 若 $d_f(A) = 1$ 且 $B$ 是一个 *exact* $C^*$-代数，则
$$d_f(A \otimes_{\min} B) = 1.$$
(ii) 若一个 *exact* 离散群 $G$ 通过自同构 $\alpha$作用于 $C^*$-代数 $A$，则
$$d_f(A \rtimes_{\alpha,r} G) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad d_f(A) = 1.$$
(iii) 若 $(A_i, \phi_{ji})$ 是一个归纳系统，其连接同态 $*$为单射，并且对每个 $i$都有 $d_f(A_i) = 1$，则
$$d_f\left(\varinjlim_i A_i\right) = 1.$$

证明。 我们先记录两个观察。条件 $d_f = 1$ 可传递到算子子空间，并且在矩阵放大下保持不变。对于后一个断言，$M_k(A)$ 的一个有限维子空间包含在某个有限维 $E \subset A$ 的 $M_k(E)$ 中；对 $E$ 到 $C^*(\mathbb{F}_\infty)$ 的几乎完全等距嵌入进行放大，并利用 $d_f(M_k(C^*(\mathbb{F}_\infty))) = 1$。最后这个等式由 $M_k(C^*(\mathbb{F}_\infty))$ 的局部提升性质推出。

该条件也可通过恒等映射的完全压缩近似分解传递。更确切地说，假设

$$X \xrightarrow{\varphi_\lambda} Y_\lambda \xrightarrow{\psi_\lambda} X, \qquad \|\varphi_\lambda\|_{\mathrm{cb}}, \|\psi_\lambda\|_{\mathrm{cb}} \le 1, \qquad d_f(Y_\lambda) = 1,$$

以及 $\psi_\lambda\varphi_\lambda \to \mathrm{id}_X$在范数意义下逐点成立。对于每个算子空间 $F$和 $z \in X \odot F$，函子性给出

$$\|((\psi_\lambda\varphi_\lambda) \otimes \mathrm{id}_F)z\|_M \le \|(\varphi_\lambda \otimes \mathrm{id}_F)z\|_{\min} \le \|z\|_{\min}.$$

左侧的张量在 $M$-范数下收敛到 $z$，因此 [JP95, 定理 4.5] 蕴含 $d_f(X) = 1$。(i) 设 $E \subset A \odot B$ 为有限维空间，并选取一个有限维系数空间$F \subset B$，使得 $E \subset A \odot F$。$B$ 的精确性意味着，对每个 $\delta > 0$，都存在 $k$ 和一个同构 $v\colon\ F \to v(F) \subset M_k$，满足 $\|v\|_{\mathrm{cb}}\|v^{-1}\|_{\mathrm{cb}} < 1 + \delta$。极小张量化给出一个将 $E$ 嵌入 $M_k(A)$ 的映射，且具有相同的畸变界。由于 $d_f(M_k(A)) = 1$，我们得到 $d_f(E) \le 1 + \delta$，从而 $d_f(E) = 1$。$A \otimes_{\min} B$ 的任意有限维子空间，都可以通过完全有界扰动任意小地逼近 $A \odot B$中的一个子空间：利用下文第 (iii) 部分中的估计逼近一组基。这就证明了 (i)。

(ii) 假设 $d_f(A) = 1$。根据精确离散群的可和作用刻画，存在一个非空紧 $G$-空间 $X$，其上 $G$ 的作用在拓扑意义下可和；参见 [BO08，第 5]章。令 $D = A \otimes_{\min} C(X)$，并设 $\beta$为对角作用。由 (i) 得 $d_f(D) = 1$。

我们详细说明可 amen 性所提供的近似分解。记 $\gamma$ 为作用在 $C(X)$ 上的作用。存在一个由有限支撑族 $h = (h_t)_{t\in G}$ 构成的网，其中各元素是 $C(X)$ 中的非负函数，使得

$$\sum_t h_t^2 = 1, \qquad c_h(g) := \sum_t h_{gt}\gamma_g(h_t) \longrightarrow 1 \quad \text{in norm for every } g \in G.$$

将这些函数视为 $D$ 的中心乘子。令 $F$ =supp($h$)，并将 $D \rtimes_{\beta,r} G$ 的乘子代数中的典范酉元记为 $w_g$。正则压缩和行压缩分别定义了完全正压缩映射

$$\Phi_h : D \rtimes_{\beta,r} G \longrightarrow M_F(D), \qquad \Psi_h : M_F(D) \longrightarrow D \rtimes_{\beta,r} G,$$
$$\Phi_h(dw_g)_{s,t} = \delta_{s,gt}\,\beta_s^{-1}(d),$$
$$\Psi_h([d_{s,t}]) = \sum_{s,t\in F} h_s w_s d_{s,t} w_t^* h_t.$$

事实上，行 $(h_s w_s)_{s\in F}$ 是压缩映射，因为 $\sum_s h_s w_s w_s^* h_s = 1$。直接计算可得

$$\Psi_h\Phi_h(dw_g) = c_h(g)dw_g.$$

因此，$\Psi_h\Phi_h \to$ 在逐点范数意义下收敛于 id。由于 $d_f(M_F(D)) = 1$，由前面的观察可得$d_f(D \rtimes_{\beta,r} G) = 1$。等变嵌入 $a \mapsto a\otimes 1$ 诱导出一个单射 $*$-同态

$$A \rtimes_{\alpha,r} G \hookrightarrow D \rtimes_{\beta,r} G,$$

因此 $d_f(A \rtimes_{\alpha,r} G) = 1$。反之，$A$ 是其约化交叉积的一个 $C^*$-子代数，这就证明了逆向蕴含。

(iii) 将各阶段视为 $A = \bigcup_i A_i$ 的子代数。固定一个有限维 $E \subset A$ 以及一个双正交基 $(x_j, f_j)_{j=1}^{d}$ of $E$。给定 $0 < \delta < 1$，选取同一阶段$A_i$ 中的元素 $y_j$，使得 $\sum_j \|f_j\|\,\|y_j - x_j\| < \delta$。映射 $T\colon E \to A_i$，$T(x) = \sum_j f_j(x)y_j$ 满足

$$\|T - \iota_E\|_{\mathrm{cb}} \le \sum_j \|f_j\|\,\|y_j - x_j\| < \delta,$$

因为标量值泛函的完全有界范数等于其范数。因此 $T$ 是内射的，并且

$$d_f(E) \le d_{\mathrm{cb}}(E, T(E))\, d_f(T(E)) \le \frac{1+\delta}{1-\delta}.$$

令 $\delta \downarrow 0$，然后对 $E$ 取上确界，即可证明 (iii)。 □

注 2.5（非单射归纳极限的失效）。命题 2.4(iii) 中的内射性假设不能省略，即使所有构建块都具有 LP 且所有连接映射都是满射。为说明这一点，取一个可分的 $C^*$-代数 $B$，使得 $d_f(B) = \infty$。这样的$B$ 确实存在：根据 [JP95]，，存在一个有限维算子空间 $E \subset \mathbb{B}(\ell_2)$，它不能局部嵌入 $C^*(\mathbb{F}_\infty)$。取 $B = C^*(E, 1)$，由命题 1.1 得到 $d_f(B) = \infty$。其锥

$$CB = C_0((0,1]) \otimes_{\min} B$$

包含一个完全等距的算子空间副本 $B$，通过 $b \mapsto [t \mapsto tb]$。因此$d_f$（$CB$）$= d_f$（$B$）$= \infty$。另一方面，Loring–Shulman 的锥定理（见[Thi19，定理 4）1], 将 $CB$ 表示为可分的投射 $C^*$-代数 $P_n$的归纳极限，其连接映射为满射；另见 [ES24，命题 57] 的证明。每个 $P_n$ 都具有 LP，因此 $d_f$（$P_n$）$= 1$。于是

$$d_f(P_n) = 1 \quad (n \ge 1), \qquad d_f\left(\varinjlim_n P_n\right) = \infty.$$

将该系统单位化后，可得到具有含幺构件和含幺满射连接映射的同一反例。

## 3. 环境 CP 稳定性

CP-稳定性由 Goldbring 和 Sinclair 提出 [GS15，定义 2。38] 随后 Sinclair 进一步进行了研究 [Sin17]。我们考虑一种环境变体，称为 环境 *CP* 稳定性（*ACP* 稳定性，简称），它刻画了 $d_f(A) = 1$。测试映射定义在环境中的有限维算子系统上 $\mathbb{B}(H)$。

算子系统是含幺 $C^*$代数中的含幺自伴线性子空间，并具有其继承的矩阵序。对于算子系统之间的线性映射 $\varphi$，记

$$\|\varphi\|_k = \|\mathrm{id}_{M_k} \otimes \varphi\|.$$

**定义 3.1**（环境 CP 稳定性）。若含幺 $C^*$代数 $A$ 满足：对于每个忠实单位表示 $j : A, \to \mathbb{B}(H)$、每个有限维算子系统 $E \subset A$以及每个 $\varepsilon > 0$，都存在一个有限维算子系统，则称其为*ACP*-稳定；

$$j(E) \subset F \subset \mathbb{B}(H), \qquad k \in \mathbb{N}, \quad \delta > 0,$$

使得对每个含幺 $C^*$代数 $B$，以下条件成立：每个满足 $\|\varphi\|_k < 1 + \delta$ 的含幺线性映射 $\varphi : F \to B$，都存在一个单位完全正映射 $\psi : E \to B$，使得

$$\|\psi - (\varphi \circ j)|_E\|_{\mathrm{cb}} < \varepsilon. \tag{3.1}$$

数据 $F$，$k$，$\delta$可以依赖于 $j$，$E$，$\varepsilon$，但不能依赖于 $B$或 $\varphi$。特别是，$F$不必包含在 $j(A)$中。

(3.1中的完全有界范数可以等价地替换为通常的算子范数。事实上，对于一个固定的有限维算子空间 $E$，存在一个常数 $c_E$ 使得

$$\|v\|_{\mathrm{cb}} \le c_E \|v\| \tag{3.2}$$

对于每个线性映射 $v : E \to Y$ 以及每个算子空间 $Y$，上述结论均成立。为此，取 $E$的一组基 $(e_r)_{r=1}^d$及其坐标泛函 $(f_r)_{r=1}^d$。分解式 $v = \sum_r f_r(\cdot)v(e_r)$ 给出 $\|v\|_{\mathrm{cb}} \le \sum_r \|f_r\|\|v(e_r)\|$。因此可以取 $c_E = \sum_r \|f_r\|\|e_r\|$。

只需在一个忠实单位表示中检验定义 3.1 。事实上，给定两个这样的表示 $j_r : A \hookrightarrow \mathbb{B}(H_r)$，$r = 1,2$，Arveson 延拓定理给出一个单位完全正映射

$$\Theta : \mathbb{B}(H_1) \longrightarrow \mathbb{B}(H_2), \qquad \Theta \circ j_1 = j_2.$$

若定义 3.1 中的条件对 $j_1$成立，取其控制系统 $F_1$ 并令 $F_2 = \Theta(F_1)$。这是一个包含 $j_2(E)$的有限维算子系统。对于测试映射 $\varphi_2 : F_2 \to B$，映射 $\varphi_1 = \varphi_2 \circ \Theta|_{F_1}$ 是含幺的，且满足 $\|\varphi_1\|_k \le \|\varphi_2\|_k$，而 $\varphi_1 \circ j_1|_E = \varphi_2 \circ j_2|_E$。因此，相同的 $k$、$\delta$ 以及由此得到的修正 $\psi : E \to B$ 适用于 $j_2$。

**定理 3.2**。含幺 $C^*$-代数 $A$ 是 *ACP*-稳定的，当且仅当 $d_f(A) = 1$。

证明。固定一个忠实单位表示 $j : A, \to \mathbb{B}(H)$，并将 $A$ 与 $j(A)$ 视为相同。

假设 $d_f(A) = 1$。如果 $A$ 不是 ACP-稳定的，则存在一个有限维算子系统 $E \subset A$ 和 $\varepsilon_0 > 0$，使得定义 3.1 不成立。令 I 为所有对 $\alpha = (F, n)$ 构成的有向集，其中 $E \subset F \subset \mathbb{B}(H)$ 是一个有限维算子系统，且 $n \ge 1$；其序关系是在第一坐标上按包含关系、在第二坐标上按通常序关系确定的。对于每个 $\alpha = (F, n)$，选取一个含幺 $C^*$-代数 $B_\alpha$ 和一个含幺线性映射 $\varphi_\alpha : F \to B_\alpha$，使得

$$\|\varphi_\alpha\|_n < 1 + 1/n, \qquad \inf_{\psi \in \mathrm{UCP}(E, B_\alpha)} \|\psi - \varphi_\alpha|_E\|_{\mathrm{cb}} \ge \varepsilon_0. \tag{3.3}$$

选取一个包含每个尾集的超滤子 $\omega$（在$\mathcal{I}$ 上），并构造范数超积

$$Q = \left( \prod_{\alpha \in \mathcal{I}} B_\alpha \right) / I_\omega, \qquad I_\omega = \{(b_\alpha) : \lim_\omega \|b_\alpha\| = 0\}.$$

对 $x \in \mathbb{B}(H)$ 定义一个有界族如下：

$$b_\alpha(x) = \begin{cases} \varphi_\alpha(x), & x \in F, \quad \alpha = (F, n), \\ 0, & x \notin F, \end{cases} \qquad \Phi(x) = [(b_\alpha(x))]_\omega.$$

这些坐标赋值不必在整个 $\mathbb{B}(H)$上都是线性的。不过，它们的等价类定义了一个含幺线性映射 $\Phi$: $\mathbb{B}(H) \to Q$: 任意有限集中的元素都包含在 $F$ 上某个 $\omega$- 大集合中。在每个固定的矩阵层级 $r$ 上，在某个 $\omega$-大集合中，给定矩阵的各个元素都属于 $F$ 且 $n \geq r$。于是，由不等式 (3.3) 中的第一个不等式可得 $\|\Phi\|_r \leq 1$。因此 $\Phi$ 是含幺且完全压缩的，故为含幺完全正映射。

T其限制 $u = \Phi|_A$ 是一个 WEP 映射。事实上，$\mathrm{id}_{C^*(\mathbb{F}_\infty)} \otimes u$ 可收缩地分解为 as

$$C^*(\mathbb{F}_\infty) \otimes_{\min} A \longrightarrow C^*(\mathbb{F}_\infty) \otimes_{\min} \mathbb{B}(H) = C^*(\mathbb{F}_\infty) \otimes_{\max} \mathbb{B}(H) \xrightarrow{\mathrm{id}_{C^*(\mathbb{F}_\infty)} \otimes \Phi} C^*(\mathbb{F}_\infty) \otimes_{\max} Q,$$

其中，该等式由 $\mathbb{B}(H)$具有 WEP 得出。根据定理 2.1(iv)， $u$ 局部 1-可提升。由于 $u$ 是含幺完全正的， [Pis20，推论 9.47]给出一个含幺完全正提升

$$\Psi : E \longrightarrow \prod_{\alpha \in \mathcal{I}} B_\alpha.$$

将 $\psi_\alpha$ 记为其坐标映射。每个 $\psi_\alpha$ 都是含幺完全正的，并且

$$\lim_\omega \|\psi_\alpha(e) - \varphi_\alpha(e)\| = 0 \qquad (e \in E).$$

随后，证明中（3.2）的基估计给出 $\lim_\omega \|\psi_\alpha - \varphi_\alpha|_E\|_{\mathrm{cb}} = 0$。这与（3.3）矛盾。

反过来，假设 $A$ 是 ACP-稳定的。选取一个含幺满射 $q : C^*(\mathbb{F}_\Lambda) \twoheadrightarrow \mathbb{B}(H)$，它来自一个完全自由群 $C^*$-代数。固定一个有限维算子系统 $E \subset A$ 和$0 < \varepsilon < 1$。按定义 3.1 选取 $F, k, \delta$ 。由有限层提升定理 [RS89]，并按照 [Sin17 中命题 2.5]，的证明，包含映射 $F \hookrightarrow \mathbb{B}(H)$ 存在一个含幺$2k$-正提升 $\varphi : F \to C^*(\mathbb{F}_\Lambda)$，其经过 $q$。对 $\left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ x^* & 1 \end{smallmatrix}\right)$ 应用 $2k$-正性，其中 $x$ 属于 $M_k(F)$ 的单位球，可得 $\|\varphi\|_k \leq 1$。因此，ACP 稳定性给出一个含幺完全正映射 $s : E \to C^*(\mathbb{F}_\Lambda)$，满足 $\|s - \varphi|_E\|_{\mathrm{cb}} < \varepsilon$。

由于 $q\varphi|_E$ 是 $E$ 到 $\mathbb{B}(H)$的包含映射，对每个 $r \geq 1$ 和 $x \in M_r(E)$，我们有

$$(1 - \varepsilon)\|x\| \leq \|(\mathrm{id}_{M_r} \otimes qs)x\| \leq \|(\mathrm{id}_{M_r} \otimes s)x\| \leq \|x\|.$$

用群多项式逼近 $s(E)$的一个基表明， $s(E)$位于由可数多个自由生成元生成的子代数中。该子代数嵌入 $C^*(\mathbb{F}_\infty)$，因此$d_f(E) \leq (1 - \varepsilon)^{-1}$。令 $\varepsilon \downarrow 0$ 可得 $d_f(E) = 1$。 $A$的每个有限维子空间都位于某个有限维算子子系统中，因此 $d_f(A) = 1$。□

注记 3.3（与局部提升性质的比较）。 若要求 $F \subset j$（$A$）于定义 3.1中，则得到通常的 CP-稳定性，它等价于局部提升性质 [Sin17，命题 2。5]；由（3.2）可知，结论中使用完全有界范数并不改变该性质。允许 $F \subset \mathbb{B}$（$H$）便在 $A$具有局部提升性质时给出 ACP 稳定性。

## 4. 可容迹与相对局部提升

众所周知，如果一个含幺 $C^*$-代数 $A$ 具有 WEP 且可局部嵌入 $C^*(\mathbb{F}_\infty)$，那么它就具有局部提升性质。若将 WEP 换成存在可和迹，这一原理仍然成立，但其结论应改为相对于该迹的局部提升性质，正如我们将在下文命题 4.2 中所见。这适用于任意可和迹，我们将用它来证明 $d_f(C^*(\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z}))) = \infty$。

**定义 4.1.** 设 $A$ 是一个含幺 $C^*$-代数，且设 $\tau$ 是 $A$ 上的一个迹态。若满足以下条件，我们称 $A$ 具有 $\tau$-局部提升性质：对于每个带有忠实

正规迹态 $\sigma$ 的有限冯诺依曼代数，以及每个含幺 $*$-同态

$$\pi : A \longrightarrow N, \qquad \sigma \circ \pi = \tau,$$

对于每个含幺满射 $*$-同态 $q : B \twoheadrightarrow N$，其定义域为含幺 $C^*$-代数 $B$，以及每个有限维算子系统 $E \subset A$，都存在一个单位完全正映射

$$s : E \longrightarrow B, \qquad q \circ s = \pi|_E.$$

此处用记号 $\tau$-局部提升性质表示这对（$A$，$\tau$）所具有的性质；它并不表示 $A$通常意义下的局部提升性质。

通常的局部提升性质意味着 $\tau$-局部提升性质 对每个迹态 $\tau$都成立。不过，在定义 4.1中，只检验实现指定迹的表示。既不假设 $\pi$ 也不假设 $\tau$ 忠实，也不要求 $q$ 或其提升具有正规性。

**命题 4.2**。设 $A$ 是一个含幺 $C^*$-代数，且 $\tau$ 是 $A$上的一个可和迹态。若 $d_f(A) = 1$，则 $A$具有 $\tau$-局部提升性质。

证明。固定 $N$、$\sigma$、$\pi$、$q$、$E$，如定义 4.1所述，并选取一个忠实单位表示$j : A \to \mathbb{B}(H)$。由可和迹延拓定理 [Brown06，定理3.1.6(5)]，，存在一个单位完全正映射

$$\Psi_\tau : \mathbb{B}(H) \longrightarrow M_\tau := \pi_\tau(A)'', \qquad \Psi_\tau(j(a)) = \pi_\tau(a) \quad (a \in A). \tag{4.1}$$

令 $P = \pi(A)'' \subset N$。等式 $\sigma\pi = \tau$，连同$\sigma|_P$的忠实性和正规性，将 GNS冯·诺伊曼代数 $M_\tau$同 $P$识别。更确切地说，GNS 表示的唯一性给出一个保持迹的正规 $*$-同构

$$\theta : M_\tau \longrightarrow P, \qquad \theta(\pi_\tau(a)) = \pi(a).$$

因此，将 $\widetilde{\pi} = \theta\Psi_\tau$视为映射到 $N$中的映射，它是含幺完全正的，并且

$$\pi = \widetilde{\pi} \circ j : A \xrightarrow{j} \mathbb{B}(H) \xrightarrow{\widetilde{\pi}} N = B/\ker q. \tag{4.2}$$

该分解经过 $\mathbb{B}(H)$，因此使 $\pi$ 成为 WEP 映射，因为 $C^*(\mathbb{F}_\infty) \otimes_{\min} \mathbb{B}(H) = C^*(\mathbb{F}_\infty) \otimes_{\max} \mathbb{B}(H)$，且 $\widetilde{\pi}$ 是含幺完全正的。由于 $d_f(A) = 1$，定理 2.1(iv)给出经过 $q$的局部 1-可提升性。根据 [Pis20，推论 9.47]，$\pi|_E$ 因此具有一个含幺完全正提升 $s : E \to B$。□

与 WEP 的类比体现在延拓步骤上。对于忠实的 $j : A \to \mathbb{B}(H)$，WEP 提供一个含幺完全正映射 $\mathbb{B}(H) \to A^{**}$，将 $A$ 到其二重对偶中的典范包含延拓。的可和性则提供了 (4.1)，其目标是$M_\tau$ 的特定冯·诺伊曼商代数 $A^{**}$。这足以得到 (4.2)，从而足以得到由 $\tau$-局部提升性质检验的提升。命题 4.2并未断言：一个具有 $d_f(A) = 1$ 且拥有一个可和迹的代数具有通常意义下的局部提升性质。

**定理 4.3**。设 $\Gamma$ 为 $\mathbb{Z}^2 \rtimes \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 或 $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$。那么，全群 $C^*$-代数 $C^*(\Gamma)$不能局部嵌入 $C^*(\mathbb{F}_\infty)$，即 $d_f(C^*(\Gamma)) = \infty$。

证明。在此证明中，我们遵循 [ISW20、ISW20] ，但融入了我们的可和迹技巧。首先取 $\Gamma = \mathbb{Z}^2 \rtimes \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$，并令 $\Lambda = \mathbb{Z}^2$ 以及 $A = C^*(\Gamma)$。我们先描述将应用命题 4.2 的表示。对于 $a$，$b \in \mathbb{Z}^2$，记 $\kappa(a, b) = a_1b_2 - a_2b_1$，并定义

$$c((a, S), (b, T)) = \kappa(a, Sb) \qquad ((a, S), (b, T) \in \Gamma).$$

$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$-不变性 $\kappa$ 意味着 $c$ 是一个归一化整数值 2-余循环。取严格递增的奇素数 $p_n$，并令

$$c_n(g, h) = \exp\big(2\pi i c(g, h)/p_n\big).$$

这些乘子逐点收敛于 1。它们在 $\Lambda$ 上的限制并非余边界：阿贝尔群上的标量余边界具有对称性，而 $c_n(e_1, e_2) = \exp(2\pi i/p_n)$ 且$c_n(e_2, e_1) = \exp(-2\pi i/p_n)$，其中 $e_1, e_2$是 $\Lambda = \mathbb{Z}^2$的标准基向量。

令 $r_n\colon\ \Gamma \twoheadrightarrow Q_n$ 为模 $p_n$约化，其中

$$Q_n = (\mathbb{Z}/p_n\mathbb{Z})^2 \rtimes \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/p_n\mathbb{Z}), \qquad d_n = |Q_n|.$$

余循环 $c_n$ 下降为 $\mu_n$ 上的余循环 $Q_n$。其扭曲左正则表示拉回到 Γ后为

$$v_n(g)\delta_x = \mu_n(r_n(g), x)\delta_{r_n(g)x} \qquad (x \in Q_n).$$

因此 $v_n(g) \in \mathcal{U}(M_{d_n})$，并且

$$v_n(g)v_n(h) = c_n(g,h)v_n(gh). \tag{4.3}$$

这是 [ISW20 第3节中的有限商构造。2]对于每个固定的 $g \neq e$，都有 $r_n(g) \neq e$ 当 $n$充分大时成立。相应的置换没有不动点，因此

$$\lim_n \mathrm{tr}_{d_n}(v_n(g)) = \delta_{g,e} \qquad (g \in \Gamma). \tag{4.4}$$

非扭曲的 左正则表示 $Q_n$与 $r_n$复合后，是 Γ的真正有限维表示。它们的归一化迹也逐点收敛于典范迹 $\tau_\Gamma(u_g) = \delta_{g,\ e}$。由此可知， $\tau_\Gamma$ 是满代数 $A$上的可和迹；参见 [Brown06, 定理3.1。6]在典范酉元上的逐点收敛可由稠密性以及这些状态的范数为1的界推广到整个 $A$。

固定一个自由超滤子 $\omega$，并构造迹超积

$$N = \Big(\prod_n M_{d_n}\Big)/I_\omega, \qquad I_\omega = \{(x_n) : \lim_{n\to\omega} \|x_n\|_{2,\mathrm{tr}_{d_n}} = 0\}.$$

记 $q_\omega\colon\ \prod_n M_{d_n} \twoheadrightarrow N$ 为商映射，且 $\tau_\omega$ 为忠实正规迹态于$N$。方程（4.3）与 $c_n \to 1$ 表明

$$\pi : A \longrightarrow N, \qquad \pi(u_g) = q_\omega((v_n(g))_n),$$

是一个单位 $*$-同态。由（4.4），它满足

$$\tau_\omega \circ \pi = \tau_\Gamma. \tag{4.5}$$

反设 $d_f\ (A) = 1$。命题 4.2 蕴涵 $A$ 具有$\tau_\Gamma$-局部提升性质。我们证明，哪怕一个 $\pi$ 经由 $q_\omega$ 的局部提升都不可能。

相对性质（$T$），即（Γ，Λ）的相对性质，给出有限集 $F \subset \Gamma$ 与 $\delta > 0$，使得每一个射影酉表示 $w$，只要其乘子在 Λ上的限制为非余边界，便满足

$$\max_{g\in F} \|w(g)\xi - \xi\| \geq \delta\|\xi\| \quad \text{for every vector } \xi. \tag{4.6}$$

这一估计来自 [ISW20，定理 2.3]，，一如该文中断言 3.1 的证明。令

$$E = \mathrm{span}\{1, u_g, u_g^* : g \in F\} \subset A.$$

一个 $s$ 的完全正收缩提升 $E \to \prod_n M_{d_n}$ 具有坐标映射 $s_n\colon\ E \to M_{d_n}$ 满足

g

$$\lim_{n\to\omega} \|s_n(u_g) - v_n(g)\|_{2,\mathrm{tr}_{d_n}} = 0 \qquad (g \in F). \tag{4.7}$$

Arveson 延拓定理将每个 $s_n$ 延拓为单位完全正映射 $\varphi_n\colon\ A \to M_{d_n}$。取一个斯廷斯普林表示

$$\varphi_n(a) = V_n^*\rho_n(a)V_n, \qquad V_n : \mathbb{C}^{d_n} \longrightarrow K_n \text{ an isometry},$$

其中 $\rho_n\colon\ A \to \mathbb{B}(K_n)$ 是一个含单位元的 $*$-表示。

在希尔伯特–施密特算子希尔伯特空间 $\mathcal{S}_2(\mathbb{C}^{d_n},\ K_n)$ 上，赋予其通常的未归一化希尔伯特–施密特范数，定义

$$w_n(g)T = \rho_n(u_g)Tv_n(g)^*, \qquad \xi_n = d_n^{-1/2}V_n.$$

每个 $w_n$ 都是一个乘子为 $c_n$的射影酉表示，并且 $\|\xi_n\| = 1$。直接计算可得

$$\begin{aligned} \|w_n(g)\xi_n - \xi_n\|^2 &= 2 - 2\,\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}_{d_n}\big(\varphi_n(u_g)v_n(g)^*\big) \\ &\le 2\|\varphi_n(u_g) - v_n(g)\|_{2,\mathrm{tr}_{d_n}}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

对于 $g \in F$，根据（4.7），最后一个表达式沿着 $\omega$ 趋于零。由于 $F$ 是有限的，

$$\lim_{n\to\omega}\max_{g\in F}\|w_n(g)\xi_n - \xi_n\| = 0.$$

但是$\overline{c_n}|_\Lambda$ 对于任意 $n$都不是余边界，因此（4.6）使每一项都至少为 $\delta$。这一矛盾排除了 $d_f(C^*(\Gamma)) = 1$。命题 1.1现在给出 $d_f(C^*(\Gamma)) = \infty$。

最后，该嵌入

$$\Gamma \hookrightarrow \mathrm{SL}_3(\mathbb{Z}), \qquad (a,S) \longmapsto \begin{pmatrix} S & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

诱导出一个忠实的 $*$-同态，将满群 $C^*$-代数映入其中。因此， $d_f$ 在完全等距映射下的单调性给出

$$\infty = d_f(C^*(\Gamma)) \le d_f(C^*(\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z}))).$$

□

注 4.4。 对于 $\Gamma = \mathbb{Z}^2 \rtimes \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ ，证明确立了 $\tau_\Gamma$-局部提升性质 对于 $C^*(\Gamma)$的不成立。结论 $d_f(C^*(\Gamma)) = \infty$ 由这一失败、 $\tau_\Gamma$的可和性以及命题 1.1得出。使得能够在 Ioana–Spaas–Wiersma 障碍中使用 $d_f(A) = 1$ 的额外输入，正是表示在（4.5）中的环境扩张。

注 4.5。 对于每个素数 $p \ge 3$，同样的论证给出

$$d_f\big(C^*(\mathrm{SL}_3(\mathbb{F}_p[t]))\big) = \infty.$$

事实上，令 $R = \mathbb{F}_p[t]$ 以及 $\Gamma = R^2 \rtimes \mathrm{SL}_2(R)$。如 [ISW20、推论 B 和第3节2], 中所述，使用行列式余循环以及 $R/(t^{n+1})$ 的加性特征；这些特征通过提取 $t^n$ 的系数并将 $\mathbb{F}_p$ 与 $p$ 次单位根相对应而得到。所得的标量余循环逐点收敛于 1，并且当 $p \ge 3$ 时在 $R^2$ 上不对称，因此其限制不是余边界。它们在有限同余商上的扭曲正则表示的归一化迹收敛于典范迹 $\tau_\Gamma$。这些商的未扭曲正则表示表明 $\tau_\Gamma$ 是可和的。 [ISW20 第3节2], 中回顾的 $(T)$ 的相对性质以及命题 4.2，因此允许我们重复定理 4.3 的证明，从而得到 $d_f(C^*(\Gamma)) = \infty$。分块嵌入 $\Gamma$ 、$\to \mathrm{SL}_3(R)$ 给出所需断言。该论证不涵盖 $p = 2$。

注4.6（Junge–Pisier 构造与完整群代数的商）。在此语境中使用$\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ 的做法已见于 [JP95，注 2.10 及其后的一段，arXiv 版本]。Junge 和 Pisier 的论证以 Voiculescu 在 [Voi90], 中的构造为基础，更确切地说，是以其中命题 3 的证明为基础。然而，必须区分由此得到的算子空间与完整群 $C^*$代数在其原始矩阵范数下的子空间。设 $G = \mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ 和 $A = C^*(G)$。从两两不相交的有限维表示$(\pi_k)$出发，Junge 和 Pisier 考虑

$$\pi_\Omega = \bigoplus_{k\in\Omega}\pi_k, \qquad T_j^\Omega = \pi_\Omega(g_j), \qquad M_\Omega = \mathrm{span}\{T_1^\Omega,\dots,T_n^\Omega\},$$

其中 $g_1$、……、$g_{n-1}$生成 $G$和 $g_n = e$。他们的论证为度量 $\log d_{\mathrm{cb}}$给出了一个由此类算子空间组成的不可分族。由于 $G$ 具有两个生成元，该构造可以在三维中进行。

这些空间自然地包含于像代数中

$$A_\Omega = C^*(\pi_\Omega(G)) \cong A/\ker\pi_\Omega.$$

若 $E = \mathrm{span}\{u_{g_1},\dots,u_{g_n}\} \subset A$，则 $M_\Omega = \pi_\Omega(E)$，但已知 $\pi_\Omega$ 在 $E$ 上的限制仅为完全压缩的。对于每个 $r \geq 1$ 和 $a_1,\dots,a_n \in M_r$，

$$\left\| \sum_j a_j \otimes T_j^\Omega \right\| \leq \left\| \sum_j a_j \otimes u_{g_j} \right\|.$$

并没有断言这些不等式是等式。事实上，像空间上矩阵范数的变化对于这一构造至关重要。

然而，我们仍可推得，对于某个 Ω，$d_f(A_\Omega) = \infty$ 。事实上，根据 [JP95，命题 2.6(i)]，，可分代数 $C^*(\mathbb{F}_\infty)$ 中的三维子空间集合在 $\log d_{\mathrm{cb}}$ 下是可分的。因此，其闭包也可分，并且包含每个满足 $d_f(F) = 1$ 的三维算子空间 $F$。它不可能包含上述整个不可分族。因此，某个 $M_\Omega$ 无法局部嵌入 $C^*(\mathbb{F}_\infty)$，$A_\Omega$也无法局部嵌入其中。命题 1.1 随即给出

$$d_f(A_\Omega) = \infty.$$

因此，Junge–Pisier 构造已经得到了 $C^*(\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z}))$ 的商代数，而这些商代数在 $C^*(\mathbb{F}_\infty)$ 中不具备局部可表示性。

这一结论本身并不意味着 $d_f(A) = \infty$：这一性质 $d_f = 1$ 不会传递到任意 $C^*$-代数商。这里，这种推论所面临的障碍尤其明显。对每个 $\pi_\Omega$ 预先与一个固定的满射 $\mathbb{F}_2 \twoheadrightarrow G$ 复合，得到的空间 $M_\Omega$ 恰好与由 $\mathbb{F}_2$的表示得到的空间相同，而 $d_f(C^*(\mathbb{F}_2)) = 1$。因此，早先构造所得的结论与此处建立的结果之间的区别，在于完整代数 $C^*(\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z}))$ 本身，而不是某些像代数。该群及其刚性在 [JP95]中已经发挥了作用；仅仅使用它们并非新的特点。

现在我们引入 Thom的第二群。令 $p$ 为一个素数，并设 $R = \mathbb{Z}[1/p]$。考虑群

$$\widetilde{K}_p = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & S & * & * \\ 0 & 0 & T & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : S,T \in \mathrm{SL}_3(R) \right\} \subset \mathrm{SL}_8(R),$$

其中各分块的大小为 1、3、3、1，且非对角分块中的元素是 $R$ 的任意元素。令

$$K_p = \widetilde{K}_p / \{I_8 + mE_{18} : m \in \mathbb{Z}\},$$

其中 $E_{18}$ 是标准矩阵单位。这就是在 [Tho10，§3]中构造的群。

**推论4.7 (Thom的第二群)。** 对于每个素数 $p$，完整的 $C^*$ 群代数 $C^*(K_p)$不能局部嵌入到 $C^*(\mathbb{F}_\infty)$ 中，即 $d_f(C^*(K_p)) = \infty$。

证明。 该同态

$$\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z}) \longrightarrow \widetilde{K}_p, \qquad S \longmapsto \mathrm{diag}(1,S,I_3,1),$$

是单射，且其像与中心子群 $\{I_8 + mE_{18} : \ m \in \mathbb{Z}\}$ 的交只有单位元。因此，它诱导出一个嵌入 $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z}) \to K_p$，从而得到一个忠实的 $*$-同态$C^*(\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})) \to C^*(K_p)$。由定理 4.3 以及完全等距映射下的单调性，

$$\infty = d_f(C^*(\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z}))) \leq d_f(C^*(K_p)).$$

□

## 5. Thom 的第一群

在最后这一节中，我们想说明，可和迹技巧也适用于其他一些其全 $C^*$-代数不具有局部提升性质（LLP）的群。Thom 针对每个素数 $p$构造了一个群 $G_p$，它具有性质 $(T)$，但其全群 $C^*$-代数不具有局部提升性质（LLP） [Tho10，定理 1.4 及其后续讨论，第 198]页。我们回顾其在 [Tho10第 2 节中的构造。1]。取一个素数 $p$，并令 $R = \mathbb{F}_p[t, t^{-1}]$。定义

$$\widetilde{G}_p = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & S & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : S \in \mathrm{SL}_3(R),\ x \in M_{1,3}(R),\ y \in M_{3,1}(R),\ z \in R \right\}.$$

块大小为 1、3、1。对 $i \neq j$，写作 $e_{ij}(a) = I_5 + aE_{ij}$，其中 $E_{ij}$ 是标准矩阵单位，并令

$$Z_p = \{e_{15}(a) : a \in R\}, \qquad C_p = \{e_{15}(a) : a \in \mathbb{F}_p[t]\}, \qquad G_p = \widetilde{G}_p / C_p.$$

~这里 $Z_p$ 是 $G_p$的中心，并且 $G_p$ 根据 $(T)$ 由 [Tho10引理 2具有性质。

**定理 5.1**。对于每个素数 $p$，完整群 $C^*$代数 $C^*(G_p)$ 都不能局部嵌入到 $C^*(\mathbb{F}_\infty)$ 中，即

$$d_f(C^*(G_p)) = \infty.$$

证明。令 $N_p = Z_p/C_p$。我们首先构造 $G_p$ 的有限维射影表示。对于 $n \geq 1$，令 $R_n = R/(t^{2n+1} - 1)$。这个有限环中的每个元素都有唯一的代表元 $\sum_{j=0}^{2n} a_j t^j$，满足 $a_j \in \mathbb{F}_p$。定义加性特征

$$\chi_n\left(\sum_{j=0}^{2n} a_j t^j\right) = \exp(2\pi i a_n/p).$$

~令 $r_n : G_p \to Q_n$ 是关于 $R_n$ 的约化，并令 $Q_n$ 为其像，且令 $Z_n = r_n(Z_p)$。将中心子群 $Z_n = \{e_{15}(a) : a \in R_n\}$ 与 $R_n$ 的加法群等同。特征

$$\eta_n : Z_p \longrightarrow \mathbb{T}, \qquad \eta_n(e_{15}(a)) = \chi_n(a \bmod (t^{2n+1} - 1)),$$

满足

$$\eta_n(z) \longrightarrow 1 \quad (z \in Z_p), \qquad \eta_n(e_{15}(t^n)) = \exp(2\pi i/p) \neq 1. \tag{5.1}$$

事实上，对于一个固定的劳朗多项式，约化会将每个正指数映射到一个固定的指标，并将每个负指数 $j$ 映射到 $2n + 1 + j$，只要 $n$ 足够大。这些指标中没有一个是 $n$，因此第一个极限最终等于 1。

令 $\rho_n = \mathrm{Ind}_{Z_n}^{Q_n} \chi_n$，其维数为 $d_n = [Q_n : Z_n]$。由于 $Z_n$ 是中心的，

$$\rho_n(z) = \chi_n(z) I_{d_n} \quad (z \in Z_n), \qquad \mathrm{tr}_{d_n}(\rho_n(q)) = \begin{cases} \chi_n(q), & q \in Z_n, \\ 0, & q \notin Z_n. \end{cases} \tag{5.2}$$

这些恒等式可通过在陪集 $Q_n/Z_n$上实现诱导表示来得到。外部元素 $Z_n$ 在这些陪集上进行置换，且没有不动点。

~固定一个集合论截面 $s : G_p \to G_p$，满足 $s(e) = e$，并记

$$\kappa(g, h) = s(g)s(h)s(gh)^{-1} \in C_p.$$

这些映射

$$v_n(g) = \rho_n(r_n(s(g))), \qquad c_n(g, h) = \eta_n(\kappa(g, h))$$

满足

$$v_n(g)v_n(h) = c_n(g, h)v_n(gh), \qquad \lim_n c_n(g, h) = 1 \quad (g, h \in G_p). \tag{5.3}$$

现在我们证明，这些乘子 $c_n$ 都不是余边界。设 $a_n, b \in G_p$ 是 $e_{12}(t^n)$ 和 $e_{25}(1)$ 的像。它们彼此可交换，因为

$$[e_{12}(t^n), e_{25}(1)] = e_{15}(t^n) \in C_p.$$

它们选取的提升与这些初等矩阵相差 $C_p$ 中的元素，而这些元素在 $\rho_n r_n$ 下作用为标量。因此，

$$v_n(a_n)v_n(b) = \exp(2\pi i/p)\, v_n(b)v_n(a_n),$$

因此

$$\frac{c_n(a_n, b)}{c_n(b, a_n)} = \exp(2\pi i/p) \neq 1.$$

标量 2-余边界在每一对可交换元素上都是对称的。因此，对于任意 $n$，$c_n$ 都不是余边界。这个论证在 $p = 2$ 时也适用。

接下来，我们在 $N_p/C^*(\tilde{G}_p)$ 的上模迹中固定和迹 $\tau_{p^n}$。对于每个固定的 $x \in G_p \setminus Z_p$，其行块、列块或中间块中至少有一个元素减去 $I_3$ 后是非零劳朗多项式。对于充分大的 $n$，该元素模 $t^{2n+1} - 1$ 后仍非零。因此

$$r_n(x) \notin Z_n \quad \text{eventually}.$$

特别地，这些有限商群可以区分 $H_p$ 中的元素。其正则表示的归一化迹拉回到 $G_p$ 后，逐点收敛于

$$\tau(u_g) = \mathbf{1}_{N_p}(g).$$

它们是 $C^*$ 的真正有限维表示的迹（$G_p$），因此根据 $\tau$ Brown06定理 3.1，[是可和的。

对于 $g \in N_p$，其提升 $s$（$g$）属于 $Z_p$，而（5.1）给出 $\mathrm{tr}_{d_n}$（$v_n$（$g$）$\to 1$。对于 $g \notin N_p$，前面的分离论证和（5.2）给出 $\mathrm{tr}_{d_n}$（$v_n$（$g$）$= 0$ 最终成立。因此

$$\lim_n \mathrm{tr}_{d_n}(v_n(g)) = \tau(u_g) \qquad (g \in G_p). \tag{5.4}$$

最后，我们证明这些射影表示阻碍局部可嵌入性。固定一个自由超滤子 $\omega$，并构造迹超积

$$\mathcal{N} = \Big(\prod_n M_{d_n}\Big)/I_\omega, \qquad I_\omega = \{(x_n) : \lim_{n\to\omega} \|x_n\|_{2,\mathrm{tr}_{d_n}} = 0\}.$$

设 $q_\omega$ 是其商映射，且 $\tau_\omega$ 是其忠实正规迹态。由（5.3），存在一个单位元保持的 $*$-同态

$$\pi : C^*(G_p) \longrightarrow \mathcal{N}, \qquad \pi(u_g) = q_\omega((v_n(g))_n).$$

方程（5.4）推出 $\tau_\omega \pi = \tau$。

假设 $d_f$（$C^*$（$G_p$））$= 1$。由于 $\tau$ 是可和的，命题 4.2 给出了经由 $\pi$ 的局部完全正提升 $q_\omega$。根据 （$T$）的性质以及 $G_p$ 和 [ISW20定理 2，3] 可得到一个有限集 $F \subset G_p$ 和 $\delta > 0$，使得每个具有非余边界乘子的射影酉表示 $w$ 都满足

$$\max_{g\in F} \|w(g)\xi - \xi\| \geq \delta\|\xi\|. \tag{5.5}$$

在算子系统 $E = \mathrm{span}\{1, u_g, u_g^* : g \in F\}$ 上提升 $\pi$。利用 Arveson 定理扩张其坐标映射后，我们得到含幺完全正映射 $\varphi_n : C^*(G_p) \to M_{d_n}$，使得

$$\lim_{n\to\omega} \|\varphi_n(u_g) - v_n(g)\|_{2,\mathrm{tr}_{d_n}} = 0 \qquad (g \in F).$$

选取 Stinespring 膨胀 $\varphi_n(a) = V_n^*\sigma_n(a)V_n$，其中 $V_n : \ell_2^{d_n} \to H_n$ 是等距的。在$\mathcal{S}_2(\ell_2^{d_n}, H_n)$上，取其未归一化的希尔伯特–施密特范数，定义

$$w_n(g)T = \sigma_n(u_g)Tv_n(g)^*, \qquad \xi_n = d_n^{-1/2}V_n.$$

于是 $\|\xi_n\| = 1$， $w_n$ 的乘子为 $c_n$，并且

$$\begin{aligned}\|w_n(g)\xi_n - \xi_n\|^2 &= 2 - 2\operatorname{Re}\operatorname{tr}_{d_n}(\varphi_n(u_g)v_n(g)^*)\\ &\le 2\|\varphi_n(u_g) - v_n(g)\|_{2,\operatorname{tr}_{d_n}}.\end{aligned}$$

关于 $g \in F$ 沿着 $\omega$趋于零，这与（5.5）矛盾。因此 $d_f(C^*(G_p)) \neq 1$，命题 1.1 给出 $d_f(C^*(G_p)) = \infty$。 □

注 5.2。 我们最近在 [Roy26] 中证明，其他全群 $C^*$代数不能局部嵌入到 $C^*(\mathbb{F}_\infty)$，具体来说，$C^*(\mathbb{F}_k \times \mathbb{F}_m)$ 对所有整数 $k$， $m \ge 2$。

**致谢**。 我感谢Gilles Pisier，就有关 WEP 和局部提升性质的各种问题与我进行了有益且富有启发性的讨论。

**AI 辅助**。 本文的写作始于 AI 时代之前，但之后使用 ChatGPT 推导了最后一节中的证明。

## 参考文献

[Brown06] N. P. Brown， $C^*$代数的不变均值与有限表示理论，《美国数学会回忆录》184（2006），第865号。arXiv:math/0304009。[BO08] N. P. Brown 和 N. Ozawa，《 $C^*$代数与有限维逼近》，数学研究生教材，第88卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2008年。doi:10.1090/gsm/088。[CE76] M.-D. Choi 和 E. G. Effros， $C^*$代数的完全正提升问题，《数学年刊》（第2辑）104（1976），第3期，585–609。doi:10.2307/1970968。[ES24] D. Enders 和 T. Shulman，论（局部）提升性质，arXiv:2403.12224v2（2024）。命题 5.7 的引文采用此版本。[GS15] I. Goldbring 和 T. Sinclair，论 Kirchberg 嵌入问题，《泛函分析杂志》269（2015），第1期，155–198。doi:10.1016/j.jfa.2015.02.016。[Har98] A. Harcharras，关于与自由群 $\mathbb{F}_\infty$相关的全 $C^*$代数的若干“稳定性”性质，《爱丁堡数学学会学报》41（1998），第1期，93–116。doi:10.1017/S0013091500019441。[ISW20] A. Ioana、P. Spaas 和 M. Wiersma，具有性质（$T$）的群的全 $C^*$代数提升性质的上同调障碍，arXiv:2006.01874v2（2020）。定理 2.3 和第 3.2–3.3 节的引文采用此版本。[JP95] M. Junge 和 G. Pisier，精确算子空间上的双线性形式与 $\mathbb{B}(H) \otimes \mathbb{B}(H)$，《几何与泛函分析》5（1995），第2期，329–363。doi:10.1007/BF01895670；arXiv:math/9308208。[Kir93] E. Kirchberg，论非半分裂扩张、张量积与群 $C^*$代数的精确性，《数学发明》112（1993），449–489。doi:10.1007/BF01232444。[Pis20] G. Pisier，《 $C^*$代数与算子空间的张量积：Connes–Kirchberg 问题》，伦敦数学会学生教材，第96卷，剑桥大学出版社，剑桥，2020年。doi:10.1017/9781108782081。另请参阅作者于2021年2月22日发布的修订版TPCOS.pdf，以查核此处引用结果的编号。[RS89] A. G. Robertson 和 R. R. Smith， $C^*$代数上映射的提升与扩张，《算子理论杂志》21（1989），第1期，117–131。[Roy26] J. Roydor， $C^*(\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2)$ 不具备局部提升性质，arXiv:2611.31147（2026）。[Sin17] T. Sinclair，CP-稳定性与局部提升性质，《纽约数学杂志》23（2017），739–747。nyjm.albany.edu/j/2017/23-34.html。[Thi19] H. Thiel，投射 $C^*$ **13** 2019 4, 代数的归纳 1435 1462 1105 1979 极限，《非交换几何杂志》()，第–期。arXiv:。。[Tho10] A. Thom，不具有分解性质的超线性群实例，《群、几何与动力学》4（2010），第1期，195–208。doi:10.4171/GGD/80。[Voi90] D. Voiculescu，性质 $T$ 与算子逼近，《伦敦数学会会报》22（1990），第1期，25–30。doi:10.1112/blms/22.1.25。

Jussieu数学研究所，索邦大学电子邮件地址： jroydor@imj-prg.fr